CUARTA EDICIÓN

VOLUMEN I

FÍSICA

para

CIENCIAS e INGENIERÍA

$\vec{F}_{RG}$

$\vec{F}_{GR}$



GIANCOLI

Constantes fundamentales

Cantidad	Símbolo	Valor aproximado	Mejor valor actual[†]
Rapidez de la luz en el vacío	c	3.00×10^{8} m/s	2.99792458×10^{8} m/s
Constante gravitacional	G	$6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$	$6.6742(10) \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$
Número de Avogadro	N_A	$6.02 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$	$6.0221415(10) \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
Constante de gas	R	$8.314\ \mathrm{J/mol \cdot K} = 1.99\ \mathrm{cal/mol \cdot K}$ $= 0.0821\ \mathrm{L \cdot atm/mol \cdot K}$	$8.314472(15)\ \mathrm{J/mol \cdot K}$
Constante de Boltzmann	k	1.38×10^{-23} J/K	$1.3806505(24) \times 10^{-23}$ J/K
Carga sobre electrón	e	1.60×10^{-19} C	$1.60217653(14) \times 10^{-19}$ C
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5.67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2 \cdot K^4}$	$5.670400(40) \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2 \cdot K^4}$
Permitividad del espacio libre	$\epsilon_0 = (1/c^2\mu_0)$	$8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}$	$8.854187817\ldots \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}$
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A}$	$1.2566370614\ldots \times 10^{-6}\ \mathrm{T \cdot m/A}$
Constante de Planck	h	$6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$	$6.6260693(11) \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$
Masa en reposo del electrón	m_e	9.11×10^{-31} kg $= 0.000549$ u $= 0.511\ \mathrm{MeV}/c^2$	$9.1093826(16) \times 10^{-31}$ kg $= 5.4857990945(24) \times 10^{-4}$ u
Masa en reposo del protón	m_p	1.6726×10^{-27} kg $= 1.00728$ u $= 938.3\ \mathrm{MeV}/c^2$	$1.67262171(29) \times 10^{-27}$ kg $= 1.00727646688(13)$ u
Masa en reposo del neutrón	m_n	1.6749×10^{-27} kg $= 1.008665$ u $= 939.6\ \mathrm{MeV}/c^2$	$1.67492728(29) \times 10^{-27}$ kg $= 1.00866491560(55)$ u
Unidad de masa atómica (1 u)		1.6605×10^{-27} kg $= 931.5\ \mathrm{MeV}/c^2$	$1.66053886(28) \times 10^{-27}$ kg $= 931.494043(80)\ \mathrm{MeV}/c^2$

[†] CODATA (12/05), Peter J. Mohr y Barry N. Taylor, National Institute of Standards and Technology. Los números entre paréntesis indican incertidumbres experimentales de una desviación estándar en los dígitos finales. Los valores sin paréntesis son exactos (es decir, cantidades definidas).

Otros datos útiles

Equivalente de Joule (1 cal)	4.186 J
Cero absoluto (0 K)	−273.15°C
Aceleración debida a la gravedad en la superficie de la Tierra (promedio)	$9.80\ \mathrm{m/s^2}$ (= g)
Rapidez del sonido en el aire (20°C)	343 m/s
Densidad del aire (seco)	$1.29\ \mathrm{kg/m^3}$
Tierra: Masa	5.98×10^{24} kg
Radio (medio)	6.38×10^{3} km
Tierra: Masa	7.35×10^{22} kg
Radio (medio)	1.74×10^{3} km
Sol: Masa	1.99×10^{30} kg
Radio (medio)	6.96×10^{5} km
Distancia Tierra-Sol (media)	149.6×10^{6} km
Distancia Tierra-Luna (media)	384×10^{3} km

El alfabeto griego

Alfa	Α	α	Nu	Ν	ν
Beta	Β	β	Xi	Ξ	ξ
Gamma	Γ	γ	Omicron	Ο	o
Delta	Δ	δ	Pi	Π	π
Epsilon	Ε	ϵ, ε	Rho	Ρ	ρ
Zeta	Ζ	ζ	Sigma	Σ	σ
Eta	Η	η	Tau	Τ	τ
Theta	Θ	θ	Upsilon	Υ	υ
Iota	Ι	ι	Phi	Φ	ϕ, φ
Kappa	Κ	κ	Chi	Χ	χ
Lambda	Λ	λ	Psi	Ψ	ψ
Mu	Μ	μ	Omega	Ω	ω

Valores de algunos números

$\pi = 3.1415927$	$\sqrt{2} = 1.4142136$	$\ln 2 = 0.6931472$	$\log_{10} e = 0.4342945$
$e = 2.7182818$	$\sqrt{3} = 1.7320508$	$\ln 10 = 2.3025851$	1 rad = 57.2957795°

Signos y símbolos matemáticos

$\propto$	es proporcional a	$\leq$	es menor que o igual a
$=$	es igual a	$\geq$	es mayor que o igual a
$\approx$	es aproximadamente igual a	Σ	suma de
$\neq$	no es igual a	$\bar{x}$	valor promedio de x
$>$	es mayor que	Δx	cambio en x
$\gg$	es mucho mayor que	$\Delta x \to 0$	Δx tiende a cero
$<$	es menor que	$n!$	$n(n-1)(n-2)\ldots(1)$
$\ll$	es mucho menor que		

Propiedades del agua

Densidad (4°C)	$1.000 \times 10^{3}\ \mathrm{kg/m^3}$
Calor de fusión (0°C)	333 kJ/kg (80 kcal/kg)
Calor de vaporización (100°C)	2260 kJ/kg (539 kcal/kg)
Calor específico (15°C)	$4186\ \mathrm{J/kg \cdot C°}$ ($1.00\ \mathrm{kcal/kg \cdot C°}$)
Índice de refracción	1.33

Conversión de unidades (equivalentes)

Longitud

1 in. = 2.54 cm (definición)
1 cm = 0.3937 in.
1 ft = 30.48 cm
1 m = 39.37 in. = 3.281 ft
1 mi = 5280 ft = 1.609 km
1 km = 0.6214 mi
1 milla náutica (E.U.A.) = 1.151 mi = 6076 ft = 1.852 km
1 fermi = 1 femtómetro (fm) = 10^{-15} m
1 angstrom (Å) = 10^{-10} m = 0.1 nm
1 año-luz (a-l) (ly) = 9.461×10^{15} m
1 parsec = 3.26 ly = 3.09×10^{16} m

Volumen

1 litro (L) = 1000 mL = 1000 cm^3 = 1.0×10^{-3} m^3 = 1.057 cuarto (E.U.A.) = 61.02 $in.^3$
1 gal (U.S.) = 4 cuarto (E.U.A.) = 231 $in.^3$ = 3.785 L = 0.8327 gal (inglés)
1 cuarto (E.U.A.) = 2 pintas (E.U.A.) = 946 mL
1 pinta (inglesa) = 1.20 pintas (E.U.A.) = 568 mL
1 m^3 = 35.31 ft^3

Rapidez

1 mi/h = 1.4667 ft/s = 1.6093 km/h = 0.4470 m/s
1 km/h = 0.2778 m/s = 0.6214 mi/h
1 ft/s = 0.3048 m/s (exacta) = 0.6818 mi/h = 1.0973 km/h
1 m/s = 3.281 ft/s = 3.600 km/h = 2.237 mi/h
1 knot = 1.151 mi/h = 0.5144 m/s

Ángulo

1 radián (rad) = 57.30° = 57°18′
1° = 0.01745 rad
1 rev/min (rpm) = 0.1047 rad/s

Tiempo

1 día = 8.640×10^4 s
1 año = 3.156×10^7 s

Masa

1 unidad de masa atómica (u) = 1.6605×10^{-27} kg
1 kg = 0.06852 slug
[1 kg tiene un peso de 2.20 lb donde $g = 9.80$ m/s^2.]

Fuerza

1 lb = 4.448 N
1 N = 10^5 dina = 0.2248 lb

Energía y trabajo

1 J = 10^7 ergs = 0.7376 ft·lb
1 ft·lb = 1.356 J = 1.29×10^{-3} Btu = 3.24×10^{-4} kcal
1 kcal = 4.19×10^3 J = 3.97 Btu
1 eV = 1.602×10^{-19} J
1 kWh = 3.600×10^6 J = 860 kcal
1 Btu = 1.056×10^3 J

Potencia

1 W = 1 J/s = 0.7376 ft·lb/s = 3.41 Btu/h
1 hp = 550 ft·lb/s = 746 W

Presión

1 atm = 1.01325 bar = 1.01325×10^5 N/m^2
= 14.7 lb/$in.^2$ = 760 torr
1 lb/$in.^2$ = 6.895×10^3 N/m^2
1 Pa = 1 N/m^2 = 1.450×10^{-4} lb/$in.^2$

Unidades SI derivadas y sus abreviaturas

Cantidad	Unidad	Abreviatura	En términos de Unidades base†
Fuerza	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Energía y trabajo	joule	J	$kg \cdot m^2/s^2$
Potencia	watt	W	$kg \cdot m^2/s^3$
Presión	pascal	Pa	$kg/(m \cdot s^2)$
Frecuencia	hertz	Hz	s^{-1}
Carga eléctrica	coulomb	C	$A \cdot s$
Potencial eléctrico	volt	V	$kg \cdot m^2/(A \cdot s^3)$
Resistencia eléctrica	ohm	Ω	$kg \cdot m^2/(A^2 \cdot s^3)$
Capacitancia	farad	F	$A^2 \cdot s^4/(kg \cdot m^2)$
Campo magnético	tesla	T	$kg/(A \cdot s^2)$
Flujo magnético	weber	Wb	$kg \cdot m^2/(A \cdot s^2)$
Inductancia	henry	H	$kg \cdot m^2/(s^2 \cdot A^2)$

†kg = kilogramo (masa), m = metro (longitud), s = segundo (tiempo), A = ampere (corriente eléctrica).

Multiplicadores métricos (SI)

Prefijo	Abreviatura	Valor
yotta	Y	10^{24}
zeta	Z	10^{21}
exa	E	10^{18}
peta	P	10^{15}
tera	T	10^{12}
giga	G	10^9
mega	M	10^6
kilo	k	10^3
hecto	h	10^2
deca	da	10^1
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}
zepto	z	10^{-21}
yocto	y	10^{-24}



para

CIENCIAS E INGENIERÍA



para

CIENCIAS E INGENIERÍA

CUARTA EDICIÓN

DOUGLAS C. GIANCOLI

TRADUCCIÓN
Ma. de Lourdes Amador Araujo
Traductora profesional

REVISIÓN TÉCNICA
Víctor Robledo Rella
División de Ingeniería y Arquitectura
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey, campus Ciudad de México

Francisco Ábrego Rodríguez
Departamento de Física
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey, campus Monterrey



México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

GIANCOLI, DOUGLAS C.

Física para ciencias e ingeniería. Cuarta edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2008

ISBN: 978-970-26-1225-4
Área: Física

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 632

ISBN 013-227358-6

Edición en español

Editor: Rubén Fuerte Rivera
e-mail: ruben.fuerte@pearsoned.com
Editor de desarrollo: Felipe Hernández Carrasco
Supervisor de producción: José D. Hernández Garduño

Edición en inglés

President, ESM: Paul Corey
Sponsoring Editor: Christian Botting
Production Editor: Frank Weihenig, Prepare Inc.
Executive Managing Editor: Kathleen Schiaparelli
Art Director and Interior & Cover Designer: John Christiana
Manager, Art Production: Sean Hogan
Senior Development Editor: Karen Karlin
Copy Editor: Jocelyn Phillips
Proofreader: Marne Evans
Buyer: Alan Fischer
Art Production Editor: Connie Long
Illustrators: Audrey Simonetti and Mark Landis
Photo Researchers: Mary Teresa Giancoli and Truitt & Marshall
Senior Administrative Coordinator: Trisha Tarricone
Composition: Emilcomp/Prepare Inc.
Photo credits appear on page A-44 which constitutes
a continuation of the copyright page.

CUARTA EDICIÓN, 2008



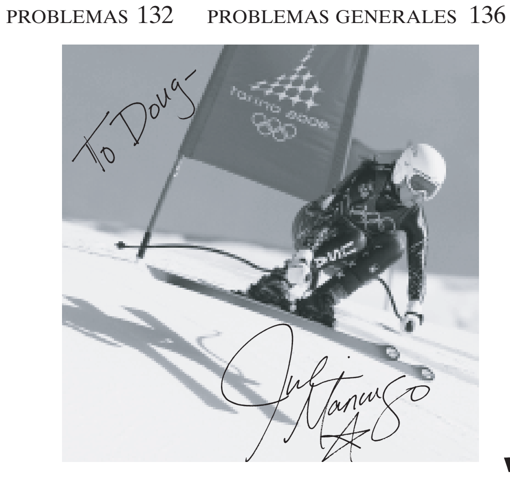
ISBN 10: 970-26-1225-X
ISBN 13: 978-970-26-1225-4

Impreso en México. *Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 11 10 09 08

Contenido



Volumen 1



Fuerza
Desplazamiento



12 Equilibrio estático: Elasticidad y fractura 311

13 Fluidos 339

14 Oscilaciones 369

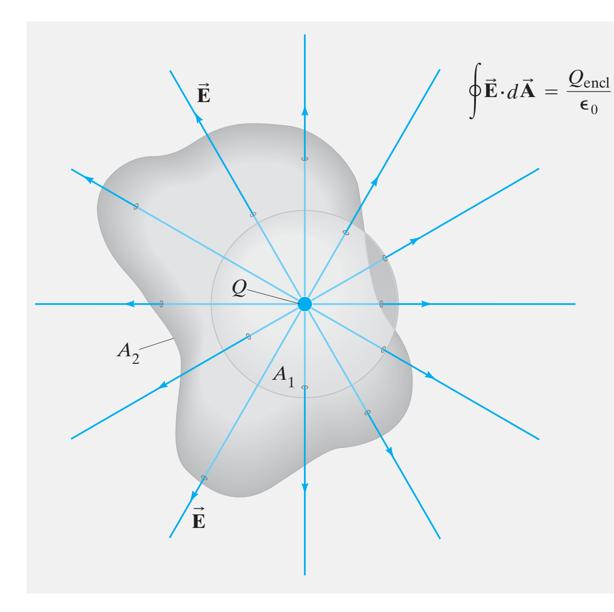
15 Movimiento ondulatorio 395

16 Sonido 424





Contenido del volumen 2





27 Magnetismo

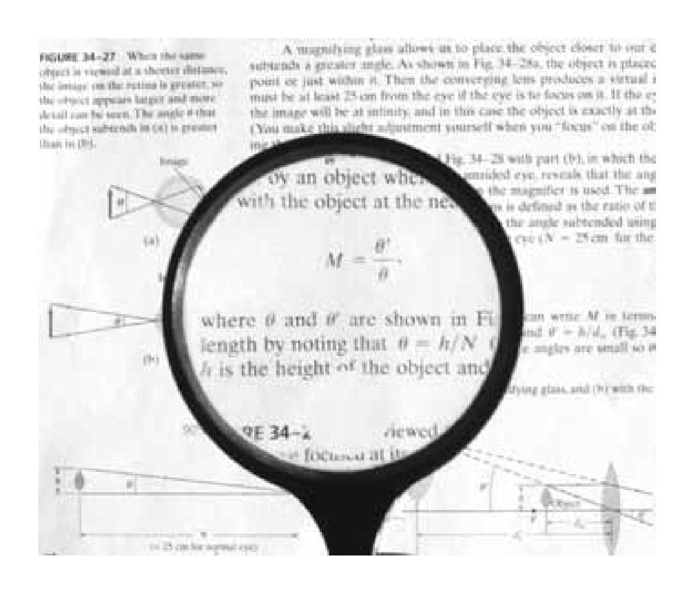
28 Fuentes de campo magnético

29 Inducción electromagnética y ley de Faraday

30 Inductancia, oscilaciones electromagnéticas y circuitos CA

31 Ecuaciones de Maxwell y ondas electromagnéticas

32 Luz: Reflexión y refracción



33 Lentes e instrumentos ópticos

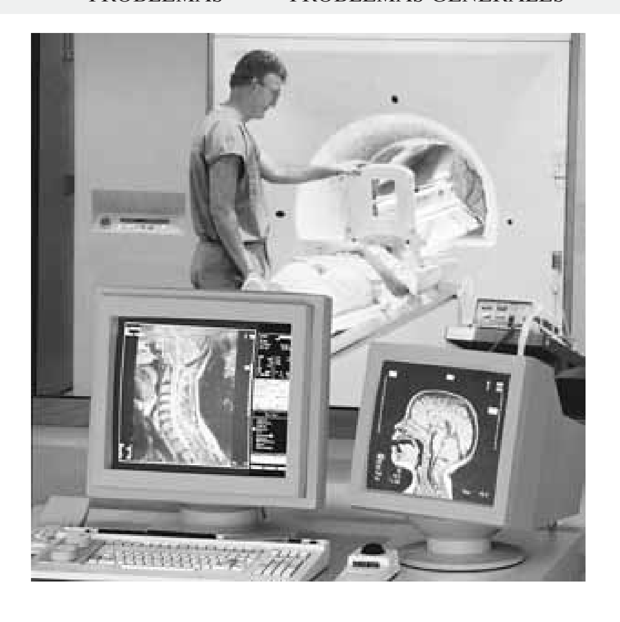


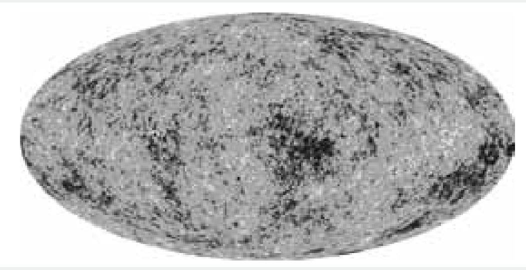
34 Naturaleza ondulatoria de la luz; interferencia

35 Difracción y polarización

Contenido del volumen 3







APLICACIONES (SELECCIONADAS)

Prefacio

Desde el principio me sentí motivado para escribir un libro de texto diferente de los demás, los cuales, en general, presentan la física como una secuencia de hechos o como un catálogo de artículos: "Aquí están los hechos y es mejor que los aprendan". En vez de utilizar este enfoque en el que los temas empiezan formal y dogmáticamente, traté de iniciar cada tema con observaciones y experiencias concretas que los estudiantes puedan relacionar: primero describo situaciones específicas para después referirme a las grandes generalizaciones y los aspectos más formales de un tema. La intención fue mostrar *por qué* creemos lo que creemos. Este enfoque refleja cómo se practica la ciencia en realidad.

¿Por qué una cuarta edición?

Dos tendencias recientes en los libros de texto son perturbadoras: (1) sus ciclos de revisión se han acortado, pues se revisan cada 3 o 4 años; (2) los libros han aumentado su volumen, algunos rebasan las 1500 páginas. No veo cómo alguna de estas tendencias sea benéfica para los estudiantes. Mi respuesta ante ello. (1) Han pasado 8 años desde la edición anterior de este libro. (2) Este libro utiliza la investigación educativa en física; evita el detalle que un profesor tal vez quiera expresar en clase, pero que en un libro resultaría innecesario para el lector. Este libro todavía sigue siendo uno de los más breves de física.

Esta nueva edición introduce algunas nuevas herramientas pedagógicas importantes. Contiene nueva física (como cosmología) y muchas nuevas aplicaciones atractivas (que se mencionan en la página anterior). Las páginas y los cambios de página se diseñaron cuidadosamente para hacer la física más fácil de aprender: no hay que dar vuelta a una página a la mitad de una deducción o un ejemplo. Se realizaron grandes esfuerzos para hacer el libro atractivo, de manera que los estudiantes disfruten *leerlo*.

A continuación se mencionan algunas de sus nuevas características.

Qué hay de nuevo

Preguntas de inicio de capítulo: Cada capítulo comienza con una pregunta de opción múltiple, cuyas respuestas incluyen interpretaciones erróneas comunes. Se pide a los estudiantes responder la pregunta antes de comenzar el capítulo, para interesarlos en el material y eliminar algunas nociones preconcebidas. Las preguntas reaparecen más adelante en el capítulo, por lo general como ejercicios, una vez que se explicó el tema. Las preguntas de inicio de capítulo también muestran a los estudiantes el poder y la utilidad de la física.

Párrafo de PLANTEAMIENTO en ejemplos numéricos resueltos: Un breve párrafo de introducción antes de la solución bosqueja un enfoque y los pasos que se pueden tomar. Las NOTAS breves después de la solución tienen la función de comentar esta última, sugerir un enfoque alternativo o mencionar alguna aplicación.

Ejemplos paso a paso: Después de muchas estrategias para resolución de problemas, el siguiente ejemplo se realiza siguiendo uno a uno los pasos recién descritos.

Los ***ejercicios*** dentro del texto, después de un ejemplo o una deducción, dan a los estudiantes la oportunidad de constatar si comprendieron lo suficiente como para responder una pregunta o hacer un cálculo sencillo. Muchos ejercicios son de opción múltiple.

Mayor claridad: Ningún tema o párrafo en el libro se pasó por alto en la búsqueda de mejorar la claridad y la concisión de la presentación. Se eliminaron frases y oraciones que pudieran velar el argumento principal: se intentó apegarse a lo esencial primero y hacer precisiones después.

$\vec{\mathbf{F}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{B}}$

Notación vectorial, flechas: Los símbolos para cantidades vectoriales en el texto y las figuras tienen una pequeña flecha sobre ellos, así que son similares a la forma que se utiliza cuando se escriben a mano.

Revolución cosmológica: Gracias a la generosa ayuda de grandes expertos en el campo, los lectores tienen información reciente.

Distribución de la página: Más que en la edición anterior, se prestó gran atención al formato de cada página. Los ejemplos y todas las deducciones y argumentos importantes aparecen en páginas que se enfrentan. Los estudiantes no tienen que ir hacia atrás o adelante para consultar los antecedentes o la continuación de un asunto. A todo lo largo del libro, los lectores ven en dos páginas, una al lado de la otra, un importante pasaje de física.

Nuevas aplicaciones: LCD, cámaras digitales y CCD, riesgos eléctricos, GFCI, fotocopiadoras, impresoras de tinta e impresoras láser, detectores de metales, visión submarina, bolas curvas, alas de avión, ADN, la forma en que en realidad *se ven* las imágenes son sólo algunas de las nuevas aplicaciones que se presentan. (Dé vuelta hacia atrás a la hoja para ver una lista más larga).

Ejemplos modificados: Se explican más pasos matemáticos y se incluyen muchos ejemplos nuevos. Aproximadamente el 10% son ejemplos de estimación.

Este libro es más breve que otros libros completos del mismo nivel. Las explicaciones más breves son más fáciles de comprender y es más probable que se lean.

Contenido y cambios organizativos

- **Movimiento rotacional**: Los capítulos 10 y 11 se reorganizaron. Ahora toda la cantidad de movimiento angular está en el capítulo 11.
- La **primera ley de la termodinámica**, en el capítulo 19, se reescribió y se amplió. La forma completa está dada como $\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = Q - W$, donde la energía interna es E_{int} y U es la energía potencial; la forma $Q - W$ se mantiene de manera que $dW = P\,dV$.
- La cinemática y la dinámica del movimiento circular ahora se estudian juntas en el capítulo 5.
- El trabajo y la energía, capítulos 7 y 8, se revisaron cuidadosamente.
- El trabajo realizado por fricción se analiza ahora en el marco de la conservación de energía (términos energéticos debidos a fricción).
- Los capítulos acerca de inductancia y circuitos CA se combinaron en uno solo, el capítulo 30.
- El análisis gráfico y la integración numérica es una nueva sección 2-9, opcional. Los problemas que requieren una computadora o una calculadora graficadora se encuentran al final de la mayoría de los capítulos.
- La longitud de un objeto se denota con una ℓ de tipo manuscrito en vez de la l normal, que podría confundirse con 1 o I (momento de inercia, corriente), como en $F = I\ell B$. La L mayúscula se reserva para cantidad de movimiento angular, calor latente, inductancia y dimensiones de longitud $[L]$.
- La ley de Newton de la gravitación permanece en el capítulo 6. ¿Por qué? Porque la ley $1/r^2$ es muy importante como para relegarla a una capítulo posterior, que tal vez no pueda cubrirse en el semestre; más aún, es una de las fuerzas básicas de la naturaleza. En el capítulo 8 se puede tratar la energía potencial gravitacional real y tener un fino ejemplo del uso de $U = -\int \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$.
- Los nuevos apéndices incluyen la forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell y más acerca de análisis dimensional.
- Las estrategias para resolución de problemas se encuentran en las páginas 30, 58, 64, 96, 102, 125, 166, 198, 229, 261, 314, 504 y 551 de este primer volumen.

Organización

Algunos profesores encontrarán que este libro contiene más material del que es posible cubrir en un curso. El texto ofrece gran flexibilidad. Las secciones marcadas con asterisco (*) se consideran opcionales. Éstas contienen material de física ligeramente más avanzada; no incluyen material necesario en capítulos posteriores (excepto tal vez en secciones opcionales posteriores). Para un breve curso, todo el material opcional se podría omitir, así como grandes partes de los capítulos 1, 13, 16, 26, 30 y 35, partes seleccionadas de los capítulos 9, 12, 19, 20, 33 y los capítulos de física moderna. Los temas no cubiertos en clase constituyen un valioso recurso para el posterior estudio de los alumnos. De hecho, este texto podría funcionar como una referencia útil durante años, gracias a su amplio rango de cobertura.

Agradecimientos

Muchos profesores de física dieron información o retroalimentación directa acerca de cada aspecto de este libro. Se mencionan a continuación, y con cada uno tengo una deuda de gratitud.

Mario Affatigato, Coe College
Lorraine Allen, United States Coast Guard Academy
Zaven Altounian, McGill University
Bruce Barnett, Johns Hopkins University
Michael Barnett, Lawrence Berkeley Lab
Anand Batra, Howard University
Cornelius Bennhold, George Washington University
Bruce Birkett, University of California Berkeley
Dr. Robert Boivin, Auburn University
Subir Bose, University of Central Florida
David Branning, Trinity College
Meade Brooks, Collin County Community College
Bruce Bunker, University of Notre Dame
Grant Bunker, Illinois Institute of Technology
Wayne Carr, Stevens Institute of Technology
Charles Chiu, University of Texas Austin
Robert Coakley, University of Southern Maine
David Curott, University of North Alabama
Biman Das, SUNY Potsdam
Bob Davis, Taylor University
Kaushik De, University of Texas Arlington
Michael Dennin, University of California Irvine
Kathy Dimiduk, University of New Mexico
John DiNardo, Drexel University
Scott Dudley, United States Air Force Academy
John Essick, Reed College
Cassandra Fesen, Dartmouth College
Alex Filippenko, University of California Berkeley
Richard Firestone, Lawrence Berkeley Lab
Mike Fortner, Northern Illinois University
Tom Furtak, Colorado School of Mines
Edward Gibson, California State University Sacramento
John Hardy, Texas A&M
J. Erik Hendrickson, University of Wisconsin Eau Claire
Laurent Hodges, Iowa State University
David Hogg, New York University
Mark Hollabaugh, Normandale Community College
Andy Hollerman, University of Louisiana at Lafayette
Bob Jacobsen, University of California Berkeley
Teruki Kamon, Texas A&M
Daryao Khatri, University of the District of Columbia
Jay Kunze, Idaho State University
Jim LaBelle, Dartmouth College
M.A.K. Lodhi, Texas Tech
Bruce Mason, University of Oklahoma
Dan Mazilu, Virginia Tech
Linda McDonald, North Park College
Bill McNairy, Duke University
Raj Mohanty, Boston University
Giuseppe Molesini, Istituto Nazionale di Ottica Florence
Lisa K. Morris, Washington State University
Blaine Norum, University of Virginia
Alexandria Oakes, Eastern Michigan University
Michael Ottinger, Missouri Western State University
Lyman Page, Princeton and WMAP
Bruce Partridge, Haverford College
R. Daryl Pedigo, University of Washington
Robert Pelcovitz, Brown University
Vahe Peroomian, UCLA
James Rabchuk, Western Illinois University
Michele Rallis, Ohio State University
Paul Richards, University of California Berkeley
Peter Riley, University of Texas Austin
Larry Rowan, University of North Carolina Chapel Hill
Cindy Schwarz, Vassar College
Peter Sheldon, Randolph-Macon Woman's College
Natalia A. Sidorovskaia, University of Louisiana at Lafayette
George Smoot, University of California Berkeley
Mark Sprague, East Carolina University
Michael Strauss, University of Oklahoma
Laszlo Takac, University of Maryland Baltimore Co.
Franklin D. Trumpy, Des Moines Area Community College
Ray Turner, Clemson University
Som Tyagi, Drexel University
John Vasut, Baylor University
Robert Webb, Texas A&M
Robert Weidman, Michigan Technological University
Edward A. Whittaker, Stevens Institute of Technology
John Wolbeck, Orange County Community College
Stanley George Wojcicki, Stanford University
Edward Wright, UCLA
Todd Young, Wayne State College
William Younger, College of the Albemarle
Hsiao-Ling Zhou, Georgia State University

Debo agradecer especialmente el profesor Bob Davis por su valiosa información y, en especial, por trabajar todos los problemas y producir el Manual de soluciones para todos los problemas, así como por dar las respuestas a los problemas con número impar al final de este libro. Muchas gracias también a J. Erik Hendrickson, quien colaboró con Bob Davis en las soluciones, y al equipo que ambos condujeron (profesores Anand Batra, Meade Brooks, David Currott, Blaine Norum, Michael Ottinger, Larry Rowan, Ray Turner, John Vasut y William Younger). Muchas gracias a Katherine Whatley y Judith Beck, quienes dieron respuesta a las preguntas conceptuales al final de cada capítulo. Estoy agradecido con los profesores John Essick, Bruce Barnett, Robert Coakley, Biman Das, Michael Dennin, Kathy Dimiduk, John DiNardo, Scout Dudley, David How, Cindy Schwarz, Ray Turner y Som Tyagi, quienes inspiraron muchos de los ejemplos, preguntas, problemas y aclaraciones significativos.

Cruciales para desenraizar errores, así como para brindar excelentes sugerencias, fueron los profesores Kathy Dimiduk, Ray Turner y Lorrain Allen. Muchas gracias a ellos y al profesor Giuseppe Molesini por sus sugerencias y sus excepcionales fotografías sobre óptica.

Para el capítulo 44, acerca de cosmología y astrofísica, fui afortunado al recibir generosa información de algunos de los grandes expertos en el campo, con quienes tengo una deuda de gratitud: George Smoot, Paul Richards y Alex Filippenko (UC Berkeley), Lyman Page (Princeton y WMAP), Edward Wright (UCLA y WMAP) y Michael Strauss (Universidad de Oklahoma).

Quiero agradecer especialmente a los profesores Howard Shugart, Chair Marjorie Shapiro y a muchos otros en el Departamento de Física de la Universidad de California, Berkeley, por sus útiles discusiones y por su hospitalidad. Gracias también al profesor Tito Arecchi y a otros más en el Istituto Nazionale di Ottica, en Florencia, Italia.

Finalmente, estoy agradecido con muchas personas en Prentice Hall, con quienes trabajé en este proyecto, en especial Paul Corey, Christian Botting, Sean Hogan, Frank Weihenig, John Christiana y Karen Karlin.

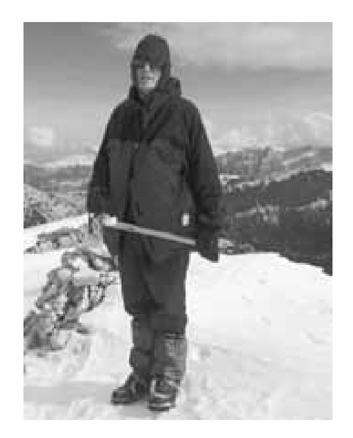
La responsabilidad final de todos los errores es mía. Doy la bienvenida a comentarios, correcciones y sugerencias tan pronto como sea posible para beneficiar a los estudiantes con la siguiente reimpresión.

D.C.G.

correo electrónico: Paul_Corey@Prenhall.com

Dirección postal: Paul Corey
One Lake Street
Upper Saddle River, NJ 07458

Acerca del autor



Douglas C. Giancoli obtuvo su licenciatura en física (summa cum laude) en la Universidad de California, Berkeley, su maestría en física en el Massachusetts Institute of Technology (MIT) y su doctorado en física de partículas elementales en la Universidad de California, Berkeley. Luego pasó dos años en una estancia posdoctoral en el laboratorio de virus de la UC Berkeley, donde realizó estudios en biología molecular y biofísica. Sus profesores incluyen a los ganadores del Premio Nobel Emilio Segré y Donald Glaser.

Ha impartido una amplia variedad de cursos tradicionales de licenciatura, así como algunos innovadores, y ha continuado actualizando sus libros meticulosamente en busca de formas para ofrecer una mejor comprensión de la física a los estudiantes.

El pasatiempo favorito de Doug es al aire libre, especialmente el montañismo (aquí aparece en la cima de los Dolomitas, en el invierno de 2007). Asegura que escalar montañas es como aprender física: es una actividad que requiere esfuerzo, pero las recompensas son grandes.

Complementos en línea (lista parcial)

MasteringPhysics™ (www.masteringphysics.com)
es un elaborado sistema de tutoría y tareas en línea desarrollado especialmente para cursos que usan física basada en cálculo. Originalmente desarrollado por David Pritchard y colaboradores en el MIT, MasteringPhysics ofrece a los **estudiantes** tutoría individualizada en línea al corregir sus respuestas equivocadas y dar sugerencias para resolver problemas de múltiples pasos cuando se les presentan dificultades. Les da valoración inmediata y actualizada de sus avances, y les muestra dónde necesitan practicar más. MasteringPhysics ofrece a los **instructores** una forma rápida y efectiva de asignar tareas en línea que comprenden una amplia variedad de tipos de problemas. Los poderosos diagnósticos posteriores a la asignación permiten a los instructores valorar el progreso tanto de su clase en conjunto como de los estudiantes individuales, al tiempo que les ayudan a identificar rápidamente áreas de dificultad.

WebAssign (www.webassign.com)

CAPA y LON-CAPA (www.lon-capa.org/)

A los estudiantes

CÓMO ESTUDIAR

1. Lea el capítulo. Aprenda el vocabulario y la notación. Intente responder las preguntas y ejercicios como se presenten.
2. Asista a todas las clases. Escuche. Tome notas, especialmente acerca de aspectos que no recuerde haber visto en el libro. Pregunte (todos quieren hacerlo, pero quizás usted tenga el valor). Obtendrá más de la clase si primero lee el capítulo.
3. Lea el capítulo de nuevo, ponga atención a los detalles. Siga las deducciones y resuelva los ejemplos. Absorba su lógica. Responda los ejercicios y tantas preguntas como pueda del final del capítulo.
4. Resuelva de 10 a 20 (o más) problemas de final del capítulo, en especial los asignados. Al resolver problemas descubrirá qué aprendió y qué no aprendió. Discútalos con otros estudiantes. La resolución de problemas es una de las mayores herramientas de aprendizaje. No se limite a buscar una fórmula, no funcionará.

NOTAS ACERCA DEL FORMATO Y LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. Las secciones marcadas con asterisco (*) se consideran **opcionales**. Se pueden omitir sin interrumpir el flujo principal de los temas. Ningún material posterior depende de ellas, excepto quizá las posteriores secciones con asterisco. Sin embargo, resulta entretenido leerlas.
2. Se usan las **convenciones** acostumbradas: los símbolos para cantidades (como m para masa) van en cursivas, mientras que las unidades (como m para metro) no aparecen en cursivas. Los símbolos para vectores se muestran en negritas con una pequeña flecha sobre ellos: $\vec{\mathbf{F}}$.
3. Algunas ecuaciones son válidas en todas las situaciones. Donde sea práctico, las **limitaciones** de las ecuaciones importantes se indican entre corchetes junto a la ecuación. Las ecuaciones que representan las grandes leyes de la física se muestran con un fondo sombreado, así como algunas otras ecuaciones indispensables.
4. Al final de cada capítulo hay un conjunto de **Problemas** que se clasifican como nivel I, II o III, de acuerdo con la dificultad estimada. Los problemas del nivel I son los más sencillos, los del nivel II son problemas estándar, y los del nivel III son "problemas de desafío". Estos problemas clasificados se ordenan por sección, pero los problemas para una sección dada pueden depender también del material anterior. Después aparece un grupo de problemas generales, que no se ordenan por sección ni están clasificados por dificultad. Los problemas que se relacionan con las secciones opcionales tienen asterisco (*). La mayoría de los capítulos tienen 1 o 2 problemas numéricos/por computadora al final, que requieren una computadora o calculadora graficadora. Las respuestas a los problemas impares se presentan al final del libro.
5. Ser capaz de resolver **problemas** es una parte crucial del aprendizaje de física y constituye un poderoso medio para comprender los conceptos y principios. Este libro contiene muchos auxiliares para la resolución de problemas: *a*) **ejemplos** trabajados y sus soluciones en el texto, que se deben estudiar como parte integral del tema; *b*) algunos de los ejemplos trabajados son **ejemplos de estimación**, que muestran cómo se pueden obtener resultados aproximados incluso si los datos dados son escasos (véase la sección 1-6); *c*) a lo largo de todo el texto se colocaron **Estrategias para la resolución de problemas** especiales con el fin de sugerir un método paso a paso para resolver problemas acerca de un tema particular; la mayoría de estas "estrategias" van seguidas por un ejemplo que se resuelve al seguir de manera explícita los pasos sugeridos; *d*) secciones especiales de resolución de problemas; *e*) notas marginales de "resolución de problemas" que se refieren a sugerencias dentro del texto para resolver problemas; *f*) **Ejercicios** dentro del texto que debe trabajar inmediatamente para luego comparar sus respuestas con las que aparecen al pie de la última página de ese capítulo; *g*) los problemas mismos al final de cada capítulo (punto 4 anterior).
6. Los **ejemplos conceptuales** plantean una pregunta que tiene la intención de hacer pensar al lector y conducirlo a una respuesta. Tómese un poco de tiempo para encontrar su respuesta antes de leer la respuesta dada.
7. El repaso **matemático** y algunos temas adicionales se encuentran en los apéndices. Datos útiles, factores de conversión y fórmulas matemáticas se encuentran en la primera y última páginas del libro, así como en los forros.

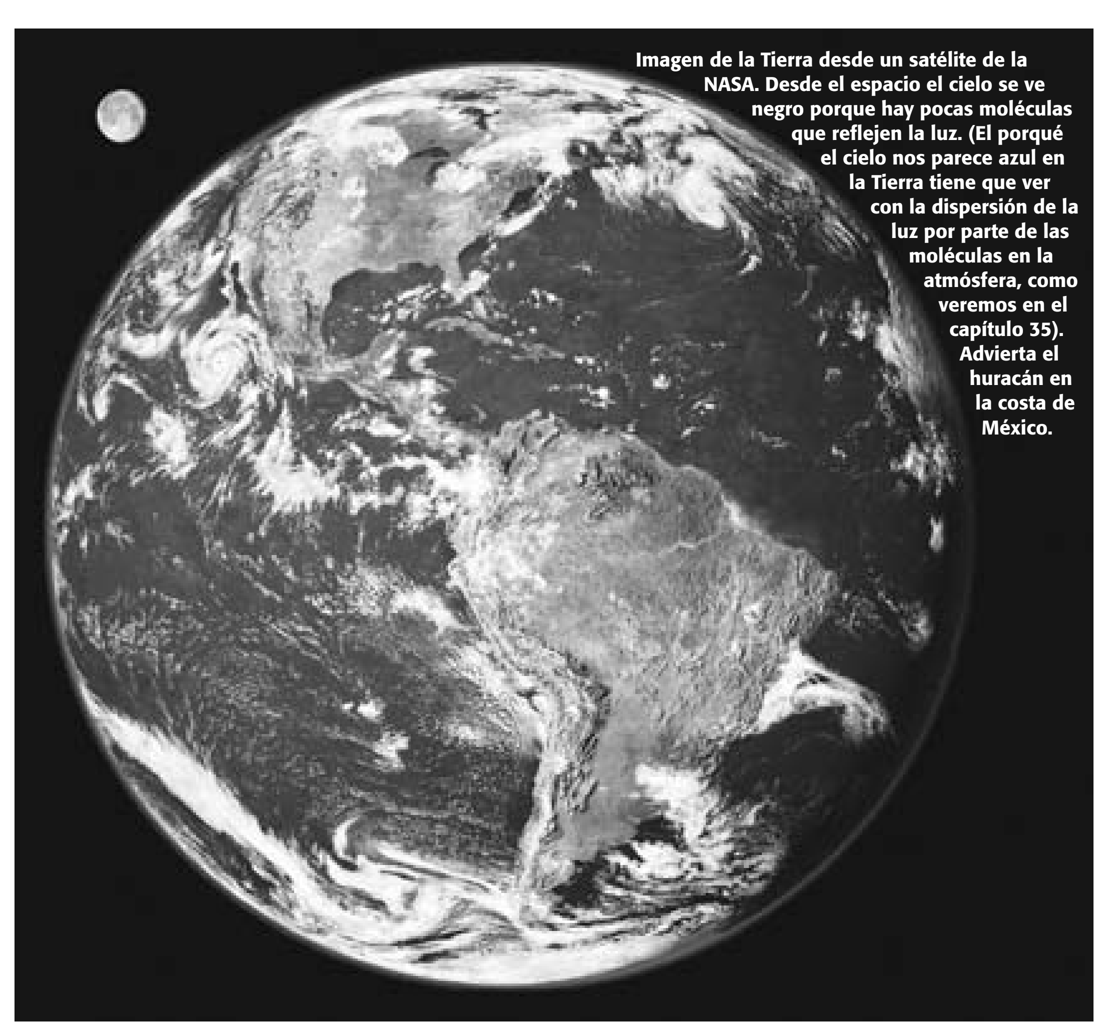


Imagen de la Tierra desde un satélite de la NASA. Desde el espacio el cielo se ve negro porque hay pocas moléculas que reflejen la luz. (El porqué el cielo nos parece azul en la Tierra tiene que ver con la dispersión de la luz por parte de las moléculas en la atmósfera, como veremos en el capítulo 35). Advierta el huracán en la costa de México.

CAPÍTULO 1

Introducción, mediciones, estimaciones

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine qué!

Suponga que usted realmente quiere medir el radio de la Tierra, al menos aproximadamente, en vez de tomar lo que otras personas dicen sobre él. ¿Cuál respuesta de las siguientes describe el mejor enfoque?

a) Rendirse; es imposible hacerlo utilizando medios ordinarios.
b) Utilizar una cinta extremadamente larga para medir.
c) Sólo es posible rolar lo suficientemente alto y ver la curvatura terrestre real.
d) Utilizar una cinta para medir estándar, una escalera plegable y un lago grande y tranquilo.
e) Utilizar un láser y un espejo en la Luna o en un satélite.

[*Empezamos cada capítulo con una pregunta, como la anterior. Intente responderla ahora mismo. No se preocupe por obtener la respuesta correcta de inmediato: la idea es poner sobre la mesa sus nociones preconcebidas. Si éstas son incorrectas, esperamos que se le aclaren conforme lea el capítulo. Por lo general, tendrá otra oportunidad para responder esta pregunta más adelante en este capítulo, cuando haya estudiado el material pertinente. Las preguntas de inicio de capítulo también le ayudarán a conocer el poder y la utilidad de la física*].

CONTENIDO

La física es la más fundamental de las ciencias. Estudia el comportamiento y la estructura de la materia. El campo de la física se divide usualmente en *física clásica*, que incluye movimiento, fluidos, calor, sonido, luz, electricidad y magnetismo; y *física moderna* que incluye relatividad, estructura atómica, materia condensada, física nuclear, partículas elementales, y cosmología y astrofísica. En este libro cubriremos todos esos temas, empezando con movimiento (o mecánica, como se le denomina con frecuencia); y finalizaremos con los resultados más recientes en nuestro estudio del cosmos.

La comprensión de la física es indispensable para cualquiera que piense estudiar una carrera científica o tecnológica. Por ejemplo, los ingenieros deben saber cómo calcular las fuerzas dentro de una estructura, para diseñarla de manera que permanezca estable (figura 1-1a). De hecho, en el capítulo 12 veremos un ejemplo resuelto de cómo un simple cálculo físico —o incluso una intuición basada en el entendimiento de la física de las fuerzas— habría salvado cientos de vidas humanas (figura 1-1b). En este libro veremos muchos ejemplos de cómo la física es útil en diversos campos y en la vida cotidiana.





FIGURA 1–1 *a*) Este acueducto romano fue construido hace 2000 años y aún se mantiene en pie. *b*) En 1978 el Centro Cívico de Hartford colapsó, sólo dos años después de haberse construido.

1–1 La naturaleza de la ciencia

Por lo general, se considera que el objetivo principal de todas las ciencias, incluida la física, es la búsqueda de orden en nuestras observaciones del mundo que nos rodea. Mucha gente piensa que la ciencia es un proceso mecánico de recolección de datos y de formulación de teorías. Sin embargo, no es algo tan sencillo. La ciencia es una actividad creativa que en muchos aspectos se parece a otras actividades creativas de la mente humana.

Un aspecto importante de la ciencia es la **observación** de eventos, que incluye el diseño y la realización de experimentos. No obstante, la observación y la experimentación requieren imaginación, pues los científicos nunca pueden incluir en una descripción todo lo que observan. Por lo tanto, los científicos deben emitir juicios acerca de lo que es importante en sus observaciones y experimentos.

Considere, por ejemplo, cómo dos grandes pensadores, Aristóteles (384-322 A.C.) y Galileo (1564-1642), interpretaron el movimiento a lo largo de una superficie horizontal. Aristóteles notó que los objetos con un empuje inicial a lo largo del suelo (o de una mesa) siempre sufren una desaceleración y se detienen. En consecuencia, Aristóteles indicó que el estado natural de un objeto es el reposo. En el siglo XVII Galileo, en su reexamen del movimiento horizontal, imaginó que si la fricción pudiera suprimirse, un objeto con un empuje inicial a lo largo de una superficie horizontal continuaría moviéndose indefinidamente sin detenerse. Concluyó que para un objeto, estar en movimiento es algo tan natural como estar en reposo. Inventando un nuevo enfoque, Galileo fundó muestra visión moderna del movimiento (capítulos 2, 3 y 4), y lo hizo así con un salto de la imaginación. Galileo hizo este salto conceptualmente, sin eliminar realmente la fricción.

La observación, junto con la experimentación y medición cuidadosas, son un aspecto del proceso científico. El otro aspecto es la creación de teorías para explicar y ordenar las observaciones. Las teorías nunca se derivan directamente de las observaciones. En realidad, las observaciones pueden ayudar a inspirar una teoría, y las teorías se aceptan o se rechazan con base en los resultados obtenidos de la observación y los experimentos.

Las grandes teorías de la ciencia pueden compararse, en cuanto a logros creativos, con las grandes obras de arte o de la literatura. Pero, ¿cómo difiere la ciencia de esas otras actividades creativas? Una diferencia importante radica en que la ciencia requiere **pruebas** de sus ideas o teorías, para saber si sus predicciones se corroboran o no con el experimento.

Si bien las pruebas de las teorías distinguen a la ciencia de otros campos creativos, no debe suponerse que una teoría "se comprueba" mediante pruebas. Ante todo, ningún instrumento de medición es perfecto, por lo que no es posible realizar una confirmación exacta. Además, no es factible probar una teoría en cualquier circunstancia posible. Por consiguiente, una teoría no puede verificarse en forma absoluta. De hecho, la historia de la ciencia nos indica que las teorías que durante mucho tiempo se han considerado como válidas pueden reemplazarse por otras teorías nuevas.

1–2 Modelos, teorías y leyes

Cuando los científicos tratan de entender un conjunto específico de fenómenos, a menudo utilizan un **modelo** que, en el sentido científico, es un tipo de analogía o imagen mental de los fenómenos en términos de algo con lo que estamos familiarizados. Un

ejemplo es el modelo ondulatorio de la luz. No podemos ver las ondas de luz como observamos las ondas de agua; pero es conveniente pensar que la luz está formada por ondas, porque los experimentos indican que en muchos aspectos la luz se comporta como lo hacen las ondas de agua.

La finalidad de un modelo es darnos una imagen mental o visual aproximada —algo en qué apoyarnos—, cuando no podemos ver lo que realmente está sucediendo. Con frecuencia, los modelos nos dan una comprensión más profunda: la analogía con un sistema conocido (por ejemplo, las ondas de agua en el ejemplo anterior) puede sugerir nuevos experimentos y ofrecer ideas acerca de qué otros fenómenos relacionados podrían ocurrir.

Tal vez usted se pregunte cuál es la diferencia entre una teoría y un modelo. Por lo general un modelo es relativamente sencillo y proporciona una similitud estructural con los fenómenos que se estudian. Una **teoría** es más amplia, más detallada y puede ofrecer predicciones cuantitativamente demostrables, a menudo con gran precisión.

Sin embargo, es importante no confundir un modelo o una teoría con el sistema real o los fenómenos mismos.

Los científicos dan el nombre de **ley** a ciertos enunciados concisos pero generales acerca de cómo se comporta la naturaleza (por ejemplo, que la energía se conserva). A veces, el enunciado toma la forma de una relación o ecuación entre cantidades (como la segunda ley de Newton, $F_{\text{net}} = ma$).

Para llamarse ley, un enunciado debe ser experimentalmente válido en una amplia gama de fenómenos observados. Para enunciados menos generales, a menudo se utiliza el término **principio** (como el principio de Arquímedes).

Las leyes científicas son diferentes de las leyes políticas en tanto que éstas últimas son *prescriptivas*, es decir, ellas nos dicen cómo debemos comportarnos. Las leyes científicas son *descriptivas*: no dicen cómo *debería* comportarse la naturaleza, sino más bien indican cómo *se comporta* la naturaleza. Al igual que las teorías, las leyes no pueden probarse en la infinita variedad de casos posibles. Por lo tanto, no podemos estar seguros de que cualquier ley sea absolutamente verdadera. Usamos el término "ley" cuando su validez se ha probado en una amplia gama de casos, y cuando cualquier limitación y dominio de validez se entienden claramente.

Los científicos realizan normalmente su trabajo como si las leyes y teorías aceptadas fueran verdaderas. Pero ellos están obligados a mantener una mente abierta, en el caso de que nueva información altere la validez de cualquier ley o teoría establecida.

1–3 Medición e incertidumbre; cifras significativas

En un esfuerzo por entender el mundo a nuestro alrededor, los científicos tratan de encontrar relaciones entre cantidades físicas que puedan medirse.

Incertidumbre

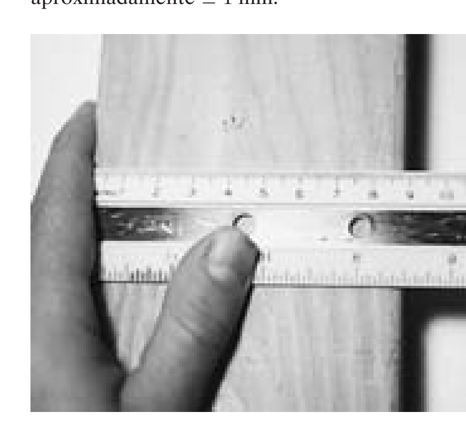
Las mediciones precisas son una parte fundamental de la física. Sin embargo, ninguna medición es absolutamente precisa. Siempre, hay una incertidumbre asociada con toda medición. Entre las fuentes más importantes de incertidumbre, aparte de las equivocaciones, están la precisión limitada de cualquier instrumento de medición, y la incapacidad de leer un instrumento más allá de alguna fracción de la división más pequeña que permita el instrumento. Por ejemplo, si se usa una regla centimétrica graduada en milímetros para medir el ancho de un tablón (figura 1-2), puede declararse que el resultado es preciso hasta 0.1 cm (1 mm), que es la división más pequeña de la regla; aunque la mitad de este valor podría también considerarse como el límite de nuestra precisión. La razón de esto es que resulta difícil para el observador estimar (o interpolar) entre las divisiones más pequeñas. Además, quizá la regla misma no haya sido fabricada con una precisión mucho mejor que ésta.

Al dar el resultado de una medición, es importante indicar la **incertidumbre estimada** en la medición. Por ejemplo, el ancho de un tablón podría escribirse como 8.8 ± 0.1 cm. El ± 0.1 cm ("más o menos 0.1 cm") representa la incertidumbre estimada en la medición, por lo que el ancho real muy probablemente se encuentre entre 8.7 y 8.9 cm. La **incertidumbre porcentual** es la razón de la incertidumbre al valor medido, multiplicada por 100. Por ejemplo, si la medición es 8.8 cm y la incertidumbre es aproximadamente 0.1 cm, la incertidumbre porcentual es

$$\frac{0.1}{8.8} \times 100\% \approx 1\%,$$

donde ≈ significa "aproximadamente igual a".

FIGURA 1–2 La medición del ancho de un tablón con una regla centimétrica. La incertidumbre es de aproximadamente ± 1 mm.



A menudo, la incertidumbre en un valor medido no se especifica de forma explícita. En tales casos, por lo general la incertidumbre se supone igual a una o a unas cuantas unidades del último dígito especificado. Por ejemplo, si se da una longitud como 8.8 cm, la incertidumbre se supone igual a aproximadamente 0.1 cm o 0.2 cm. En este caso es importante que no escriba usted 8.80 cm, pues esto implicaría una incertidumbre del orden de 0.01 cm; se supone que la longitud está probablemente entre 8.79 cm y 8.81 cm, cuando en realidad usted piensa que está entre 8.7 y 8.9 cm.



FIGURA 1–3 Estas dos calculadoras muestran el número equivocado de cifras significativas. En *a*) se dividió 2.0 entre 3.0. El resultado final correcto es 0.67. En *b*) 2.5 se multiplicó por 3.2. El resultado correcto es 8.0.

Cifras significativas

El número de dígitos conocidos confiables en un número se llama número de **cifras significativas**. Así, en el número 23.21 cm hay cuatro cifras significativas, y dos en el número 0.062 cm (en este caso los ceros a la izquierda se usan sólo para indicar la posición del punto decimal). El número de cifras significativas no es siempre evidente. Por ejemplo, considere el número 80. ¿Hay en él una o dos cifras significativas? Si decimos que hay *aproximadamente* 80 km entre dos ciudades, se tiene entonces sólo una cifra significativa (el 8) puesto que el cero es meramente un ocupante de lugar. Si no se indica que el 80 es una mera aproximación, entonces supondremos (como haremos en este libro) que el valor de 80 km está dentro de una precisión aproximada de 1 o 2 km, y así 80 tiene dos cifras significativas. Si hay precisamente 80 km entre las ciudades, entonces la precisión está dentro de ± 0.1 km, y escribimos 80.0 km (tres cifras significativas).



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Regla de cifras significativas: El número de cifras significativas en el resultado final es el mismo que el número de cifras significativas del valor de entrada menos preciso

Al hacer mediciones o al realizar cálculos, usted debe evitar la tentación de mantener más dígitos en la respuesta final que lo que sea justificable. Por ejemplo, para calcular el área de un rectángulo de 11.3 cm por 6.8 cm, el resultado de la multiplicación sería 76.84 cm^2. Pero esta respuesta no es claramente precisa a 0.01 cm^2, ya que (usando los límites exteriores de la incertidumbre supuesta para cada medida) el resultado podría estar entre $11.2 \times 6.7 = 75.04\ cm^2$ y $11.4 \times 6.9\ cm = 78.66\ cm^2$. En el mejor de los casos, daremos la respuesta como 77 cm^2, lo cual implica una incertidumbre de aproximadamente 1 o 2 cm^2. Los otros dos últimos dígitos (en el número 76.84 cm^2) deben cancelarse, ya que no son significativos. Como regla burda general, (es decir, en ausencia de una consideración detallada de las incertidumbres) diremos que *el resultado final de una multiplicación o división debe tener tantas cifras como el número de cifras en el valor de entrada menos preciso utilizado en los cálculos.* En nuestro ejemplo, 6.8 cm tiene el menor número de cifras significativas; a saber, dos. Así, el resultado 76.84 cm^2 necesita redondearse a 77 cm^2.

EJERCICIO A El área de un rectángulo de 4.5 cm por 3.25 cm se da correctamente con *a*) 14.625 cm^2; *b*) 14.63 cm^2; *c*) 14.6 cm^2; *d*) 15 cm^2.

Cuando se suman o se restan números, el resultado final no es más exacto que el número menos preciso usado. Por ejemplo, el resultado de restar 0.57 de 3.6 es 3.0 (y no 3.03).

CUIDADO

Las calculadoras no saben manejar cifras significativas

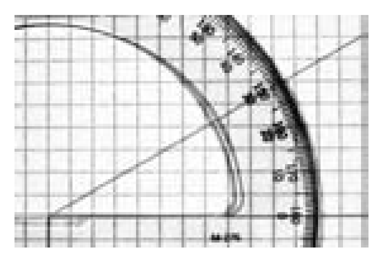


RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Reporte sólo el número adecuado de cifras significativas en el resultado final, y mantenga dígitos adicionales durante los cálculos

Al usar una calculadora tenga en mente que todos los dígitos que genera quizá no sean significativos. Cuando usted divide 2.0 entre 3.0, la respuesta adecuada es 0.67 y no algo como 0.666666666. Los dígitos no deberán escribirse en un resultado, a menos que sean verdaderamente cifras significativas. Sin embargo, para obtener el resultado más exacto, por lo general *mantenga una o más cifras significativas adicionales a lo largo de todo el cálculo y sólo redondee en el resultado final.* (Con una calculadora, usted puede mantener todos sus dígitos en los resultados intermedios). Advierta también que a veces las calculadoras dan muy pocas cifras significativas. Por ejemplo, al multiplicar 2.5×3.2, una calculadora puede dar la respuesta simplemente como 8. Pero la respuesta es precisa con dos cifras significativas, por lo que la respuesta adecuada sería 8.0. Véase la figura 1-3.

FIGURA 1–4 Ejemplo 1-1. Un transportador que se utiliza para medir un ángulo.



EJEMPLO CONCEPTUAL 1–1 **Cifras significativas.** Con el uso de un transportador (figura 1-4), mida un ángulo de 30°. *a*) ¿Cuántas cifras significativas se deben citar en esta medición? *b*) Use una calculadora para encontrar el coseno del ángulo medido.

RESPUESTA *a*) Si observa un transportador, verá que la precisión con que se puede medir un ángulo es de aproximadamente un grado (ciertamente no 0.1°). Aquí se pueden citar dos cifras significativas; a saber, 30° (no 30.0°). *b*) Si se ingresa cos 30° en una calculadora, se obtiene un número como 0.866025403. Sin embargo, se sabe que el ángulo que se ingresó sólo tiene dos cifras significativas, así que su coseno está representado correctamente como 0.87; es decir, se debe redondear la respuesta a dos cifras significativas.

NOTA La función coseno y otras funciones trigonométricas se tratan en el Apéndice A.

EJERCICIO B ¿0.00324 y 0. 00056 tienen el mismo número de cifras significativas?

Tenga cuidado de no confundir el número de cifras significativas con el número de lugares decimales.

EJERCICIO C Para cada uno de los siguientes números, especifique el número de cifras significativas y el número de lugares decimales: *a*) 1.23; *b*) 0.123; *c*) 0.0123.

Notación científica

Comúnmente escribimos los números en "potencias de diez" o notación "científica"; por ejemplo, 36,900 lo escribimos como 3.69×10^4; o 0.0021 lo escribimos como 2.1×10^{-3}. Una ventaja de la notación científica es que permite expresar con claridad el número de cifras significativas. Por ejemplo, no es claro si 36,900 tiene tres, cuatro o cinco cifras significativas. Con potencias de diez se puede evitar la ambigüedad: si se sabe que el número tiene tres cifras significativas, escribimos 3.69×10^4; pero si tiene cuatro, escribimos 3.690×10^4.

EJERCICIO D Escriba cada uno de los siguientes números en notación científica y especifique el número de cifras significativas para cada uno: *a*) 0.0258, *b*) 42,300, *c*) 344.50.

Incertidumbre porcentual versus cifras significativas

La regla de cifras significativas es sólo aproximada, y en ciertos casos tal vez subestime la exactitud (o incertidumbre) de la respuesta.Por ejemplo, suponga que dividimos 97 entre 92:

$$\frac{97}{92} = 1.05 \approx 1.1.$$

Tanto 97 como 92 tienen dos cifras significativas, de manera que la regla indica dar 1.1 como respuesta. No obstante, ambos números, 97 y 92, implican una incertidumbre de $\pm$ 1 si no se especifica ninguna otra incertidumbre. Así, 92 ± 1 y 97 ± 1 implican ambos una incertidumbre de aproximadamente 1% (1/92 a 0.01 = 1%). Pero el resultado final con dos cifras significativas es 1.1, con una incertidumbre tácita de $\pm$ 0.1, que es una incentidumbre de $0.1/1.1 \approx 0.1 \approx 10\%$. En este caso, es mejor dar la respuesta como 1.05 (que tiene tres cifras significativas). ¿Por qué? Porque 1.05 implica una incertidumbre de $\pm$ 0.01, que es $0.01/1.05 \approx 0.01 \approx 1\%$, tal como la incertidumbre en los números originales 92 y 97.

SUGERENCIA: Utilice la regla de cifras significativas, pero considere también la incertidumbre porcentual, y agregue un dígito extra si éste da una estimación más realista de la incertidumbre.

Aproximaciones

Mucho de la física implica aproximaciones, a menudo porque no disponemos de los medios para resolver un problema con total precisión. Por ejemplo, tal vez elijamos ignorar la resistencia del aire o la fricción al realizar un ejercicio, aun cuando estén presentes en situaciones de la vida real y, por lo tanto, nuestro cálculo sería sólo una aproximación. Al hacer los ejercicios deberíamos estar conscientes de que las aproximaciones que estamos haciendo, y la precisión de nuestra respuesta, quizá no sean lo suficientemente buenas como el número de cifras significativas que se dan en el resultado.

Exactitud versus precisión

Hay una diferencia técnica entre "precisión" y "exactitud". La **precisión**, en un sentido estricto, se refiere a la repetibilidad de una medición usando un instrumento dado. Por ejemplo, si usted mide el ancho de un tablón varias veces, y obtiene resultados como 8.81 cm, 8.85 cm, 8.78 cm, 8.82 cm (interpolando cada vez entre las marcas de 0.1 lo mejor posible), usted podría decir que las mediciones dan una *precisión* un poco mejor que 0.1 cm. La **exactitud** se refiere a cuán cerca está una medición de su valor *verdadero*. Por ejemplo, si la regla que se muestra en la figura 1-2 se fabricó con un error del 2%, la exactitud de su medición del ancho del tablón (aproximadamente 8.8 cm) sería de cerca del 2% de 8.8 cm o aproximadamente $\pm$ 0.2 cm. La incertidumbre estimada debe considerar tanto la exactitud como la precisión.

1–4 Unidades, estándares y el sistema SI

TABLA 1–1 Algunas longitudes o distancias comunes (orden de magnitud)	
Longitud (o distancia)	**Metros (aproximados)**
Neutrón o protón (diámetro)	10^{-15} m
Átomo (diámetro)	10^{-10} m
Virus [véase la figura 1-5a]	10^{-7} m
Hoja de papel (espesor)	10^{-4} m
Ancho de un dedo	10^{-2} m
Longitud de un campo de fútbol	10^{2} m
Altura del monte Everest [véase la figura 1-5b]	10^{4} m
Diámetro de la Tierra	10^{7} m
Distancia de la Tierra al Sol	10^{11} m
De la Tierra a la estrella más cercana	10^{16} m
De la Tierra a la galaxia más cercana	10^{22} m
De la Tierra a la galaxia visible más alejada	10^{26} m

La medición de cualquier cantidad se efectúa con respecto a un estándar o **unidad** particular, y esta unidad debe especificarse junto con el valor numérico de la cantidad. Por ejemplo, podemos medir la longitud en unidades inglesas: pulgadas, pies o millas; o en el sistema métrico: centímetros, metros o kilómetros. Mencionar que la longitud de un objeto particular es de 18.6 no tiene sentido. *Debe* especificarse la unidad; es claro que 18.6 metros es muy diferente de 18.6 pulgadas o 18.6 milímetros.

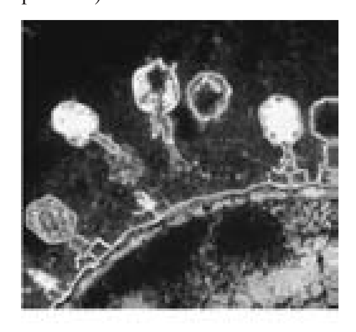
Para cualquier unidad que utilicemos, como el metro para distancia y el segundo para tiempo, tenemos que establecer un **estándar** que defina exactamente cuánto es un metro o un segundo. Es importante que los estándares elegidos sean fácilmente reproducibles, de manera que cualquiera que necesite realizar una medición muy precisa pueda remitirse al estándar en el laboratorio.

Longitud

El primer estándar internacional real fue el **metro** (que se abrevia m), establecido como el estándar de **longitud** por la Academia Francesa de Ciencias en la década de 1790. El metro estándar se eligió originalmente como la diezmillonésima parte de la distancia del ecuador de la Tierra a uno de sus polos,† y se fabricó una barra de platino para representar dicha longitud. (Muy burdamente, un metro es la distancia de la punta de la nariz a la punta de los dedos, con el brazo y la mano estirados hacia el lado). En 1889 el metro se definió con más precisión como la distancia entre dos marcas finamente grabadas sobre una barra particular de aleación platino-iridio. En 1960, para dar mayor precisión y facilidad de reproducción, el metro se redefinió como 1,650,763.73 longitudes de onda de una luz anaranjada particular emitida por el gas kriptón 86. En 1983 el metro se redefinió nuevamente, esta vez en términos de la rapidez de la luz (cuyo mejor valor medido en términos de la antigua definición del metro fue de 299,792,458 m/s, con una incertidumbre de 1 m/s). La nueva definición indica lo siguiente: “El metro es la longitud de la trayectoria recorrida por la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo de 1/299,792,458 de un segundo”.‡

Las unidades inglesas de longitud (pulgada, pie, milla) se definen ahora en términos del metro. La pulgada (in) se define como precisamente 2.54 centímetros (cm; 1 cm = 0.01 m). Enfrente de la contraportada de este libro se presentan tablas con otros factores de conversión. La tabla 1-1 muestra algunas longitudes características, desde muy pequeñas hasta muy grandes, redondeadas a la potencia de diez más cercana. Véase también la figura 1-5.

FIGURA 1–5 Algunas longitudes: *a*) Virus (de aproximadamente 10^{-7} m de largo) que atacan a una célula; *b*) la altura del monte Everest es del orden de 10^4 m (8850 m, para ser precisos).





Tiempo

La unidad estándar de **tiempo** es el **segundo** (s). Durante muchos años, el segundo se definió como 1/86,400 de un día solar medio (24 h/día × 60 min/h × 60 s/min = 86,400 s/día). El segundo estándar se define ahora con mayor precisión en términos de la frecuencia de la radiación emitida por átomos de cesio, cuando éstos pasan entre dos estados particulares de energía. [Específicamente, un segundo se define como el tiempo requerido para completar 9,192,631,770 periodos de esta radiación]. Por definición, se tienen 60 s en un minuto (min) y 60 minutos en una hora (h). La tabla 1-2 muestra un rango de intervalos de tiempo medidos, redondeados a la potencia de diez más cercana.

Masa

La unidad estándar de **masa** es el **kilogramo** (kg). La masa estándar es un cilindro particular de platino-iridio, que se mantiene en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas, cerca de París, Francia, y cuya masa se define como 1 kg exactamente. La tabla 1-3 presenta un rango de masas encontrado en el Universo. [Para fines prácticos, 1 kg pesa cerca de 2.2 libras en la Tierra].

†Las mediciones modernas de la circunferencia de la Tierra revelan que la longitud propuesta tiene un error de aproximadamente 1/50 del 1%. ¡Nada mal!

‡La nueva definición del metro tiene el efecto de dar a la rapidez de la luz el valor exacto de 299,792,458 m/s.

TABLA 1–2 Algunos intervalos de tiempo comunes

Intervalo de tiempo	Segundos (aproximados)
Vida de una partícula subatómica muy inestable	10^{-23} s
Vida de elementos radiactivos	10^{-22} s a 10^{28} s
Vida de un muón	10^{-6} s
Tiempo entre latidos del corazón humano	10^{0} s (= 1 s)
Un día	10^{5} s
Un año	3×10^{7} s
Vida humana	2×10^{9} s
Tiempo de la historia registrada	10^{11} s
Seres humanos en la Tierra	10^{14} s
Vida sobre la Tierra	10^{17} s
Edad del Universo	10^{18} s

TABLA 1–3 Algunas masas

Objeto	Kilogramos (aproximados)
Electrón	10^{-30} kg
Protón, neutrón	10^{-27} kg
Molécula de ADN	10^{-17} kg
Bacteria	10^{-15} kg
Mosquito	10^{-5} kg
Ciruela	10^{-1} kg
Ser humano	10^{2} kg
Barco	10^{8} kg
Tierra	6×10^{24} kg
Sol	2×10^{30} kg
Galaxia	10^{41} kg

Al tratar con átomos y moléculas, comúnmente usamos la **unidad unificada de masa atómica** (u). En términos del kilogramo,

$$1 \text{ u} = 1.6605 \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

Más adelante se darán definiciones de otras unidades estándar para otras cantidades conforme vayan apareciendo en los siguientes capítulos. (Los forros de este libro presentan valores precisos de estos y otros números y constantes de la física).

Prefijos de unidades

En el sistema métrico, las unidades más grandes y más pequeñas se definen en múltiplos de 10 de la unidad estándar, lo cual facilita los cálculos. Así, 1 kilómetro (km) es igual a 1000 m, 1 centímetro es igual a $\frac{1}{100}$ m, 1 milímetro (mm) es igual a $\frac{1}{1000}$ m o $\frac{1}{10}$ cm, etcétera. La tabla 1-4 muestra una lista de prefijos que pueden aplicarse no sólo a unidades de longitud, sino también a unidades de volumen, masa o cualquier otra unidad métrica. Por ejemplo, un centilitro (cL) es igual a $\frac{1}{100}$ litros (L), y un kilogramo (kg) es igual a 1000 gramos (g).

TABLA 1–4 Prefijos métricos (SI)

Prefijo	Abreviatura	Valor
yotta	Y	10^{24}
zetta	Z	10^{21}
exa	E	10^{18}
peta	P	10^{15}
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
mega	M	10^{6}
kilo	k	10^{3}
hecto	h	10^{2}
deca	da	10^{1}
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro†	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
ato	a	10^{-18}
zepto	z	10^{-21}
docto	y	10^{-24}

† μ es la letra griega para “mu”.

Sistemas de unidades

Al tratar con las leyes y ecuaciones de la física es muy importante usar un conjunto consistente de unidades. A lo largo de los años se han utilizado distintos sistemas de unidades. Actualmente el sistema de unidades más importante es el **Sistema Internacional** (Système International), que se abrevia SI. En unidades SI, el estándar de longitud es el metro, el estándar de tiempo es el segundo y el estándar para la masa es el kilogramo. Este sistema solía llamarse sistema MKS (metro-kilogramo-segundo).

Un segundo sistema métrico es el **sistema cgs**, en el que el centímetro, el gramo y el segundo son las unidades estándares de longitud, masa y tiempo, respectivamente. El **sistema de ingeniería inglés** tiene como estándares el pie para longitud, la libra para peso y el segundo para tiempo.

En este libro usaremos principalmente unidades del SI.

Cantidades básicas versus cantidades derivadas

Las cantidades físicas se dividen en dos categorías: *cantidades básicas* y *cantidades derivadas*. Las unidades correspondientes para tales cantidades se llaman *unidades básicas* y *unidades derivadas*. Una **cantidad básica** debe definirse en términos de un estándar. Por simplicidad, los científicos buscan el menor número posible de cantidades básicas, consistentes con una descripción completa del mundo físico. Se han definido siete unidades básicas y sus unidades en el SI se muestran en la tabla 1-5. Todas las demás cantidades de la física se definen en términos de estas siete cantidades básicas† y, por consiguiente, se llaman **cantidades derivadas**. Un ejemplo de una cantidad derivada es la rapidez, que se define como la distancia recorrida dividida entre el tiempo que toma recorrer esa distancia. En las guardas de este libro se incluye una tabla con varias cantidades derivadas, así como sus unidades en términos de unidades básicas. Para definir cualquier cantidad, sea ésta básica o derivada, especificamos una regla o un procedimiento, y a esto se le llama una **definición operacional**.

TABLA 1–5 Cantidades básicas y unidades SI

Cantidad	Unidad	Abreviatura de la unidad
Longitud	metro	m
Tiempo	segundo	s
Masa	kilogramo	kg
Corriente eléctrica	ampere	A
Temperatura	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

†Las únicas excepciones son para ángulos (radianes; véase el capítulo 8) y ángulos sólidos (estereorradián). No se ha llegado a un acuerdo general sobre si estas cantidades son básicas o derivadas.

1–5 Conversión de unidades

Cualquier cantidad que midamos, como longitud, rapidez o corriente eléctrica, consiste en un número *y* una unidad. A menudo se nos da una cantidad en un conjunto de unidades, pero la queremos expresada en otro conjunto de unidades. Por ejemplo, supongamos que medimos una mesa cuyo ancho es de 21.5 pulgadas y queremos expresarlo en centímetros. Debemos usar un **factor de conversión** que, en este caso, es

$$1 \text{ in.} = 2.54 \text{ cm}$$

o, escrito de otra manera,

$$1 = 2.54 \text{ cm/in.}$$

Como la multiplicación por uno no cambia, el ancho de nuestra mesa en cm es

$$21.5 \text{ pulgadas} = (21.5 \cancel{\text{in.}}) \times \left(2.54 \frac{\text{cm}}{\cancel{\text{in.}}}\right) = 54.6 \text{ cm}.$$

Note cómo se cancelan las unidades (pulgadas en este caso). En los forros y las guardas del libro se presentan varios factores de conversión. Veamos algunos ejemplos.



Las cumbres más altas del mundo



FIGURA 1–6 La segunda cumbre más alta del mundo, el K2, cuya cima se considera la más difícil de las montañas de 8000 m. El K2 se ve aquí desde el norte (China).

TABLA 1–6
Las cumbres de 8000 m

Cumbre	Altitud (m)
Everest	8850
K2	8611
Kangchenjunga	8586
Lhotse	8516
Makalu	8462
Cho Oyu	8201
Dhaulagiri	8167
Manaslu	8156
Nanga Parbat	8125
Annapurna	8091
Gasherbrum I	8068
Broad Peak	8047
Gasherbrum II	8035
Shisha Pangma	8013

EJEMPLO 1–2 Las cumbres de 8000 m. A las 14 cumbres más altas del mundo (figura 1-6 y tabla 1-6) se les conoce como las "ochomiles", lo cual significa que sus cimas están por encima de los 8000 m sobre el nivel del mar. ¿Cuál es la elevación, en pies, de una cumbre de 8000 m?

PLANTEAMIENTO Simplemente necesitamos convertir metros a pies, para lo cual se debe comenzar con el factor de conversión 1 in. = 2.54 cm, que es exacto. Esto es, 1 in. = 2.5400 cm para cualquier número de cifras significativas, porque así *está definido*.

SOLUCIÓN Un pie es igual a 12 in., así que se puede escribir

$$1 \text{ ft} = (12 \cancel{\text{in.}})\left(2.54 \frac{\text{cm}}{\cancel{\text{in.}}}\right) = 30.48 \text{ cm} = 0.3048 \text{ m},$$

que es exacto. Note cómo se cancelan las unidades (al tacharlas con una diagonal). Esta ecuación se puede reescribir para encontrar el número de pies en 1 metro:

$$1 \text{ m} = \frac{1 \text{ ft}}{0.3048} = 3.28084 \text{ ft}.$$

Esta ecuación se multiplica por 8000.0 (para obtener cinco cifras significativas):

$$8000.0 \text{ m} = (8000.0 \cancel{\text{m}})\left(3.28084 \frac{\text{ft}}{\cancel{\text{m}}}\right) = 26{,}247 \text{ ft}.$$

Una elevación de 8000 m está a 26,247 pies sobre el nivel del mar.

NOTA Toda la conversión se pudo realizar en un solo renglón:

$$8000.0 \text{ m} = (8000.0 \cancel{\text{m}})\left(\frac{100 \cancel{\text{cm}}}{1 \cancel{\text{m}}}\right)\left(\frac{1 \cancel{\text{in.}}}{2.54 \cancel{\text{cm}}}\right)\left(\frac{1 \text{ ft}}{12 \cancel{\text{in.}}}\right) = 26{,}247 \text{ ft}.$$

La clave consiste en multiplicar los factores de conversión, cada uno igual a uno (= 1.0000) y asegurarse de que se cancelen las unidades.

EJERCICIO E En el mundo sólo existen 14 cumbres de ocho mil metros (véase el ejemplo 1-2) y sus nombres y elevaciones se muestran en la tabla 1-6. Todas ellas están en la cordillera del Himalaya, que abarca la India, Paquistán, el Tíbet y China. Determine la elevación en pies de las tres cumbres más altas del mundo.

EJEMPLO 1–3 **Área de un apartamento.** ¿Ha visto usted esos agradables apartamentos cuya superficie habitable es de 880 pies cuadrados (ft^2). Exprese esto en metros cuadrados.

PLANTEAMIENTO Utilizamos el mismo factor de conversión, 1 in. = 2.54 cm, pero ahora tenemos que usarlo dos veces.

SOLUCIÓN Como 1 in. = 2.54 cm = 0.0254 m, entonces $1\text{ ft}^2 = (12\text{ in.})^2\,(0.0254\text{ m/in.})^2 = 0.0929\text{ m}^2$. Entonces, $880\text{ ft}^2 = (880\text{ ft}^2)(0.0929\text{ m}^2/\text{ft}^2) \approx 82\text{ m}^2$.

NOTA Como regla empírica,una área dada en ft^2 es aproximadamente 10 veces el número de metros cuadrados (más precisamente, cerca de 10.8 ×).

EJEMPLO 1–4 **Rapidez.** El límite de rapidez establecido en una carretera es de 55 millas por hora (mi/h o mph). ¿Cuál es esta rapidez *a*) en metros por segundo (m/s) y *b*) en kilómetros por hora (km/h)?

PLANTEAMIENTO Se utiliza de nuevo el factor de conversión 1 in. = 2.54 cm, teniendo en cuenta que existen 5280 pies en una milla y 12 pulgadas en un pie; además, una hora contiene (60 min/h) × (60 s/min) = 3600 s/h.

SOLUCIÓN *a*) 1 milla se escribe como

$$1\text{ mi} = (5280\,\cancel{\text{ft}})\left(12\,\frac{\cancel{\text{in.}}}{\cancel{\text{ft}}}\right)\left(2.54\,\frac{\cancel{\text{cm}}}{\cancel{\text{in.}}}\right)\left(\frac{1\text{ m}}{100\,\cancel{\text{cm}}}\right) = 1609\text{ m}.$$

Se sabe también que 1 hora contiene 3600 s, por lo que

$$55\,\frac{\text{mi}}{\text{h}} = \left(55\,\frac{\cancel{\text{mi}}}{\cancel{\text{h}}}\right)\left(1609\,\frac{\text{m}}{\cancel{\text{mi}}}\right)\left(\frac{1\,\cancel{\text{h}}}{3600\text{ s}}\right) = 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

donde redondeamos a dos cifras significativas.

b) Ahora usamos 1 mi = 1609 m = 1.609 km; entonces,

$$55\,\frac{\text{mi}}{\text{h}} = \left(55\,\frac{\cancel{\text{mi}}}{\text{h}}\right)\left(1.609\,\frac{\text{km}}{\cancel{\text{mi}}}\right) = 88\,\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

NOTA Cada factor de conversión es igual a uno. En los forros y las guardas de este libro se incluye una tabla con los factores de conversión más utilizados.


RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Factores de conversión = 1

EJERCICIO F ¿Un conductor que viaje a 15 m/s en una zona de 35 mi/h estaría excediendo el límite de rapidez?

Cuando se convierte unidades, se evitan errores en el uso de los factores de conversión al comprobar que las unidades se cancelan de manera adecuada. Por ejemplo, en la conversión de 1 mi a 1609 m del ejemplo 1-4*a*, si se hubiera usado incorrectamente el factor $\left(\frac{100\text{ cm}}{1\text{ m}}\right)$ en vez de $\left(\frac{1\text{ m}}{100\text{ cm}}\right)$, as unidades en centímetros no se hubieran cancelado; ni se habría terminado con metros.


RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
La conversión de unidades es incorrecta si las unidades no se cancelan

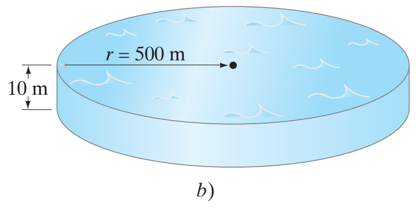
1–6 Orden de magnitud: Estimación rápida

En ocasiones sólo nos interesa un valor aproximado para una cantidad. Esto podría podría ocurrir si un cálculo exacto tomaría mucho más tiempo del que disponemos, o se requieren datos adicionales que no están disponibles. En otros casos, tal vez queramos hacer una estimación burda sólo para verificar un cálculo exacto hecho con calculadora, y asegurarnos de no haber cometido equivocaciones al introducir los números.

Una estimación burda se hace redondeando todos los números a una cifra significativa y su potencia de 10; después del cálculo, se mantiene de nuevo sólo una cifra significativa. Tal estimación se llama **estimación del orden de magnitud** y puede ser exacta dentro de un factor de 10, y a veces mucho mejor. De hecho, la frase “orden de magnitud” se utiliza a veces simplemente para indicar la potencia de 10 de la que estamos hablando.


RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
¿Cómo hacer una estimación aproximada?


a)



b)

FIGURA 1–7 Ejemplo 1-5. *a*) ¿Cuánta agua hay en este lago? (La imagen es de uno de los lagos Rae en la Sierra Nevada de California). *b*) Modelo cilíndrico del lago. [Podríamos también estimar la masa o el peso de este lago. Veremos luego que el agua tiene una densidad de 1000 kg/m^3, por lo que este lago tiene una masa de aproximadamente $(10^3\ kg/m^3)\ (10^7\ m^3) \approx 10^{10}$ kg, que son aproximadamente 10,000 millones de kg o 10 millones de toneladas métricas. (Una tonelada métrica equivale a 1000 kg, o aproximadamente 2,200 lbs, que es un poco mayor que la tonelada inglesa de 2000 lbs.)].

FÍSICA APLICADA

Estimación del volumen (o la masa) de un lago; véase también la figura 1-7

EJEMPLO 1–5 ESTIMACIÓN Volumen de un lago. Estime cuánta agua contiene un lago en particular (figura 1-7a), que tiene una forma aproximadamente circular con 1 km de diámetro y se considera que tiene una profundidad promedio de más o menos 10 m.

PLANTEAMIENTO Ningún lago es un círculo perfecto ni puede esperarse que tenga un fondo totalmente plano. Pero aquí sólo estamos realizando estimaciones. Para estimar el volumen, usamos un modelo sencillo del lago como si fuera un cilindro: multiplicamos la profundidad promedio del lago por su área superficial aproximadamente circular, como si el lago fuera un cilindro (figura 1-7b).

SOLUCIÓN El volumen V de un cilindro es el producto de su altura h por el área de su base: $V = h\pi r^2$, donde r es el radio de la base circular.† El radio r es $\frac{1}{2}$ km $=$ 500 m, por lo que el volumen es aproximadamente

$$V = h\pi r^2 \approx (10\,\text{m}) \times (3) \times \left(5 \times 10^2\,\text{m}\right)^2 \approx 8 \times 10^6\,\text{m}^3 \approx 10^7\,\text{m}^3,$$

donde π se redondeó a 3. Por lo tanto, el volumen es del orden de magnitud de $10^7\ m^3$, o diez millones de metros cúbicos. Debido a todas las estimaciones que entraron en este cálculo, probablemente sea mejor citar sólo la estimación del orden de magnitud $(10^7\ m^3)$, que la cifra $8 \times 10^6\ m^3$.

NOTA Para expresar el resultado en galones estadounidenses, se recurre a la tabla que aparece en las guardas del libro, donde se ve que un litro $= 10^{-3}\ m^3 \approx \times$ galón. Por lo tanto, el lago contiene $(8 \times 10^6\ m^3)\ (1\ \text{galón}/\ 4 \times 10^{-3}\ m^3) \approx 2 \times 10^9$ galones de agua.

EJEMPLO 1–6 ESTIMACIÓN Espesor de una página. Estime el espesor de una página de este libro.


RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Use argumentos de simetría siempre que sea posible

PLANTEAMIENTO Al principio tal vez usted piense que se requiere un dispositivo de medición especial, como un micrómetro (figura 1-8), para medir el espesor de una página, ya que una regla de medición ordinaria no serviría. Sin embargo, disponemos de un truco, o para expresarlo en términos físicos, podemos usar la *simetría*: podemos suponer de manera razonable de que todas las páginas de este libro tienen el mismo espesor.

SOLUCIÓN Entonces, usamos una regla para medir cientos de páginas a la vez. Si usted mide el espesor de las primeras 500 páginas de este libro (página 1 a la 500), obtendrá algo así como 1.5 cm. Advierta que 500 páginas, contando el frente y la vuelta,

†Las fórmulas como ésta para volumen, área, etcétera, se encuentran en los forros de este libro.

son 250 piezas de papel separadas. Por lo tanto, el espesor de una página es aproximadamente

$$\frac{1.5\text{ cm}}{250\text{ páginas}} \approx 6 \times 10^{-3}\text{ cm} = 6 \times 10^{-2}\text{ mm},$$

que equivale a menos de un décimo de milímetro (0.1 mm).



FIGURA 1–8 Ejemplo 1-6. Micrómetro usado para medir espesores pequeños.

EJEMPLO 1–7 ESTIMACIÓN **Altura por triangulación.** Estime la altura del edificio que se muestra en la figura 1-9 usando "triangulación", es decir, con la ayuda de un poste de parada de autobús y de un amigo.

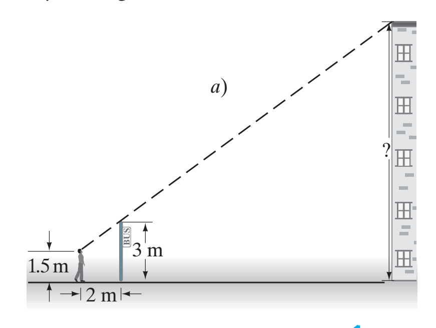
PLANTEAMIENTO Al situar a su amigo a un lado del poste, usted estima que la altura del poste es de 3 m. Luego, usted se aleja del poste hasta que la parte superior de éste quede en línea con la azotea del edificio (figura 1-9a). Usted mide 5 ft 6 in. de altura, por lo que sus ojos están aproximadamente a 1.5 m del suelo. Su amigo es más alto y cuando él estira sus brazos, una mano lo toca a usted y la otra toca el poste, así que usted estima que la distancia horizontal entre usted y el poste es como de 2 m (figura 1-9a). Después usted camina la distancia del poste a la base del edificio con pasos aproximados de 1 m de largo, y obtiene un total de 16 pasos, o ~16 m.

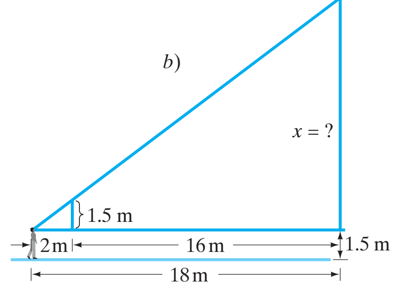
SOLUCIÓN Ahora dibuja a escala el diagrama que se muestra en la figura 1-9b usando estas medidas. Mide en el diagrama que el último lado del triángulo, que es aproximadamente $x = 13$ m. Alternativamente, puede usar triángulos semejantes para obtener la altura x:

$$\frac{1.5\text{ m}}{2\text{ m}} = \frac{x}{18\text{ m}}, \quad \text{entonces} \quad x \approx 13\tfrac{1}{2}\text{ m}.$$

Finalmente, usted suma la altura de sus ojos de 1.5 m sobre el suelo para obtener el resultado final: el edificio mide aproximadamente 15 metros de altura.

FIGURA 1–9 Ejemplo 1-7. ¡Los diagramas son realmente útiles!





EJEMPLO 1–8 ESTIMACIÓN **Estimación del radio de la Tierra.** Aunque usted no lo crea, puede estimar el radio de la Tierra sin tener que ir al espacio (véase la fotografía al inicio del capítulo). Si usted ha estado a la orilla de un lago grande, quizás haya notado que no puede ver a través del lago, la playa, los muelles o las rocas al nivel del agua que hay en la orilla opuesta. El lago parece interponerse entre usted y la orilla opuesta: lo cual es una buena pista de que la Tierra es redonda. Suponga que usted sube por una escalera plegable y descubre que cuando sus ojos están a 10 ft (3.0 m) por encima del agua, alcanza a ver las rocas al nivel del agua de la orilla opuesta. A partir de un mapa, usted estima que la distancia a la orilla opuesta es como $d \approx 6.1$ km. Utilice la figura 1-10 con $h = 3.0$ m para estimar el radio R de la Tierra.

PLANTEAMIENTO Usamos geometría simple, incluyendo el teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2$, donde c es la longitud de la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo, y a y b son las longitudes de los dos catetos.

SOLUCIÓN Para el triángulo rectángulo de la figura 1-10, los dos catetos son el radio de la Tierra R y la distancia $d = 6.1$ km $= 6100$ m. La hipotenusa es aproximadamente la longitud de $R + h$, donde $h = 3.0$ m. Con el teorema de Pitágoras,

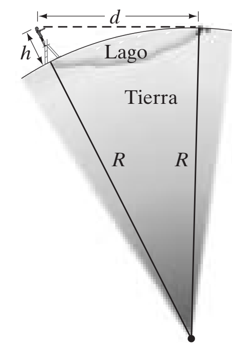
$$\begin{aligned} R^2 + d^2 &\approx (R + h)^2 \\ &\approx R^2 + 2hR + h^2. \end{aligned}$$

Algebraicamente despejamos R, después de cancelar R^2 en ambos lados:

$$R \approx \frac{d^2 - h^2}{2h} = \frac{(6100\text{ m})^2 - (3.0\text{ m})^2}{6.0\text{ m}} = 6.2 \times 10^6\text{ m} = 6200\text{ km}.$$

NOTA Mediciones precisas dan 6380 km. Sin embargo, ¡siéntase orgullosos de su logro! Con unas cuantas mediciones aproximadas y simple geometría, usted realizó una buena estimación del radio de la Tierra. No tuvo que ir al espacio ni que usar una cinta extremadamente larga para medir. Ahora ya sabe la respuesta a la pregunta de inicio del capítulo de la pág. 1.

FIGURA 1–10 Ejemplo 1-8, pero no está a escala. Usted puede ver rocas pequeñas a nivel del agua de la orilla opuesta de un lago de 6.1 km de ancho, si se para sobre una escalera.



EJEMPLO 1–9 ESTIMACIÓN **Número total de latidos cardiacos.** Estime el número total de latidos que un corazón humano común realiza durante una vida promedio.

PLANTEAMIENTO Un característico ritmo cardiaco en reposo es de 70 latidos/min; aunque durante el ejercicio éste es mucho mayor. Un promedio razonable es de 80 latidos/min.

SOLUCIÓN En segundos un año es (24 h)(3600 s/h)(365 d) $\approx 3 \times 10^7$ s. Si una persona promedio vive 70 años = (70 años)(3×10^7 s/año) $\approx 2 \times 10^9$ s, entonces el número total de latidos cardiacos sería aproximadamente

$$\left(80\,\frac{\text{latidos}}{\text{min}}\right)\left(\frac{1\text{ min}}{60\text{ s}}\right)(2 \times 10^9\text{ s}) \;\approx\; 3 \times 10^9,$$

o 3 mil millones.

Otra técnica de estimación, famosa porque Enrico Fermi la planteó a sus alumnos de Física, consiste en estimar el número de afinadores de pianos en una ciudad, digamos, Chicago o San Francisco. Para obtener una estimación burda del orden de magnitud del número de afinadores actualmente en San Francisco, una ciudad de aproximadamente 700,000 habitantes, primero estimamos el número de pianos que funcionan, con qué frecuencia se afina cada piano y cuántos pianos puede afinar cada afinador. Para estimar el número de pianos en San Francisco, notamos que ciertamente no todas las personas tienen piano. Si consideramos que una familia de cada tres posee un piano correspondería 1 piano por cada 12 personas, suponiendo una familia promedio de 4 personas. Como orden de magnitud, digamos un piano por cada 10 personas. Esto es ciertamente más razonable que 1 por cada 100 personas o 1 por cada persona, de manera que continuamos con la estimación de que 1 persona entre 10 tiene un piano, es decir, aproximadamente 70,000 pianos en San Francisco. Ahora, un afinador necesita una hora o dos para afinar un piano. Estimamos entonces que un afinador puede afinar cuatro o cinco pianos por día. Un piano debe afinarse cada seis meses o cada año —digamos una vez al año. Un afinador que afina cuatro pianos al día, cinco días a la semana, 50 semanas al año, puede afinar aproximadamente 1000 pianos al año. Por lo tanto, San Francisco, con sus (muy) aproximadamente 70,000 pianos, necesita cerca de 70 afinadores. Esto es, por supuesto, sólo una estimación burda.† Esto nos dice que debe haber muchos más que 10 afinadores y seguramente no tantos como 1000.


RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Estimación de cuántos afinadores de piano hay en una ciudad

*1–7 Dimensiones y análisis dimensional

Cuando hablamos de las **dimensiones** de una cantidad, nos referimos al tipo de unidades o cantidades básicas que la constituyen. Por ejemplo, las dimensiones de una área son siempre una longitud cuadrada, que se abrevia $[L^2]$ usando corchetes; las unidades pueden ser metros cuadrados, pies cuadrados, cm^2, etcétera. Por otro lado, la velocidad puede medirse en unidades de km/h, m/s y mi/h, pero las dimensiones son siempre una longitud $[L]$ dividida entre un tiempo $[T]$: es decir, $[L/T]$.

La fórmula para una cantidad puede ser diferente en casos distintos; aunque las dimensiones permanecen iguales. Por ejemplo, el área de un triángulo de base b y altura h es $A = \frac{1}{2}bh$, mientras que el área de un círculo de radio r es $A = \pi r^2$. Las fórmulas son diferentes en los dos casos, pero las dimensiones de área son siempre $[L^2]$.

Las dimensiones pueden ser útiles al establecer relaciones y a tal procedimiento se le llama **análisis dimensional.** Una técnica útil es el uso de las dimensiones para verificar si una relación es *incorrecta*. Advierta que sólo es posible sumar o restar cantidades sólo si tienen las mismas dimensiones (no sumamos centímetros más horas), y las cantidades en ambos lados de una igualdad deben tener las mismas dimensiones. (En los cálculos numéricos, las unidades deben además ser las mismas en ambos lados de una ecuación).

Por ejemplo, suponga que usted obtuvo la ecuación $v = v_0 + \frac{1}{2}at^2$, donde v es la rapidez de un objeto después de un tiempo t, v_0 es la rapidez inicial del objeto y éste sufre una aceleración a. Efectuemos una revisión dimensional para saber si esta ecua-

†Al consultar las páginas amarillas del directorio de San Francisco (después de este cálculo) se encontraron 50 entradas. Cada una de ellas puede emplear más de un afinador; pero por otra parte, cada uno puede también hacer reparaciones, así como afinaciones. En cualquier caso, nuestra estimación fue razonable.

*Algunas secciones de este libro, como la presente, se pueden considerar opcionales a discreción del profesor y se marcan con un asterisco. Se recomienda consultar el prefacio para mayores detalles.

ción es correcta. Note que aquí los factores numéricos puros, como $\frac{1}{2}$, no tienen dimensiones. Escribimos una ecuación dimensional como sigue, recordando que las dimensiones de la rapidez son $[L/T]$ y (como veremos en el capítulo 2) las dimensiones de la aceleración son $[L/T^2]$:

$$\left[\frac{L}{T}\right] \stackrel{?}{=} \left[\frac{L}{T}\right] + \left[\frac{L}{T^2}\right][T^2] = \left[\frac{L}{T}\right] + [L].$$

Las dimensiones son incorrectas: en el lado derecho tenemos la suma de cantidades cuyas dimensiones no son las mismas. Concluimos entonces que se cometió un error en la derivación de la ecuación original.

Una comprobación dimensional sólo indica cuándo una relación es incorrecta; sin embargo, no indica si es completamente correcta. Por ejemplo, podría estar equivocado un factor numérico adimensional (como $\frac{1}{2}$ o 2π).

El análisis dimensional puede también usarse como una comprobación rápida de una ecuación de la cual no se esté seguro. Por ejemplo, suponga que usted no puede recordar si la ecuación para el periodo de un péndulo simple T (el tiempo que toma hacer una oscilación completa) de longitud ℓ es $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ o $T = 2\pi\sqrt{g/\ell}$, donde g es la aceleración debida a la gravedad y, como todas las aceleraciones, tiene dimensiones $[L/T^2]$. (No se preocupe por estas fórmulas, la correcta se obtendrá en el capítulo 14; lo que nos interesa aquí es si la fórmula contiene ℓ/g o g/ℓ). Una comprobación dimensional muestra que la primera (ℓ/g) es correcta:

$$[T] = \sqrt{\frac{[L]}{[L/T^2]}} = \sqrt{[T^2]} = [T],$$

mientras que la última (g/ℓ) no lo es:

$$[T] \neq \sqrt{\frac{[L/T^2]}{[L]}} = \sqrt{\frac{1}{[T^2]}} = \frac{1}{[T]}.$$

Note que la constante 2π no tiene dimensiones, por lo que no se puede comprobar usando análisis dimensional si debe aparecer o no.

Otros usos del análisis dimensional se encuentran en el Apéndice C.

EJEMPLO 1–10 **Longitud de Planck.** La medición significativa más pequeña de longitud se denomina la "longitud de Planck" y se define en términos de tres constantes fundamentales en la naturaleza, la rapidez de la luz $c = 3.00 \times 10^8$ m/s, la constante gravitacional $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg \cdot s^2}$ y la constante de Planck $h = 6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{kg \cdot m^2/s}$. La longitud de Planck λ_P (λ es la letra griega "lambda") está dada por la siguiente combinación de estas tres constantes:

$$\lambda_P = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}}.$$

Demuestre que las dimensiones de λ_P son longitud $[L]$ y encuentre el orden de magnitud de λ_P.

PLANTEAMIENTO Reescribimos la ecuación anterior en términos de dimensiones. Las dimensiones de c son $[L/T]$, de G son $[L^3/MT^2]$, y de h son $[ML^2/T]$.

SOLUCIÓN Las dimensiones de λ_P son

$$\sqrt{\frac{[L^3/MT^2][ML^2/T]}{[L^3/T^3]}} = \sqrt{[L^2]} = [L]$$

que es una longitud. El valor de la longitud de Planck es

$$\lambda_P = \sqrt{\frac{Gh}{c^3}} = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3/kg \cdot s^2})(6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{kg \cdot m^2/s})}{(3.0 \times 10^8\ \mathrm{m/s})^3}} \approx 4 \times 10^{-35}\ \mathrm{m},$$

que es del orden de magnitud de 10^{-34} o 10^{-35} m.

NOTA Algunas teorías recientes (capítulos 43 y 44) sugieren que las partículas más pequeñas (quarks y leptones) tienen tamaños del orden de la longitud de Planck, 10^{-35} m. Dichas teorías también sugieren que el "Big Bang" —que se cree dio origen al Universo— empezó desde un tamaño inicial del orden de la longitud de Planck.

Resumen

[En este libro el resumen que viene al final de cada capítulo ofrece un breve panorama general de las principales ideas del capítulo. El resumen *no* sirve para lograr una comprensión del material, lo que sólo es posible obtener mediante la lectura detallada del capítulo].

La física, al igual que otras ciencias, es una empresa creativa; no es simplemente una colección de hechos. Las **teorías** importantes se crean con la idea de explicar las **observaciones**. Para ser aceptadas, las teorías se **ponen a prueba**, mediante la comparación de sus predicciones con los resultados de experimentos reales. Note que por lo general, una teoría no puede "probarse" en un sentido absoluto.

Los científicos a menudo idean modelos de fenómenos físicos. Un **modelo** es un tipo de imagen o analogía que ayuda a explicar los fenómenos en términos de algo que ya conocemos. Una **teoría**, con frecuencia derivada de un modelo, es usualmente más profunda y más compleja que un modelo simple.

Una **ley** científica es un enunciado conciso, a menudo expresado en forma de una ecuación, que describe cuantitativamente una amplia gama de fenómenos.

Las **mediciones** juegan un papel crucial en la física, aunque nunca son perfectamente precisas. Es importante especificar la **incertidumbre** de una medición, ya sea estableciéndola directamente usando la notación ± y/o manteniendo sólo el número correcto de **cifras significativas**.

Las cantidades físicas siempre se especifican respecto a un estándar particular o **unidad**, y la unidad usada siempre debe indicarse. El conjunto de unidades comúnmente aceptadas actualmente es el **Sistema Internacional** (SI), en el que las unidades estándar de longitud, masa y tiempo son el **metro**, el **kilogramo** y el **segundo**.

Al convertir unidades, compruebe todos los **factores de conversión** para tener una cancelación correcta de unidades.

Efectuar **estimaciones del orden de magnitud** burdas es una técnica muy útil tanto en la ciencia como en la vida cotidiana.

[*Las **dimensiones** de una cantidad se refieren a la combinación de cantidades básicas que la constituyen. Por ejemplo, la velocidad tiene dimensiones de [longitud/tiempo] o [L/T]. El **análisis dimensional** sirve para comprobar la forma correcta de una relación].

Preguntas

1. ¿Cuáles son las ventajas y las desventajas de usar el pie de una persona como estándar? Considere *a*) el pie de una persona en particular y *b*) el pie de cualquier persona. Tenga en cuenta que es conveniente que los estándares fundamentales sean accesibles (fáciles de comparar), invariables (sin cambio), reproducibles e indestructibles.

2. ¿Por qué es incorrecto pensar que cuantos más dígitos se utilicen en una respuesta, más exacta será?

3. Al viajar por una carretera en las montañas, usted puede encontrar letreros de elevación como "914 m (3000 ft)". Quienes critican el sistema métrico afirman que tales números muestran que el sistema métrico es más complicado. ¿Cómo debería usted alterar esos letreros para ser más consistentes con un cambio al sistema métrico?

4. ¿Qué está equivocado en esta señal de carretera?

Memphis 7 mi (11.263 km)?

5. Para que una respuesta esté completa, es necesario especificar las unidades. ¿Por qué?

6. Explique cómo podría usar la noción de simetría para estimar el número de canicas en un recipiente de un litro.

7. Usted mide el radio de una rueda y obtiene 4.16 cm. Si multiplica por 2 para obtener el diámetro, ¿debe escribir el resultado como 8 cm o como 8.32 cm? Explique su respuesta.

8. Exprese el seno de 30.0° con el número correcto de cifras significativas.

9. Una receta para suflé especifica que la medición de los ingredientes debe ser exacta, o el suflé no se levantará. La receta pide seis huevos grandes. El tamaño de los "huevos grandes" varía en un 10% de acuerdo con las especificaciones del Departamento de Agricultura de Estados Unidos. ¿Qué quiere decir con esto acerca de cuán exactas deben ser las mediciones de los otros ingredientes?

10. Elabore una lista de suposiciones útiles para estimar el número de mecánicos automotrices en *a*) San Francisco, *b*) su ciudad natal, y haga luego las estimaciones.

11. Sugiera una forma de medir la distancia de la Tierra al Sol.

* **12.** ¿Puede usted establecer un conjunto completo de cantidades básicas, como en la tabla 1-5, que no incluya la longitud como una de ellas?

Problemas

[Los problemas al final de cada capítulo están clasificados como I, II o III, de acuerdo con su nivel de dificultad, siendo los problemas I los más sencillos. Los problemas de nivel III se presentan especialmente como un desafío para que los estudiantes puedan obtener "créditos adicionales". Los problemas están ubicados por secciones, lo cual significa que el lector deberá leer esa sección; pero no sólo esa sección, ya que los problemas a menudo incluyen material de secciones previas. Cada capítulo tiene también un grupo de problemas generales que no están ordenados por sección ni están clasificados por grado de dificultad].

1–3 Medición e incertidumbre; cifras significativas

(*Nota*: En los problemas se supone que un número como 6.4 es exacto hasta ± 0.1; y que 950 es ± 10 a menos que se diga que es "precisamente" o "muy cercanamente" 950, en cuyo caso se supone 950 ± 1).

1. (I) Se cree que la edad del Universo es de aproximadamente 14 mil millones de años. Con dos cifras significativas, escriba esa edad en potencias de diez en *a*) años, y *b*) segundos.

2. (I) Cuántas cifras significativas tiene cada uno de los siguientes números: *a*) 214, *b*) 81.60, *c*) 7.03, *d*) 0.03, *e*) 0.0086, *f*) 3236 y *g*) 8700?

3. (I) Escriba los siguientes números en potencias de diez: *a*) 1.156, *b*) 21.8, *c*) 0.0068, *d*) 328.65, *e*) 0.219 y *f*) 444.

4. (I) Escriba completos los siguientes números con el número correcto de ceros: *a*) 8.69×10^4, *b*) 9.1×10^3, *c*) 8.8×10^{-1}, *d*) 4.76×10^2 y *e*) 3.62×10^{-5}.

5. (II) ¿Cuál es la incertidumbre porcentual en la medición 5.48 ± 0.25 m?

6. (II) En general los intervalos de tiempo medidos con un cronómetro tienen una incertidumbre de aproximadamente 0.2 s, debido al tiempo de reacción humana en los momentos de arranque y detención. ¿Cuál es la incertidumbre porcentual de una medición cronometrada a mano de *a*) 5 s, *b*) 50 s, *c*) 5 min?

7. (II) Sume $(9.2 \times 10^3\ \text{s}) + (8.3 \times 10^4\ \text{s}) + (0.008 \times 10^6\ \text{s})$.

8. (II) Multiplique 2.079×10^2 m por 0.082×10^{-1}, tomando en cuenta cifras significativas.
9. (III) Para ángulos θ pequeños, el valor numérico de sen θ es aproximadamente igual al valor numérico de tan θ. Determine el ángulo mayor para el cual coinciden seno y tangente en dos cifras significativas.
10. (III) ¿Cuál es aproximadamente la incertidumbre porcentual en el volumen de un balón de playa esférico, cuyo radio es $r = 0.84 \pm 0.04$ m?

1–4 y 1–5 Unidades, estándares y el sistema SI, conversión de unidades

11. (I) Escriba los siguientes números (decimales) completos con unidades estándar: *a*) 286.6 mm, *b*) 85 μV, *c*) 760 mg, *d*) 60.0 ps, *e*) 22.5 fm (femtómetros), *f*) 2.50 gigavolts.
12. (I) Exprese lo siguiente usando los prefijos de la tabla 1-4: *a*) 1×10^6 volts, *b*) 2×10^{-6} metros, *c*) 6×10^3 días, *d*) 18×10^2 dólares y *e*) 8×10^{-8} segundos.
13. (I) Determine su altura en metros y su masa en kilogramos.
14. (I) El Sol está en promedio a 93 millones de millas de la Tierra. ¿A cuántos metros equivale esto? Expréselo *a*) usando potencias de diez y *b*) usando un prefijo métrico.
15. (II) ¿Cuál es el factor de conversión entre *a*) ft^2 y yd^2, *b*) m^2 y ft^2?
16. (II) Si un avión viaja a 950 km/h, ¿cuánto tiempo le tomará recorrer 1.00 km?
17. (II) Un átomo típico tiene un diámetro de aproximadamente 1.0×10^{-10} m. *a*) ¿Cuánto es esto en pulgadas? *b*) ¿Cuántos átomos hay aproximadamente en una línea de 1.0 cm?
18. (II) Exprese la siguiente suma con el número correcto de cifras significativas: $1.80 \text{ m} + 142.5 \text{ cm} + 5.34 \times 10^5\ \mu\text{m}$.
19. (II) Determine el factor de conversión entre *a*) km/h y mi/h, *b*) m/s y ft/s, y *c*) km/h y m/s.
20. (II) ¿Cuánto más larga (en porcentaje) es una carrera de una milla, que una carrera de 1500 m ("la milla métrica")?
21. (II) Un *año luz* es la distancia que recorre la luz en un año (a una rapidez $= 2.998 \times 10^8$ m/s). *a*) ¿Cuántos metros hay en 1.00 año luz? *b*) Una unidad astronómica (UA) es la distancia promedio entre el Sol y la Tierra, esto es, 1.50×10^8 km. ¿Cuántas UA hay en 1.00 año luz? *c*) ¿Cuál es la rapidez de la luz en UA/h?
22. (II) Si usted utiliza sólo un teclado para introducir datos, ¿cuántos años se tardaría en llenar el disco duro de su computadora, el cual puede almacenar 82 gigabytes (82×10^9 bytes) de datos? Suponga días laborables "normales" de ocho horas, que se requiere un byte para almacenar un carácter del teclado y que usted puede teclear 180 caracteres por minuto.
23. (III) El diámetro de la Luna es de 3480 km. *a*) ¿Cuál es el área superficial de la Luna? *b*) ¿Cuántas veces más grande es el área superficial de la Tierra?

1–6 Orden de magnitud; estimación rápida

(*Nota*: Recuerde que para estimaciones burdas, sólo se requieren números redondos, tanto para los datos de entrada como para los resultados finales).

24. (I) Estime el orden de magnitud (potencias de diez) de: *a*) 2800, *b*) 86.30×10^2, *c*) 0.0076 y *d*) 15.0×10^8.
25. (II) Estime cuántos libros se pueden almacenar en una biblioteca universitaria con 3500 m^2 de espacio en la planta. Suponga que hay ocho anaqueles de alto, que tienen libros en ambos lados, con corredores de 1.5 de ancho. Los libros tienen, en promedio, el tamaño de éste.
26. (II) Estime el tiempo que le tomaría a un corredor recorrer (a 10 km/h) de Nueva York a California.
27. (II) Estime el número de litros de agua que un ser humano bebe durante su vida.
28. (II) Estime cuánto tiempo le tomaría a una persona podar el césped de un campo de fútbol usando una podadora casera ordinaria (figura 1-11). Suponga que la podadora se mueve con una rapidez de 1 km/h y tiene un ancho de 0.5 m.



FIGURA 1–11 Problema 28.

29. (II) Estime el número de dentistas *a*) en San Francisco y *b*) en su ciudad natal.
30. (III) El hule desgastado en los neumáticos entra a la atmósfera como un *contaminante particular*. Estime cuánto hule (en kg) entra al aire en Estados Unidos cada año. Una buena estimación para la profundidad del dibujo de un neumático nuevo es de 1 cm, y el hule tiene una masa aproximada de 1200 kg por cada m^3 de volumen.
31. (III) Usted está en un globo de aire caliente a 200 m por encima de una llanura plana tejana y mira hacia el horizonte. ¿Qué tan lejos puede ver, es decir, qué tan lejos está su horizonte? El radio de la Tierra es de 6400 km aproximadamente.
32. (III) Yo decido contratarlo a usted durante 30 días y usted puede decidir entre dos posibles formas de pago: ya sea **1.** $1000 por día, o **2.** un centavo el primer día, dos centavos el segundo día y así sucesivamente, duplicando diariamente su paga diaria hasta el día 30. Use una estimación rápida para tomar su decisión y justifíquela.
33. (III) Muchos veleros se amarran a un puerto deportivo a 4.4 km de la orilla de un lago. Usted mira fijamente hacia uno de los veleros porque, cuando se encuentra tendido en posición horizontal en la playa, sólo puede ver la cubierta, pero ningún lado del velero. Luego usted va al velero al otro lado del lago y mide que la cubierta está a 1.5 m por encima del nivel del agua. Usando la figura 1-12, donde $h = 1.5$ m, estime el radio R de la Tierra.

FIGURA 1–12 Problema 33. Usted observa un velero a través del lago (no está a escala). R es el radio de la Tierra. Usted está a una distancia $d = 4.4$ km del velero cuando usted puede ver sólo la cubierta y no su lado. A causa de la curvatura de la Tierra, el agua "se interpone" entre usted y el velero.

34. (III) Otro experimento donde usted puede utilizar el radio de la Tierra. El Sol se pone —desaparece por completo en el horizonte— cuando usted está recostado en la playa con los ojos a 20 cm de la arena. Usted se levanta de inmediato y sus ojos quedan a ahora a 150 cm sobre la arena y puede ver de nuevo la parte superior de ese astro. Si luego cuenta el número de segundos ($= t$) hasta que el Sol desaparece por completo otra vez, usted puede estimar el radio de la Tierra. Pero para este problema, utilice el radio de la Tierra conocido y calcule el tiempo t.

*1–7 Dimensiones y análisis dimensional

*35. (I) ¿Cuáles son las dimensiones de densidad, definida como masa entre volumen?

*36. (II) La rapidez v de un cuerpo está dada por la ecuación $v = At^3 - Bt$, donde t representa el tiempo. *a*) ¿Cuáles son las dimensiones de A y B? *b*) ¿Cuáles son las unidades SI para las constantes A y B?

*37. (II) Tres estudiantes obtienen las siguientes ecuaciones, donde x se refiere a la distancia recorrida, v a la rapidez, a a la aceleración (m/s^2), t al tiempo y el subíndice ($_0$) significa una cantidad en el tiempo $t = 0$: *a*) $x = vt^2 + 2at$, *b*) $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ y *c*) $x = v_0 t + 2at^2$. ¿Cuál de estas ecuaciones es correcta de acuerdo con una comprobación dimensional?

*38. (II) Demuestre que la siguiente combinación de las tres constantes fundamentales de la naturaleza que usamos en el ejemplo 1-10 (que son G, c y h) forma una cantidad con las dimensiones de tiempo:

$$t_P = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}}.$$

Esta cantidad, t_P, se denomina *tiempo de Planck*, y se considera el tiempo más temprano, después de la creación del Universo, en el que se pudieran aplicar las leyes de la física actualmente conocidas.

Problemas generales

39. Los *satélites de posicionamiento global* (GPS, por las siglas de *global positioning satellites*) se usan para determinar posiciones con gran exactitud. Si uno de los satélites está a una distancia de 20,000 km de usted, ¿qué incertidumbre porcentual en la distancia representa una incertidumbre de 2 m? ¿Cuál es el número de cifras significativas implíícito en la distancia?

40. Los *chips de computadora* (figura 1-13) se graban en obleas circulares de silicio que tienen un grosor de 0.300 mm, que se rebanan de un cristal de silicio sólido cilíndrico de 25 cm de longitud. Si cada oblea puede contener 100 chips, ¿cuál es el número máximo de chips que se pueden producir con un cilindro completo?



FIGURA 1–13 Problema 40. La oblea sostenida por la mano (arriba) se muestra abajo, amplificada e iluminada por luz de colores. Se ven las filas de circuitos integrados (chips).

41. *a*) ¿Cuántos segundos hay en 1.00 año? *b*) ¿Cuántos nanosegundos hay en 1.00 año? *c*) ¿Cuántos años hay en 1.00 segundo?

42. El fútbol americano se practica en un campo de 100 yardas de longitud; en tanto que el campo del fútbol *soccer* mide 100 m de largo. ¿Qué campo es más grande y qué tanto (dé yardas, metros y porcentaje)?

43. Comúnmente el pulmón de un adulto humano contiene cerca de 300 millones de cavidades diminutas llamadas alvéolos. Estime el diámetro promedio de un solo alveolo.

44. Una hectárea se define como 1.000×10^4 m^2. Un acre tiene 4.356×10^4 ft^2. ¿Cuántos acres hay en una hectárea?

45. Estime el número de galones de gasolina consumidos por todos los automóviles que circulan en Estados Unidos durante un año.

46. Use la tabla 1-3 para estimar el número total de protones o de neutrones en *a*) una bacteria, *b*) una molécula de ADN, *c*) el cuerpo humano, *d*) nuestra galaxia.

47. Una familia común de cuatro personas usa aproximadamente 1200 L (cerca de 300 galones) de agua por día (1 L = 1000 cm^3). ¿Qué profundidad perdería un lago cada año si cubriera uniformemente una área de 50 km^2 y abasteciera a una población local de 40,000 personas? Considere sólo el uso del agua por la población, despreciando la evaporación y otros factores.

48. Estime el número de bolitas de goma de mascar contenidas en la máquina de la figura 1-14.

FIGURA 1–14 Problema 48. Estime el número de bolitas de goma de mascar en la máquina.

49. Estime cuántos kilogramos de jabón para lavandería se utilizan en Estados Unidos durante un año (y que, por lo tanto, las lavadoras descargan al drenaje junto con el agua sucia). Suponga que cada carga da lavandería lleva 0.1 kg de jabón.

50. ¿Qué tan grande es una tonelada? Es decir, ¿cuál es el volumen de algo que pesa una tonelada? Para ser específicos, estime el diámetro de una roca de 1 tonelada, pero primero haga una conjetura: ¿será de 1 ft de ancho, de 3 ft o del tamaño de un vehículo? [*Sugerencia:* La roca tiene una masa por unidad de volumen de aproximadamente 3 veces la del agua, que es de 1 kg por litro (10^3 cm^3) o de 62 lb por pie cúbico].

51. Un disco compacto (CD) de audio contiene 783.216 megabytes de información digital. Cada byte consiste en exactamente 8 bits. Cuando se toca el CD, el reproductor lee la información digital a una taza constante de 1.4 megabytes por segundo. ¿Cuántos minutos le llevará al reproductor leer el CD completo?

52. Sostenga un lápiz frente a sus ojos en una posición tal que su extremo romo tape a la Luna (figura 1-15). Haga mediciones adecuadas para estimar el diámetro de la Luna y considere que la distancia de la Tierra a la Luna es de 3.8×10^5 km.

FIGURA 1–15 Problema 52. ¿Qué tan grande es la Luna?

53. Una fuerte lluvia descarga 1.0 cm de agua sobre una ciudad de 5 km de ancho y 8 km de largo durante un periodo de 2 horas. ¿Cuántas toneladas métricas (1 tonelada métrica = 10^3 kg) de agua cayeron sobre la ciudad? (1 cm^3 de agua tiene una masa de 1 g = 10^{-3} kg.) ¿Cuántos galones de agua fueron?

54. El arca de Noé debía tener 300 codos de largo, 50 codos de ancho y 30 codos de alto. El codo era una unidad de medida igual a la longitud de un brazo humano, es decir, del codo a la punta del dedo más largo. Exprese las dimensiones del arca en metros y estime su volumen (m^3).

55. Estime cuánto tiempo tomaría caminar alrededor del mundo, suponiendo que se caminan 10 h por día a 4 km/h.

56. Un litro (1000 cm^3) de aceite se derrama sobre un lago tranquilo. Si el aceite se dispersa uniformemente hasta que se forma una película de una molécula de espesor, con las moléculas adyacentes apenas tocándose, estime el diámetro de la película de aceite. Suponga que la molécula de aceite tiene un diámetro de 2×10^{-10} m.

57. Juan acampa al lado de un río y se pregunta qué ancho tiene éste. Él observa una gran roca en la orilla directamente opuesta a él; luego camina aguas arriba hasta que juzga que el ángulo entre él y la roca, a la que todavía puede ver claramente, está ahora a un ángulo de 30° aguas abajo (figura 1-16). Juan estima que sus pasos son aproximadamente de una yarda de longitud. La distancia de regreso a su campamento es de 120 pasos. ¿Qué tan lejos esta el río, tanto en yardas como en metros?

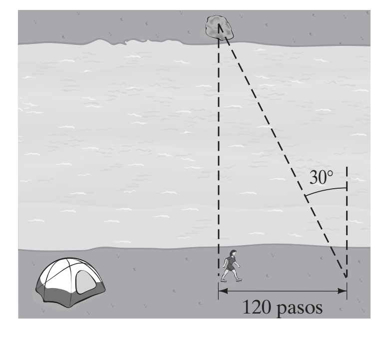


FIGURA 1–16 Problema 57.

58. Un fabricante de relojes afirma que sus relojes ganan o pierden no más de 8 segundos al año. ¿Qué tan exactos son sus relojes? Exprese el resultado como porcentaje.

59. Un angstrom (símbolo: Å) es una de longitud, definida como 10^{-10} m, que está en el orden del diámetro de un átomo. *a*) ¿Cuántos nanómetros hay en 1.0 angstrom? *b*) ¿Cuántos femtómetros o fermis (la unidad común de longitud en física nuclear) hay en 1.0 angstrom? *c*) ¿Cuántos angstroms hay en 1.0 m? *d*) ¿Cuántos angstroms hay en 1.0 año luz (véase el problema 21)?

60. El diámetro de la Luna es de 3480 km. ¿Cuál es su volumen? ¿Cuántas Lunas se requerirían para crear un volumen igual al de la Tierra?

61. Determine la incertidumbre porcentual en θ y en sen θ, cuando *a*) $\theta = 15.0° \pm 0.5°$, *b*) $\theta = 75.0° \pm 0.5°$.

62. Si usted comenzó a caminar a lo largo de una de las líneas de longitud de la Tierra y siguió hasta que hubo un cambio de latitud en un minuto de arco (hay 60 minutos por grado), ¿qué tan lejos habrá caminado usted (en millas)? A esta distancia se le llama "milla náutica".

63. Haga una estimación burda del volumen de su cuerpo (en cm^3).

64. Estime el número de conductores de autobuses *a*) en Washington, D. C., y *b*) en su ciudad.

65. La Asociación Pulmonar Estadounidense da la siguiente fórmula para la capacidad pulmonar esperada V de una persona común (en litros, donde $1\text{ L} = 10^3\text{ cm}^3$):

$$V = 4.1H - 0.018A - 2.69,$$

donde H y A son la altura de la persona (en metros) y la edad (en años), respectivamente. En esta fórmula ¿cuáles son las unidades de los números 4.1, 0.018 y 2.69?

66. La densidad de un objeto se define como su masa dividida entre su volumen. Suponga que la masa y el volumen de una roca se miden en 8 g y 2.8325 cm^3. Determine la densidad de la roca con el número correcto de cifras significativas.

67. Con el número correcto de cifras significativas, utilice la información en los forros de este libro para determinar la razón de *a*) el área superficial de la Tierra en comparación con el área superficial de la Luna; *b*) el volumen de la Tierra comparado con el volumen de la Luna.

68. Un mol de átomos consiste en 6.02×10^{23} átomos individuales. Si un mol de átomos se esparciera uniformemente sobre la superficie de la Tierra, ¿cuántos átomos habría por metro cuadrado?

69. Hallazgos de investigación recientes en astrofísica sugieren que el Universo observable puede modelarse como una esfera de radio $R = 13.7 \times 10^9$ años luz con una densidad de masa promedio de aproximadamente $1 \times 10^{-26}\text{ kg/m}^3$, donde sólo cerca del 4% de la masa total del Universo se debe a materia "ordinaria" (como protones, neutrones y electrones). Utilice esta información para estimar la masa total de materia ordinaria en el Universo observable. (1 año luz $= 9.46 \times 10^{15}$ m).

Respuestas a los ejercicios

A: *d*).

B: No: tienen 3 y 2 respectivamente.

C: Los tres tienen tres cifras significativos, aunque el número de lugares decimales es *a*) 2, *b*) 3, *c*) 4.

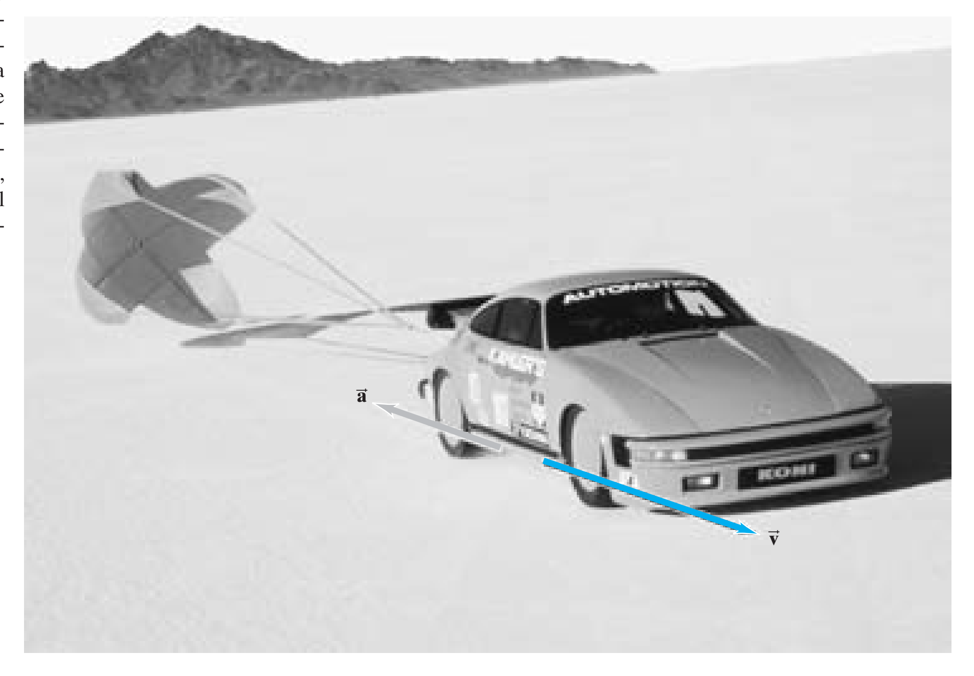
D: *a*) 2.58×10^{-2}, 3; *b*) 4.23×10^4, 3 (probablemente); *c*) 3.4450×10^2, 5.

E: Mt. Everest, 29,035 ft; K2, 28,251 ft; Kangchenjunga, 28,169 ft.

F: No: 15 m/s ≈ 34 mi/h.

Un auto de carreras suelta un paracaídas para reducir su rapidez lo antes posible. Los sentidos de la velocidad y la aceleración del automóvil se muestran con las flechas ($\vec{\mathbf{v}}$) y ($\vec{\mathbf{a}}$).

El movimiento se describe usando los conceptos de velocidad y aceleración. Note que en este caso, la aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ está en sentido opuesto a la velocidad $\vec{\mathbf{v}}$, lo cual significa que el objeto desacelera. En este capítulo estudiaremos con detalle el movimiento con aceleración constante, incluyendo el movimiento vertical de objetos que caen debido a la acción de la gravedad.





Descripción del movimiento: Cinemática en una dimensión

CONTENIDO

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!

[*No se preocupe por obtener la respuesta correcta de inmediato —tendrá otra oportunidad para responder la pregunta más adelante en este capítulo. Véase la pág. 1 del capítulo 1 para una mayor explicación*].

Dos pequeñas esferas pesadas tienen el mismo diámetro, pero una pesa el doble que la otra. Las esferas se sueltan desde el balcón de un segundo piso exactamente al mismo tiempo. El tiempo para caer al suelo será:

a) el doble para la esfera más ligera en comparación con la más pesada.
b) mayor para la esfera más ligera, pero no del doble.
c) el doble para la esfera más pesada en comparación con la más ligera.
d) mayor para la esfera más pesada, pero no del doble.
e) casi el mismo para ambas esferas.

El movimiento de los objetos (pelotas de béisbol, automóviles, corredores, e incluso el Sol y la Luna) es una parte evidente de la vida cotidiana. No fue sino hasta los siglos XVI y XVII que se estableció nuestra comprensión moderna del movimiento. Muchas personas contribuyeron con ese entendimiento, particularmente Galileo Galilei (1564-1642) e Isaac Newton (1642-1727).

El estudio del movimiento de los objetos, así como de los conceptos relacionados de fuerza y energía, forman el campo de la **mecánica**. La mecánica a la vez suele dividirse en dos partes: **cinemática**, que es la descripción de cómo se mueven los objetos; y **dinámica**, que trata con el concepto de fuerza y las causas del movimiento de los objetos. Este capítulo y el siguiente tratan la cinemática.

Comenzaremos estudiando los objetos que se mueven sin girar (figura 2-1a). Tal movimiento se llama **movimiento traslacional**. En el presente capítulo el enfoque estará en la descripción de un objeto que se mueve a lo largo de una trayectoria en línea recta, es decir, un movimiento traslacional unidimensional. En el capítulo 3 estudiaremos cómo describir el movimiento traslacional en dos (o tres) dimensiones a lo largo de trayectorias que no son rectas.

A menudo usaremos el concepto, o *modelo*, de **partícula** idealizada, que se considera como un **punto** matemático sin extensión espacial (sin tamaño). Una partícula puede tener sólo movimiento traslacional. El modelo de partícula es útil en muchas situaciones reales, donde nos interesa sólo un movimiento traslacional y no es importante el tamaño del objeto. Por ejemplo, para muchos fines, podríamos considerar una bola de billar, o incluso una nave espacial que viaja hacia la Luna, como una partícula.

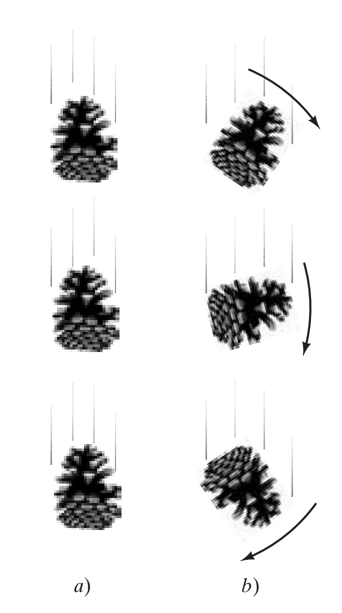


FIGURA 2–1 La piña en *a*) sufre traslación pura al caer, mientras que en *b*) gira al mismo tiempo que se traslada.

2–1 Marcos de referencia y desplazamiento

Toda medición de posición, distancia o rapidez debe realizarse con respecto a un **marco de referencia**. Por ejemplo, suponga que mientras usted viaja en un tren a 80 km/h, ve a una persona que camina por el pasillo hacia el frente del tren con rapidez, digamos, de 5 km/h (figura 2-2), que es la rapidez de la persona con respecto al tren como marco de referencia. Sin embargo, con respecto al suelo, esa persona se mueve con una rapidez de 80 km/h + 5 km/h = 85 km/h. Siempre es importante especificar el marco de referencia al indicar una rapidez. En la vida diaria, por lo general al hablar de una rapidez implícitamente queremos decir "con respecto a la Tierra", pero el marco de referencia debe especificarse siempre que pueda haber confusiones.

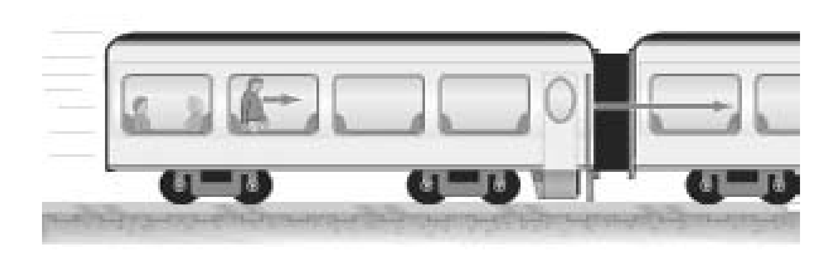
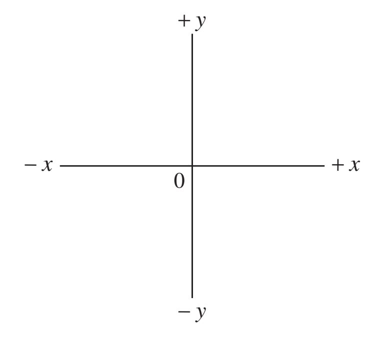


FIGURA 2–2 Una persona camina hacia el frente de un tren a 5 km/h. El tren se mueve a 80 km/h con respecto al suelo, por lo que la rapidez de la persona, relativa al suelo, es de 85 km/h.

Al especificar el movimiento de un objeto, es importante indicar no sólo la rapidez, sino también la dirección del movimiento. A menudo podemos indicar dirección o sentido de un movimiento usando los puntos cardinales norte, sur, este y oeste, y con las instrucciones "hacia arriba" y "hacia abajo". En física con frecuencia se dibuja un sistema de **ejes coordenados**, como se muestra en la figura 2-3, para representar un marco de referencia. Siempre podemos elegir la posición del origen (0) y el sentido de los ejes x y y como mejor nos convenga. Los ejes x y y siempre son perpendiculares entre sí. Los objetos situados a la derecha del origen de coordenadas (0) sobre el eje x tienen una coordenada x que usualmente se considera positiva; del mismo modo, los puntos situados a la izquierda del 0 usualmente tienen una coordenada x negativa. La posición a lo largo del eje y se considera usualmente positiva arriba del 0, y negativa abajo del 0; aunque la convención contraria podría usarse si así conviene. Cualquier punto sobre el plano se especifica dando las coordenadas x y y. En tres dimensiones, se agrega un eje z que es perpendicular a *ambos ejes* x y y.

Para el movimiento unidimensional, a menudo elegimos el eje x como la línea a lo largo de la cual se lleva a cabo el movimiento. La **posición** de un objeto en cualquier momento se define como el valor de su coordenada x. Si el movimiento es vertical, como en el caso de un objeto que cae, por lo general usamos el eje y.

FIGURA 2–3 Sistema estándar de ejes coordenados xy.





El desplazamiento puede que no sea igual a la distancia recorrida

Es necesario hacer una distinción entre la *distancia* recorrida por un objeto y su **desplazamiento**, el cual se define como el *cambio de posición* del objeto. Es decir, el *desplazamiento muestra qué tan lejos está el objeto del punto de partida*. Para ver la distinción entre distancia total y desplazamiento, imagine una persona que camina 70 m hacia el este y que luego regresa al oeste una distancia de 30 m (véase la figura 2-4). La *distancia* total recorrida es de 100 m, pero el *desplazamiento* es sólo de 40 m, ya que la persona está ahora a sólo 40 m del punto de partida.

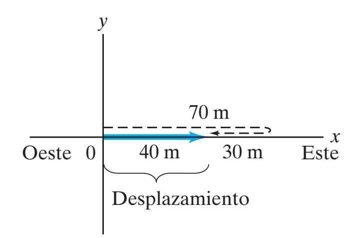


FIGURA 2–4 Una persona camina 70 m hacia el este y luego 30 m hacia el oeste. La distancia total recorrida es 100 m (el camino recorrido se muestra con la línea punteada negra); pero el desplazamiento, que se muestra con una flecha más gruesa, es de 40 m hacia el este.

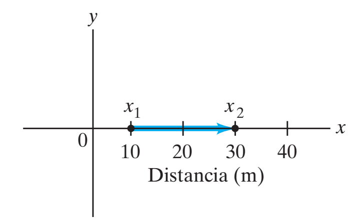
El desplazamiento es una cantidad que tiene magnitud y dirección. Tales cantidades se llaman **vectores** y se representan usando flechas en los diagramas. Por ejemplo, en la figura 2-4, la flecha gruesa representa el desplazamiento, cuya magnitud es de 40 m y cuya dirección es hacia la derecha (este).

En el capítulo 3 veremos los vectores con mayor detalle. Por ahora, trataremos sólo el movimiento de una partícula en una dimensión, a lo largo de una línea. En este caso, los vectores que señalen en una dirección tendrán un signo positivo, además de su magnitud; mientras que los vectores que señalen en sentido opuesto tendrán un signo negativo, además de su magnitud.

Considere el movimiento de un objeto durante un intervalo de tiempo dado. Suponga que en un momento inicial, llamado t_1, el objeto está sobre el eje x en una posición x_1 del sistema coordenado que se muestra en la figura 2-5. En algún tiempo posterior, t_2, suponga que el objeto se ha movido a una posición x_2. El desplazamiento del objeto es $x_2 - x_1$ y se representa mediante la flecha gruesa que apunta hacia la derecha en la figura 2-5. Es conveniente escribir

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

FIGURA 2–5 La flecha representa el desplazamiento $x_2 - x_1$. Las distancias están en metros.



donde el símbolo Δ (letra griega delta) significa "cambio en". Así que Δx significa "el cambio en x" o "cambio en la posición", que es el desplazamiento. Advierta que el "cambio en" cualquier cantidad, significa el valor final de esa cantidad, menos el valor inicial.

Suponga que $x_1 = 10.0$ m y $x_2 = 30.0$ m. Entonces,

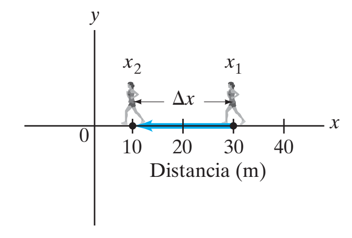
$$\Delta x = x_2 - x_1 = 30.0\,\text{m} - 10.0\,\text{m} = 20.0\,\text{m},$$

por lo que el desplazamiento es de 20.0 m en la dirección positiva (véase la figura 2-5).

Ahora considere un objeto que se mueve hacia la izquierda, como se muestra en la figura 2-6. En este caso, una persona inicia su movimiento en $x_1 = 30.0$ m y camina hacia la izquierda hasta la posición $x_2 = 10.0$ m. De modo que su desplazamiento es

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 10.0\,\text{m} - 30.0\,\text{m} = -20.0\,\text{m},$$

FIGURA 2–6 Para un desplazamiento $\Delta x = x_2 - x_1 = 10.0\text{ m} - 30.0\text{ m}$, el vector desplazamiento apunta hacia la izquierda.



que está representado por la flecha agruesa que señala hacia la izquierda (figura 2-6). Para el movimiento unidimensional a lo largo del eje x, un vector que señala hacia la derecha tiene un signo positivo; en tanto que un vector que señala hacia la izquierda tiene un signo negativo.

EJERCICIO A Una hormiga inicia su movimiento en $x = 20$ cm sobre una hoja de papel cuadriculado y camina a lo largo del eje x hasta $x = -20$ cm. Luego se regresa y camina hasta $x = -10$ cm. ¿Cuál es el desplazamiento de la hormiga y la distancia total recorrida?

2–2 Velocidad promedio

El aspecto más evidente del movimiento de un objeto es qué tan rápido se mueve, es decir, su rapidez o velocidad.

El término "rapidez" se refiere a qué tan lejos viaja un objeto en un intervalo de tiempo dado, independientemente de la *dirección* y el *sentido* del movimiento. Si un automóvil recorre 240 kilómetros (km) en 3 horas (h), decimos que su rapidez promedio fue de 80 km/h. En general, la **rapidez promedio** de un objeto se define como *la distancia total recorrida a lo largo de su trayectoria, dividida entre el tiempo que le toma recorrer esa trayectoria*:

$$\text{rapidez promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}. \qquad \textbf{(2–1)}$$

Los términos "velocidad" y "rapidez" a menudo se utilizan indistintamente en el lenguaje cotidiano. Sin embargo, en física hacemos una distinción entre ambos. La rapidez es simplemente un número positivo con unidades. Por otro lado, el término **velocidad** se usa

para indicar tanto la *magnitud* (es decir, el valor numérico) de qué tan rápido se mueve un objeto, como la *dirección* en la que se mueve. (Por lo tanto, la velocidad es un vector). Existe una segunda diferencia entre rapidez y velocidad; a saber, la **velocidad promedio** se define en términos del *desplazamiento*, en vez de la distancia total recorrida:

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{\text{posición final} - \text{posición inicial}}{\text{tiempo transcurrido}}.$$

La rapidez promedio y la velocidad promedio tienen la misma magnitud cuando todo el movimiento ocurre en la misma dirección y sentido. En otros casos, pueden diferir: recuerde la caminata que describimos antes, en la figura 2-4, donde una persona caminó 70 m al este y luego 30 m al oeste. La distancia total recorrida fue de 70 m + 30 m = 100 m, pero el desplazamiento fue de 40 m. Suponga que esta caminata duró en total 70 s. Entonces, la rapidez promedio fue:



La rapidez promedio no es necesariamente igual a la magnitud de la velocidad promedio

$$\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{100\text{ m}}{70\text{ s}} = 1.4\text{ m/s}.$$

Por otro lado, la magnitud de la velocidad promedio fue:

$$\frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{40\text{ m}}{70\text{ s}} = 0.57\text{ m/s}.$$

Esta diferencia entre la rapidez y la magnitud de la velocidad puede ocurrir cuando se calculan valores *promedio*.

En general para analizar el movimiento unidimensional de un objeto, suponga que en un momento dado llamado t_1, el objeto está en la posición x_1 del eje x de un sistema coordenado, y que en un tiempo posterior t_2, el objeto se ha movido a la posición x_2. El **tiempo transcurrido** es $\Delta t = t_2 - t_1$ y durante este intervalo de tiempo el desplazamiento del objeto fue $\Delta x = x_2 - x_1$. La velocidad promedio, definida como el *desplazamiento dividido entre el tiempo transcurrido*, puede escribirse como

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \qquad \textbf{(2–2)}$$

donde v representa velocidad y la barra ($^{-}$) sobre la v es un símbolo estándar que significa "promedio". (Algunos autores la llaman también "velocidad media").

Para el caso usual del eje $+x$ dirigido hacia la derecha, note que si x_2 es menor que x_1, el objeto se mueve hacia la izquierda y, entonces, $\Delta x = x_2 - x_1$ es menor que cero. El signo del desplazamiento, y por consiguiente el signo de la velocidad promedio, indica entonces la dirección y el sentido del movimiento: la velocidad promedio es positiva si el objeto se mueve hacia la derecha a lo largo del eje $+x$, y es negativa cuando el objeto se mueve hacia la izquierda, a lo largo del eje $-x$. La dirección de la velocidad promedio es siempre la misma que la del desplazamiento.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Los signos + o − se usan para indicar la dirección de un movimiento lineal

Advierta que siempre es importante elegir (y especificar) el *tiempo transcurrido* o *intervalo de tiempo*, $t_2 - t_1$, es decir, el tiempo que transcurre durante nuestro periodo de observación elegido.

EJEMPLO 2–1 **Velocidad promedio de un corredor.** La posición de un corredor en función del tiempo se grafica conforme se mueve a lo largo del eje x de un sistema coordenado. Durante un intervalo de tiempo de 3.00 s, la posición del corredor cambia de $x_1 = 50.0$ m a $x_2 = 30.5$ m, como se muestra en la figura 2-7. ¿Cuál fue la velocidad promedio del corredor?

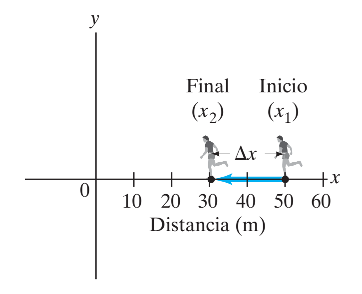
PLANTEAMIENTO Se necesita encontrar la velocidad promedio, que equivale al desplazamiento dividido entre el tiempo transcurrido.

SOLUCIÓN El desplazamiento es $\Delta x = x_2 - x_1 = 30.5\text{ m} - 50.0\text{ m} = -19.5$ m. El tiempo transcurrido, o intervalo de tiempo, es $\Delta t = 3.00$ s. Por lo tanto, la velocidad promedio es

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-19.5\text{ m}}{3.00\text{ s}} = -6.50\text{ m/s}.$$

El desplazamiento y la velocidad promedio son negativos, lo cual nos indica que el corredor se mueve hacia la izquierda a lo largo del eje x, como señala la flecha en la figura 2-7. Así, afirmaremos que la velocidad promedio del corredor es de 6.50 m/s hacia la izquierda.

FIGURA 2–7 Ejemplo 2-1. Una persona corre de $x_1 = 50.0$ m a $x_2 = 30.5$ m. El desplazamiento es −19.5 m.



EJEMPLO 2–2 **Distancia recorrida por un ciclista.** ¿Qué distancia puede recorrer un ciclista en 2.5 h a lo largo de un camino recto, si su velocidad promedio es de 18 km/h?

PLANTEAMIENTO Se requiere encontrar la distancia recorrida, de manera que se despeja Δx de la ecuación 2.2.

SOLUCIÓN Reescribimos la ecuación 2-2 como $\Delta x = \bar{v}\;\Delta t$, y encontramos

$$\Delta x = \bar{v}\;\Delta t = (18\,\text{km/h})(2.5\,\text{h}) = 45\,\text{km}.$$

EJERCICIO B Un automóvil viaja a una rapidez constante de 50 km/h durante 100 km. Luego acelera a 100 km/h y recorre otros 100 km. ¿Cuál es la rapidez promedio de su viaje de 200 km? *a*) 67 km/h; *b*) 75 km/h; *c*) 81 km/h; *d*) 50 km/h.

2–3 Velocidad instantánea



FIGURA 2–8 Velocímetro de un automóvil que muestra las mi/h en números grandes, y los km/h en números pequeños.

Si usted conduce un automóvil a lo largo de un camino recto de 150 km en 2.0 h, la magnitud de su velocidad promedio es de 75 km/h. Sin embargo, es improbable que se haya desplazado precisamente a 75 km/h en cada instante. Para describir esta situación, necesitamos el concepto de *velocidad instantánea*, que es la velocidad en cualquier instante de tiempo. (Su magnitud es el número, con unidades, que indica un velocímetro, como el de la figura 2-8). Con más precisión, la **velocidad instantánea** en cualquier momento se define como *la velocidad promedio durante un intervalo de tiempo infinitesimalmente corto*. Es decir, la ecuación 2-2 debe ser evaluada en el límite en que Δt tiende a un valor sumamente pequeño, que tiende a cero. Podemos escribir la definición de la velocidad instantánea v, para un movimiento unidimensional, como

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad \textbf{(2–3)}$$

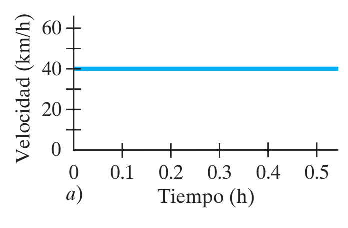
La notación $\lim_{\Delta t \to 0}$ significa que la razón $\Delta x/\Delta t$ debe evaluarse en el límite cuando Δt tiende a cero. Sin embargo, no podemos tomar simplemente $\Delta t = 0$ en esta definición, pues entonces Δx también sería cero y tendríamos un número indefinido. Más bien, consideramos la *razón* $\Delta x/\Delta t$ como un todo. Cuando hacemos que Δt tienda a cero, Δx también tiende a cero; pero la razón $\Delta x/\Delta t$ tiende a un valor bien definido, que es la velocidad instantánea en un instante dado.

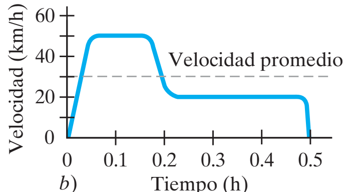
En la ecuación 2-3 el límite cuando $\Delta t \to 0$ se escribe en notación del cálculo como dx/dt y se llama la *derivada* de x con respecto a t:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \qquad \textbf{(2–4)}$$

Esta ecuación es la definición de velocidad instantánea para el movimiento unidimensional.

FIGURA 2–9 Velocidad de un automóvil en función del tiempo: *a*) con velocidad constante; *b*) con velocidad variable.





Para la velocidad instantánea usamos el símbolo v, mientras que para la velocidad promedio usamos $\bar{v}$, con una barra. En el resto de este libro, cuando mencionemos el término "velocidad", nos referiremos a la velocidad instantánea. Cuando queramos hablar de la velocidad promedio, haremos esto más claro incluyendo la palabra "promedio".

Note que la rapidez *instantánea* siempre es igual a la magnitud de la velocidad instantánea. ¿Por qué? Porque la distancia recorrida y la magnitud del desplazamiento resultan iguales cuando se vuelven infinitesimalmente pequeñas.

Si un objeto se mueve con velocidad uniforme (es decir, con velocidad constante) durante un intervalo de tiempo específico, su velocidad instantánea en cualquier instante es la misma que su velocidad promedio (véase la figura 2-9a). Pero en muchas situaciones éste no es el caso. Por ejemplo, un automóvil puede partir del reposo, aumentar la velocidad hasta 50 km/h, permanecer a esta velocidad durante cierto tiempo, luego disminuirla a 20 km/h en un congestionamiento de tránsito y, finalmente, detenerse en su destino después de haber recorrido un total de 15 km en 30 minutos. Este viaje se muestra en la gráfica de la figura 2-9b. Sobre la gráfica se indica también la velocidad promedio (línea punteada), que es $\bar{v} = \Delta x/\Delta t = 15\text{ km}/0.50\text{ h} = 30\text{ km/h}$.

Para entender mejor la velocidad instantánea, consideremos la gráfica de la posición de una partícula específica como función del tiempo (x versus t), como se muestra en la figura 2-10. (Advierta que esto es diferente de mostrar la "trayectoria" de la partícula sobre una gráfica de y versus x.) La partícula está en la posición x_1 en el tiempo t_1, y en la posición x_2 en el tiempo t_2. P_1 y P_2 representan esos dos puntos sobre la gráfica. Una línea recta dibujada del punto $P_1(x_1, t_1)$ al punto $P_2(x_2, t_2)$ forma la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son Δx y Δt. La razón $\Delta x/\Delta t$ es la **pendiente** de la línea recta P_1P_2. Pero $\Delta x/\Delta t$ es también la velocidad promedio de la partícula durante el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$. Por lo tanto, concluimos que la velocidad promedio de una partícula durante cualquier intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ es igual a la pendiente de la línea recta (o *cuerda*) que conecta los dos puntos (x_1, t_1) y (x_2, t_2) sobre una gráfica de x *versus* t.

Considere ahora un tiempo t_i, intermedio entre t_1 y t_2, en el que la partícula está en x_i (figura 2-11). La pendiente de la línea recta P_1P_i es menor que la pendiente de P_1P_2 del caso anterior. Así, la velocidad promedio durante el intervalo de tiempo $t_i - t_1$ es menor que durante el intervalo de tiempo $t_2 - t_1$.

Imaginemos ahora que tomamos el punto P_i en la figura 2-11 cada vez más cercano al punto P_1. Es decir, hacemos que el intervalo $t_i - t_1$, que ahora llamamos Δt, se vuelva cada vez más pequeño. La pendiente de la línea que conecta los dos puntos se vuelve cada vez más cercana a la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P_1. La velocidad promedio (igual a la pendiente de la cuerda), por lo tanto, tiende a la pendiente de la tangente en el punto P_1. La definición de la velocidad instantánea (ecuación 2-3) es el valor límite de la velocidad promedio cuando Δt tiende a cero. Entonces, la *velocidad instantánea es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva* en ese punto (lo que simplemente llamamos "la pendiente de la curva" en ese punto).

Como la velocidad en cualquier instante es igual a la pendiente de la tangente a la gráfica de x versus t en ese instante, podemos obtener la velocidad en cualquier instante con una gráfica así. Por ejemplo, en la figura 2-12 (que muestra la misma curva de las figuras 2-10 y 2-11), cuando nuestro objeto se mueve de x_1 a x_2, la pendiente crece continuamente, por lo que la velocidad está aumentando. Sin embargo, para tiempos posteriores a t_2, la pendiente empieza a disminuir hasta que alcanza el valor cero ($v = 0$) cuando x tiene su valor máximo, en el punto P_3 de la figura 2-12. Más allá de este punto, la pendiente es negativa, como en el punto P_4. Por lo tanto, la velocidad es negativa, lo cual tiene sentido dado que x está ahora disminuyendo: la partícula se está moviendo hacia valores decrecientes de x, hacia el origen a lo largo del eje xy.

Si un objeto se mueve con velocidad constante durante un intervalo de tiempo particular, su velocidad instantánea será igual a su velocidad promedio. La gráfica de x versus t en este caso será una línea recta cuya pendiente es igual a la velocidad. La curva de la figura 2-10 no tiene secciones rectas, por lo que no hay intervalos de tiempo para los que la velocidad es constante.

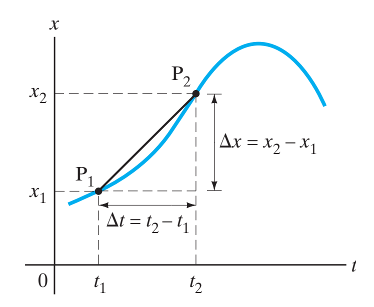


FIGURA 2–10 Gráfica de la posición x de una partícula versus el tiempo t. La pendiente de la línea recta P_1P_2 representa la velocidad promedio de la partícula durante el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$.

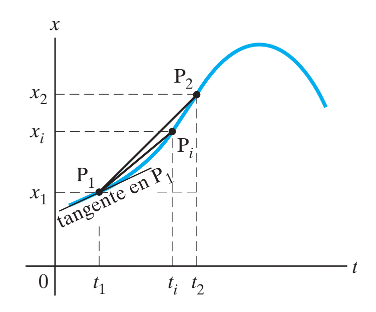


FIGURA 2–11 Misma curva posición versus tiempo que en la figura 2-10, pero advierta que la velocidad promedio sobre el intervalo de tiempo $t_i - t_1$ (que es la pendiente de P_1P_i) es menor que la velocidad promedio sobre el intervalo de tiempo $t_2 - t_1$. La pendiente de la línea delgada tangente a la curva en el punto P_1, es igual a la velocidad instantánea en el tiempo t_1.

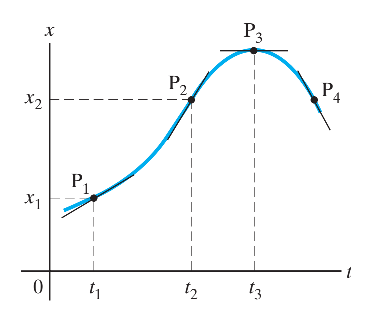


FIGURA 2–12 Misma curva x *versus* t que en las figuras 2-10 y 2-11, pero aquí se muestra la pendiente en cuatro instantes diferentes. En P_3 la pendiente es cero, por lo que $v = 0$. En P_4 la pendiente es negativa, así que $v < 0$.

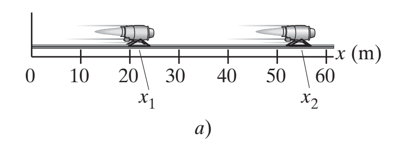
EJERCICIO C ¿Cuál es su rapidez en el instante en que usted se da la vuelta para moverse en sentido contrario? *a*) Depende de qué tan rápido se dé la vuelta; *b*) siempre es cero; *c*) siempre es negativa; *d*) ninguna de las anteriores.

Las derivadas de varias funciones se estudian en cursos de cálculo, y en este libro se incluye un resumen en el Apéndice B. Las derivadas de funciones polinomiales (que utilizamos con mucha frecuencia) son:

$$\frac{d}{dt}\left(Ct^n\right) = nCt^{n-1} \quad \text{y} \quad \frac{dC}{dt} = 0,$$

donde C es una constante.

EJEMPLO 2–3 **Dada *x* como función de *t*.** Un motor de propulsión a chorro se mueve a lo largo de una pista experimental (que llamamos el eje x) como se muestra en la figura 2-13a. Trataremos al motor como si fuera una partícula. Su posición en función del tiempo está dada por la ecuación $x = At^2 + B$, donde $A = 2.10\ \text{m/s}^2$ y $B = 2.80$ m; esta ecuación se grafica en la figura 2-13b. *a*) Determine el desplazamiento del motor durante el intervalo de tiempo de $t_1 = 3.00$ s a $t_2 = 5.00$ s. *b*) Determine la velocidad promedio durante este intervalo de tiempo. *c*) Determine la magnitud de la velocidad instantánea en $t = 5.00$ s.



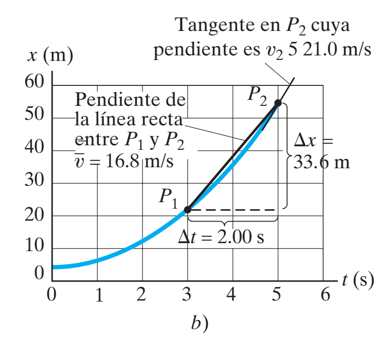


FIGURA 2–13 Ejemplo 2–3. *a*) Un motor de propulsión a chorro que viaja sobre una pista recta. *b*) Gráfica de x versus t: $x = At^2 + b$.

PLANTEAMIENTO Sustituimos los valores para t_1 y t_2 en la ecuación dada para x para obtener x_1 y x_2. La velocidad promedio se encuentra usando la ecuación 2-2. Tomamos la derivada respecto del tiempo de la x dada como función de t para encontrar la velocidad instantánea, usando las fórmulas dadas arriba.

SOLUCIÓN *a*) En $t_1 = 3.00$ s, la posición (punto P_1 en la figura 2-13b) es

$$x_1 = At_1^2 + B = \left(2.10\ \text{m/s}^2\right)(3.00\ \text{s})^2 + 2.80\ \text{m} = 21.7\ \text{m}.$$

En $t_2 = 5.00$ s, la posición (P_2 en la figura 2-13b) es

$$x_2 = \left(2.10\ \text{m/s}^2\right)(5.00\ \text{s})^2 + 2.80\ \text{m} = 55.3\ \text{m}.$$

El desplazamiento es, entonces,

$$x_2 - x_1 = 55.3\ \text{m} - 21.7\ \text{m} = 33.6\ \text{m}.$$

b) La magnitud de la velocidad promedio se calcula como

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{33.6\ \text{m}}{2.00\ \text{s}} = 16.8\ \text{m/s}.$$

Esto es igual a la pendiente de la línea recta que une los puntos P_1 y P_2 que se muestran en la figura 2-13b.

c) La velocidad instantánea en $t = t_2 = 5.00$ s es igual a la pendiente de la tangente a la curva en el punto P_2 de la figura 2-13b; podríamos medir esta pendiente en la gráfica para obtener v_2. Pero calculamos v más precisamente para cualquier tiempo t, usando la ecuación dada

$$x = At^2 + B,$$

que es la posición x del motor como función del tiempo t. Tomamos la derivada de x con respecto al tiempo (véase las definiciones de derivadas dadas anteriormente):

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(At^2 + B\right) = 2At.$$

Se nos da $A = 2.10\ \text{m/s}^2$, por lo que para $t = t_2 = 5.00$ s,

$$v_2 = 2At = 2\left(2.10\ \text{m/s}^2\right)(5.00\ \text{s}) = 21.0\ \text{m/s}.$$

2–4 Aceleración

Se dice que un objeto cuya velocidad cambia está sometido a aceleración. Por ejemplo, un automóvil cuya velocidad crece en magnitud de cero a 80 km/h está acelerando. La aceleración especifica qué tan rápidamente está cambiando la velocidad del objeto.

Aceleración promedio

La **aceleración promedio** se define como el cambio en la velocidad dividido entre el tiempo que toma efectuar este cambio:

$$\text{aceleración promedio} = \frac{\text{cambio de velociad}}{\text{tiempo transcurrido}}.$$

En símbolos, la aceleración promedio, en un intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ durante el cual la velocidad cambia en $\Delta v = v_2 - v_1$, se define como

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \qquad \textbf{(2–5)}$$

Como la velocidad es un vector, la aceleración también es un vector; pero para el movimiento unidimensional, basta usar un solo signo de más o de menos para indicar el sentido de la aceleración respecto de un sistema coordenado dado.

EJEMPLO 2–4 **Aceleración promedio.** Un automóvil acelera a lo largo de un camino recto, desde el reposo hasta 90 km/h en 5.0 s (figura 2-14). ¿Cuál es la magnitud de su aceleración promedio?

PLANTEAMIENTO La aceleración promedio es el cambio en la velocidad dividido entre el tiempo transcurrido, 5.0 s. El automóvil parte del reposo, por lo que $v_1 = 0$. La velocidad final es $v_2 = 90\ \text{km/h} = 90 \times 10^3\ \text{m}/3600\ \text{s} = 25\ \text{m/s}$.

SOLUCIÓN De la ecuación 2-5, la aceleración promedio es

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{25\ \text{m/s} - 0\ \text{m/s}}{5.0\ \text{s}} = 5.0\,\frac{\text{m/s}}{\text{s}}.$$

Esto se lee como "cinco metros por segundo por segundo" y significa que, en promedio, la velocidad cambió 5.0 m/s en cada segundo. Es decir, suponiendo que la aceleración fuera constante, durante el primer segundo la velocidad del automóvil aumentó de cero a 5.0 m/s. Durante el siguiente segundo su velocidad aumentó otros 5.0 m/s, alcanzando una velocidad de 10.0 m/s en $t = 2.0$ s, y así sucesivamente (véase la figura 2-14).

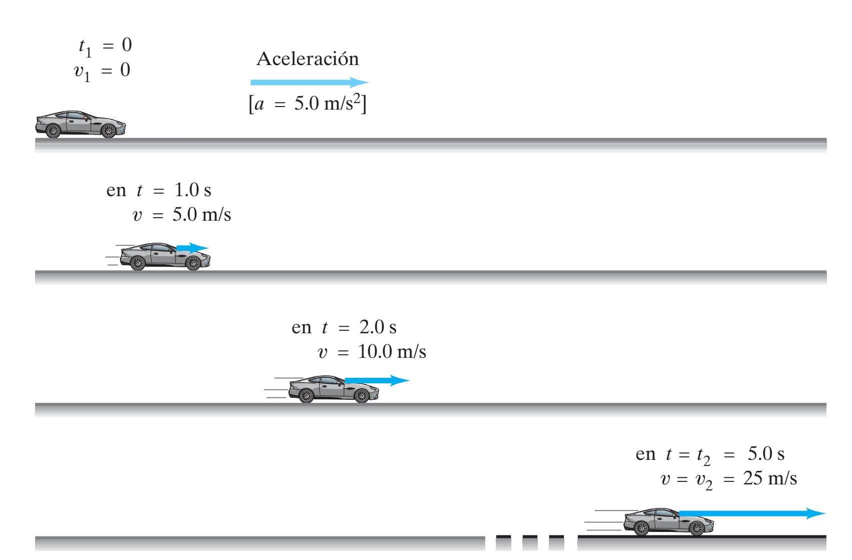


FIGURA 2–14 Ejemplo 2-4. El automóvil se muestra al inicio con $v_1 = 0$ en $t_1 = 0$. El auto se muestra tres veces más, en $t = 1.0$ s, en $t = 2.0$ s y, al final de nuestro intervalo de tiempo, en $t_2 = 5.0$ s. Suponemos que la aceleración es constante e igual a 5.0 m/s^2. Las flechas anaranjadas representan los vectores velocidad; la longitud de cada flecha representa la magnitud de la velocidad en ese momento. El vector aceleración es la flecha gris. Las distancias no están dibujadas a escala.

Las unidades para aceleración casi siempre se escriben como m/s^2 (metros por segundo al cuadrado), en vez de m/s/s. Esto es posible porque:

$$\frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}\cdot\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

De acuerdo con el cálculo del ejemplo 2-4, la velocidad cambió en promedio 5.0 m/s durante cada segundo, para un cambio total de 25 m/s durante los 5.0 s; la aceleración promedio fue de 5.0 m/s^2.

Note que *la aceleración nos indica qué tan rápido cambia la velocidad*, mientras que *la velocidad nos dice qué tan rápido cambia la posición*.

EJEMPLO CONCEPTUAL 2–5 **Velocidad y aceleración.** *a*) Si la velocidad de un objeto es cero, ¿significa esto que la aceleración es cero? *b*) Si la aceleración es cero, ¿significa esto que la velocidad es cero? Mencione algunos ejemplos.

RESPUESTA Si la velocidad es cero no significa necesariamente que la aceleración sea cero, ni una aceleración cero implica necesariamente que la velocidad sea cero. *a*) Por ejemplo, cuando usted pisa el pedal del acelerador de su automóvil que está en reposo, la velocidad comienza desde cero; pero la aceleración no es cero, ya que cambia la velocidad del automóvil. (¿De qué otra manera podría arrancar su automóvil si la velocidad no estuviera cambiando, esto es, si no acelerara?) *b)* Si conduce su automóvil a lo largo de un camino recto a una velocidad constante de 100 km/h, su aceleración es cero: $a = 0$, pero $v \neq 0$.

EJERCICIO D Se anuncia que un automóvil potente va desde cero hasta 60 mi/h en 6.0 s. ¿Qué indica esto acerca del auto: *a*) que es rápido (alta rapidez); o *b*) que acelera bien?

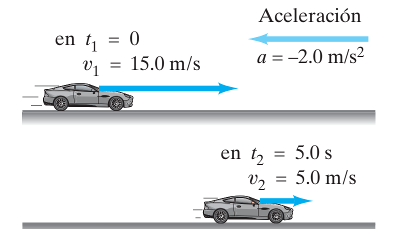


FIGURA 2–15 Ejemplo 2-6. Se muestra la posición del automóvil en los instantes t_1 y t_2, así como la velocidad del automóvil representada por las flechas anaranjadas. El vector aceleración (flecha gris) señala hacia la izquierda, lo que significa que el auto frena mientras se mueve a la derecha.

EJEMPLO 2–6 **Automóvil que desacelera.** Un automóvil se mueve hacia la derecha a lo largo de un camino recto, que llamamos el eje *x* positivo (figura 2-15) cuando el conductor aplica los frenos. Si la velocidad inicial (cuando el conductor acciona los frenos) es $v_1 = 15.0$ m/s, y toma 5.0 s desacelerar a $v_2 = 5.0$ m/s, ¿cuál fue la aceleración promedio del automóvil?

PLANTEAMIENTO Dada la velocidad inicial, la velocidad final y el tiempo transcurrido, usamos la ecuación 2-5 para calcular la aceleración promedio $\bar{a}$.

SOLUCIÓN Se emplea la ecuación 2-5, tomando el tiempo inicial $t_1 = 0$; el tiempo final $t_2 = 5.0$ s. (Note que elegir $t_1 = 0$ no afecta el cálculo de $\bar{a}$ porque sólo $\Delta t = t_2 - t_1$ aparece en la ecuación 2-5). Entonces,

$$\bar{a} = \frac{5.0\,\text{m/s} - 15.0\,\text{m/s}}{5.0\,\text{s}} = -2.0\,\text{m/s}^2.$$

El signo negativo aparece porque la velocidad final es menor que la velocidad inicial. En este caso, el sentido de la aceleración es hacia la izquierda (en el sentido *x* negativo), aun cuando la velocidad siempre apunta hacia la derecha. Podemos decir que la aceleración es de 2.0 m/s^2 hacia la izquierda como se muestra en la figura 2-15 como una flecha gris.

Desaceleración



CUIDADO

Desaceleración significa que la magnitud de la velocidad disminuye; no *significa necesariamente que la aceleración a sea negativa*

Cuando un objeto está frenando, decimos que está **desacelerando**. Pero cuidado: la desaceleración *no* implica que la aceleración sea necesariamente negativa. La velocidad de un objeto que se mueve hacia la derecha a lo largo del eje *x* positivo es positiva; si el objeto está frenando (como en la figura 2-15), la aceleración *es* negativa. Pero el mismo automóvil, moviéndose hacia la izquierda (*x* decreciente) y frenando, tiene aceleración positiva que señala hacia la derecha, como se indica en la figura 2-16. Tenemos una desaceleración siempre que la magnitud de la velocidad disminuye, de modo que la velocidad y la aceleración apuntan en sentidos opuestos.

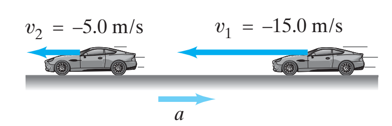


FIGURA 2–16 El mismo automóvil que en el ejemplo 2-6, pero ahora moviéndose hacia la *izquierda* y desacelerando. La aceleración es positiva:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{(-5.0\,\text{m/s}) - (-15.0\,\text{m/s})}{5.0\,\text{s}} = \frac{-5.0\,\text{m/s} + 15.0\,\text{m/s}}{5.0\,\text{s}} = +2.0\,\text{m/s}.$$

EJERCICIO E Un automóvil se mueve a lo largo del eje *x*. ¿Cuál es el signo de la aceleración del auto, si se mueve en el sentido *x* positivo con *a*) rapidez creciente o *b*) rapidez decreciente? ¿Cuál es el signo de la aceleración, si el auto se mueve en el sentido del eje negativo con *c*) rapidez creciente o *d*) rapidez decreciente?

Aceleración instantánea

La **aceleración instantánea**, a, se define como el *valor límite de la aceleración promedio cuando* Δt *tiende a cero*:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \qquad \textbf{(2–6)}$$

Este límite, dv/dt, es la derivada de v con respecto a t. Usaremos el término "aceleración" para referirnos al valor instantáneo. Si queremos discutir la aceleración promedio, siempre incluiremos la palabra "promedio".

Si dibujamos una gráfica de la velocidad, v, versus tiempo, t, como se muestra en la figura 2.17, entonces la aceleración promedio sobre un intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ corresponde a la pendiente de la línea recta que conecta los dos puntos P_1 y P_2, como se indica en la figura. [Compare esto con la gráfica de posición versus tiempo de la figura 2-10, en la cual la pendiente de la línea recta corresponde a la velocidad promedio]. La aceleración instantánea en cualquier tiempo, digamos t_1, es la pendiente de la recta tangente a la curva v versus t en ese instante, que también se muestra en la figura 2-17. Usemos este hecho para la situación graficada en la figura 2-17; cuando pasamos del tiempo t_1 al tiempo t_2, la velocidad crece continuamente, pero la aceleración (la razón de cambio de la velocidad) decrece, ya que la pendiente de la curva es decreciente.

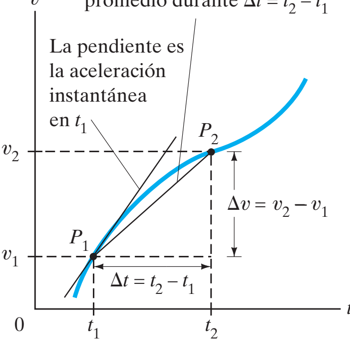


FIGURA 2–17 Una gráfica de velocidad v versus tiempo t. La aceleración promedio en un intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ es la pendiente de la línea recta que une los puntos P_1 y P_2: $\bar{a} = \Delta v/\Delta t$. La aceleración instantánea en el tiempo t_1 es la pendiente de la curva v versus t en ese instante.

EJEMPLO 2–7 **Aceleración a partir de $x(t)$.** Una partícula se mueve en una línea recta, de manera que su posición como función del tiempo está dada por la ecuación $x = (2.10\ \text{m/s}^2)t^2 + (2.80\ \text{m})$, como en el ejemplo 2-3. Calcule *a*) su aceleración promedio durante el intervalo de tiempo de $t_1 = 3.00$ s a $t_2 = 5.00$ s, y *b*) su aceleración instantánea como función del tiempo.

PLANTEAMIENTO Para determinar la aceleración, primero debemos encontrar la velocidad en t_1 y en t_2 diferenciando x: $v = dx/dt$. Después, usamos la ecuación 2-5 para encontrar la aceleración promedio, y la ecuación 2-6 para encontrar la aceleración instantánea.

SOLUCIÓN *a*) La velocidad en cualquier tiempo t es

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(2.10\ \text{m/s}^2)t^2 + 2.80\ \text{m}\right] = (4.20\ \text{m/s}^2)t,$$

como vimos en el ejemplo 2-3*c*. Por lo tanto, en $t_1 = 3.00$ s, $v_1 = (4.20\ \text{m/s}^2)(3.00\ \text{s}) = 12.6$ m/s y en $t_2 = 5.00$ s, $v_2 = 21.0$ m/s. Así que,

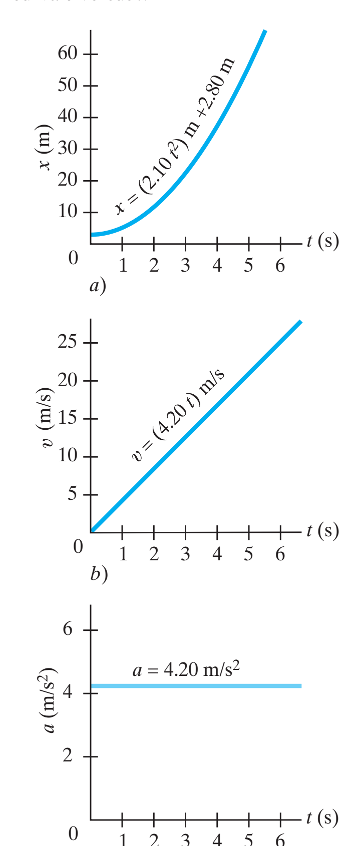
$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{21.0\ \text{m/s} - 12.6\ \text{m/s}}{5.00\ \text{s} - 3.00\ \text{s}} = 4.20\ \text{m/s}^2.$$

b) Dada ahora $v = (4.20\ \text{m/s}^2)t$, la aceleración instantánea en cualquier tiempo es

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(4.20\ \text{m/s}^2)t\right] = 4.20\ \text{m/s}^2.$$

La aceleración en este caso es constante y no depende del tiempo. La figura 2-18 muestra las gráficas de *a*) x versus t (igual que en la figura 2-13b), *b*) v versus t, que crece linealmente como se calculó arriba, y *c*) a versus t, que es una línea recta horizontal porque $a =$ constante.

FIGURA 2–18 Ejemplo 2-7. Gráficas de *a*) x versus t, *b*) v versus t, y *c*) a versus t, para el movimiento $x = At^2 + B$. Note que v crece linealmente con t y que la aceleración a es constante. También, v es la pendiente de la curva x versus t, mientras que a es la pendiente de la curva v versus t.



Al igual que la velocidad, la aceleración es una razón de cambio. La velocidad de un objeto es la razón de cambio a la que el desplazamiento cambia con el tiempo; por otro lado, su aceleración es la razón de cambio a la que su velocidad cambia con el tiempo. En cierto sentido, la aceleración es una "razón de una razón". Esto puede expresarse en forma de ecuación como sigue: dado que $a = dv/dt$ y $v = dx/dt$, entonces,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Aquí, d^2x/dt^2 es la *segunda derivada* de x con respecto al tiempo; primero tomamos la derivada de x con respecto al tiempo (dx/dt) y luego tomamos de nuevo la derivada con respecto al tiempo, $(d/dt)(dx/dt)$, para obtener la aceleración.

EJERCICIO F La posición de una partícula está dada por la ecuación:

$$x = (2.00\ \text{m/s}^3)t^3 + (2.50\ \text{m/s})t.$$

¿Cuál es la aceleración de la partícula en $t = 2.00$ s? (Escoja un valor) *a*) 13.0 m/s^2; *b*) 22.5 m/s^2; *c*) 24.0 m/s^2; *d*) 2.00 m/s^2.

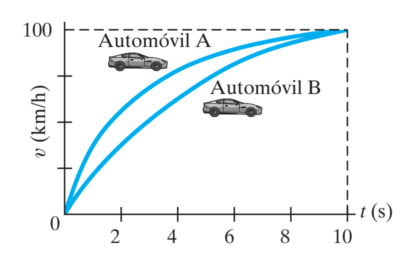


FIGURA 2–19 Ejemplo 2–8.

EJEMPLO CONCEPTUAL 2–8 **Análisis con gráficas.** La figura 2-19 muestra la velocidad como función del tiempo para dos automóviles que aceleran de 0 a 100 km/h en un tiempo de 10.0 s. Compare *a*) la aceleración promedio; *b*) la aceleración instantánea; y *c*) la distancia total recorrida por los dos automóviles.

RESPUESTA a) La aceleración promedio es $\Delta v/\Delta t$. Ambos automóviles tienen la misma Δv (100 km/h) y el mismo Δt (10.0 s), por lo que la aceleración promedio es la misma para ambos vehículos. *b*) La aceleración instantánea es la pendiente de la tangente a la curva v versus t. Durante casi los primeros 4 s, la curva superior está más empinada que la inferior, de manera que el auto A tiene una mayor aceleración durante este intervalo. La curva de la parte inferior está más empinada durante los últimos 4 s, por lo que el auto B tiene la mayor aceleración en este periodo de tiempo. *c*) Excepto en $t = 0$ y $t = 10.0$ s, el auto A siempre va más rápido que el auto B. Puesto que va más rápido, irá más lejos en mismo tiempo.

2–5 Movimiento con aceleración constante

Ahora examinemos la situación cuando la magnitud de la aceleración es constante y el movimiento es en línea recta. En este caso, las aceleraciones instantánea y promedio son iguales. Utilizaremos las definiciones de velocidad promedio y aceleración, para deducir un conjunto de ecuaciones extremadamente útiles que relacionan x, v, a y t cuando a es constante, lo cual permite determinar cualquiera de esta variables si se conocen las otras.

Para simplificar nuestra notación, tomemos el tiempo inicial en cualquier análisis que hagamos como cero, y se le llama: t_0: $t_1 = t_0 = 0$. (Esto equivale a poner en marcha un cronómetro en t_0.) Podemos luego considerar que $t_2 = t$ sea el tiempo transcurrido. La posición inicial (x_1) y la velocidad inicial (v_1) de un objeto estarán ahora representadas por x_0 y v_0, ya que representan x y v en $t = 0$. En el tiempo t, la posición y la velocidad se llamarán x y v (en vez de x_2 y v_2). La velocidad promedio durante el intervalo de tiempo $t - t_0$ será (ecuación 2-2)

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{x - x_0}{t}$$

ya que elegimos $t_0 = 0$. Y la aceleración, que se supone constante en el tiempo, será (ecuación 2-5)

$$a = \frac{v - v_0}{t}.$$

Un problema común consiste en determinar la velocidad de un objeto después de cualquier tiempo transcurrido t, dada su aceleración constante. Podemos resolver tal problema despejando v en la última ecuación:

$$v = v_0 + at. \qquad \text{[aceleración constante]} \quad \textbf{(2–7)}$$

Si un objeto parte del reposo ($v_0 = 0$) y acelera a 4.0 m/s^2, después de un tiempo transcurrido $t = 6.0$ s, su velocidad será $v = at = (4.0 \text{ m/s}^2)(6.0 \text{ s}) = 24$ m/s.

A continuación, veamos cómo calcular la posición x de un objeto después de un tiempo t, cuando está sometido a una aceleración constante. La definición de velocidad promedio (ecuación 2-2) es $v = (x - x_0)/t$, que podemos reescribir como

$$x = x_0 + \bar{v}t. \qquad \textbf{(2–8)}$$

Como la velocidad aumenta de manera uniforme, la velocidad promedio $\bar{v}$ estará a la mitad entre las velocidades inicial y final:



CUIDADO

Nos da la velocidad promedio sólo sí a = constante

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}. \qquad \text{[aceleración constante]} \quad \textbf{(2–9)}$$

(Cuidado: La ecuación 2-9 es válida sólo si la aceleración es constante). Combinando las últimas dos ecuaciones con la ecuación 2-7 y obtenemos

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \bar{v}t \\ &= x_0 + \left(\frac{v_0 + v}{2}\right)t \\ &= x_0 + \left(\frac{v_0 + v_0 + at}{2}\right)t \end{aligned}$$

o

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2. \qquad \text{[aceleración constante]} \quad \textbf{(2–10)}$$

Las ecuaciones 2-7, 2-9 y 2-10 son tres de las cuatro ecuaciones más útiles del movimiento con aceleración constante. Ahora derivaremos la cuarta ecuación, que es útil en situaciones donde no se conoce el tiempo t. Sustituimos la ecuación 2-9 en la ecuación 2-8:

$$x = x_0 + \bar{v}t = x_0 + \left(\frac{v + v_0}{2}\right)t.$$

A continuación despejamos t en la ecuación 2-7 y obtenemos

$$t = \frac{v - v_0}{a},$$

y sustituyendo este valor en la ecuación anterior, resulta

$$x = x_0 + \left(\frac{v + v_0}{2}\right)\left(\frac{v - v_0}{a}\right) = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a}.$$

Despejamos v^2 en esta ecuación y obtenemos

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0), \qquad \text{[aceleración constante]} \quad \textbf{(2–11)}$$

que es la ecuación útil que buscábamos.

Tenemos ahora cuatro ecuaciones que relacionan la posición, la velocidad, la aceleración y el tiempo, cuando la aceleración a es constante. Estas ecuaciones cinemáticas se dejan aquí para referencia futura (están remarcadas para resaltar su utilidad):

Ecuaciones cinemáticas para aceleración constante (haremos amplio uso de ellas)

$$v = v_0 + at \qquad [a = \text{constante}] \quad \textbf{(2–12a)}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad [a = \text{constante}] \quad \textbf{(2–12b)}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \qquad [a = \text{constante}] \quad \textbf{(2–12c)}$$

$$\bar{v} = \frac{v + v_0}{2}. \qquad [a = \text{constante}] \quad \textbf{(2–12d)}$$

Estas ecuaciones útiles sólo son válidas en el caso en que a sea constante. En muchos casos, es posible establecer $x_0 = 0$, y esto simplifica un poco las ecuaciones anteriores. Advierta que x representa posición, no distancia, que $x - x_0$ es el desplazamiento y que t es el tiempo transcurrido.


FÍSICA APLICADA
Diseño de aeropuertos

EJEMPLO 2–9 Diseño de una pista de aterrizaje. Usted diseña un aeropuerto para aviones pequeños. El tipo de avión que podría usar este aeropuerto puede acelerar a 2.00 m/s² y debe alcanzar una rapidez, antes de despegar, de por lo menos 27.8 m/s (100 km/h). *a*) Si la pista tiene 150 m de longitud, ¿puede este avión alcanzar la rapidez mínima que se requiere para despegar? *b*) En caso negativo, ¿qué longitud mínima debería tener la pista?

PLANTEAMIENTO La aceleración del avión es constante, así que se usaremos las ecuaciones cinemáticas para aceleración constante. En *a*) queremos encontrar v y se nos proporcionan los siguientes datos:

Se conoce	Se busca
$x_0 = 0$	v
$v_0 = 0$	
$x = 150\,\text{m}$	
$a = 2.00\,\text{m/s}^2$	

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Las ecuaciones 2-12 son válidas sólo cuando la aceleración es constante, como supusimos en este ejemplo

SOLUCIÓN *a*) De las cuatro ecuaciones anteriores, la ecuación 2-12*c* nos proporcionará v cuando conozcamos v_0, a, x y x_0:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$
$$= 0 + 2(2.00\,\text{m/s}^2)(150\,\text{m}) = 600\,\text{m}^2/\text{s}^2$$
$$v = \sqrt{600\,\text{m}^2/\text{s}^2} = 24.5\,\text{m/s}.$$

Esta pista *no* tiene suficiente longitud.

b) Ahora se pretende encontrar la longitud mínima de la pista, $x - x_0$, dados $v = 27.8$ m/s y $a = 2.00$ m/s². Así que recurrimos a la ecuación 2-12*c* de nuevo reescrita como

$$(x - x_0) = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{(27.8\,\text{m/s})^2 - 0}{2(2.00\,\text{m/s}^2)} = 193\,\text{m}.$$

Una pista de 200 m es más conveniente para este avión.

NOTA Resolvimos este ejemplo como si el avión fuera una partícula, por lo que redondeamos nuestra respuesta a 200 m.

EJERCICIO G Un automóvil parte del reposos y acelera a 10 m/s² constantes durante una carrera de Δ de milla (402 m). ¿Qué tan rápido viaja el automóvil cuando cruza la línea de meta? *a*) 8090 m/s; *b*) 90 m/s; *c*) 81 m/s; *d*) 809 m/s.

2–6 Resolución de problemas

Antes de resolver más ejemplos, es conveniente precisar cómo plantear la solución de un problema en general. Primero es importante notar que la física *no* es una colección de ecuaciones para memorizar. Buscar simplemente una ecuación que funcione puede conducir a un resultado equivocado, y ciertamente no le ayudará a entender la física. Un mejor enfoque, consiste en usar el siguiente procedimiento (burdo), que ponemos en una sección especial. (A lo largo del libro se encontrarán otros recuadros, como ayuda, con estrategias de resolución e problemas).

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1. Lea y **relea** todo el problema cuidadosamente antes de intentar resolverlo.
2. Decida qué **objeto** (u objetos) se van a estudiar y durante qué **intervalo de tiempo**. Normalmente puede elegir el instante inicial como $t = 0$.
3. **Dibuje** un **diagrama** o figura de la situación, con ejes coordenados siempre que sea posible. [Puede elegir el origen de coordenadas, así como los ejes en cualquier lugar, para simplificar sus cálculos].
4. **Escriba** qué cantidades son "**conocidas**" o "dadas", y luego lo que usted *quiere* conocer. Considere cantidades tanto al principio como al final del intervalo de tiempo elegido.
5. Piense sobre qué **principios de la física** son aplicables en este problema. Use el sentido común y su propia experiencia. Luego planee una aproximación al problema.
6. Considere qué ecuaciones (y/o definiciones) se refieren a las cantidades involucradas. Antes de usar ecuaciones, asegúrese de que su **rango de validez** permita aplicarlas a su problema (por ejemplo, las ecuaciones 2-12 son válidas sólo cuando la aceleración es constante). Si encuentra una ecuación aplicable que contenga sólo cantidades conocidas y una incógnita buscada, **despeje** algebraicamente la ecuación para la incógnita. En muchos casos, quizá sea necesario realizar varios cálculos secuenciales o una combinación de ecuaciones. A menudo conviene despejar algebraicamente las incógnitas buscadas, antes de poner valores numéricos en la ecuación.
7. Lleve a cabo el **cálculo** si se trata de un problema numérico. Mantenga uno o dos dígitos extra durante los cálculos; pero redondee la(s) respuesta(s) final(es) al número correcto de cifras significativas (sección 1-3).
8. Piense cuidadosamente sobre el resultado que obtenga: ¿Es **razonable**? ¿Tiene sentido de acuerdo con su propia intuición y experiencia? Una buena comprobación consiste en hacer una **estimación** burda usando sólo potencias de diez, como se vio en la sección 1-6. A menudo es preferible hacer una estimación burda al *principio* de un problema numérico, porque ello puede ayudarlo a centrar su atención para encontrar una ruta hacia su solución.
9. Un aspecto muy importante de la resolución de problemas es el control de las **unidades**. Un signo de igual implica que las unidades a cada lado de éste deben ser las mismas, tal como lo deben ser los números. Si las unidades no se equilibran, se habrá cometido un error. Esto puede servir como una **comprobación** en su solución (aunque sólo puede indicarle si está equivocada, mas no si es correcta). Además use siempre un conjunto de unidades consistente.

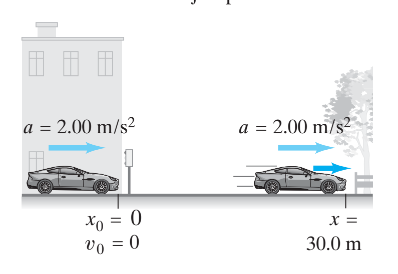
EJEMPLO 2–10 **Aceleración de un automóvil.** ¿Cuánto tiempo le toma a un automóvil cruzar una intersección de 30.0 m de ancho después de que el semáforo se pone en luz verde considerando que el automóvil parte del reposo con una aceleración constante de 2.00 m/s^2?

PLANTEAMIENTO Seguiremos el recuadro de solución de problemas, paso a paso.

SOLUCIÓN

1. **Lea de nuevo** el problema. Asegúrese de entender qué es lo que se pide (en este caso, un periodo de tiempo).
2. El **objeto** en estudio es el automóvil. Elegimos un **intervalo de tiempo**: $t = 0$, el tiempo inicial, es el momento en que el automóvil comienza a acelerar desde el reposo ($v_0 = 0$); y el tiempo t es el instante en que el auto ha recorrido los 30.0 m de ancho de la intersección.
3. **Dibuje** un **diagrama**. La situación se representa en la figura 2-20, donde el automóvil se mueve a lo largo del eje x positivo. Se elige $x_0 = 0$ en el parachoques delantero del auto antes de que comience a moverse.

FIGURA 2–20 Ejemplo 2–10.



4. Los datos “**conocidos**” y los que “se buscan” se incluyen en la tabla al margen, y se elige $x_0 = 0$. Note que la expresión “parte del reposo” significa $v = 0$ en $t = 0$; esto es, $v_0 = 0$.
5. La **física**: El movimiento ocurre con aceleración constante, así que se pueden usar las ecuaciones cinemáticas con aceleración constante (ecuaciones 2-12).
6. **Ecuaciones**: Queremos encontrar el tiempo, y se conoce la distancia y la aceleración; la ecuación 2-12b es perfecta puesto que la única incógnita es t. Al establecer $v_0 = 0$ y $x_0 = 0$ en la ecuación 2-12b ($x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$), se despeja para t:

$$x = \tfrac{1}{2}at^2,$$
$$t^2 = \frac{2x}{a},$$

así que

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}}.$$

7. El **cálculo**:

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2(30.0\,\text{m})}{2.00\,\text{m/s}^2}} = 5.48\,\text{s}.$$

Ésta es la respuesta. Note que las unidades resultan correctas.

8. Lo **razonable** de la respuesta se comprueba al calcular la velocidad final $v = at = (2.00\text{ m/s}^2)(5.48\text{ s}) = 10.96\text{ m/s}$, y luego al encontrar $x = x_0 + \bar{v}t = 0 + \frac{1}{2}(10.96\text{ m/s} + 0)(5.48\text{ s}) = 30.0\text{ m}$, que es la distancia dada.
9. Comprobamos que las **unidades** concuerden perfectamente (segundos).

NOTA En los pasos 6 y 7, cuando tomamos la raíz cuadrada, debería haberse escrito $t = \pm\sqrt{2x/a} = \pm 5.48\,\text{s}$. Matemáticamente hay dos soluciones. Pero la segunda solución, $t = -5.48$ s, es un tiempo *anterior* al intervalo de tiempo elegido y físicamente no tiene sentido. Decimos que es “no tiene sentido” y se le ignora.

Se conoce	Se busca
$x_0 = 0$	t
$x = 30.0\text{ m}$	
$a = 2.00\text{ m/s}^2$	
$v_0 = 0$	

En el ejemplo 2-10 se siguieron explícitamente los pasos del recuadro de resolución de problemas. En los ejemplos que siguen usaremos nuestro “planteamiento” y “solución” habituales para evitar explicaciones demasiado detalladas.

EJEMPLO 2–11 **ESTIMACIÓN** **Bolsas de aire.** Suponga que usted quiere diseñar un sistema de bolsas de aire que proteja al conductor de un automóvil en una colisión frontal contra un muro a una rapidez de 100 km/h (60 mph). Estime qué tan rápido se debe inflar la bolsa de aire (figura 2-21) para proteger efectivamente al conductor. ¿Cómo ayuda al conductor el uso de un cinturón de seguridad?

PLANTEAMIENTO Suponemos que la aceleración es aproximadamente constante, así que podemos usar las ecuaciones 2-12. Tanto la ecuación 2-12a como la 2-12b contienen t, la incógnita deseada. Ambas contienen a, así que primero se debe encontrar a, lo cual se consigue con la ecuación 2-12c si se conoce la distancia x sobre la que el automóvil se comprime. Una estimación aproximada estaría alrededor de 1 metro. Elegimos el tiempo inicial en el instante del impacto, cuando el auto se mueve a $v_0 = 100$ km/h, y el tiempo final cuando el auto llega al reposo ($v = 0$), después de recorrer 1 m.

SOLUCIÓN Se convierte la rapidez inicial dada a unidades SI: 100 km/h = 100×10^3 m/3600 s = 28 m/s, y encontramos la aceleración a partir de la ecuación 2-12c:

$$a = -\frac{v_0^2}{2x} = -\frac{(28\,\text{m/s})^2}{2.0\,\text{m}} = -390\,\text{m/s}^2.$$

Esta enorme aceleración ocurre en un tiempo dado por (ecuación 2-12a):

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 28\,\text{m/s}}{-390\,\text{m/s}^2} = 0.07\,\text{s}.$$

Para que sea efectiva, la bolsa de aire debería inflarse más rápido que esto.

¿Qué hace la bolsa de aire? Retarda y dispersa la fuerza del impacto sobre una área grande del pecho (para evitar que el pecho se lesione con el volante). El cinturón de seguridad mantiene a la persona en una posición estable contra la bolsa de aire que se expande.

FÍSICA APLICADA

Seguridad automovilística: bolsas de aire

FIGURA 2–21 Ejemplo 2-11. Una bolsa de aire que se despliega con el impacto.



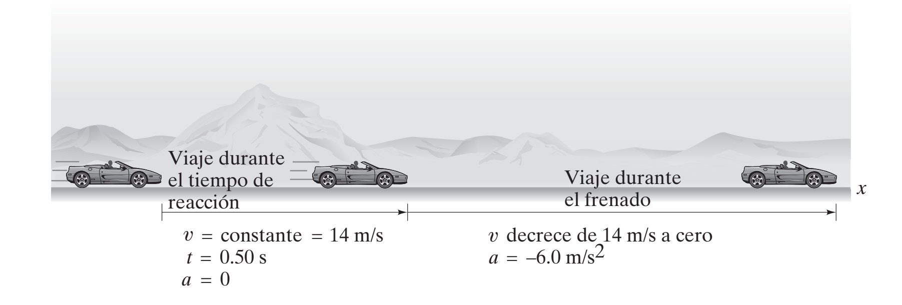


FIGURA 2–22 Ejemplo 2-12: distancia de frenado para un automóvil que desacelera.

FÍSICA APLICADA
Distancias de frenado

EJEMPLO 2–12 ESTIMACIÓN **Distancias de frenado.** Estime las distancias mínimas de frenado para un automóvil, que son importantes para la seguridad y el diseño del tránsito. El problema se trata mejor en dos partes, es decir, en dos intervalos de tiempo separados. **1.** El primer intervalo de tiempo comienza cuando el conductor decide aplicar los frenos y termina cuando el pie toca el pedal del freno. Éste se llama el “tiempo de reacción”, durante el cual la rapidez es constante, así que $a = 0$. **2.** El segundo intervalo de tiempo es el periodo de frenado real cuando, el vehículo desacelera ($a \neq 0$) y llega a detenerse. La distancia de frenado depende del tiempo de reacción del conductor, de la rapidez inicial del vehículo (la velocidad final es cero) y de la aceleración del mismo. Para un camino seco y buenos neumáticos, unos buenos frenos pueden desacelerar un automóvil a una razón aproximada desde 5 m/s^2 a 8 m/s^2. Calcule la distancia total de frenado para una velocidad inicial de 50 km/h (= 14 m/s ≈ 31 mi/h) y suponga que la aceleración del automóvil es de -6.0 m/s^2 (el signo menos aparece porque la velocidad se toma en el sentido x positivo y disminuye su magnitud). El tiempo de reacción de conductores normales varía entre 0.3 s y 1.0 s; considere 0.50 s.

PLANTEAMIENTO Durante el “tiempo de reacción” (parte 1), el automóvil se mueve con rapidez constante de 14 m/s, así que $a = 0$. Una vez que se aplican los frenos (parte 2), la aceleración es $a = -6.0$ m/s^2 y es constante en este intervalo de tiempo. Para ambas partes, a es constante así que se utilizarán las ecuaciones 2-12.

Parte 1: Tiempo de reacción

Datos conocidos	Se busca
$t = 0.50\,\mathrm{s}$	x
$v_0 = 14\,\mathrm{m/s}$	
$v = 14\,\mathrm{m/s}$	
$a = 0$	
$x_0 = 0$	

SOLUCIÓN Parte 1. Se toma $x_0 = 0$ para el primer intervalo de tiempo, en el cual reacciona el conductor (0.50 s): el automóvil viaja con una rapidez constante de 14 m/s, así que $a = 0$. Véase la figura 2-22 y la tabla al margen. Para encontrar x, la posición del automóvil en $t = 0.50$ s (cuando se aplican los frenos), no es posible usar la ecuación 2-12c porque x se multiplica por a, que es cero. Pero la ecuación 2-12b sí nos es útil:

$$x = v_0 t + 0 = (14\,\mathrm{m/s})(0.50\,\mathrm{s}) = 7.0\,\mathrm{m}.$$

De manera que el automóvil viaja 7.0 m durante el tiempo de reacción del conductor, hasta el momento en que realmente se aplican los frenos. Usaremos este resultado como dato de la parte 2.

Parte 2: Frenado

Datos conocidos	Se busca
$x_0 = 7.0\,\mathrm{m}$	x
$v_0 = 14\,\mathrm{m/s}$	
$v = 0$	
$a = -6.0\,\mathrm{m/s^2}$	

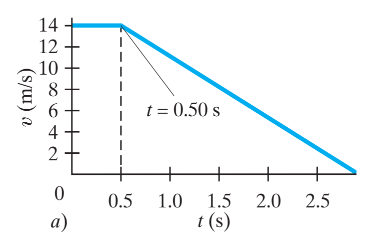
Parte 2. Durante el segundo intervalo de tiempo, se aplican los frenos y el automóvil llega al reposo. La posición inicial es $x_0 = 7.0$ m (resultado de la primera parte) y las demás variables se muestran en la segunda tabla del margen. La ecuación 2-12a no contiene x; la ecuación 2-12b contiene x pero también la incógnita t. La ecuación 2-12c, $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$, contiene el desplazamiento, que es lo que queremos. Así que, considerando $x_0 = 7.0$ m, despejamos x, que es la posición final del auto (cuando se detiene):

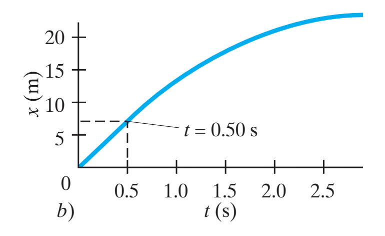
$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \\ &= 7.0\,\mathrm{m} + \frac{0 - (14\,\mathrm{m/s})^2}{2(-6.0\,\mathrm{m/s^2})} = 7.0\,\mathrm{m} + \frac{-196\,\mathrm{m^2/s^2}}{-12\,\mathrm{m/s^2}} \\ &= 7.0\,\mathrm{m} + 16\,\mathrm{m} = 23\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

El automóvil recorrió 7.0 m mientras el conductor reaccionaba, y otros 16 m durante el periodo de frenado hasta detenerse, con una distancia total recorrida de 23 m. Véase en la figura 2-23 las gráficas de *a*) v versus t y *b*) de x versus t.

NOTA De la anterior ecuación para x, vemos que la distancia de frenado después de pisar los frenos $(x - x_0)$ se incrementa con el *cuadrado* de la rapidez inicial, no sólo linealmente con ella. Si usted viaja dos veces más rápido, la distancia de frenado será cuatro veces mayor.

FIGURA 2–23 Ejemplo 2–12. Gráficas de *a*) v versus t y *b*) x versus t.





EJEMPLO 2–13 **ESTIMACIÓN** **Dos objetos en movimiento: policía e infractor.** Un automóvil a exceso de velocidad pasa a 150 km/h junto a una patrulla de policía estacionada, la cual inicia inmediatamente la persecución. Usando suposiciones sencillas como, por ejemplo, que el auto a exceso de velocidad continúa viajando a rapidez constante, estime cuánto tiempo le toma a la patrulla alcanzarlo. Luego estime la rapidez de la patrulla en ese momento y decida si las suposiciones fueron razonables.

PLANTEAMIENTO Cuando la patrulla arranca, acelera, y la suposición más sencilla es que su aceleración sea constante. Esto quizá no sea razonable, pero veamos qué sucede. Podemos estimar la aceleración si vemos anuncios de automóviles que afirman que pueden acelerar desde el reposo a 100 km/h en 5.0 s. Así, la aceleración promedio de la patrulla sería aproximadamente

$$a_{\mathrm{P}} = \frac{100\ \mathrm{km/h}}{5.0\ \mathrm{s}} = 20\,\frac{\mathrm{km/h}}{\mathrm{s}}\left(\frac{1000\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{km}}\right)\left(\frac{1\ \mathrm{h}}{3600\ \mathrm{s}}\right) = 5.6\ \mathrm{m/s^2}.$$

SOLUCIÓN Tenemos que establecer las ecuaciones cinemáticas para determinar las cantidades desconocidas y, como se tienen dos objetos en movimiento, necesitamos dos conjuntos separados de ecuaciones. Denotamos la posición del automóvil a exceso de velocidad con x_{S} y la posición de la patrulla con x_{P}. Como nos interesa el tiempo en que los dos vehículos llegan a la misma posición en el camino, usamos la ecuación 2-12b para cada uno:

$$x_{\mathrm{S}} = v_{0\mathrm{S}}t + \tfrac{1}{2}a_{\mathrm{S}}t^2 = (150\ \mathrm{km/h})t = (42\ \mathrm{m/s})t$$
$$x_{\mathrm{P}} = v_{0\mathrm{P}}t + \tfrac{1}{2}a_{\mathrm{P}}t^2 = \tfrac{1}{2}\left(5.6\ \mathrm{m/s^2}\right)t^2,$$

donde consideramos que $x_0 = 0$ para ambos vehículos, $v_{0\mathrm{P}} = 0$ y $a_{\mathrm{S}} = 0$ (se supone que el infractor se mueve con rapidez constante). Queremos saber el tiempo en que los dos vehículos se encuentran, por lo que hacemos $x_{\mathrm{S}} = x_{\mathrm{P}}$ y despejamos t:

$$(42\ \mathrm{m/s})t = \left(2.8\ \mathrm{m/s^2}\right)t^2.$$

Las soluciones son

$$t = 0 \quad \mathrm{y} \quad t = \frac{42\ \mathrm{m/s}}{2.8\ \mathrm{m/s^2}} = 15\ \mathrm{s}.$$

La primera solución corresponde al momento en que el infractor pasó a la patrulla. La segunda solución nos dice cuándo la patrulla alcanza al infractor, esto es, 15 s después. Ésta es nuestra respuesta, ¿pero es razonable? La rapidez de la patrulla en $t = 15$ s es

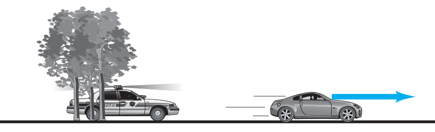
$$v_{\mathrm{P}} = v_{0\mathrm{P}} + a_{\mathrm{P}}t = 0 + \left(5.6\ \mathrm{m/s^2}\right)(15\ \mathrm{s}) = 84\ \mathrm{m/s}$$

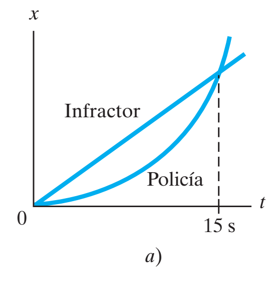
o 300 km/h (≈ 190 mi/h). Esto no es razonable y además resulta muy peligroso.

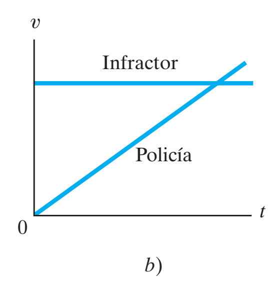
NOTA Es más razonable descartar la suposición de una aceleración constante. La patrulla seguramente no puede mantener una aceleración constante a esas rapideces. Además, el conductor perseguido, si es una persona razonable, disminuiría la velocidad al oír la sirena de la patrulla. La figura 2-24 muestra las gráficas *a*) de x versus t y *b*) de v versus t, con base en la suposición original de a_{P} = constante, mientras que *c*) muestra v versus t para una suposición más razonable.



Las suposiciones iniciales deben verificarse para que tengan sensatez.







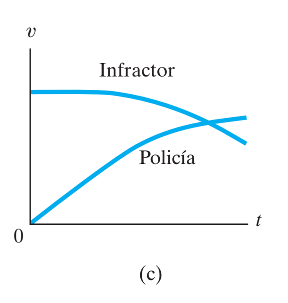


FIGURA 2–24 Ejemplo 2-13.

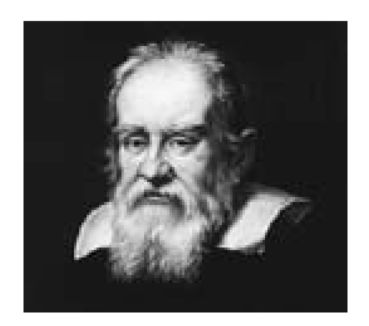


FIGURA 2–25 Galileo Galilei (1564-1642).

2–7 Caída libre de objetos

Uno de los ejemplos más comunes del movimiento uniformemente acelerado es el de un objeto que se deja caer libremente cerca de la superficie terrestre. El hecho de que un objeto que cae esté acelerado quizá no sea evidente al principio. No piense, como se creía ampliamente hasta la época de Galileo (figura 2-25), que los objetos más pesados caen más rápido que los objetos más ligeros y que la rapidez de la caída es proporcional al peso del objeto.

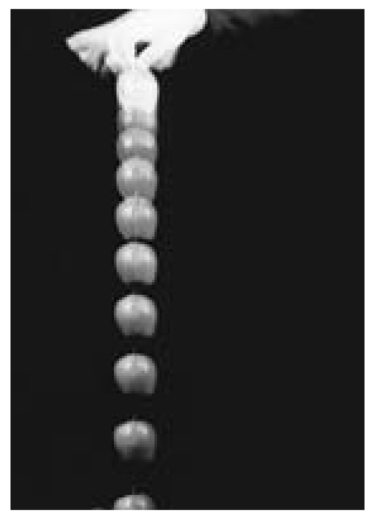
En su análisis, Galileo aplicó su nueva y creativa técnica de imaginar qué pasaría en casos idealizados (simplificados). Para la caída libre, postuló que todos los objetos caen con la *misma aceleración constante* en ausencia de aire u otra resistencia. Él mostró que este postulado predice que para un objeto que cae desde el reposo, la distancia recorrida será proporcional al cuadrado del tiempo (figura 2-26); es decir, $d \propto t^2$. Podemos ver esto en la ecuación 2-12b, pero Galileo fue el primero en obtener esta relación matemática.

CUIDADO

Un objeto en caída libre aumenta su rapidez, pero ésta es independiente de su masa o peso

Para apoyar su afirmación de que la rapidez de caída de los objetos aumenta conforme caen, Galileo utilizó un ingenioso argumento: cuando se suelta una piedra pesada desde una altura de 2 m encajará mucho más una estaca en el suelo, que la misma piedra dejada caer desde una altura de sólo 0.2 m. Es claro que la piedra debe moverse más rápidamente cuando cae desde una altura mayor.

FIGURA 2–26 Fotografía estroboscópica de la caída de una manzana a intervalos de tiempo iguales. La manzana cae una distancia mayor en cada intervalo sucesivo de tiempo, lo cual significa que está acelerando.



Galileo también afirmó que en ausencia de aire *todos* los objetos, ligeros o pesados, caen con la *misma* aceleración. Si usted sostiene una hoja de papel horizontalmente en una mano y un objeto más pesado, digamos una pelota de béisbol, en la otra, y los suelta al mismo tiempo (como en la figura 2-27a), el objeto más pesado llegará al suelo primero. No obstante, si repite el experimento, esta vez con papel arrugado formando una pequeña bola (véase la figura 2-27b), usted encontrará que los dos objetos llegan al piso casi al mismo tiempo.

Galileo estaba seguro de que el aire actúa como una resistencia para los objetos muy ligeros que tienen una gran área superficial. Pero en muchas circunstancias ordinarias, esta resistencia del aire es despreciable. En una cámara al vacío, incluso los objetos ligeros, como una pluma o una hoja de papel sostenida horizontalmente, caerán con la misma aceleración que cualquier otro objeto (véase la figura 2-28). Una demostración en el vacío no era posible en tiempos de Galileo, lo cual le da más mérito a este personaje. A Galileo se le llama a menudo el "padre de la ciencia moderna", no sólo por el contenido de su ciencia (descubrimientos astronómicos, inercia, caída libre), sino también por su enfoque científico (idealización y simplificación, matematización de la teoría, teorías que tienen consecuencias confirmables, experimentos para probar las predicciones teóricas).

La contribución específica de Galileo, para nuestro entendimiento del movimiento de caída de objetos, se resume como sigue:

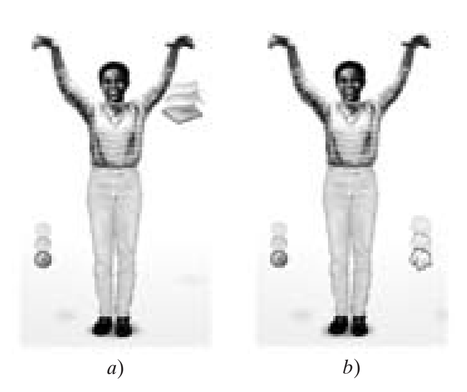
en un lugar dado sobre la Tierra y en ausencia de la resistencia del aire, todos los objetos caen con la misma aceleración constante.

Aceleración debida a la gravedad

Llamamos a esta aceleración **aceleración debida a la gravedad** sobre la superficie de la Tierra, y usamos el símbolo g. Su magnitud es aproximadamente

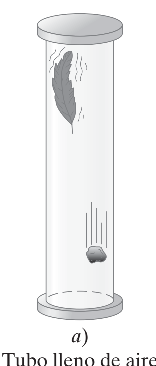
$$g = 9.80 \text{ m/s}^2. \qquad \text{[en la superficie terrestre]}$$

En unidades inglesas g vale aproximadamente 32 ft/s^2. En realidad, g varía ligeramente de acuerdo con la latitud y la elevación, aunque esas variaciones son tan pequeñas que

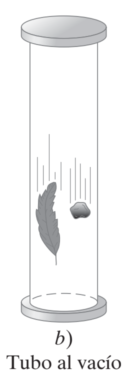


a) *b*)

FIGURA 2–27 *a*) Una pelota y un pedazo de papel ligero se dejan caer al mismo tiempo. *b*) Igual que antes, pero ahora con el papel hecho bola.



a) Tubo lleno de aire



b) Tubo al vacío

FIGURA 2–28 Una piedra y una pluma se dejan caer simultáneamente *a*) en el aire y *b*) en un vacío.

podemos despreciarlas en la mayoría de los casos. A menudo los efectos de la resistencia del aire son pequeños y los despreciaremos la mayoría de las veces. Sin embargo, la resistencia del aire será notable aun en un objeto razonablemente pesado, si la velocidad se vuelve muy grande.† La aceleración debida a la gravedad es un vector, como lo es cualquier aceleración, y su dirección es hacia abajo, hacia el centro de la Tierra.

Al tratar con objetos que caen libremente podemos utilizar las ecuaciones 2-12, donde a tiene el valor de g que usamos antes. También, como el movimiento es vertical, sustituiremos y por x y y_0 en vez de x_0. Se considera que $y_0 = 0$, a menos que se especifique otra cuestión. *Es arbitrario si elegimos el eje* y *como positivo en la dirección hacia arriba o en la dirección hacia abajo; debemos, sin embargo, ser consistentes a todo lo largo de la solución de un problema.*



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Usted puede elegir el eje y *positivo ya sea hacia arriba o hacia abajo*

EJERCICIO H Regrese a la pregunta de inicio del capítulo, página 18, y respóndala de nuevo. Intente explicar por qué quizás usted respondió de forma diferente la primera vez.

EJEMPLO 2–14 **Caída desde una torre.** Suponga que una pelota se deja caer ($v_0 = 0$) desde una torre de 70.0 m de altura. ¿Cuánto habrá caído después de un tiempo $t_1 = 1.00$ s, $t_2 = 2.00$ s y $t_3 = 3.00$ s? Desprecie la resistencia del aire.

PLANTEAMIENTO Se toma y como positivo hacia abajo, de manera que la aceleración es $a = g = +9.80\ \mathrm{m/s^2}$. Sea $v_0 = 0$ y $y_0 = 0$. Queremos encontrar la posición y de la pelota después de tres intervalos de tiempo diferentes. La ecuación 2-12b, con x sustituida por y, relaciona las cantidades dadas (t, a y v_0) y la incógnita y.

SOLUCIÓN Se establece $t = t_1 = 1.00$ s en la ecuación 2-12b:

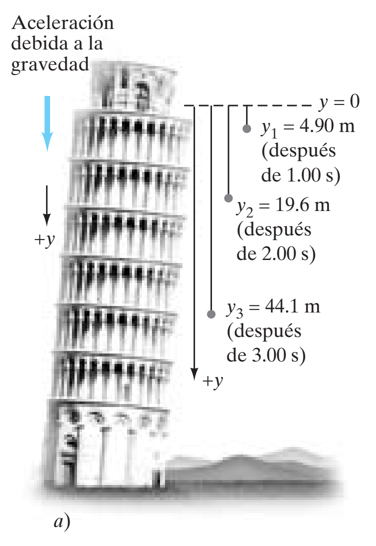
$$y_1 = v_0 t_1 + \tfrac{1}{2} a t_1^2 = 0 + \tfrac{1}{2} a t_1^2 = \tfrac{1}{2}(9.80\ \mathrm{m/s^2})(1.00\ \mathrm{s})^2 = 4.90\ \mathrm{m}.$$

La pelota ha caído una distancia de 4.90 m durante el intervalo de tiempo $t = 0$ a $t_1 = 1.00$ s. Similarmente, después de 2.00 s ($= t_2$), la posición de la pelota es

$$y_2 = \tfrac{1}{2} a t_2^2 = \tfrac{1}{2}(9.80\ \mathrm{m/s^2})(2.00\ \mathrm{s})^2 = 19.6\ \mathrm{m}.$$

y finalmente después de 3.00 s ($= t_3$), la posición de la pelota es (véase la figura 2-29)

$$y_3 = \tfrac{1}{2} a t_3^2 = \tfrac{1}{2}(9.80\ \mathrm{m/s^2})(3.00\ \mathrm{s})^2 = 44.1\ \mathrm{m}.$$



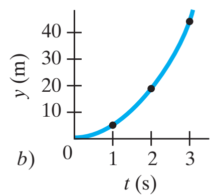


FIGURA 2–29 Ejemplo 2-14. *a*) Un objeto que se suelta desde una torre cae con rapidez cada vez mayor, y recorre una mayor distancia cada segundo sucesivo. (Véase también la figura 2-26.) *b*) Gráfica de y versus t.

EJEMPLO 2–15 **Lanzamiento hacia abajo desde una torre.** Suponga que la pelota en el ejemplo 2-14 se *lanza* hacia abajo con una velocidad inicial de 3.00 m/s, en vez de simplemente dejarse caer. *a*) ¿Cuál sería entonces su posición después de 1.00 s y 2.00 s? *b*) ¿Cuál sería su rapidez después de 1.00 s y 2.00 s? Compare estos valores con las rapideces del ejemplo anterior.

PLANTEAMIENTO De nuevo utilizamos la ecuación 2-12b, pero ahora v_0 no es cero, es $v_0 = 3.00$ m/s hacia abajo.

SOLUCIÓN *a*) En $t = 1.00$ s, la posición de la pelota dada por la ecuación 2-12b es

$$y = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 = (3.00\ \mathrm{m/s})(1.00\ \mathrm{s}) + \tfrac{1}{2}(9.80\ \mathrm{m/s^2})(1.00\ \mathrm{s})^2 = 7.90\ \mathrm{m}.$$

En $t = 2.00$ s, (intervalo de tiempo de $t = 0$ a $t = 2.00$ s), la posición es

$$y = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 = (3.00\ \mathrm{m/s})(2.00\ \mathrm{s}) + \tfrac{1}{2}(9.80\ \mathrm{m/s^2})(2.00\ \mathrm{s})^2 = 25.6\ \mathrm{m}.$$

Como se esperaba, la pelota cae más rápido cada segundo que si se dejara caer con $v_0 = 0$. *b*) La velocidad se obtiene con la ecuación 2-12a:

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ &= 3.00\ \mathrm{m/s} + (9.80\ \mathrm{m/s^2})(1.00\ \mathrm{s}) = 12.8\ \mathrm{m/s} \quad [\text{en } t_1 = 1.00\ \mathrm{s}] \\ &= 3.00\ \mathrm{m/s} + (9.80\ \mathrm{m/s^2})(2.00\ \mathrm{s}) = 22.6\ \mathrm{m/s}. \quad [\text{en } t_2 = 2.00\ \mathrm{s}] \end{aligned}$$

En el ejemplo 2-14, cuando la pelota se deja caer ($v_0 = 0$), el primer término (v_0) en las ecuaciones anteriores era cero, por lo que

$$\begin{aligned} v &= 0 + at \\ &= (9.80\ \mathrm{m/s^2})(1.00\ \mathrm{s}) = 9.80\ \mathrm{m/s} \qquad [\text{en } t_1 = 1.00\ \mathrm{s}] \\ &= (9.80\ \mathrm{m/s^2})(2.00\ \mathrm{s}) = 19.6\ \mathrm{m/s}. \qquad [\text{en } t_2 = 2.00\ \mathrm{s}] \end{aligned}$$

NOTA Tanto para el ejemplo 2-14 como para el 2-15, la rapidez aumenta linealmente en el tiempo a razón de 9.80 m/s cada segundo. Pero la rapidez de la pelota lanzada verticalmente hacia abajo siempre es 3.00 m/s (su rapidez inicial) mayor que la de una pelota que sólo se deja caer.

†La rapidez de un objeto que cae en el aire (u otro fluido) no aumenta de manera indefinida. Si el objeto cae una distancia suficiente, alcanzará una velocidad máxima llamada velocidad límite o **terminal**, debida a la resistencia del aire.

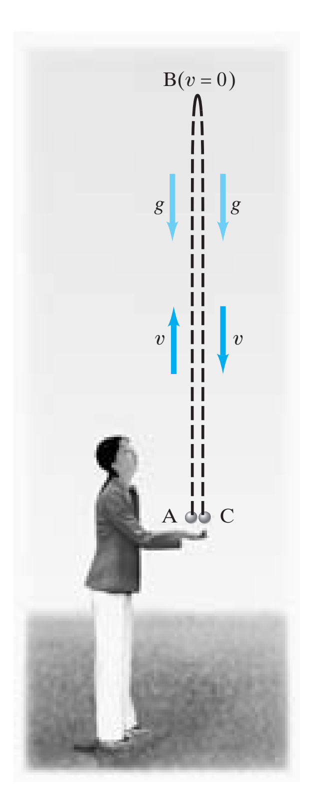


FIGURA 2–30 Un objeto lanzado al aire sale de la mano del lanzador en A, alcanza su altura máxima en B y regresa a la altura original en C. Ejemplos 2-16, 2-17, 2-18 y 2-19.

EJEMPLO 2–16 **Pelota que se lanza hacia arriba, I.** Una persona lanza en el aire una pelota *hacia arriba* con una velocidad inicial de 15.0 m/s. Calcule *a*) a qué altura llega y *b*) cuánto tiempo permanece en el aire antes de regresar a la mano. Ignore la resistencia del aire.

PLANTEAMIENTO No estamos interesados aquí con la acción del lanzamiento, sino sólo con el movimiento de la pelota *después* de que ésta sale de la mano de la persona (figura 2-30) y hasta que regresa a la mano de nuevo. Elegimos y como positiva en la dirección hacia arriba, y negativa hacia abajo. (Ésta es una convención diferente de la usada en los ejemplos 2-14 y 2-15, e ilustra nuestras opciones). La aceleración debida a la gravedad será hacia abajo y tendrá entonces un signo negativo, $a = -g = -9.80\ \text{m/s}^2$. Conforme la pelota sube, su rapidez disminuye hasta que alcanza el punto más alto (B en la figura 2-30), donde su rapidez es cero por un instante; y luego desciende con rapidez creciente.

SOLUCIÓN *a*) Consideramos el intervalo de tiempo desde que la pelota salió de la mano del lanzador, hasta que alcanza su punto más alto. Para determinar la altura máxima, calculamos la posición de la pelota cuando su velocidad es cero ($v = 0$ en el punto más alto). En $t = 0$ (punto A en la figura 2-30) tenemos $y_0 = 0$, $v_0 = 15.0$ m/s y $a = -9.80\ \text{m/s}^2$. En el tiempo t (altura máxima), $v = 0$, $a = -9.80\ \text{m/s}^2$ y queremos encontrar y. Usamos la ecuación 2-12c reemplazando x por y: $v^2 = v_0^2 + 2ay$. Despejamos y de esta ecuación:

$$y = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - (15.0\ \text{m/s})^2}{2(-9.80\ \text{m/s}^2)} = 11.5\ \text{m}.$$

La pelota alcanza una altura de 11.5 m por arriba de la mano.

b) Ahora tenemos que elegir un intervalo de tiempo diferente, para calcular cuánto tiempo la pelota permanece en el aire antes de regresar a la mano. Podríamos hacer este cálculo en dos partes, determinando primero el tiempo requerido para que la pelota alcance el punto más alto y luego determinando el tiempo que le toma regresar en caída. Sin embargo, es más sencillo considerar el intervalo de tiempo para el movimiento completo de A a B a C (figura 2-30) en un solo paso, y usar la ecuación 2-12b. Podemos hacer esto así porque y representa posición o desplazamiento, y no la distancia total recorrida. Así, en ambos puntos A y C, $y = 0$. Usamos la ecuación 2-12b con $a = -9.80\ \text{m/s}^2$ y encontramos

$$y = y_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$0 = 0 + (15.0\ \text{m/s})t + \tfrac{1}{2}(-9.80\ \text{m/s}^2)t^2.$$

En esta ecuación ya podemos factorizar (una t):

$$(15.0\ \text{m/s} - 4.90\ \text{m/s}^2\, t)t = 0.$$

Hay dos soluciones:

$$t = 0 \quad \text{y} \quad t = \frac{15.0\ \text{m/s}}{4.90\ \text{m/s}^2} = 3.06\ \text{s}.$$

La primera solución ($t = 0$) corresponde al punto inicial (A) en la figura 2-30, cuando la pelota se lanzó inicialmente desde $y = 0$. La segunda solución, $t = 3.06$ s, corresponde al punto C, cuando la pelota ha retornado a $y = 0$. De manera que la pelota permanece en el aire 3.06 s.

NOTA Ignoramos la resistencia del aire, que podría resultar significativa, por lo que nuestro resultado es sólo una aproximación de una situación práctica real.

En este ejemplo no se consideró la acción del lanzamiento. ¿Por qué? Porque durante el lanzamiento la mano del lanzador está en contacto con la pelota y la acelera a una tasa desconocida: la aceleración *no es g*. Se considera sólo el tiempo en que la pelota está en el aire y la aceleración es igual a g hacia abajo.

Toda ecuación cuadrática (donde la variable está al cuadrado) matemáticamente produce dos soluciones. En física, a veces sólo una solución corresponde a la situación real, como en el ejemplo 2-10, en cuyo caso se ignora la solución “no física”. Pero en el ejemplo 2-16, ambas soluciones a la ecuación en t^2 son físicamente significativas: $t = 0$ y $t = 3.06$ s.


CUIDADO

Las ecuaciones cuadráticas tienen dos soluciones. Algunas veces sólo una corresponde a la realidad; otras veces, ambas

EJEMPLO CONCEPTUAL 2–17 **Dos posibles equivocaciones.** Mencione ejemplos que demuestren el error en estas dos ideas falsas: **1.** que la aceleración y la velocidad tienen siempre la misma dirección, y **2.** que un objeto lanzado hacia arriba tiene aceleración cero en su punto más alto (B en la figura 2-30).

RESPUESTA Ambas ideas son incorrectas. **1.** La velocidad y la aceleración *no* tienen necesariamente la misma dirección y sentido. Cuando la pelota del ejemplo 2-16 se mueve hacia arriba, su velocidad es positiva (hacia arriba), mientras que su aceleración es negativa (hacia abajo). **2.** En el punto más alto (B en la figura 2-30), la pelota tiene velocidad cero durante un instante. ¿La aceleración también es cero en este punto? No. La velocidad cerca de lo alto del arco apunta hacia arriba, luego se vuelve cero (durante un instante) en el punto más alto y después apunta hacia abajo. La gravedad no cesa de actuar, por lo que $a = -g = -9.80 \text{ m/s}^2$ aun en el punto más alto. Pensar que $a = 0$ en el punto B conduciría a la conclusión de que al alcanzar el punto B, la pelota permanecería ahí, ya que si la aceleración (= razón de cambio de la velocidad) fuera cero, la velocidad permanecería igual a cero en el punto más alto y la pelota se quedaría ahí sin caer. En suma, la aceleración de la gravedad siempre apunta hacia abajo, hacia la Tierra, incluso cuando el objeto se mueva hacia arriba.

CUIDADO

1. La velocidad y aceleración no siempre están en la misma dirección; sin embargo, la aceleración (de la gravedad) siempre apunta hacia abajo
2. $a \neq 0$ incluso en el punto más alto de una trayectoria

EJEMPLO 2–18 **Pelota que se lanza hacia arriba, II.** Consideremos de nuevo la pelota lanzada hacia arriba del ejemplo 2-16 y hagamos más cálculos. Calcule *a*) cuánto tiempo le toma a la pelota alcanzar su altura máxima (punto B en la figura 2-30), y *b*) la velocidad de la pelota cuando retorna a la mano del lanzador (punto C).

PLANTEAMIENTO De nuevo suponemos que la aceleración es constante, por lo que usamos las ecuaciones 2-12. Tomamos la altura de 11.5 m del ejemplo 2-16. De nuevo consideramos y positiva hacia arriba.

SOLUCIÓN *a*) Se considera el intervalo de tiempo entre el lanzamiento ($t = 0$, $v_0 = 15.0$ m/s) y lo alto de la trayectoria ($y = +11.5$ m, $v = 0$) y se quiere encontrar t. La aceleración es constante con $a = -g = -9.80 \text{ m/s}^2$. Las ecuaciones 2-12a y 2-12b contienen ambas el tiempo t junto con otras cantidades conocidas. Usemos la ecuación 2-12a con $a = -9.80 \text{ m/s}^2$, $v_0 = 15.0$ m/s y $v = 0$:

$$v = v_0 + at;$$

haciendo $v = 0$ y despejando t obtenemos,

$$t = -\frac{v_0}{a} = -\frac{15.0 \text{ m/s}}{-9.80 \text{ m/s}^2} = 1.53 \text{ s}.$$

Esto es justamente la mitad del tiempo que le toma a la pelota subir y regresar a su posición original [3.06 s, calculado en el inciso *b*) del ejemplo 2-16]. Le toma entonces a la pelota el mismo tiempo alcanzar la altura máxima que caer de regreso al punto de inicio.

b) Ahora se considera el intervalo de tiempo desde el lanzamiento ($t = 0$, $v_0 = 15.0$ m/s) hasta el regreso de la pelota a la mano, lo que ocurre en $t = 3.06$ s (como se calculó en el ejemplo 2-16) y queremos encontrar v cuando $t = 3.06$ s:

$$v = v_0 + at = 15.0 \text{ m/s} - \left(9.80 \text{ m/s}^2\right)(3.06 \text{ s}) = -15.0 \text{ m/s}.$$

NOTA La pelota tiene la misma rapidez (magnitud de la velocidad) cuando regresa al punto de inicio, que la que tenía cuando fue lanzada, pero en sentido opuesto (esto es lo que significa el signo negativo). De modo que, tal como calculamos en el inciso *a*), el tiempo es el mismo al subir que al bajar. De manera que el movimiento es simétrico con respecto punto de altura máxima.

Con frecuencia la aceleración de objetos como aviones rápidos y cohetes se proporciona como un múltiplo de $g = 9.80 \text{ m/s}^2$. Por ejemplo, un avión que sale de una picada y experimenta 3.00 g tendría una aceleración de $(3.00)(9.80 \text{ m/s}^2) = 29.4 \text{ m/s}^2$.

EJERCICIO I Si se dice que un automóvil acelera a 0.50 g, ¿cuál será su aceleración en m/s^2?

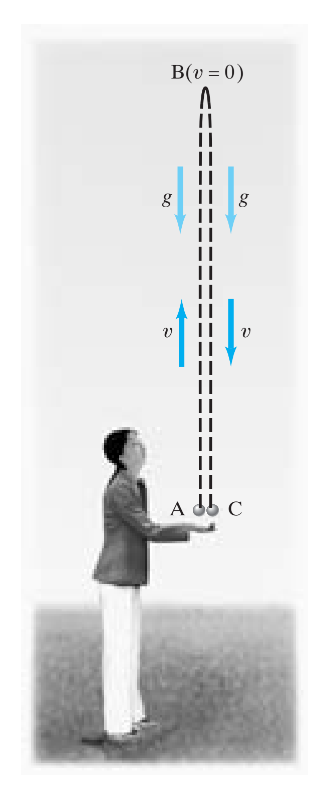


FIGURA 2–30
(Repetida del ejemplo 2-19)

EJEMPLO 2–19 Pelota que se lanza hacia arriba, III; la fórmula cuadrática. Para la pelota del ejemplo 2-18, calcule en qué tiempo t la pelota pasa por un punto a 8:00 m sobre la mano de la persona. (Véase la figura 2-30 que se repite aquí).

PLANTEAMIENTO Se elige el intervalo de tiempo desde el lanzamiento ($t = 0$, $v_0 = 15.0$ m/s) hasta el tiempo t (a determinar) cuando la pelota está en la posición $y = 8.00$ m, usando la ecuación 2-12b.

SOLUCIÓN Se busca t dados $y = 8.00$ m, $y_0 = 0$, $v_0 = 15.0$ m/s y $a = -9.80$ m/s^2. Utilice la ecuación 2-11b:

$$y = y_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$
$$8.00\,\text{m} = 0 + (15.0\,\text{m/s})t + \tfrac{1}{2}\left(-9.80\,\text{m/s}^2\right)t^2.$$

Para resolver cualquier ecuación cuadrática de la forma $at^2 + bt + c = 0$, donde a, b y c son constantes (aquí, a *no* es la aceleración), podemos emplear la **fórmula cuadrática**:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Reescribiendo la ecuación para y que se propusimos arriba en la forma estándar $at^2 + bt + c = 0$, obtenemos:

$$\left(4.90\,\text{m/s}^2\right)t^2 - (15.0\,\text{m/s})t + (8.00\,\text{m}) = 0.$$

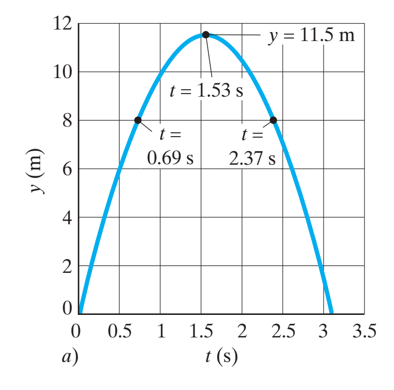
De este modo, el coeficiente a es 4.90 m/s^2, b es -15.0 m/s y c es 8.00 m. Al poner estos valores en la fórmula cuadrática obtenemos

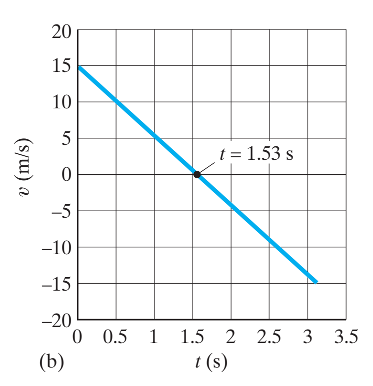
$$t = \frac{15.0\,\text{m/s} \pm \sqrt{(15.0\,\text{m/s})^2 - 4\left(4.90\,\text{m/s}^2\right)(8.00\,\text{m})}}{2\left(4.90\,\text{m/s}^2\right)},$$

lo cual da como resultado $t = 0.69$ s y $t = 2.37$ s. ¿Son ambas soluciones válidas? Sí, porque la pelota pasa por $y = 8.00$ m cuando va subiendo ($t = 0.69$ s) y de nuevo cuando va bajando ($t = 2.37$ s).

NOTA La figura 2-31 muestra las gráficas de *a*) y versus t y *b*) v versus t para la pelota que se lanza hacia arriba en la figura 2-30, incorporando los resultados de los ejemplos 2-16, 2-18 y 2-19.

FIGURA 2–31 Gráficas de *a*) y versus t, *b*) v versus t para una pelota lanzada hacia arriba, ejemplos 2-16, 2-17 y 2-18.





EJEMPLO 2–20 Pelota que se lanza hacia arriba en el borde de un acantilado. Suponga que la persona de los ejemplos 2-16, 2-17 y 2-18 está de pie en el borde de un acantilado, de manera que la pelota puede caer al fondo del acantilado que está 50.0 m abajo del punto de partida, como se muestra en la figura 2-32. *a*) ¿Cuánto tiempo le toma a la pelota llegar al fondo del acantilado? *b*) ¿Cuál es la distancia total recorrida por la pelota? Ignore la resistencia del aire (probablemente sea significativa, por lo que nuestro resultado será una aproximación).

PLANTEAMIENTO *a*) Usamos de nuevo la ecuación 2-12b; pero esta vez tomamos $y = -50.0$ m (el fondo del acantilado), que está 50.0 m por debajo de la posición inicial ($y_0 = 0$).

SOLUCIÓN *a*) Usamos la ecuación 12-2b con $a = -9.80\ \mathrm{m/s^2}$, $v_0 = 15.0$ m/s, $y_0 = 0$, y $y = -50.0$ m:

$$y = y_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$
$$-50.0\ \mathrm{m} = 0 + (15.0\ \mathrm{m/s})t - \tfrac{1}{2}(9.80\ \mathrm{m/s^2})t^2.$$

Reescribiéndola en la forma estándar, tenemos

$$(4.90\ \mathrm{m/s^2})t^2 - (15.0\ \mathrm{m/s})t - (50.0\ \mathrm{m}) = 0.$$

Usando la fórmula cuadrática, encontramos las soluciones $t = 5.07$ s y $t = -2.01$ s. La primera solución, $t = 5.07$ s, es la respuesta a nuestro problema: es el tiempo que le toma a la pelota subir a su punto más alto y luego caer al fondo del acantilado. Sabemos que a la pelota le tomó 3.06 s subir y bajar a la parte superior del acantilado (ejemplo 2-16); por lo que le tomó 2.01 s adicionales caer hasta el fondo. ¿Pero qué sentido tiene la otra solución de $t = -2.01$ s? Éste es un tiempo anterior al lanzamiento, cuando empezó nuestro cálculo, por lo que no es relevante aquí.†

b) Del ejemplo 2-16, la pelota sube 11.5 m, baja 11.5 m de regreso a la cima del acantilado y luego cae 50.0 m más al fondo del acantilado, para una distancia total recorrida de 73.0 m. Sin embargo, note que el *desplazamiento* fue sólo de -50.0 m. La figura 2-33 muestra la gráfica de y versus t para esta situación.

EJERCICIO J Dos pelotas se lanzan desde un acantilado. Una se lanza directamente hacia arriba, y la otra directamente hacia abajo. Ambas tienen la misma rapidez inicial y las dos golpean el suelo debajo del acantilado. ¿Cuál pelota golpea el suelo con mayor rapidez: *a*) la pelota lanzada hacia arriba, *b*) la pelota lanzada hacia abajo o *c*) ambas con igual rapidez? Ignore la resistencia del aire.

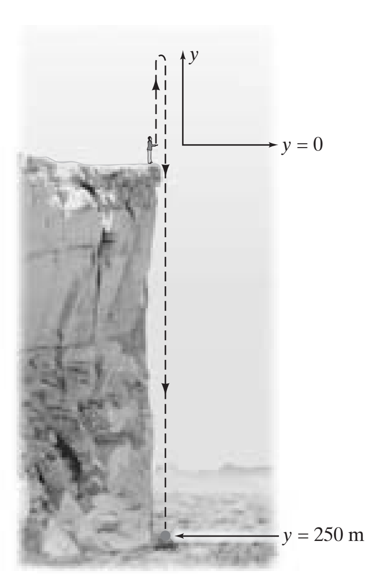
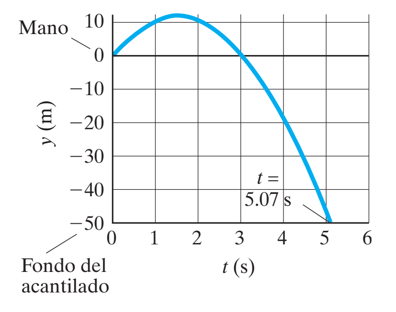


FIGURA 2–32 Ejemplo 2-20. La persona en la figura 2-30 está de pie en el borde de un acantilado. La pelota cae al fondo de éste, 50.0 m abajo.

FIGURA 2–33 Ejemplo 2-20; gráfica y versus t.



*2–8 Aceleración variable; cálculo integral

En esta breve sección opcional usamos el cálculo integral para obtener las ecuaciones cinemáticas con aceleración constante, ecuaciones 2-12a y b. Mostramos también cómo puede usarse el cálculo cuando la aceleración no es constante. Si usted no ha estudiado aún la integración simple en su curso de cálculo, le convendría dejar la lectura de esta sección para después. Analizaremos con más detalle la integración en la sección 7-3, donde empezaremos a usarla en la física.

Primero obtenemos la ecuación 2-12a, suponiendo, como hicimos en la sección 2-5, que el objeto tiene velocidad v_0 en $t = 0$ y una aceleración constante a. Empezamos con la definición de aceleración instantánea, $a = dv/dt$, que reescribimos como

$$dv = a\,dt.$$

Tomamos la integral definida de ambos lados de esta ecuación, usando la misma notación que en la sección 2-5:

$$\int_{v=v_0}^{v} dv = \int_{t=0}^{t} a\,dt$$

que da, ya que $a =$ constante,

$$v - v_0 = at.$$

Que corresponde con la ecuación 2-12a, $v = v_0 + at$.

Ahora derivamos la ecuación 2-12b comenzando con la definición de velocidad instantánea, ecuación 2-4, $v = dx/dt$. La reescribimos como

$$dx = v\,dt$$

o

$$dx = (v_0 + at)dt$$

donde sustituimos la ecuación 2-12a.

†La solución $t = -2.01$ s podría tener sentido en una situación física diferente. Suponga que una persona de pie en la cima de un acantilado de 50.0 m de altura ve pasar una roca que se mueve hacia arriba a 15.0 m/s en $t = 0$; ¿en qué tiempo partió la roca de la base del acantilado y cuándo regresará a este lugar? Las ecuaciones serán precisamente las mismas que para nuestro problema original y las respuestas $t = -2.01$ s y $t = 5.07$ s serán las correctas. Advierta hay que tener cuidado con los resultados puramente matemáticos, por lo que debemos usar el sentido común al interpretar los resultados.

Ahora integramos:

$$\int_{x=x_0}^{x} dx = \int_{t=0}^{t} (v_0 + at)\, dt$$

$$x - x_0 = \int_{t=0}^{t} v_0\, dt + \int_{t=0}^{t} at\, dt$$

$$x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

dado que v_0 y a son constantes. Este resultado es justamente la ecuación 2-12b, $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

Finalmente usemos el cálculo para encontrar la velocidad y el desplazamiento, dada una aceleración que no es constante sino que varía con el tiempo.

EJEMPLO 2–21 **Integración de una aceleración variable con el tiempo.** Un vehículo experimental parte del reposo ($v_0 = 0$) en $t = 0$ y acelera a una razón dada por $a = (7.00\ \text{m/s}^3)t$. ¿Cuáles son *a*) su velocidad y *b*) su desplazamiento 2.00 s después?

PLANTEAMIENTO No podemos usar las ecuaciones 2-12 porque a no es constante. Integramos la aceleración $a = dv/dt$ sobre el tiempo para encontrar v como una función del tiempo; y luego integramos $v = dx/dt$ para obtener el desplazamiento.

SOLUCIÓN De la definición de aceleración, $a = dv/dt$, tenemos

$$dv = a\, dt.$$

Tomamos la integral de ambos lados, desde $v = 0$ en $t = 0$ hasta una velocidad v en un tiempo arbitrario t:

$$\int_0^v dv = \int_0^t a\, dt$$

$$v = \int_0^t (7.00\ \text{m/s}^3)t\, dt$$

$$= (7.00\ \text{m/s}^3)\left(\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^t = (7.00\ \text{m/s}^3)\left(\frac{t^2}{2} - 0\right) = (3.50\ \text{m/s}^3)t^2.$$

En $t = 2.00$ s, $v = (3.50\ \text{m/s}^3)\,(2.00\ \text{s})^2 = 14.0$ m/s.

b) Para obtener el desplazamiento, suponemos $x_0 = 0$ y comenzamos con $v = dx/dt$, que reescribimos como $dx = v\, dt$. Integramos entonces desde $x = 0$ en $t = 0$ hasta la posición x en el tiempo t:

$$\int_0^x dx = \int_0^t v\, dt$$

$$x = \int_0^{2.00\,\text{s}} (3.50\ \text{m/s}^3)t^2\, dt = (3.50\ \text{m/s}^3)\,\frac{t^3}{3}\Bigg|_0^{2.00\,\text{s}} = 9.33\ \text{m}.$$

En suma, en $t = 2.00$ s, $v = 14.0$ m/s y $x = 9.33$ m.

*2–9 Análisis gráfico e integración numérica

Esta sección es opcional. En ella se analiza cómo resolver numéricamente ciertos problemas; a menudo se requiere una calculadora para realizar las sumas. Parte de este material también se cubre en la sección 7-3 del capítulo 7.

Si conocemos la velocidad v de un objeto como una función del tiempo t, podemos obtener el desplazamiento, x. Suponga que la velocidad como una función del tiempo, $v(t)$, está dada como una gráfica (y no como una ecuación que podría integrarse como se explicó en la sección 2-8), según se observa en la figura 2-34a. Si nos interesa el intervalo de tiempo de t_1 a t_2, como se muestra, dividimos el eje del tiempo en muchos subintervalos pequeños, Δt_1, Δt_2, Δt_3,…, que se indican con las líneas punteadas verticales. Para cada subintervalo, se dibuja una línea punteada horizontal para indicar la velocidad promedio

durante ese intervalo de tiempo. El desplazamiento durante cualquier subintervalo está dado por Δx_i, donde el subíndice i representa un subintervalo particular ($i = 1, 2, 3, \ldots$). A partir de la definición de velocidad promedio (ecuación 2.2), tenemos que

$$\Delta x_i = \bar{v}_i \, \Delta t_i .$$

Por lo tanto, el desplazamiento durante cada subintervalo de tiempo es igual al producto de $\bar{v}_i$ y Δt_i, y es igual al área del rectángulo oscuro de la figura 2.34a para ese subintervalo de tiempo. El desplazamiento total entre los tiempos t_1 y t_2 es entonces la suma de los desplazamientos a lo largo de todos los subintervalos pequeños:

$$x_2 - x_1 = \sum_{t_1}^{t_2} \bar{v}_i \, \Delta t_i , \qquad \textbf{(2–13a)}$$

donde x_1 es la posición en t_1 y x_2 es la posición en t_2. Esta suma es igual al área de todos los rectángulos mostrados.

En general es difícil estimar $\bar{v}_i$, con precisión para cada subintervalo de la gráfica. Podemos mejorar la exactitud de nuestro cálculo de $x_2 - x_1$ dividiendo el intervalo $t_2 - t_1$ en más subintervalos, pero más estrechos. De manera ideal, podemos hacer que cada Δt_i tienda a cero, de manera que nos aproximamos (en principio) a un número infinito de subintervalos. En el límite, el área de todos estos rectángulos infinitesimalmente delgados se vuelve exactamente igual al área bajo la curva (figura 2-34b). Por consiguiente, *el desplazamiento total entre cualesquiera dos tiempos es igual al área bajo la curva de velocidad como función del tiempo entre los dos tiempos t_1 y t_2*. Este límite se representa como

$$x_2 - x_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{t_1}^{t_2} \bar{v}_i \, \Delta t_i$$

o, usando una notación estándar de cálculo,

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \, dt. \qquad \textbf{(2–13b)}$$

Hacemos que $\Delta t \to 0$ y se renombra como dt para indicar que ahora es infinitesimalmente pequeño. La velocidad promedio, $\bar{v}$, en un tiempo infinitesimal dt es la velocidad instantánea en ese instante, que hemos denotado como $v(t)$ para recordar que v es una función de t. El símbolo $\int$ es una S alargada e indica la suma de un número infinito de subintervalos infinitesimales. Se dice que estamos tomando la *integral* de $v(t)$ sobre dt del tiempo t_1 al tiempo t_2, y esto es igual al área entre la curva $v(t)$ y el eje t entre los tiempos t_1 y t_2 (figura 2-34b). La integral en la ecuación 2-13b es una *integral definida*, puesto que se especifican los límites t_1 y t_2.

De manera similar, si sabemos que la aceleración es una función del tiempo, es posible obtener la velocidad mediante el mismo procedimiento. Utilizamos la definición de la aceleración promedio (ecuación 2-5) y se despeja para Δv:

$$\Delta \bar{v} = \bar{a} \, \Delta t.$$

Si se sabe que a es una función de t a lo largo de cierto intervalo de tiempo t_1 a t_2, podemos subdividir este intervalo de tiempo en muchos subintervalos, Δt_i, como se hizo en la figura 2-34a. El cambio en la velocidad durante cada subintervalo es $\Delta v_i = \bar{a}_i \, \Delta t_i$. El cambio total en la velocidad del tiempo t_1 al tiempo t_2 es

$$v_2 - v_1 = \sum_{t_1}^{t_2} \bar{a}_i \, \Delta t_i , \qquad \textbf{(2–14a)}$$

donde v_2 representa la velocidad en t_2 y v_1 la velocidad en t_1. Esta relación se puede representar como una integral haciendo que $\Delta t \to 0$ (de manera que el número de intervalos tiende a infinito)

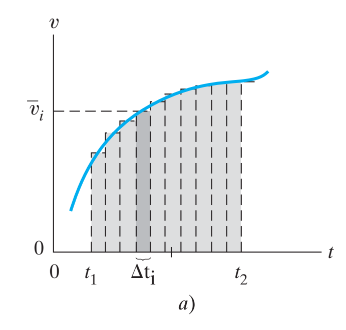
$$v_2 - v_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{t_1}^{t_2} \bar{a}_i \, \Delta t_i$$

o

$$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a(t) \, dt. \qquad \textbf{(2–14b)}$$

Las ecuaciones 2-14 nos permitirán determinar la velocidad v_2 en un cierto tiempo t_2 si se conoce la velocidad en t_1 y se conoce la alceleración a como función del tiempo.

Si se conoce la aceleración o la velocidad en intervalos de tiempo discretos, podemos usar las formas de sumatoria de las ecuaciones anteriores, 2-13a y 2-14a, para estimar la velocidad o el desplazamiento. Esta técnica se conoce como **integración numérica**. Ahora veremos un ejemplo que también puede evaluarse analíticamente, de manera que podamos comparar los resultados.



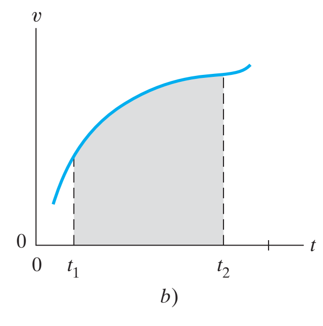


FIGURA 2–34 Gráfica de v versus t para el movimiento de una partícula. En *a*) el eje de tiempo se divide en subintervalos de ancho Δt_i, la velocidad promedio durante cada Δt_i es $\bar{v}_i$, y el área de todos los rectángulos, $\Sigma \bar{v}_i \Delta t_i$, es numéricamente igual al desplazamiento total ($x_2 - x_1$) durante el tiempo total ($t_2 - t_1$). En *b*), $\Delta t_i \to 0$ y el área bajo la curva es igual a ($x_2 - x_1$).

EJEMPLO 2–22 **Integración numérica.** Un objeto parte del reposo en $t = 0$ y acelera a razón de $a(t) = (8.00\ \mathrm{m/s^4})t^2$. Determine su velocidad después de 2.00 s utilizando métodos numéricos.

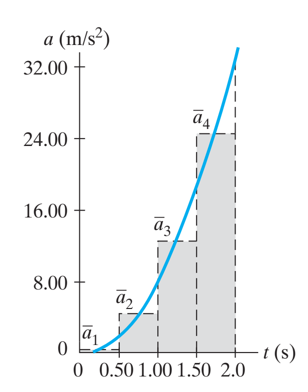


FIGURA 2–35 Ejemplo 2–22.

PLANTEAMIENTO Dividamos primero el intervalo que va de $t = 0.00$ s a $t = 2.00$ s en cuatro subintervalos, cada uno con una duración $\Delta t_i = 0.50$ s (figura 2-35). Utilizamos la ecuación 2-14a con $v_2 = v$, $v_1 = 0$, $t_2 = 2.00$ s y $t_1 = 0$. Para cada uno de los subintervalos es necesario calcular $\bar{a}_i$. Hay varias formas de hacerlo y utilizamos el sencillo método de elegir $\bar{a}_i$ como la aceleración $a(t)$ en el punto medio de cada intervalo (un procedimiento todavía más sencillo pero por lo general menos preciso sería utilizar el valor de a al inicio del subintervalo). Esto es, se evalúa $a(t) = (8.00\ \mathrm{m/s^4})t^2$ en $t = 0.25$ s (que está a la mitad del camino entre 0.00 s y 0.50 s), 0.75 s, 1.25 s y 1.75 s.

SOLUCIÓN Los resultados son los siguientes:

i	1	2	3	4
$\bar{a}_i\,(\mathrm{m/s^2})$	0.50	4.50	12.50	24.50

Ahora usamos la ecuación 2-14a y notamos que cualquier Δt_i es igual a 0.50 s (de manera que podemos factorizar):

$$\begin{aligned} v(t = 2.00\,\mathrm{s}) &= \sum_{t=0}^{t=2.00\,\mathrm{s}} \bar{a}_i\,\Delta t_i \\ &= \left(0.50\,\mathrm{m/s^2} + 4.50\,\mathrm{m/s^2} + 12.50\,\mathrm{m/s^2} + 24.50\,\mathrm{m/s^2}\right)(0.50\,\mathrm{s}) \\ &= 21.0\,\mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

Comparamos este resultado con la solución analítica dada por la ecuación 2-14b ya que la forma funcional para a es analíticamente integrable:

$$\begin{aligned} v = \int_0^{2.00\,\mathrm{s}} \left(8.00\,\mathrm{m/s^4}\right)t^2\,dt &= \frac{8.00\,\mathrm{m/s^4}}{3}\,t^3\Big|_0^{2.00\,\mathrm{s}} \\ &= \frac{8.00\,\mathrm{m/s^4}}{3}\left[(2.00\,\mathrm{s})^3 - (0)^3\right] = 21.33\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

o 21.3 m/s con el número adecuado de cifras significativas. Esta solución analítica es precisa y vemos que nuestra estimación numérica no está lejos aun cuando usamos sólo cuatro intervalos de Δt. Quizá no sea lo suficientemente cercano para propósitos que requieran gran exactitud. Si utilizamos subintervalos cada vez más pequeños, obtendremos un resultado más exacto. Si usamos 10 subintervalos, cada uno con $\Delta t = 2.00\ \mathrm{s}/10 = 0.20$ s, tenemos que evaluar $a(t)$ en $t = 0.10$ s, 0.30 s,…, 1.90 s para obtener los $\bar{a}_i$, que son como sigue:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{a}_i\,(\mathrm{m/s^2})$	0.08	0.72	2.00	3.92	6.48	9.68	13.52	18.00	23.12	28.88

Entonces, de la ecuación 2-14 obtenemos

$$\begin{aligned} v(t = 2.00\,\mathrm{s}) = \sum \bar{a}_i\,\Delta t_i &= \left(\sum \bar{a}_i\right)(0.200\,\mathrm{s}) \\ &= \left(106.4\,\mathrm{m/s^2}\right)(0.200\,\mathrm{s}) = 21.28\,\mathrm{m/s}, \end{aligned}$$

donde conservamos una cifra significativa adicional para demostrar que este resultado es mucho más cercano al valor analítico (exacto); pero aun así no es idéntico a éste. La diferencia porcentual disminuye de 1.4% ($0.3\ \mathrm{m/s^2}/21.3\ \mathrm{m/s^2}$) en el cálculo de cuatro subintervalos a sólo 0.2% (0.05/21.3) en el de 10 subintervalos.

En el ejemplo anterior se nos dio una función analítica que era integrable, de manera que podemos comparar la exactitud del calculo numérico con el valor preciso conocido. Pero, ¿qué haremos si la función no es integrable, de manera que no podamos comparar nuestros resultados numéricos con uno analítico? Es decir, ¿cómo sabremos si hemos considerado suficientes subintervalos para que confiemos en que nuestro cálculo estimado sea exacto dentro de una incertidumbre deseada, digamos, de 1 por ciento? Lo que podemos hacer es comparar dos cálculos numéricos sucesivos: el primero realizado con n subintervalos y el segundo con, digamos, el doble de subintervalos ($2n$). Si los dos resultados están dentro de la incertidumbre deseada (digamos 1 por ciento), podemos suponer por lo general que el cálculo con más subintervalos está dentro de la incertidumbre deseada del valor verdadero. Si los dos cálculos no tienen esa cercanía, entonces debe hacerse un tercer cálculo con más subintervalos (tal vez del doble, 10 veces más, dependiendo de qué tan buena haya sido la estimación previa), para compararse con el anterior.

El procedimiento se automatiza fácilmente usando la aplicación por computadora de una hoja de cálculo.

Si también queremos obtener el desplazamiento x en algún momento, tendríamos que hacer una segunda integración numérica sobre v, lo cual significa que primero necesitaríamos calcular v para muchos tiempos diferentes. Las calculadoras y las computadoras programables son muy útiles para realizar sumas grandes.

Al final de muchos capítulos de este libro se presentan problemas que utilizan estas técnicas numéricas, se denominan ejercicios númericos/por computadora, y se marcan con un asterisco para indicar que son opcionales.

Resumen

[El resumen que aparece al final de cada capítulo en este libro da un breve panorama general de las ideas principales del capítulo. El resumen *no puede* servir para obtener un entendimiento cabal del material, lo cual se logra sólo mediante una lectura cuidadosa del capítulo].

La **cinemática** trata de la descripción de cómo se mueven los objetos. La descripción del movimiento de cualquier objeto debe darse siempre en relación con algún **marco de referencia**.

El **desplazamiento** de un objeto es el cambio en la posición del mismo.

La **rapidez promedio** es la distancia recorrida dividida entre el tiempo transcurrido o el intervalo de tiempo, Δt, que es el periodo durante el cual elegimos realizar nuestras observaciones. La **velocidad promedio** de un objeto sobre un intervalo particular de tiempo Δt se define como el desplazamiento Δx durante ese intervalo de tiempo, dividido entre Δt:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad \textbf{(2–2)}$$

La **velocidad instantánea**, cuya magnitud es la misma que la *rapidez instantánea*, se define como la velocidad promedio tomada sobre un intervalo de tiempo infinitesimalmente pequeño ($\Delta t \rightarrow 0$):

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, \qquad \textbf{(2–4)}$$

donde dx/dt es la derivada de x con respecto a t.

Sobre una gráfica de posición versus tiempo, la *pendiente* es igual a la velocidad instantánea.

La aceleración es el cambio de velocidad por unidad de tiempo. La **aceleración promedio** de un objeto sobre un intervalo de tiempo Δt es

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \qquad \textbf{(2–5)}$$

donde Δv es el cambio de velocidad durante el intervalo de tiempo Δt.

La **aceleración instantánea** es la aceleración promedio tomada durante un intervalo de tiempo infinitesimalmente corto:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \qquad \textbf{(2–6)}$$

Si un objeto se mueve en una línea recta con *aceleración constante*, la velocidad v y la posición x están relacionadas con la aceleración a, el tiempo transcurrido t, la posición inicial x_0 y la velocidad inicial v_0, mediante las ecuaciones 2-12:

$$v = v_0 + at, \qquad x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2,$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0), \qquad \bar{v} = \frac{v + v_0}{2}. \qquad \textbf{(2–12)}$$

Los objetos que se mueven verticalmente cerca de la superficie de la Tierra, ya sea que caigan o se lancen verticalmente hacia arriba o hacia abajo, se mueven con la **aceleración debida a la gravedad** constante hacia abajo, con magnitud de $g = 9.80\ \text{m/s}^2$, ignorando la resistencia del aire.

[*Las ecuaciones cinemáticas 2-12 pueden derivarse usando cálculo integral].

Preguntas

1. ¿El velocímetro de un automóvil mide rapidez, velocidad o ambas?

2. ¿Un objeto puede tener una rapidez variable si su velocidad es constante? ¿Puede tener velocidad variable si su rapidez es constante? En caso afirmativo, dé ejemplos en cada caso.

3. Cuando un objeto se mueve con velocidad constante, ¿su velocidad promedio durante cualquier intervalo de tiempo difiere de su velocidad instantánea en cualquier otro instante?

4. Si un objeto tiene una rapidez mayor que un segundo objeto, ¿tiene el primero necesariamente una aceleración mayor? Explique usando ejemplos.

5. Compare la aceleración de una motocicleta que acelera de 80 km/h a 90 km/h, con la aceleración de una bicicleta que acelera del reposo a 10 km/h en el mismo tiempo.

6. ¿Puede un objeto tener una velocidad hacia el norte y una aceleración hacia el sur? Explique.

7. ¿La velocidad de un objeto puede ser negativa cuando su aceleración es positiva? ¿Y viceversa?

8. Dé un ejemplo donde tanto la velocidad como la aceleración sean negativas.

9. Dos automóviles entran lado a lado de un túnel. El automóvil A viaja con una rapidez de 60 km/h y tiene una aceleración de 40 km/h/min. El automóvil B tiene una rapidez de 40 km/h y tiene una aceleración de 60 km/h/min. ¿Cuál automóvil irá adelante cuando salgan del túnel? Explique su razonamiento.

10. ¿Puede un objeto incrementar su rapidez si su aceleración disminuye? Si es así, dé un ejemplo. Si no, explique.

11. Un jugador de béisbol batea un *foul* recto en el aire. La pelota sale del bate con una rapidez de 120 km/h. En ausencia de resistencia del aire, ¿cuál será la rapidez de la pelota cuando la atrape el *catcher*?

12. Cuando un objeto en caída libre incrementa su velocidad, ¿qué pasa a su aceleración, aumenta, disminuye o permanece igual? *a*) Ignore la resistencia del aire. *b*) Considere la resistencia del aire.

13. Usted viaja del punto A al punto B en un automóvil que se mueve con rapidez constante de 70 km/h. Luego viaja la misma distancia del punto B a otro punto C, moviéndose con rapidez constante de 90 km/h. ¿Su velocidad promedio para el viaje completo de A a C es igual a 80 km/h? Explique su respuesta.

14. ¿Puede un objeto tener velocidad cero y aceleración distinta de cero al mismo tiempo? Mencione algunos ejemplos.

15. ¿Puede un objeto tener aceleración cero y velocidad distinta de cero al mismo tiempo? Mencione algunos ejemplos.

16. ¿Cuál de estos movimientos *no* tiene aceleración constante: una roca que cae desde un acantilado, un elevador que asciende desde el segundo piso hasta el quinto pisos con paradas durante el trayecto, un plato que descansa sobre una mesa?

17. En una demostración durante una conferencia, una cuerda vertical de 3.0 m de largo que tiene amarrados 10 tornillos a intervalos iguales se suelta desde el techo del salón de conferencias. La cuerda cae sobre una placa de lámina, y la clase escucha el tintineo de cada tornillo conforme golpea contra la placa. Los sonidos no ocurrirán a intervalos de tiempo iguales. ¿Por qué? ¿El tiempo entre tintineos aumentará o disminuirá cerca del final de la caída? ¿Cómo amarraría usted los tornillos de manera que los tintineos ocurran a intervalos iguales?

18. Describa con palabras el movimiento graficado en la figura 2-36 en términos de v, a, etcétera. [*Sugerencia*: Primero intente duplicar el movimiento graficado caminando o moviendo la mano].

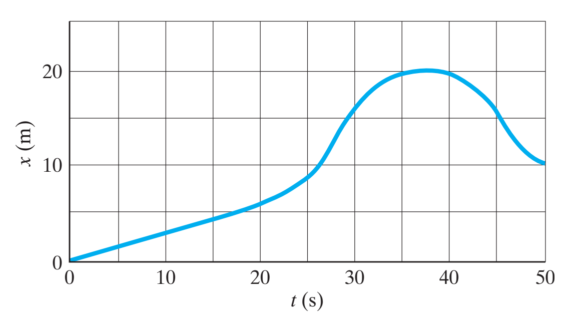


FIGURA 2–36 Pregunta 18, problemas 9 y 86.

19. Describa con palabras el movimiento del objeto graficado en la figura 2-37.

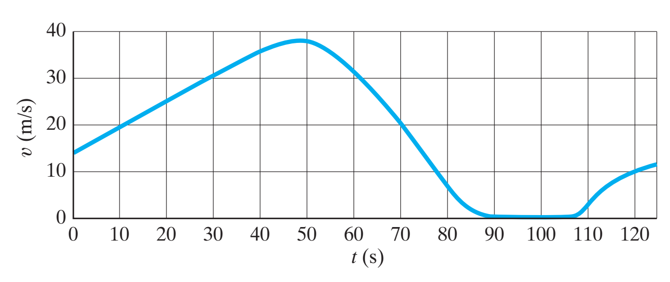


FIGURA 2–37 Pregunta 19 y problema 23.

Problemas

[Los problemas al final de cada capítulo están clasificados como I, II o III, de acuerdo con la dificultad estimada de cada uno; siendo los problemas I los más sencillos. Los problemas de nivel III se presentan especialmente como un desafío para los mejores estudiantes. Los problemas están ubicados por secciones, lo cual significa que el lector deberá leer esa sección; pero no sólo esa sección, ya que los problemas a menudo incluyen material de secciones previas. Finalmente, hay un conjunto de “problemas generales” que no están ordenados por sección ni están clasificados por grado de dificultad].

2–1 a 2-3 Rapidez y velocidad

1. (I) Si usted va manejando a 110 km/h a lo largo de una carretera recta y se distrae durante 2.0 s, ¿qué distancia recorre en este periodo de falta de atención?

2. (I) ¿Cuál debe ser la rapidez promedio de su automóvil para recorrer 235 km en 3.25 h?

3. (I) En $t_1 = -2.0$ s, una partícula está en $x_1 = 4.3$ cm y en $t_2 = 4.5$ s está en $x_2 = 8.5$ cm. ¿Cuál es la velocidad promedio de la partícula? ¿Puede calcular la rapidez promedio con estos datos?

4. (I) Una pelota que rueda se mueve desde $x_1 = 3.4$ cm hasta $x_2 = -4.2$ cm durante el tiempo desde $t_1 = 3.0$ s hasta $t_2 = 5.1$ s. ¿Cuál es su velocidad promedio?

5. (II) De acuerdo con una regla empírica, cada cinco segundos entre un relámpago y el siguiente trueno indican la distancia al relámpago en millas. Suponiendo que la luz del relámpago llega instantáneamente, estime la rapidez del sonido en m/s a partir de esta regla. ¿Cuál sería la regla en kilómetros en vez de millas?

6. (II) Usted va conduciendo un automóvil de la escuela a la casa a 95 km/h de manera uniforme a lo largo de 130 km. Empieza a llover, baja la velocidad a 65 km/h y llega a casa después de conducir durante 3 horas y 20 minutos. *a*) ¿Qué tan lejos está su casa de la escuela? *b*) ¿Cuál fue la rapidez promedio?

7. (II) Un caballo se aleja de su entrenador galopando en línea recta una distancia de 116 m en 14.0 s. Luego regresa abruptamente y recorre la mitad de la distancia en 4.8 s. Calcule *a)* la rapidez promedio y *b*) la velocidad promedio para todo el viaje, usando “alejándose de su entrenador” como el sentido positivo del movimiento.

8. (II) La posición de un objeto pequeño está dada por $x = 34 + 10t - 2t^3$, donde t está en segundos y x en metros. *a*) Grafique x como función de t desde $t = 0$ hasta $t = 3.0$ s. *b*) Encuentre la velocidad promedio del objeto entre 0 y 3.0 s. *c*) ¿A qué tiempo entre 0 y 3.0 s la velocidad instantánea es igual a cero?

9. (II) La posición de un conejo a lo largo de un túnel recto en función del tiempo se grafica en la figura 2-36. ¿Cuál es su velocidad instantánea *a*) en $t = 10.0$ s y *b*) en $t = 30.0$ s? ¿Cuál es su velocidad promedio *c*) entre $t = 0$ y $t = 5.0$ s, *d*) entre $t = 25.0$ s y $t = 30.0$ s, y *e*) entre $t = 40.0$ s y $t = 50.0$ s?

10. (II) En un disco compacto de audio (CD), los bits de información digital se codifican secuencialmente a lo largo de una trayectoria espiral. Cada bit ocupa aproximadamente 0.28 μm. Un lector láser del reproductor de CD escanea a lo largo de la secuencia de bits en la espiral a una rapidez constante de aproximadamente 1.2 m/s conforme gira el CD. *a*) determine el número N de bits digitales que un reproductor de CD lee cada segundo. *b*) La información del audio se envía a cada uno de los dos altavoces (bocinas) 44,100 veces por segundo. Cada una de estas muestras requiere 16 bits y así (a primera vista) se creería que la razón de bits requerida por el reproductor de CD es

$$N_0 = 2\left(44{,}100\,\frac{\text{muestras}}{\text{segundo}}\right)\left(16\,\frac{\text{bits}}{\text{muestra}}\right) = 1.4 \times 10^6\,\frac{\text{bits}}{\text{segundo}},$$

donde el 2 corresponde a los 2 altavoces (los dos canales del sonido estéreo). Advierta que N_0 es menor que el número N de bits que en realidad lee cada segundo un reproductor de CD. El número excedente de bits ($= N - N_0$) se requiere para codificar y corregir errores. ¿Qué porcentaje de bits en un CD están dedicados a codificar y corregir errores?

11. (II) Un automóvil que viaja a 95 km/h va 110 m atrás de un camión que viaja a 75 km/h. ¿Cuánto tiempo le tomará al automóvil alcanzar al camión?

12. (II) Dos locomotoras se acercan entre sí sobre vías paralelas. Cada una tiene una rapidez de 95 km/h con respecto al suelo. Si inicialmente están separadas entre sí 8.5 km, ¿cuánto tiempo pasará antes de que se encuentren? (Véase la figura 2-38).

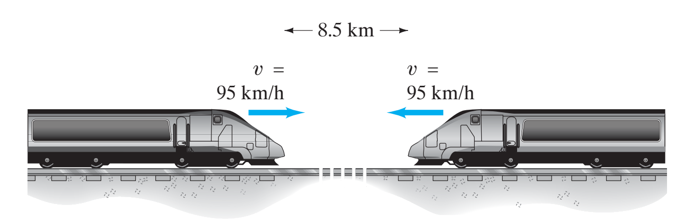


FIGURA 2–38 Problema 12.

13. (II) Los bits digitales en un CD de audio de 12.0 cm de diámetro se codifican a lo largo de una trayectoria en espiral hacia fuera, que inicia en el radio $R_1 = 2.5$ cm y termina en el radio $R_2 = 5.8$ cm. La distancia entre los centros del enrollado en espiral colindantes es de 1.6 μm ($= 1.6 \times 10^{-6}$ m). *a*) Determine la longitud total de la trayectoria en espiral. [*Sugerencia*: Imagine que "desenrolla" la espiral como una trayectoria recta con 1.6 μm de ancho, y note que la espiral original y la trayectoria recta ocupan ambas la misma área]. *b*) Para leer información, un reproductor de CD ajusta la rotación del CD de manera que su lector láser se mueve a lo largo de la trayectoria en espiral a una rapidez constante de 1.25 m/s. Estime el tiempo máximo de reproducción de un CD como éste.

14. (II) Un avión viaja 3100 km a una rapidez de 720 km/h y luego encuentra un viento en cola que incrementa su rapidez a 990 km/h durante los siguientes 2800 km. ¿Cuál fue el tiempo total del viaje? ¿Cuál fue la rapidez promedio del avión durante el viaje? [*Sugerencia*: ¿Se aplica la ecuación 2-12d, o no?].

15. (II) Calcule la rapidez promedio y la velocidad promedio de un viaje redondo en el que los 250 km de ida se recorrieron a 95 km/h, seguido de una hora para almorzar, y el camino de retorno de 250 km se cubrió a 50 km/h.

16. (II) La posición de una pelota que rueda en línea recta está dada por $x = 2.0 - 3.6t + 1.1t^2$, donde x está en metros y t en segundos. *a*) Determine la posición de la pelota en $t = 1.0$ s, 2.0 s y 3.0 s. *b*) ¿Cuál es su velocidad promedio en el intervalo de $t = 1.0$ s a $t = 3.0$ s? *c*) ¿Cuál es su velocidad instantánea en $t = 2.0$ s y en $t = 3.0$ s?

17. (II) Un perro corre 120 m alejándose de su amo en línea recta en 8.4 s y luego corre de regreso la mitad de esa distancia en una tercera parte de ese tiempo. Calcule *a*) su rapidez promedio y *b*) su velocidad promedio.

18. (III) Un automóvil que viaja a 95 km/h alcanza a un tren de 1.10 km de largo que viaja en el mismo sentido sobre una vía paralela al camino. Si la rapidez del tren es de 75 km/h, ¿qué tiempo le tomará al automóvil rebasar al tren y qué distancia habrá viajado el auto en este tiempo? Véase la figura 2-39. ¿Qué resultados se obtienen si el tren y el automóvil viajan ambos en sentidos opuestos?

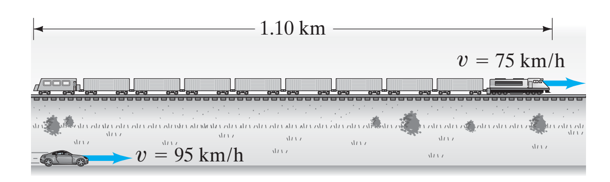


FIGURA 2–39 Problema 18.

19. (III) Una bola de bolos (boliche) que rueda con rapidez constante golpea los pinos al final de la mesa de 16.5 m de longitud. El jugador escucha el sonido de la bola que golpea los pinos 2.50 s después de que la lanza. ¿Cuál es la rapidez de la bola, suponiendo que la rapidez del sonido es de 340 m/s?

2–4 Aceleración

20. (I) Un auto deportivo acelera desde el reposo hasta alcanzar 95 km/h en 4.5 s. ¿Cuál es su aceleración promedio en m/s^2?

21. (I) Considerando las rapideces de una autopista, un automóvil particular es capaz de alcanzar una aceleración de aproximadamente 1.8 m/s^2. A esta razón, ¿cuánto tiempo le tomará acelerar de 80 km/h a 110 km/h?

22. (I) Una velocista acelera desde el reposo hasta 9.00 m/s en 1.28 s. ¿Cuál es su aceleración *a*) en m/s^2; y *b*) en km/h^2?

23. (I) La figura 2-37 muestra la velocidad de un tren en función del tiempo. *a*) ¿En qué momento su velocidad fue máxima? *b*) ¿Durante qué periodos de tiempo, si los hubo, su velocidad fue constante? *c*) ¿Durante qué periodos de tiempo, si los hubo, su aceleración fue constante? *d*) ¿Cuándo fue máxima la magnitud de la aceleración?

24. (II) Un automóvil deportivo que se mueve con rapidez constante viaja 110 m en 5.0 s. Si después frena y se detiene en 4.0 s, ¿cuál es la magnitud de su aceleración en m/s^2 y en unidades de g ($g = 9.80$ m/s^2)?

25. (II) Un automóvil que se mueve en línea recta parte de $x = 0$ en $t = 0$. Pasa el punto $x = 25.0$ m con rapidez de 11.0 m/s en $t = 3.00$ s. Pasa el punto $x = 385$ m con rapidez de 45.0 m/s en $t = 20.0$ s. Encuentre *a*) la velocidad promedio y *b*) la aceleración promedio entre $t = 3.00$ s y $t = 20.0$ s.

26. (II) Un automóvil particular puede acelerar aproximadamente como se muestra en la gráfica de velocidad versus tiempo de la figura 2-40. (Las porciones rectas en la curva representan el cambio de engranes (también conocidos como "velocidades"). Estime la aceleración promedio del automóvil durante *a*) el segundo engrane; y *b*) el cuarto engrane. *c*) ¿Cuál es su aceleración promedio a través de los primeros cuatro engranes?

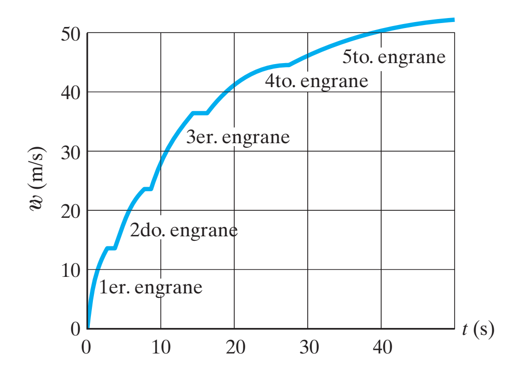


FIGURA 2–40 Problema 26. La velocidad de un automóvil de alto desempeño en función del tiempo, partiendo del reposo (tope fijo). Las porciones rectas en la curva representan cambios de engrane.

27. (II) Una partícula se mueve a lo largo del eje x. Su posición como función del tiempo está dada por la ecuación $x = 6.8t + 8.5t^2$, donde t está en segundos y x está en metros. ¿Cuál es la aceleración de la partícula como función del tiempo?

28. (II) La posición de un auto de carreras, que parte del reposo en $t = 0$ y se mueve en línea recta, se da en función del tiempo, como se indica en la siguiente tabla. Estime *a*) su velocidad y *b*) su aceleración en función del tiempo. Muestre cada resultado en una tabla y en una gráfica.

t(s)	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00	2.50
x(m)	0	0.11	0.46	1.06	1.94	4.62	8.55	13.79
t(s)	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00	5.50	6.00	
x(m)	20.36	28.31	37.65	48.37	60.30	73.26	87.16	

29. (II) La posición de un objeto está dada por $x = At + Bt^2$, donde x está en metros y t en segundos. *a*) ¿Cuáles son las unidades de las constantes A y B? *b*) ¿Cuál es la aceleración como función del tiempo? *c*) ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración del objeto en $t = 5.0$ s? *d*) ¿Cuál sería la velocidad como función del tiempo si $x = At + Bt^{-3}$?

2–5 y 2-6 Movimiento con aceleración constante

30. (I) Un auto desacelera de 25 m/s al reposo en una distancia de 85 m. ¿Cuál fue su aceleración, suponiendo que ésta es constante?

31. (I) Un auto acelera de 12 m/s a 21 m/s en 6.0 s. ¿Cuál fue su aceleración? ¿Qué distancia recorrió en este tiempo? Suponga aceleración constante.

32. (I) Una avioneta debe alcanzar una rapidez de 32 m/s para despegar. ¿Qué longitud de pista se requiere si su aceleración (constante) es de 3.0 m/s^2?

33. (II) Un pitcher lanza una pelota con una rapidez de 41 m/s. Estime la aceleración promedio de la pelota durante el movimiento de lanzamiento. Al lanzar la pelota, el pitcher acelera la pelota a través de un desplazamiento de aproximadamente 3.5 m, desde atrás de su cuerpo hasta el punto donde suelta la pelota (figura 2-41).

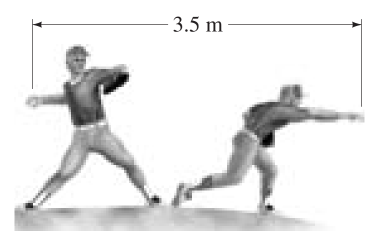


FIGURA 2–41 Problema 33.

34. (II) Demuestre que $\bar{v} = (v + v_0)/2$ (véase la ecuación 2-12d) no es válida para el caso en que la aceleración sea $a = A + Bt$, donde A y B son constantes.

35. (II) Una corredora de nivel mundial puede alcanzar una rapidez máxima (de aproximadamente 11.5 m/s) en los primeros 15.0 m de una carrera. ¿Cuál es la aceleración promedio de esta corredora y cuánto tiempo le tomará alcanzar esa rapidez?

36. (II) Un conductor distraído viaja a 18.0 m/s cuando se da cuenta de que adelante hay una luz roja. Su automóvil es capaz de desacelerar a razón de 3.65 m/s^2. Si le toma 0.200 s aplicar los frenos y está a 20.0 m de la intersección cuando ve la luz, ¿será capaz de detenerse a tiempo?

37. (II) Un automóvil desacelera uniformemente desde una rapidez de 18.0 m/s hasta alcanzar el reposo en 5.00 s. ¿Qué distancia viajó en ese tiempo?

38. (II) Al llegar al reposo, un automóvil deja marcas de derrape de 85 m de longitud sobre el pavimento. Suponiendo una desaceleración de 4.00 m/s^2, estime la rapidez del automóvil justo antes de frenar.

39. (II) Un automóvil que va a 85 km/h desacelera a una razón constante de 0.50 m/s^2 simplemente al dejar de pisar el acelerador. Calcule *a*) la distancia que recorre el automóvil antes de detenerse, *b*) el tiempo que le toma detenerse, y *c*) la distancia que viaja durante el primero y el quito segundos.

40. (II) Un automóvil que viaja a 105 km/h golpea un árbol. El frente del automóvil se comprime y el conductor llega al reposo después de recorrer 0.80 m. ¿Cuál fue la magnitud de la aceleración promedio del conductor durante la colisión? Exprese la respuesta en términos de g, donde 1.00 g = 9.80 m/s^2.

41. (II) Determine las distancias de frenado para un automóvil con una rapidez inicial de 95 km/h y un tiempo de reacción humana de 1.0 s: *a*) para una aceleración $a = -5.0$ m/s^2; *b*) para $a = -7.0$ m/s^2.

42. (II) Un vehículo espacial acelera uniformemente de 65 m/s en $t = 0$ a 162 m/s en $t = 10.0$ s. ¿Cuánto se movió entre $t = 2.0$ s y $t = 6.0$ s?

43. (II) Un tren de 75 m de largo acelera uniformemente desde el reposo. Si el frente del tren pasa con una rapidez de 23 m/s junto a un trabajador ferroviario situado 180 m del punto donde empezó el frente del tren, ¿cuál será la rapidez del último vagón al pasar junto al trabajador? (Véase la figura 2-42).

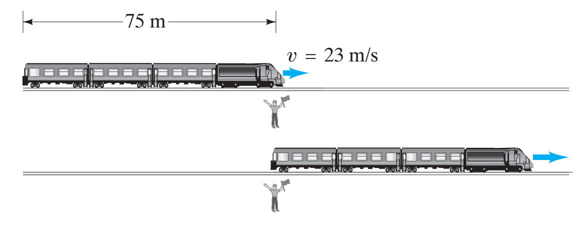


FIGURA 2–42 Problema 43.

44. (II) Una patrulla sin emblemas de la policía, que viaja a una rapidez constante de 95 km/h, es rebasada por un automóvil que va a exceso de velocidad a 135 km/h. Precisamente 1.00 s después de que éste la rebasa, la patrulla comienza a acelerar; si la aceleración de la patrulla es de 2.00 m/s^2, ¿cuánto tiempo le tomará alcanzar al automóvil infractor (suponga que éste mantiene su velocidad constante)?

45. (III) En el problema 44 suponga que no se conoce la rapidez excesiva del automóvil infractor. Si la patrulla acelera uniformemente como vimos y alcanza al otro vehículo después de acelerar durante 7.0 s, ¿cuál era la rapidez de éste?

46. (III) Un corredor espera completar la carrera de 10,000 m en menos de 30.0 min. Después de correr a rapidez constante durante exactamente 27.0 min, él tiene aún 1100 m por recorrer. ¿Durante cuántos segundos, entonces, debe el corredor acelerar a 0.20 m/s^2 para completar la carrera en el tiempo deseado?

47. (III) Mary y Sally participan en una carrera (figura 2-43). Cuando Mary está a 22 m de la línea de meta, tiene una rapidez de 4.0 m/s y está 5.0 m detrás de Sally, quien tiene una rapidez de 5.0 m/s. Sally cree que ganará fácilmente y desacelera durante el tramo restante de la carrera a una razón constante de 0.50 m/s^2 hasta la línea de meta. ¿Qué aceleración constante necesita ahora Mary durante el tramo restante de la carrera, si quiere cruzar la línea de meta empatada con Sally?

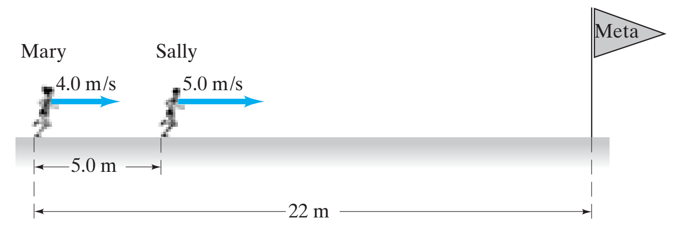


FIGURA 2–43 Problema 47.

2–7 Caída libre de objetos

[Ignore la resistencia del aire].

48. (I) Se deja caer una piedra desde la parte superior de un acantilado y toca el suelo 3.75 s después. ¿Cuál es la altura del acantilado?

49. (I) Si un automóvil se cae suavemente ($v_0 = 0$) desde un acantilado vertical, ¿cuánto tiempo le tomará alcanzar 55 km/h?

50. (I) Calcule *a*) cuánto tiempo le tomó a King Kong caer desde la cima del edificio Empire State (380 m de altura) y *b*) cuál era su velocidad al "aterrizar".

51. (II) Se batea una pelota casi en línea recta hacia arriba en el aire con una rapidez aproximada de 20 m/s. *a*) ¿Qué tan alto sube? *b*) ¿Cuánto tiempo permanece en el aire?

52. (II) Un jugador atrapa una pelota 3.2 s después de lanzarla verticalmente hacia arriba. ¿Con qué velocidad la lanzó y qué altura alcanzó la pelota?

53. (II) Un canguro salta y alcanza una altura vertical de 1.65 m. ¿Cuánto tiempo está en el aire antes de tocar el suelo de nuevo?

54. (II) Los mejores brincadores en básquetbol tienen un salto vertical (es decir, el movimiento vertical de un punto fijo de su cuerpo) de aproximadamente 120 cm. *a*) ¿Cuál es su rapidez de "lanzamiento" inicial desde el piso? *b*) ¿Cuánto tiempo permanecen en el aire?

55. (II) Un helicóptero asciende verticalmente con una rapidez de 5.10 m/s. A una altura de 105 m, se deja caer un paquete desde una ventana. ¿Cuánto tiempo tarda el paquete en llegar al suelo? [*Sugerencia*: v_0 para el paquete es igual a la rapidez del helicóptero].

56. (II) Para un objeto en caída libre desde el reposo, demuestre que la distancia recorrida durante cada segundo sucesivo crece según la razón de enteros impares sucesivos (1, 3, 5, etcétera). (Esto lo demostró Galileo por primera vez.) Véanse las figuras 2-26 y 2-29.

57. (II) Se observa que una pelota de béisbol pasa hacia arriba frente una ventana que está 23 m arriba de la calle, con rapidez vertical de 14 m/s. Si la pelota se lanzó desde la calle, ¿*a*) cuál era su rapidez inicial, *b*) a qué altura llega, *c*) cuándo se lanzó, y *d*) cuándo regresará a la calle de nuevo?

58. (II) Un cohete se eleva verticalmente desde el reposo, con una aceleración neta de 3.2 m/s^2 hasta que se le agota el combustible a una altitud de 950 m. Después de este punto, su aceleración es la de la gravedad, hacia abajo. *a*) ¿Cuál es la velocidad del cohete cuando se agota el combustible? *b*) ¿Cuánto tiempo le toma alcanzar este punto? *c*) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el cohete? *d*) ¿Cuánto tiempo le toma alcanzar la altura máxima? *e*) ¿Con qué velocidad toca el suelo? *f*) ¿Cuánto tiempo permanece en el aire en total?

59. (II) Roger observa que globos con agua pasan frente a su ventana y nota que cada globo golpea la acera 0.83 s después de pasar por su ventana. La habitación de Roger está en el tercer piso, 15 m arriba de la acera. *a*) ¿Qué tan rápido viajan los globos cuando pasan por la ventana de Roger? *b*) Suponiendo que los globos se sueltan desde el reposo, desde qué piso se dejaron caer? Cada piso de la residencia de estudiantes tiene 5.0 m de altura.

60. (II) Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez de 24.0 m/s. *a*) ¿Qué velocidad tiene cuando alcanza una altura de 13.0 m? *b*) ¿Cuánto tiempo requiere para alcanzar esta altura? *c*) ¿Por qué hay dos respuestas para el inciso *b*?

61. (II) A una piedra que cae le toma 0.33 s pasar frente a una ventana de 2.2 m de altura (figura 2-44). ¿Desde qué altura por arriba de la parte superior de la ventana se dejó caer la piedra?

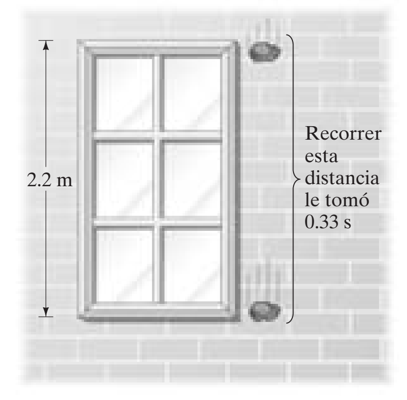


FIGURA 2–44 Problema 61.

62. (II) Suponga que usted ajusta la boquilla de su manguera de jardín para que salga un chorro grueso de agua. Apunta la boquilla verticalmente hacia arriba a una altura de 1.5 m desde el suelo (figura 2-45). Cuando usted mueve rápidamente la boquilla de la vertical, escucha el agua que toca el suelo junto a usted después de 2.0 s. ¿Cuál es la rapidez del agua al salir de la boquilla?

FIGURA 2–45 Problema 62.

63. (III) Un cohete de juguete que se mueve verticalmente pasa frente a una ventana de 2.0 m de altura, cuyo alféizar está a 8.0 m sobre el suelo. Al cohete le toma 0.15 s viajar los 2.0 m de altura de la ventana. ¿Cuál fue la rapidez de lanzamiento del cohete y qué tan alto subirá éste? Suponga que todo el combustible se quema muy rápidamente durante el despegue.

64. (III) Se deja caer un pelota desde la parte superior de un acantilado de 50.0 m de altura. Al mismo tiempo, se lanza una piedra cuidadosamente dirigida directo hacia arriba desde la parte inferior del acantilado con una rapidez de 24.0 m/s. Considerando que la piedra y la pelota chocan en algún punto, determine a qué altura sobre el acantilado ocurre la colisión.

65. (III) Se deja caer una piedra desde un acantilado y el sonido que hace cuando toca el mar se escucha 3.4 s después. Si la rapidez del sonido es de 340 m/s, ¿cuál es la altura del acantilado?

66. (III) Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba con una rapidez de 12.0 m/s. Exactamente 1.00 s después, se lanza una pelota verticalmente a lo largo de la misma trayectoria con una rapidez de 18.0 m/s. *a*) ¿En qué tiempo chocarán ambas entre sí? *b*) ¿A qué altura tendrá lugar la colisión? *c*) Responda *a*) y *b*) suponiendo que se invierte el orden: es decir, si la pelota se lanza 1.00 s antes que la piedra.

* 2–8 Aceleración variable; cálculo integral

***67.** (II) Dada $v(t) = 25 + 18t$, donde v está en m/s y t en s, use cálculo diferencial para determinar el desplazamiento total desde $t_1 = 1.5$ s hasta $t_2 = 3.1$ s.

***68.** (III) La aceleración de una partícula está dada por $a = A\sqrt{t}$ donde $A = 2.0$ m/s$^{5/2}$. En $t = 0$, $v = 7.5$ m/s y $x = 0$. *a*) ¿Cuál es la rapidez de la partícula en función del tiempo? *b*) ¿Cuál es el desplazamiento en función del tiempo? *c*) ¿Cuáles son la aceleración, la rapidez y el desplazamiento en $t = 5.0$ s?

***69.** (III) La resistencia del aire que actúa sobre un cuerpo que cae puede tomarse en cuenta mediante la relación aproximada para la aceleración:

$$a = \frac{dv}{dt} = g - kv,$$

donde k es una constante. *a*) Obtenga una expresión para la velocidad del cuerpo en función del tiempo, suponiendo que el cuerpo parte del reposo ($v = 0$ en $t = 0$). [*Sugerencia*: Haga un cambio de variable: $u = g - kv$]. *b*) Determine una expresión para la velocidad terminal, que es el valor máximo que alcanza la velocidad.

* 2–9 Análisis gráfico e integración numérica

[Véase los problemas 95 a 97 al final de este capítulo].

Problemas generales

70. Un fugitivo trata de alcanzar un tren de carga que viaja con una rapidez constante de 5.0 m/s. Justo cuando un vagón vacío pasa frente a él, el fugitivo parte del reposo y acelera con $a = 1.2$ m/s^2 hasta alcanzar su rapidez máxima de 6.0 m/s. *a*) ¿Cuánto tiempo le tomará alcanzar el vagón vacío? *b*) ¿Cuál es la distancia recorrida por él para alcanzar el vagón?

71. En la Luna la aceleración debida a la gravedad es aproximadamente de un sexto de la que hay en la Tierra. Si un objeto se lanza verticalmente hacia arriba en la Luna, ¿cuántas veces más alto viajará que en la Tierra, suponiendo que tiene la misma velocidad inicial?

72. Una persona salta desde una ventana en un cuarto piso a 15.0 m por arriba de una red de seguridad de los bomberos. Al caer, la red se estira 1.0 m antes de que la persona quede en reposo, figura 2-46. *a*) ¿Cuál fue la desaceleración promedio experimentada por la persona mientras se frena en la red? *b*) ¿Qué haría usted para hacer "más segura" la red (es decir, generar una desaceleración menor): la haría más rígida o más flexible? Explique.

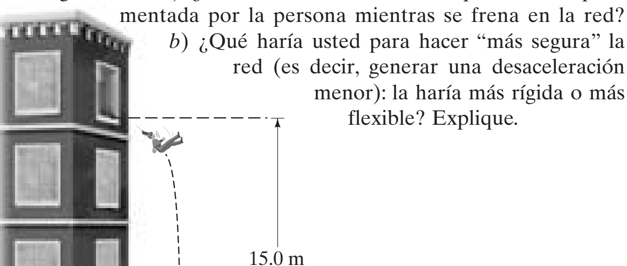


FIGURA 2–46 Problema 72.

73. Una persona debidamente sujetada por un cinturón de seguridad tiene una buena oportunidad de sobrevivir a un choque automovilístico, si la desaceleración no excede de 30 *g* (1.00 $g =$ 9.80 m/s^2). Suponiendo una desaceleración uniforme con este valor, calcule la distancia que puede colapsarse la parte delantera del automóvil en un choque que lleva al automóvil desde una rapidez de 100 km/h hasta el reposo.

74. Los pelícanos pliegan sus alas y caen libremente en busca de peces. Suponga que un pelícano inicia su zambullida desde una altura de 16.0 m y no puede cambiar su trayectoria una vez iniciada ésta. Si a un pez le toma 0.20 s efectuar una maniobra evasiva, ¿a qué altura mínima debe detectar al pelícano para escapar? Suponga que el pez está en la superficie del agua.

75. Suponga que un fabricante de automóviles prueba sus vehículos contra colisiones de frente levantándolos con una grúa y dejándolos caer desde cierta altura. *a*) Demuestre que la rapidez del automóvil justo antes de llegar al piso después de caer una distancia vertical *H*, está dada por $\sqrt{2gH}$. ¿Qué altura corresponde a una colisión a *b*) 50 km/h y *c*) a 100 km/h?

76. Una piedra se deja caer desde la azotea de un edificio alto. Una segunda piedra se deja caer 1.50 s después. ¿Qué separación hay entre las piedras cuando la segunda piedra alcanza una rapidez de 12.0 m/s?

77. Un ciclista en la Tour de France supera un paso de una montaña moviéndose a 15 km/h. En el fondo de la montaña, 4.0 km más adelante, su rapidez es de 75 km/h. ¿Cuál fue su aceleración promedio (en m/s^2) mientras bajaba la montaña?

78. Considere la calle que se muestra en la figura 2-47. Cada intersección tiene un semáforo y la rapidez límite es de 50 km/h. Suponga que usted viene del oeste a la rapidez límite, y que cuando está a 10 m de la primera intersección todas luces se ponen en verde. Las luces permanecen en verde durante 13.0 s. *a*) Calcule el tiempo necesario para llegar al tercer semáforo. ¿Puede usted pasar los tres semáforos sin detenerse? *b*) Otro automóvil estaba detenido en la primera luz cuando todas las luces se pusieron en verde. Éste puede acelerar a razón de 2.00 m/s^2 hasta la rapidez límite. ¿Puede el segundo automóvil pasar los tres semáforos sin detenerse? ¿En cuantos segundos lo haría o no?

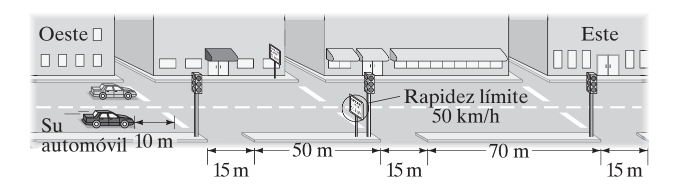


FIGURA 2–47 Problema 78.

79. Al dar un *putt*, *la* fuerza con que un jugador de golf debe golpear la pelota se determina de manera que la pelota se detenga a corta distancia del hoyo, digamos a 1.0 m de más o de menos, en caso de que falle el *putt*. Lograr esto desde una posición colina arriba (es decir, efectuar el *putt* colina abajo, véase la figura 2-48) es más difícil que desde una posición colina abajo. Para ver por qué esto es así, suponga que en un *green* específico la pelota desacelera constantemente a 1.8 m/s^2 al viajar hacia abajo y constantemente a 2.8 m/s^2 al viajar hacia arriba. Suponga que la posición colina arriba está a 7.0 m del hoyo. Calcule el rango permisible de velocidades iniciales que podemos impartir a la pelota, de manera que ésta se detenga en el rango de 1.0 m antes del hoyo y 1.0 m después del hoyo. Haga lo mismo para una posición de 7.0 m colina abajo desde el hoyo. En sus resultados ¿qué es lo que sugiere que el *putt* colina abajo sea más difícil?

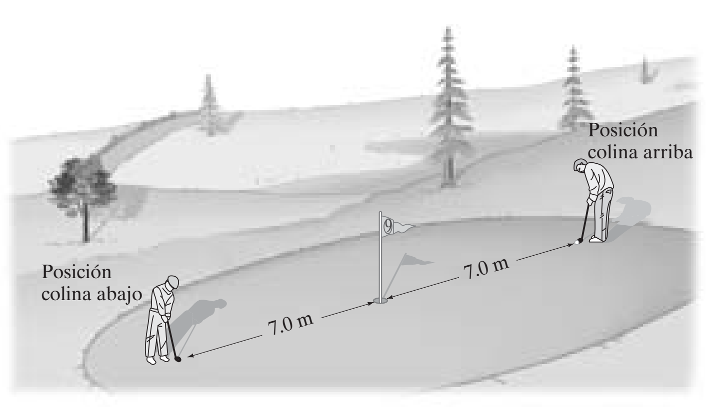


FIGURA 2–48 Problema 79.

80. Un robot usado en una farmacia selecciona un frasco de medicamento en $t = 0$. Acelera a 0.20 m/s^2 durante 5.0 s, luego viaja sin aceleración durante 68 s, y finalmente desacelera a -0.40 m/s^2 durante 2.5 s para llegar al mostrador, donde el empleado de la farmacia tomará el medicamento del robot. ¿Desde qué distancia trajo el frasco el robot?

81. Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de 12.5 m/s desde el borde de un acantilado de 75.0 m de altura (figura 2-49). *a*) ¿Cuánto tiempo le toma a la piedra llegar al fondo del acantilado? *b*) ¿Cuál es su rapidez justo antes de tocar el fondo? *c*) ¿Cuál es la distancia total recorrida?

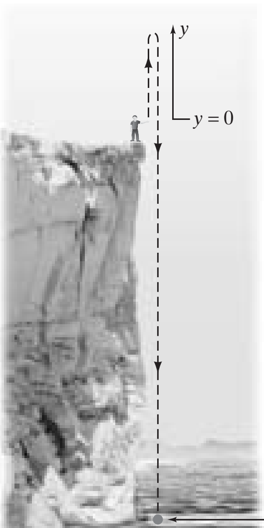


FIGURA 2–49 Problema 81.

82. La figura 2-50 es una gráfica de posición versus tiempo para el movimiento de un objeto a lo largo del eje *x*. Considere el intervalo de tiempo de A a B: *a*) ¿El objeto se mueve en sentido positivo o negativo? *b*) ¿El objeto está aumentando su rapidez o se está frenando? *c*) ¿La aceleración del objeto es positiva o negativa? Luego, para el intervalo de tiempo de D a E: *d*) ¿el objeto se mueve en sentido positivo o negativo? *e*) ¿El objeto está aumentando o disminuyendo su rapidez? *f*) ¿La aceleración del objeto es positiva o negativa? *g*) Finalmente, responda esas mismas tres preguntas para el intervalo de tiempo de C a D.

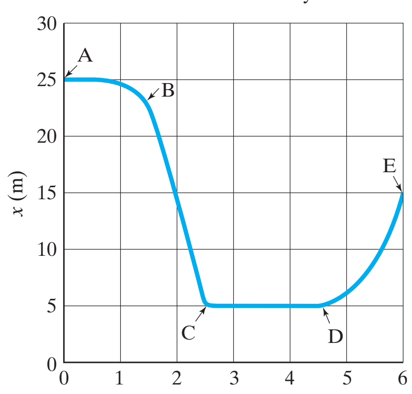


FIGURA 2–50 Problema 82.

83. En el diseño de un *sistema de tránsito rápido*, es necesario equilibrar la rapidez promedio de un tren contra la distancia entre las estaciones. Cuanto más estaciones haya, más lenta será la rapidez promedio del tren. Para tener una idea de este problema, calcule el tiempo que le toma a un tren realizar un recorrido de 9.0 km en las siguientes dos situaciones. *a*) Las estaciones donde el tren debe detenerse están separadas 1.8 km entre sí (para un total de 6 estaciones incluyendo las terminales). *b*) Las estaciones están separadas 3.0 km entre sí (4 estaciones en total). Suponga que en cada estación el tren acelera a razón de 1.1 m/s^2 hasta que alcanza 95 km/h, luego permanece con esta rapidez hasta que aplica sus frenos para arribar a la siguiente estación, desacelerando a razón de −2.0 m/s^2. Suponga que el tren se detiene en cada estación intermedia durante 22 s.

84. Una persona salta desde un trampolín situado a 4.0 m sobre la superficie del agua, en una alberca profunda. El movimiento descendente de la persona se detiene 2.0 m debajo de la superficie del agua. Estime la desaceleración promedio de la persona mientras está bajo el agua.

85. Bill lanza una bola verticalmente con una rapidez 1.5 veces mayor que Joe. ¿Cuántas veces más alto subirá la bola de Bill en comparación con la de Joe?

86. Bosqueje la gráfica de *v* versus *t* para el objeto cuyo desplazamiento en función del tiempo está dado por la figura 2-36.

87. Una persona que conduce un automóvil a 45 km/h se acerca a una intersección cuando la luz del semáforo se pone amarilla. Sabe que esta luz dura sólo 2.0 s antes de ponerse en rojo y la persona está a 28 m del lado cercano de la intersección (figura 2-51). ¿Debería intentar detenerse o debería acelerar para cruzar la intersección antes de que la luz cambie a rojo? La intersección tiene 15 m de ancho. La desaceleración máxima del auto es de −5.8 m/s^2, mientras que puede acelerar de 45 km/h a 65 km/h en 6.0 s. Desprecie la longitud del automóvil y el tiempo de reacción de la persona.

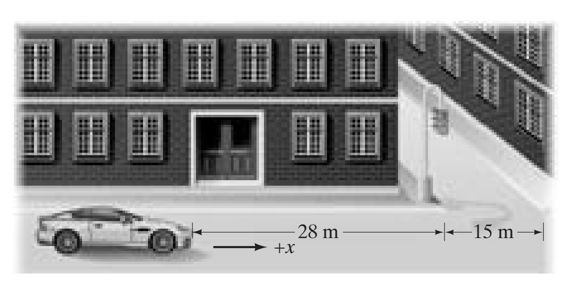


FIGURA 2–51 Problema 87.

88. Un automóvil va detrás de un camión que viaja a 25 m/s en una carretera. El conductor del automóvil espera una oportunidad para rebasarlo, estimando que su auto puede acelerar a 1.0 m/s^2 y que tiene que cubrir la longitud de 20 m del camión, más 10 m de espacio libre detrás del camión y 10 m más al frente de éste. En el carril contrario ve aproximarse un automóvil, que probablemente también viaja a 25 m/s. Él estima que el automóvil está a 400 m de distancia. ¿Debe intentar rebasar al camión? Dé los detalles.

89. El agente James Bond está de pie sobre un puente, 13 m arriba del camino, y sus perseguidores se le están cercando peligrosamente. Él ve un camión con una plataforma plana cubierta con colchones, que se acerca a 25 m/s, lo que él estima sabiendo que los postes de teléfono, a lo largo de los cuales viaja el camión, están situados a cada 25 m entre sí. La cama del camión está a 1.5 m sobre el pavimento y Bond calcula rápidamente a cuántos postes de distancia debe estar el camión para saltar sobre éste y poder escapar. ¿Cuántos postes son?

90. Una patrulla de policía en reposo es rebasada por un automóvil que viaja a exceso de velocidad, con una rapidez constante de 130 km/h, por lo cual la patrulla inicia la persecución en el instante en que el automóvil la rebasa. El oficial de policía alcanza al infractor en 750 m manteniendo una aceleración constante. *a*) Dibuje la gráfica cualitativa de posición versus tiempo de ambos autos, desde la partida de la patrulla hasta el punto de alcance. Calcule: *b)* cuánto tiempo le tomó al oficial de policía en alcanzar al auto infractor, *c)* la aceleración requerida por la patrulla. y *d*) la rapidez de la patrulla cuando lo alcanza.

91. Un restaurante de comida rápida usa una banda transportadora para enviar las hamburguesas a través de una máquina freidora. Si la máquina tiene 1.1 m de largo y las hamburguesas requieren 2.5 min para freírse, ¿con qué rapidez debe viajar la banda transportadora? Si las hamburguesas están separadas 15 cm, ¿cuál es la tasa de producción de hamburguesas (en hamburguesas/min)?

92. Se pide a dos estudiantes que encuentren la altura de un edificio particular usando un barómetro. En vez de usar el barómetro como un dispositivo para medir la altura, lo llevan hasta el techo y lo sueltan, mientras cronometran su caída. Uno de los

estudiantes reporta un tiempo de caída de 2.0 s, y el otro, 2.3 s. ¿Cuál es la diferencia porcentual en la estimación de la altura del edificio que provocan los 0.3 s?

93. La figura 2-52 muestra la gráfica de posición contra tiempo de dos bicicletas, A y B. *a*) ¿Hay algún instante en el que las dos bicicletas tengan la misma velocidad? *b)* ¿Cuál bicicleta tiene la mayor aceleración? *c*) ¿En qué instante(s) las bicicletas se rebasan entre sí? ¿Cuál bicicleta rebasa a la otra? *d)* ¿Cuál bicicleta tiene la velocidad instantánea más alta? *e*) ¿Cuál bicicleta tiene la velocidad promedio más alta?

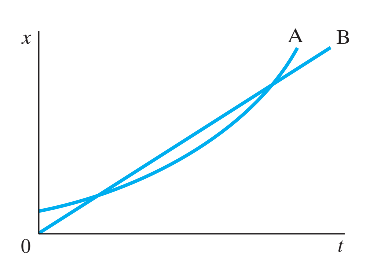


FIGURA 2–52 Problema 93.

94. Usted viaja a rapidez constante v_M y hay un automóvil frente a usted que viaja con rapidez v_A. Se da cuanta de que $v_M > v_A$, así que usted empieza a desacelerar con aceleración constante *a* cuando la distancia entre usted y el otro auto es *x*. ¿Qué relación entre *a* y *x* determina si usted chocará o no contra el auto que va en frente?

*Ejercicios numéricos/por computadora

***95.** (II) La siguiente tabla da la rapidez de un auto de arrancones particular como función del tiempo. *a*) Calcule la aceleración promedio (m/s²) durante cada intervalo de tiempo. *b*) Usando integración numérica (véase la sección 2-9) estime la distancia total recorrida (m) como función del tiempo. [*Sugerencia*: para $\bar{v}$ en cada intervalo sume las velocidades al inicio y al final del intervalo y divida entre 2; por ejemplo, en el segundo intervalo use $\bar{v} = (6.0 + 13.2)/2 = 9.6$]. *c*) Grafique aceleración promedio versus tiempo y distancia recorrida versus tiempo.

t(s)	0	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00
v(km/h)	0.0	6.0	13.2	22.3	32.2	43.0	53.5	62.6	70.6	78.4	85.1

***96.** (III) La aceleración de un objeto (en m/s²) se mide a intervalos de 1.00 s iniciando en $t = 0$, como sigue: 1.25, 1.58, 1.96, 2.40, 2.66, 2.70, 2.74, 2.72, 2.60, 2.30, 2.04, 1.76, 1.41, 1.09, 0.86, 0.51, 0.28, 0.10. Utilice integración numérica (véase la sección 2-9) para estimar *a*) la velocidad (suponga que $v = 0$ en $t = 0$) y *b*) el desplazamiento en $t = 17.00$ s.

***97.** (III) Un salvavidas que está parado junto a una piscina observa a un niño en dificultades, figura 2-53. El salvavidas corre a una rapidez promedio v_R a lo largo de la orilla de la piscina durante una distancia *x*, luego salta a la piscina y nada con rapidez promedio v_S en trayectoria recta hacia el niño. *a*) Demuestre que el tiempo total *t* que le toma al salvavidas llegar al niño está dado por

$$t = \frac{x}{v_R} + \frac{\sqrt{D^2 + (d - x)^2}}{v_S}.$$

b) Suponga que $v_R = 4.0$ m/s y $v_S = 1.5$ m/s. Utilice una calculadora gráfica o una computadora para graficar *t* versus *x* del inciso *a*), y a partir de esta gráfica determine la distancia *x* óptima que el salvavidas debería recorrer antes de saltar a la piscina (es decir, encuentre el valor de *x* que minimiza el tiempo *t* para llegar al niño).

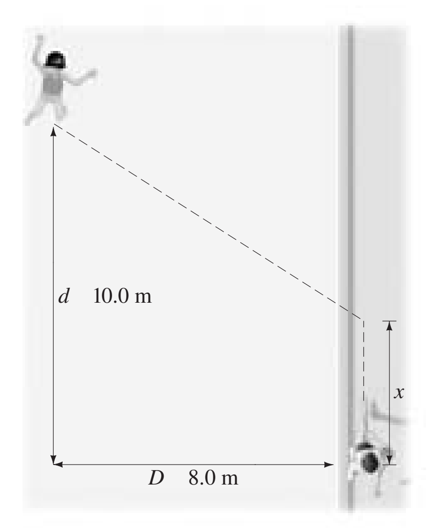


FIGURA 2–53 Problema 97.

Respuestas a los ejercicios

A: −30 cm; 50 cm.

B: *a*).

C: *b*).

D: *b*).

E: *a*) +; *b*) −; *c*) −; *d*) +.

F: *c*).

G: *b*).

H: *e*).

I: 4.9 m/s².

J: *c*).



Este surfista sobre nieve que vuela por el aire es un ejemplo de movimiento en dos dimensiones. Sin resistencia del aire, la trayectoria sería una parábola perfecta. La flecha representa la aceleración hacia abajo debida a la gravedad, $\vec{g}$. Galileo analizó el movimiento de objetos en dos dimensiones bajo la acción de la gravedad cerca de la superficie de la tierra (ahora conocido como "movimiento de proyectiles") en sus componentes horizontal y vertical.

Veremos cómo manipular vectores y cómo sumarlos. Además de estudiar el movimiento de proyectiles, analizaremos también el tema de la velocidad relativa.

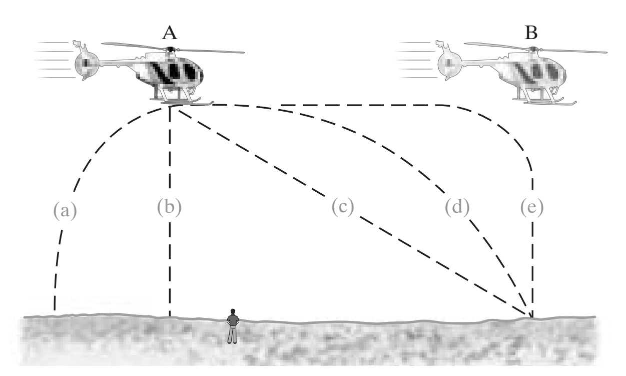


Cinemática en dos o en tres dimensiones: Vectores

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine qué!

[*No se preocupe por obtener la respuesta correcta de inmediato: más adelante en este capítulo tendrá otra oportunidad para responder esta pregunta. Véase también la pág. 1 del capítulo 1 para una explicación más amplia*].

Una pequeña caja pesada con suministros de emergencia se deja caer desde un helicóptero en movimiento en el punto A, mientras éste vuela a lo largo de una dirección horizontal. En el siguiente dibujo, ¿qué inciso describe mejor la trayectoria de la caja (despreciando la resistencia del aire), según la observa un individuo parado en el suelo?



En el capítulo 2 analizamos el movimiento a lo largo de una línea recta. Consideremos ahora la descripción del movimiento de objetos que se mueven en trayectorias en dos (o tres) dimensiones. Para hacerlo, primero debemos estudiar los vectores y cómo se suman. Luego examinaremos la descripción del movimiento en general, seguida por un caso muy interesante: el movimiento de proyectiles cerca de la superficie terrestre. También examinaremos cómo determinar la velocidad relativa de un objeto medida en diferentes marcos de referencia.

CONTENIDO

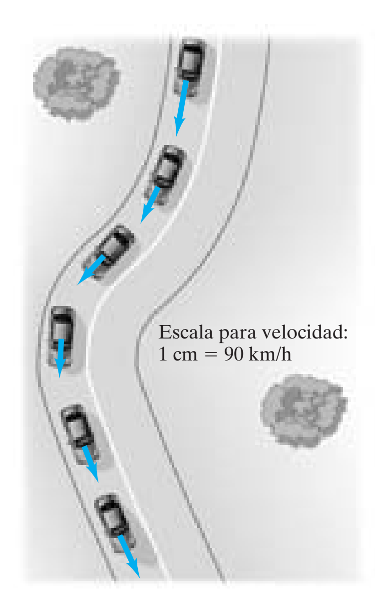


FIGURA 3–1 Automóvil que viaja por una carretera y desacelera para tomar la curva. Las flechas representan el vector velocidad en cada posición.

3–1 Vectores y escalares

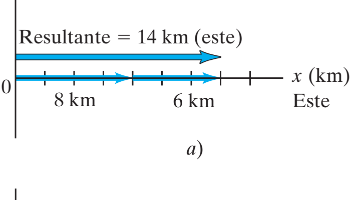
Como vimos en el capítulo 2, el término *velocidad* no sólo se refiere a qué tan rápido se mueve un objeto, sino también a su dirección de movimiento. Una cantidad como la velocidad, que tiene *magnitud, dirección y sentido,* es una cantidad **vectorial**. Otras cantidades que también son vectores son el desplazamiento, la fuerza y la cantidad de movimiento (*momentum*). Sin embargo, muchas cantidades como la masa, el tiempo y la temperatura no tienen dirección asociada a ellas, y quedan completamente especificadas con un número (mayor o menor que cero) y unidades. Tales cantidades se denominan cantidades **escalares**.

Dibujar un diagrama de una situación física particular siempre es útil en física y esto es especialmente cierto al trabajar con vectores. En un diagrama, cada vector está representado por una flecha, la cual siempre se dibuja de manera que señale en el sentido de la cantidad vectorial que representa. La longitud de la flecha se dibuja proporcionalmente a la magnitud de la cantidad vectorial. En la figura 3-1, por ejemplo, las flechas se dibujaron para representar la velocidad de un automóvil en varios lugares, conforme éste toma una curva. La magnitud de la velocidad en cada punto puede leerse de la figura midiendo la longitud de la flecha correspondiente, y usando la escala que se muestra (1 cm = 90 km/h).

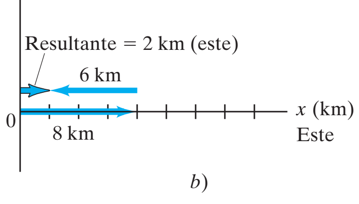
Cuando escribimos el símbolo para un vector, siempre usamos letras **negritas**, con una flecha pequeña arriba del símbolo. De manera que para la velocidad escribimos $\vec{\mathbf{v}}$. Si sólo nos interesa la magnitud del vector, escribimos simplemente v en cursivas, como hacemos con otras variables.

3–2 Suma de vectores: Método gráfico

FIGURA 3–2 Combinación de vectores en una dimensión.



a)



b)

Como los vectores son cantidades que tienen magnitud, dirección y sentido, deben sumarse de manera especial. En este capítulo trataremos principalmente con vectores de desplazamiento, denotados con el símbolo $\vec{\mathbf{D}}$, y con vectores de velocidad $\vec{\mathbf{v}}$. Sin embargo, los resultados se aplicarán a otros vectores en general que encontraremos después.

Para sumar escalares utilizamos aritmética simple, la cual también se usa para sumar vectores si éstos tienen la misma dirección. Por ejemplo, si una persona camina 8 km hacia el este un día, y 6 km hacia el este el siguiente día, la persona estará a 8 km + 6 km = 14 km al este del punto de origen. Decimos que el desplazamiento *neto* o *resultante* es de 14 km al este (figura 3-2a). Por otro lado, si la persona camina 8 km hacia el este en el primer día y 6 km hacia el oeste (en sentido contrario) en el segundo día, entonces la persona terminará a 2 km del origen (figura 3-2b), de manera que el desplazamiento resultante será de 2 km al este. En tal caso, el desplazamiento resultante se obtiene mediante una resta: 8 km − 6 km = 2 km.

Pero la aritmética simple no puede aplicarse si los dos vectores no son *colineales*. Por ejemplo, suponga que un individuo camina 10.0 km hacia el este y luego camina 5.0 km hacia el norte. Tales desplazamientos se pueden representar sobre una gráfica, donde el eje *y* positivo apunta hacia el norte y el eje *x* positivo apunta hacia el este (figura 3-3). Sobre esta gráfica dibujamos una flecha, llamada $\vec{\mathbf{D}}_1$, para representar el desplazamiento de 10.0 km hacia el este. Después dibujamos una segunda flecha, $\vec{\mathbf{D}}_2$, para representar el desplazamiento de 5.0 km hacia el norte. Ambos vectores se dibujan a escala, como se muestra en la figura 3-3.

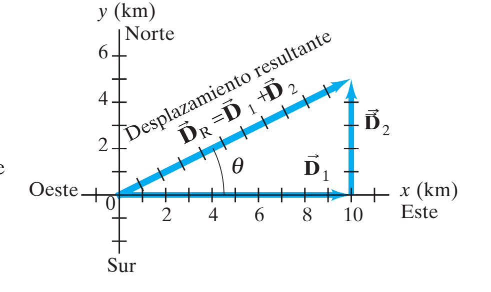


FIGURA 3–3 Un individuo camina 10.0 km hacia el este y luego 5.0 km hacia el norte. Estos dos desplazamientos están representados por los vectores $\vec{\mathbf{D}}_1$ y $\vec{\mathbf{D}}_2$, que se muestran como flechas en el diagrama. También se muestra el vector desplazamiento resultante, $\vec{\mathbf{D}}_R$, que es el vector suma de $\vec{\mathbf{D}}_1$ y $\vec{\mathbf{D}}_2$, La medición en la gráfica con regla y transportador indica que $\vec{\mathbf{D}}_R$ tiene una magnitud de 11.2 km y apunta en un ángulo $\theta = 27°$ al norte del este.

Después de esta caminata, el individuo está ahora 10.0 km al este y 5.0 km al norte del punto de origen. En la figura 3-3 el **desplazamiento resultante** está representado por la flecha llamada $\vec{\mathbf{D}}_R$ Usando una regla y un transportador, usted puede medir en este diagrama que la persona está a 11.2 km del origen a un ángulo $\theta = 27°$ al norte del este. En otras palabras, el vector desplazamiento resultante tiene una magnitud de 11.2 km y forma un ángulo $\theta = 27°$ con el eje x positivo. La magnitud (longitud) de $\vec{\mathbf{D}}_R$ se obtiene usando el teorema de Pitágoras en este caso, ya que D_1, D_2 y D_R forman un triángulo rectángulo con D_R como hipotenusa. Así,

$$D_R = \sqrt{D_1^2 + D_2^2} = \sqrt{(10.0\text{ km})^2 + (5.0\text{ km})^2}$$
$$= \sqrt{125\text{ km}^2} = 11.2\text{ km}.$$

Note que el teorema de Pitágoras puede utilizarse sólo si los vectores considerados son *perpendiculares* entre sí.

El vector desplazamiento resultante, $\vec{\mathbf{D}}_R$, es la suma de los vectores $\vec{\mathbf{D}}_1$ y $\vec{\mathbf{D}}_2$. Es decir,

$$\vec{\mathbf{D}}_R = \vec{\mathbf{D}}_1 + \vec{\mathbf{D}}_2.$$

Ésta es una ecuación *vectorial*. Al sumar dos vectores que no son colineales, un aspecto importante es que la magnitud del vector resultante no es igual a la suma de las magnitudes de los dos vectores separados, sino que es más pequeña que su suma:

$$D_R \leq D_1 + D_2,$$

donde se aplica el signo igual únicamente si los dos vectores apuntan en la misma dirección y sentido. En nuestro ejemplo (figura 3-3), $D_R = 11.2$ km; en tanto que $D_1 + D_2 = 15$ km, que es la distancia total recorrida. También advierta que no podemos hacer $\vec{\mathbf{D}}_R$ igual a 11.2 km, porque, es un vector, mientras que 11.2 km es sólo una parte del vector resultante, es decir, su magnitud. No obstante, podríamos decir que: $\vec{\mathbf{D}}_R = \vec{\mathbf{D}}_1 + \vec{\mathbf{D}}_2 = (11.2\text{ km}, 27°\text{ N del E})$.

EJERCICIO A ¿En qué condiciones la magnitud del vector resultante anterior será $D_R = D_1 + D_2$?

La figura 3-3 ilustra las reglas generales para sumar gráficamente dos vectores, sin importar qué ángulos formen, y obtener su resultante. Las reglas son las siguientes:

1. Sobre un diagrama, dibuje uno de los vectores a escala y llámelo $\vec{\mathbf{D}}_1$.
2. Luego dibuje a escala el segundo vector, $\vec{\mathbf{D}}_2$, colocando la cola del segundo vector en la punta del primer vector y asegurándose de que su dirección y sentido sean los correctos.
3. La flecha dibujada desde la cola del primer vector hasta la punta del segundo vector representa entonces la *suma* o **resultante** de los dos vectores.

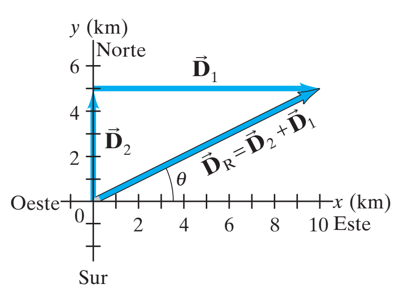
La longitud del vector resultante representa su magnitud. Note que los vectores se pueden trasladar en forma paralela a sí mismos (conservando su magnitud dirección y sentido) para lograr esas manipulaciones (se les conoce como vectores móviles). La longitud de la resultante se puede medir con una regla y luego comparar ese valor con la escala dada. Los ángulos se miden con un transportador. Este método se conoce como **método cola a punta para sumar vectores**.

La resultante no se ve afectada por el orden en que se sumen los vectores. Por ejemplo, un desplazamiento de 5.0 km al norte, al que se suma un desplazamiento de 10.0 km al este, produce una resultante de 11.2 km a un ángulo $\theta = 27°$ (véase la figura 3-4) por arriba del eje x positivo, lo mismo que cuando se suman en orden inverso (figura 3-3). Esto es, usando ahora $\vec{\mathbf{V}}$ para representar cualquier tipo de vector,

$$\vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_2 = \vec{\mathbf{V}}_2 + \vec{\mathbf{V}}_1, \qquad \text{[propiedad conmutativa]} \quad \textbf{(3–1a)}$$

que se conoce como la propiedad *conmutativa* de la suma vectorial.

FIGURA 3–4 Si los vectores se suman en orden inverso, la resultante es la misma. (Compare con la figura 3-3).



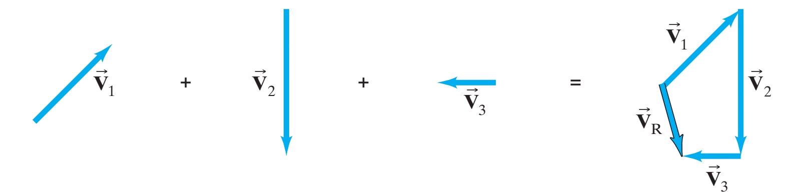


FIGURA 3–5 La resultante de tres vectores: $\vec{\mathbf{V}}_R = \vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_2 + \vec{\mathbf{V}}_3$.

El método cola a punta para sumar vectores se puede extender a tres o más vectores. La resultante se dibuja desde la cola del primer vector hasta la punta del último vector que se suma. En la figura 3-5 se presenta un ejemplo; los tres vectores podrían representar desplazamientos (noreste, sur, oeste) o quizá tres fuerzas. Compruebe si obtiene la misma resultante sin importar el orden en que sume los tres vectores; es decir

$$\left(\vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_2\right) + \vec{\mathbf{V}}_3 = \vec{\mathbf{V}}_1 + \left(\vec{\mathbf{V}}_2 + \vec{\mathbf{V}}_3\right), \qquad \text{[propiedad asociativa]} \qquad \textbf{(3–1b)}$$

que se conoce como la propiedad *asociativa* de la suma vectorial.

Una segunda forma de sumar dos vectores es el **método del paralelogramo**, que es totalmente equivalente al método cola a punta. En este método, los dos vectores se dibujan a partir de un origen común, y se construye un paralelogramo usando los dos vectores como lados adyacentes, como se muestra en la figura 3-6b. La resultante es la diagonal dibujada desde el origen común. En la figura 3-6a se presenta el método cola a punta y es claro que ambos métodos dan el mismo resultado.

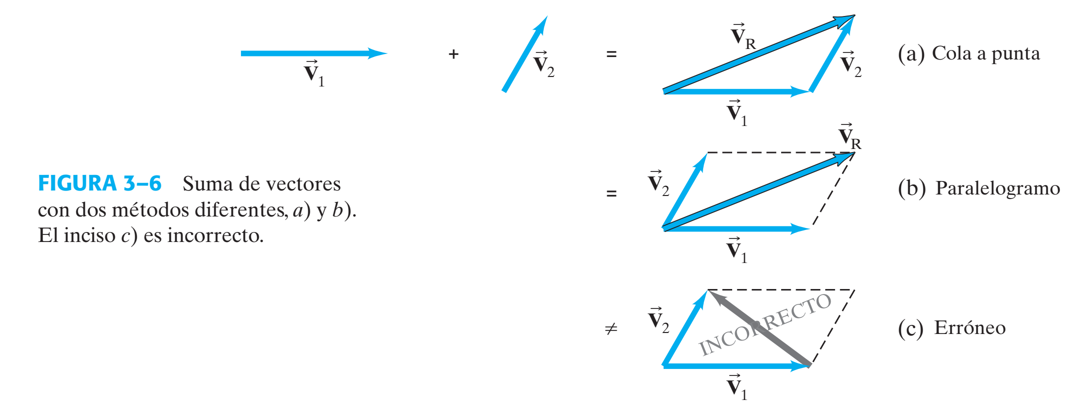


FIGURA 3–6 Suma de vectores con dos métodos diferentes, *a*) y *b*). El inciso *c*) es incorrecto.



Asegúrese de utilizar la diagonal correcta en el paralelogramo para obtener la resultante

Es un error común dibujar el vector suma como la diagonal que corre entre las puntas de los dos vectores, como en la figura 3-6c. *Esto es incorrecto*: no representa la suma de los dos vectores. (De hecho, representa su diferencia, $\vec{\mathbf{V}}_2 - \vec{\mathbf{V}}_1$, como veremos en la siguiente sección).

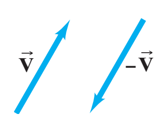
EJEMPLO CONCEPTUAL 3–1 **Rango de longitudes vectoriales.** Suponga que tiene dos vectores, cada uno con una longitud de 3.0 unidades. ¿Cuál es el rango de posibles longitudes para el vector que representa la suma de ambos?

RESPUESTA La suma puede tomar cualquier valor desde 6.0 (= 3.0 + 3.0), donde los vectores apuntan en la misma dirección, hasta 0 (= 3.0 − 3.0), cuando los vectores son antiparalelos.

EJERCICIO B Si los dos vectores del ejemplo 3-1 son perpendiculares entre sí, ¿cuál es la longitud del vector resultante?

3–3 Resta de vectores y multiplicación de un vector por un escalar

FIGURA 3–7 El negativo de un vector es un vector con la misma longitud y dirección, pero con sentido opuesto.



Dado un vector $\vec{\mathbf{V}}$, definimos el *negativo* de este vector $\left(-\vec{\mathbf{V}}\right)$ como un vector con la misma magnitud y dirección que $\vec{\mathbf{V}}$ pero de *sentido* opuesto (figura 3-7). Sin embargo, advierta que la magnitud de un vector no puede ser negativa, es decir, la magnitud de cualquier vector siempre es mayor o igual a cero. Más bien, el signo menos nos indica el sentido del vector.

FIGURA 3–8 Resta de dos vectores: $\vec{\mathbf{V}}_2 - \vec{\mathbf{V}}_1$.

Ahora podemos definir la resta de un vector de otro: la diferencia entre dos vectores, $\vec{\mathbf{V}}_2 - \vec{\mathbf{V}}_1$ se define como

$$\vec{\mathbf{V}}_2 - \vec{\mathbf{V}}_1 = \vec{\mathbf{V}}_2 + \left(-\vec{\mathbf{V}}_1\right).$$

Es decir, la diferencia entre dos vectores es igual a la suma del primero más el negativo del segundo. Por lo tanto, nuestras reglas para la suma de vectores se aplican como se muestra en la figura 3-8, usando el método cola a punta.

Un vector $\vec{\mathbf{V}}$ se puede multiplicar por un escalar c. Definimos este producto de manera que $c\vec{\mathbf{V}}$ tiene la misma dirección y sentido que $\vec{\mathbf{V}}$ magnitud es cV. Es decir, la multiplicación de un vector por un escalar positivo c cambia la magnitud del vector por un factor c pero no altera su dirección y sentido. Si c es un escalar negativo, la magnitud del producto $c\vec{\mathbf{V}}$ es $|c|V$ (donde $|c|$ significa el valor absoluto de c), pero el sentido es precisamente opuesto al de $\vec{\mathbf{V}}$. Véase la figura 3-9.

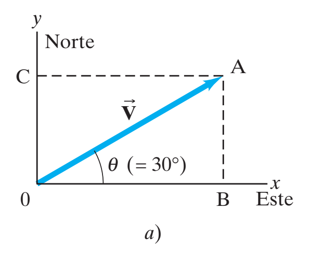
FIGURA 3–9 Al multiplicar un vector $\vec{\mathbf{V}}$ por un escalar c se obtiene un vector cuya magnitud es c veces mayor y en la misma dirección y sentido que $\vec{\mathbf{V}}$ (o en la misma dirección pero con sentido opuesto si c es negativa).

EJERCICIO C En la figura 3-6, ¿qué representa el vector "incorrecto"? *a*) $\vec{\mathbf{V}}_2 - \vec{\mathbf{V}}_1$, *b*) $\vec{\mathbf{V}}_1 - \vec{\mathbf{V}}_2$, *c*) algo diferente (especifique).

3–4 Suma de vectores por medio de componentes

A menudo la suma gráfica de vectores usando una regla y un transportador no es suficientemente precisa ni útil para vectores en tres dimensiones. Veremos ahora un método más eficaz y preciso para sumar vectores. Aunque no hay que olvidar los métodos gráficos, pues siempre son útiles para visualizar, para comprobar la matemática y, por ende, para obtener el resultado correcto.

Considere primero un vector $\vec{\mathbf{V}}$ situado en un plano específico, el cual se puede expresar como la suma de otros dos vectores llamados **componentes** del vector original. Usualmente las componentes se eligen a lo largo de dos direcciones perpendiculares, tales como los ejes x y y. El proceso de encontrar las componentes se conoce como **descomposición del vector en sus componentes**. Un ejemplo se muestra en la figura 3-10; el vector $\vec{\mathbf{V}}$ podría ser un vector desplazamiento dirigido a un ángulo $\theta = 30°$ al norte del este, donde hemos elegido el eje x positivo como el este; y el eje y positivo, como el norte. El vector $\vec{\mathbf{V}}$ se resuelve en sus componentes x y y dibujando líneas punteadas desde la punta (A) del vector (líneas AB y AC) perpendiculares a los ejes x y y. Las líneas OB y OC, entonces, representan las componentes x y y de $\vec{\mathbf{V}}$, respectivamente, como se muestra en la figura 3-10b. Esas *componentes vectoriales* se escriben $\vec{\mathbf{V}}_x$ y $\vec{\mathbf{V}}_y$. Por lo general, mostramos las componentes de un vector como flechas, discontinuas. Las *componentes escalares*, V_x y V_y, son las magnitudes con unidades de las componentes vectoriales, a las que se les asigna un signo positivo o negativo, según apunten en el sentido positivo o negativo de los ejes x o y. Como se observa en la figura 3-10, $\vec{\mathbf{V}}_x + \vec{\mathbf{V}}_y = \vec{\mathbf{V}}$ por el método del paralelogramo para sumar vectores.



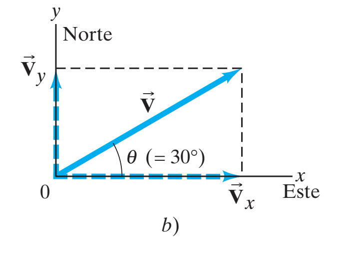


FIGURA 3–10 Descomposición de un vector $\vec{\mathbf{V}}$ en sus componentes a lo largo de un conjunto de ejes x y y elegidos arbitrariamente. Una vez encontradas, las componentes representan al vector por sí mismas. Es decir, las componentes contienen tanta información como el propio vector.

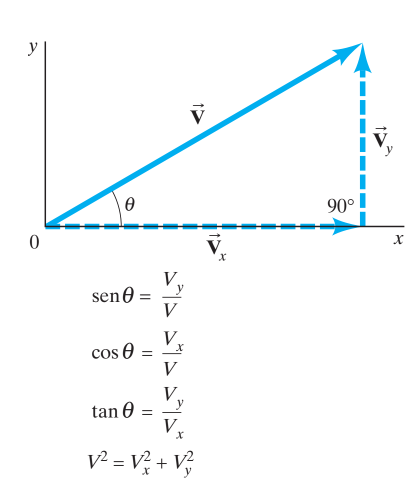


FIGURA 3–11 Determinación de las componentes de un vector usando funciones trigonométricas.

El espacio consta de tres dimensiones y a veces es necesario descomponer un vector en componentes, a lo largo de tres direcciones perpendiculares entre sí. En coordenadas rectangulares, las componentes vectoriales son $\vec{\mathbf{V}}_x$, $\vec{\mathbf{V}}_y$ y $\vec{\mathbf{V}}_z$. La descomposición de un vector en tres dimensiones es tan sólo una extensión del procedimiento anterior.

La figura 3-11 ilustra el uso de las funciones trigonométricas para encontrar las componentes de un vector, donde se considera que un vector y sus dos componentes forman un triángulo rectángulo. (Consulte el Apéndice A para mayores detalles acerca de funciones e identidades trigonométricas). Vemos entonces que el seno, el coseno y la tangente son como aparecen en la figura 3-11. Si multiplicamos la definición de sen $\theta = V_y/V$ por V en ambos lados, obtenemos

$$V_y = V \operatorname{sen}\theta. \tag{3–2a}$$

Asimismo, a partir de la definición de cos θ,

$$V_x = V \cos\theta. \tag{3–2b}$$

Note que θ se elige (por convención) como el ángulo que forma el vector con el eje x positivo, medido en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

Las componentes de un vector dado serán diferentes para distintas selecciones de ejes coordenados. Por lo tanto, al dar las componentes es indispensable especificar la selección del sistema coordenado.

Hay dos maneras de especificar un vector en un sistema coordenado dado:

1. Dando sus componentes, V_x y V_y.
2. Dando su magnitud V y el ángulo θ que forma con el eje positivo x.

Podemos cambiar de una descripción a otra usando las ecuaciones 3-2 y, para la inversa, usando el teorema de Pitágoras† y la definición de tangente:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \tag{3–3a}$$

$$\tan\theta = \frac{V_y}{V_x} \tag{3–3b}$$

como se observa en la figura 3-11.

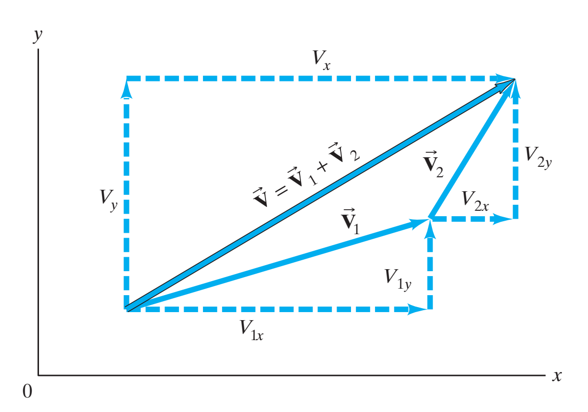
Ahora podemos ver cómo sumar vectores usando componentes. El primer paso consiste en descomponer cada vector en sus componentes. Luego, usando la figura 3-12, vemos que la adición de dos vectores cualesquiera $\vec{\mathbf{V}}_1$ y $\vec{\mathbf{V}}_2$ para dar una resultante, $\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_2$, implica que

$$\begin{aligned} V_x &= V_{1x} + V_{2x} \\ V_y &= V_{1y} + V_{2y}. \end{aligned} \tag{3–4}$$

Es decir, la suma de las componentes x es igual a la componente x de la resultante, y la suma de las componentes y es igual a la componente y de la resultante, lo cual puede verificarse mediante un cuidadoso examen de la figura 3-12. Advierta que *no* sumamos componentes x con componentes y.

†En tres dimensiones, el teorema de Pitágoras se vuelve $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$, donde V_z es la componente del vector a lo largo del tercer eje, o eje z.

FIGURA 3–12 Las componentes de $\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_2$ son
$V_x = V_{1x} + V_{2x}$
$V_y = V_{1y} + V_{2y}$.



Si se quieren conocer la magnitud y la dirección del vector resultante, se pueden obtener usando las ecuaciones 3-3.

Las componentes de un vector dado dependen de la elección de ejes coordenados. Con frecuencia, el trabajo que implica la suma de vectores se reduce si se efectúa una buena elección de ejes; por ejemplo, eligiendo que uno de los ejes esté en la misma dirección que uno de los vectores. Entonces, dicho vector tendrá sólo una componente distinta de cero.

EJEMPLO 3–2 **Desplazamiento de un cartero.** Un cartero rural sale de la oficina de correos y maneja 22.0 km en dirección hacia el norte. Luego maneja en una dirección a 60.0° al sur del este una distancia de 47.0 km (figura 3-13a). ¿Cuál será su desplazamiento medido desde la oficina de correos?

PLANTEAMIENTO Se elige el eje x positivo hacia el este, y el eje y positivo hacia el norte, ya que ésas son las direcciones de la brújula que se utilizan en la mayoría de los mapas. El origen del sistema coordenado xy está en la oficina de correos. Se descompone cada vector en sus componentes x y y. Se suman todos las componentes x, y luego todos las componentes y, lo cual nos dará las componentes x y y de la resultante.

SOLUCIÓN Se descompone cada vector desplazamiento en sus componentes, como se muestra en la figura 3-13b. Dado que $\vec{\mathbf{D}}_1$, tiene 22.0 km de magnitud y apunta hacia el norte, sólo tiene una componente y:

$$D_{1x} = 0, \qquad D_{1y} = 22.0\text{ km}.$$

$\vec{\mathbf{D}}_2$ tiene ambos componentes x y y:

$$D_{2x} = +(47.0\text{ km})(\cos 60°) = +(47.0\text{ km})(0.500) = +23.5\text{ km}$$
$$D_{2y} = -(47.0\text{ km})(\text{sen } 60°) = -(47.0\text{ km})(0.866) = -40.7\text{ km}.$$

Note que D_{2y} es negativo porque esta componente vectorial apunta a lo largo del eje y negativo. El vector resultante, $\vec{\mathbf{D}}$, tiene las componentes:

$$D_x = D_{1x} + D_{2x} = 0\text{ km} + 23.5\text{ km} = +23.5\text{ km}$$
$$D_y = D_{1y} + D_{2y} = 22.0\text{ km} + (-40.7\text{ km}) = -18.7\text{ km}.$$

Esto define completamente el vector resultante:

$$D_x = 23.5\text{ km}, \qquad D_y = -18.7\text{ km}.$$

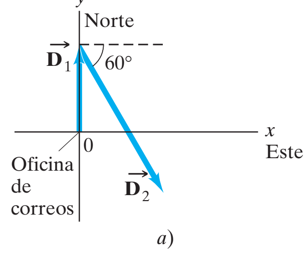
Podemos también especificar el vector resultante dando su magnitud y ángulo, mediante las ecuaciones 3-3:

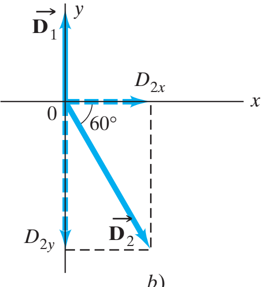
$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(23.5\text{ km})^2 + (-18.7\text{ km})^2} = 30.0\text{ km}$$

$$\tan\theta = \frac{D_y}{D_x} = \frac{-18.7\text{ km}}{23.5\text{ km}} = -0.796.$$

Una calculadora con una tecla INV TAN, ARC TAN o TAN^{-1} da $\theta = \tan^{-1}(-0.796) = -38.5°$. El signo negativo significa $\theta = 38.5°$ debajo del eje x, figura 3-13c. De este modo, el desplazamiento resultante es de 30.0 km dirigidos a 38.5° en una dirección hacia el sureste.

NOTA Siempre hay que estar atentos al cuadrante donde se encuentra el vector resultante. Una calculadora electrónica no da esta información por completo, aunque un buen diagrama sí lo hace.





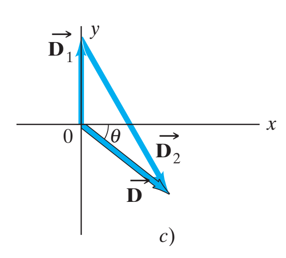


FIGURA 3–13 Ejemplo 3–2. *a*) Los dos vectores desplazamiento, $\vec{\mathbf{D}}_1$ y $\vec{\mathbf{D}}_2$. *b*) $\vec{\mathbf{D}}_2$ se descompone en sus componentes. *c*) $\vec{\mathbf{D}}_1$ y $\vec{\mathbf{D}}_2$ se suman gráficamente para obtener la resultante $\vec{\mathbf{D}}$. En el ejemplo se explica el método de componentes para la suma de vectores.

Los signos de las funciones trigonométricas dependen del "cuadrante" donde se encuentre el ángulo: por ejemplo, la tangente es positiva en los cuadrantes primero y tercero (de 0 a 90° y de 180 a 270°); pero es negativa en los cuadrantes segundo y cuarto; véase el Apéndice A. La mejor forma de manejar los ángulos y de verificar cualquier resultado vectorial consiste en dibujar siempre un diagrama de los vectores involucrados. Un diagrama vectorial nos da algo tangible para observar cuando analizamos un problema, y permite la comprobación de los resultados.

La siguiente sección de *Estrategia de resolución de problemas* no deberá considerarse una receta inflexible. Más bien, se trata de un resumen de los pasos a seguir para pensar y adentrarse en el problema que se esté tratando.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

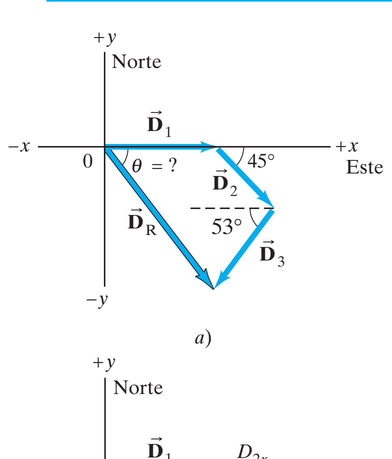
Identifique el cuadrante correcto dibujando cuidadosamente un diagrama

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Suma de vectores

Se presenta aquí un breve resumen de cómo sumar dos o más vectores usando sus componentes:

1. **Dibuje un diagrama**, sumando los vectores gráficamente, ya sea con el método del paralelogramo o con el de cola a punta (también llamado método del triángulo).
2. **Seleccione los ejes** x y y. Si es posible, elíjalos de manera que simplifiquen su trabajo. (Por ejemplo, seleccione un eje a lo largo de la dirección de uno de los vectores, de manera que ese vector tenga sólo una componente).
3. **Descomponga** cada vector en sus **componentes** x y y, mostrando como una flecha (discontinua) cada componente a lo largo de su eje (x o y) apropiado.
4. **Calcule cada componente** (cuando no se den) usando senos y cosenos. Si θ_1 es el ángulo que el vector $\vec{\mathbf{V}}_1$ forma con el *eje x* positivo, entonces:
$$V_{1x} = V_1 \cos\theta_1, \qquad V_{1y} = V_1 \operatorname{sen}\theta_1.$$
Tenga cuidado con los **signos**: a cualquier componente que señale a lo largo de los ejes x o y negativos se le da un signo menos.
5. **Sume** todas las **componentes** x para obtener la componente x de la resultante. Lo mismo para y:
$$V_x = V_{1x} + V_{2x} + \text{cualesquiera otras}$$
$$V_y = V_{1y} + V_{2y} + \text{cualesquiera otras.}$$
Así obtenemos las componentes del vector resultante. Verifique los signos para saber si el vector está dibujado en el cuadrante correcto de su diagrama (punto 1 anterior).
6. Si quiere conocer la **magnitud y el sentido** del vector resultante, utilice las ecuaciones 3-3:
$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}, \qquad \tan\theta = \frac{V_y}{V_x}.$$
El diagrama vectorial que ya dibujó usted, le ayudará a obtener la posición correcta (el cuadrante) del ángulo θ.



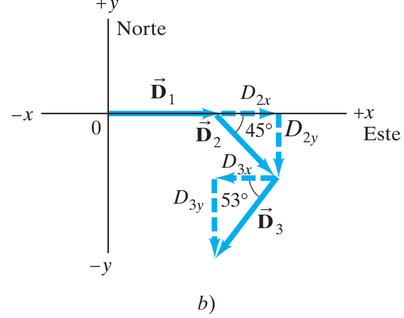


FIGURA 3–14 Ejemplo 3–3.

Vector	Componentes x (km)	y (km)
$\vec{\mathbf{D}}_1$	620	0
$\vec{\mathbf{D}}_2$	311	−311
$\vec{\mathbf{D}}_3$	−331	−439
$\vec{\mathbf{D}}_R$	600	−750

EJEMPLO 3–3 **Tres viajes cortos.** Un viaje en avión comprende tres etapas con dos escalas, como se muestra en la figura 3-14a. En la primera etapa el avión recorre 620 km hacia el este; en la segunda, 440 km hacia el sureste (45°); y en la tercera etapa, 550 km a 53° al sur del oeste, como se indica. ¿Cuál será el desplazamiento total del avión?

PLANTEAMIENTO Seguimos los pasos del recuadro de *Estrategia de resolución de problemas* anterior.

SOLUCIÓN

1. **Dibuje un diagrama** como el de la figura 3-14a, donde $\vec{\mathbf{D}}_1$, $\vec{\mathbf{D}}_2$ y $\vec{\mathbf{D}}_3$ representen las tres etapas del viaje, y $\vec{\mathbf{D}}_R$ sea el desplazamiento total del avión.
2. **Elija los ejes**: Éstos también se muestran en la figura 3-14a; x es el este y y el norte.
3. **Encuentre las componentes**: Es necesario dibujar un buen diagrama. En la figura 3-14b se representan las componentes de los tres vectores. En vez de dibujar todos los vectores partiendo desde un origen común, como se hizo en la figura 3-13b, aquí se les dibuja al estilo "cola a punta", que es igual de válido y sería más sencillo de visualizar.
4. **Calcule las componentes**:
$$\vec{\mathbf{D}}_1: D_{1x} = +D_1\cos 0° = D_1 = 620\text{ km}$$
$$D_{1y} = +D_1 \operatorname{sen} 0° = 0\text{ km}$$
$$\vec{\mathbf{D}}_2: D_{2x} = +D_2\cos 45° = +(440\text{ km})(0.707) = +311\text{ km}$$
$$D_{2y} = -D_2 \operatorname{sen} 45° = -(440\text{ km})(0.707) = -311\text{ km}$$
$$\vec{\mathbf{D}}_3: D_{3x} = -D_3\cos 53° = -(550\text{ km})(0.602) = -331\text{ km}$$
$$D_{3y} = -D_3 \operatorname{sen} 53° = -(550\text{ km})(0.799) = -439\text{ km}.$$
A cada componente que en la figura 3-14b apunta en la dirección $-x$ o $-y$ se le da entonces un signo menos. Las componentes se describen en la tabla al margen.
5. **Sume las componentes**: Sume todas las componentes x y sume todas las componentes y, para obtener las componentes x y y de la resultante:
$$D_x = D_{1x} + D_{2x} + D_{3x} = 620\text{ km} + 311\text{ km} - 331\text{ km} = 600\text{ km}$$
$$D_y = D_{1y} + D_{2y} + D_{3y} = 0\text{ km} - 311\text{ km} - 439\text{ km} = -750\text{ km}.$$
Las componentes x y y son 600 km y −750 km, y apuntan respectivamente hacia el este y el sur. Ésta es una forma de obtener la respuesta.
6. **Magnitud y dirección**: La respuesta también se obtiene como
$$D_R = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(600)^2 + (-750)^2}\text{ km} = 960\text{ km}$$
$$\tan\theta = \frac{D_y}{D_x} = \frac{-750\text{ km}}{600\text{ km}} = -1.25, \text{ de manera que } \theta = -51°.$$
Por lo tanto, el desplazamiento total tiene una magnitud de 960 km y apunta a 51° debajo del eje x (sur del este), como se indica en el bosquejo original (figura 3-14a).

3–5 Vectores unitarios

Los vectores pueden escribirse convenientemente en términos de *vectores unitarios*. Se define que un **vector unitario** tiene una magnitud exactamente igual a uno (1). Es conveniente definir los vectores unitarios señalando a lo largo de los ejes coordenados positivos, y en un sistema coordenado rectangular x, y y z estos vectores unitarios se llaman $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$, que apuntan, respectivamente, a lo largo de los ejes x, y y z positivos, como se muestra en la figura 3-15. Al igual que otros vectores móviles, los vectores $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ no tienen que colocarse necesariamente en el origen, sino que pueden colocarse en cualquier lugar, siempre respetando su magnitud unitaria y su dirección y sentido. Algunas veces verá usted escritos los vectores unitarios con un "sombrero": $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ (y así lo haremos a lo largo del libro) como recordatorio de que se trata de vectores unitarios.

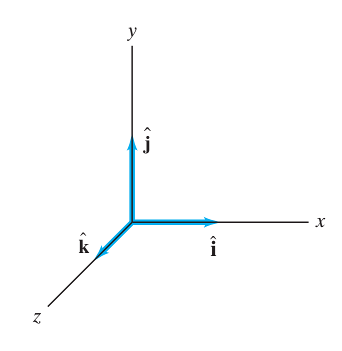


FIGURA 3–15 Vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ a lo largo de los ejes x, y y z.

Debido a la definición de la multiplicación de un vector por un escalar (sección 3-3), las componentes de un vector $\vec{\mathbf{V}}$ pueden escribirse $\vec{\mathbf{V}}_x = V_x\hat{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{V}}_y = V_y\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{V}}_z = V_z\hat{\mathbf{k}}$. Por consiguiente, cualquier vector $\vec{\mathbf{V}}$ puede escribirse en términos de sus componentes como

$$\vec{\mathbf{V}} = V_x\hat{\mathbf{i}} + V_y\hat{\mathbf{j}} + V_z\hat{\mathbf{k}}. \qquad \textbf{(3–5)}$$

Los vectores unitarios son útiles al sumar analíticamente vectores por medio de componentes. Por ejemplo, las ecuaciones 3-4 se pueden escribir usando la notación de vectores unitarios para cada vector (en el caso bidimensional, aunque la extensión a tres dimensiones es directa):

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{V}} = (V_x)\hat{\mathbf{i}} + (V_y)\hat{\mathbf{j}} &= \vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_2\\ &= (V_{1x}\hat{\mathbf{i}} + V_{1y}\hat{\mathbf{j}}) + (V_{2x}\hat{\mathbf{i}} + V_{2y}\hat{\mathbf{j}})\\ &= (V_{1x} + V_{2x})\hat{\mathbf{i}} + (V_{1y} + V_{2y})\hat{\mathbf{j}}.\end{aligned}$$

Comparando la primera línea con la tercera, obtenemos la ecuación 3-4.

EJEMPLO 3–4 **Uso de vectores unitarios.** Escriba los vectores del ejemplo 3-2 en notación de vectores unitarios y haga la suma.

PLANTEAMIENTO Usamos las componentes que encontramos en el ejemplo 3-2,

$$D_{1x} = 0, \quad D_{1y} = 22.0\text{ km}, \text{ y } \quad D_{2x} = 23.5\text{ km}, \quad D_{2y} = -40.7\text{ km},$$

y las escribimos ahora en la forma de la ecuación 3-5.

SOLUCIÓN Tenemos

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{D}}_1 &= 0\hat{\mathbf{i}} + 22.0\text{ km}\,\hat{\mathbf{j}}\\ \vec{\mathbf{D}}_2 &= 23.5\text{ km}\,\hat{\mathbf{i}} - 40.7\text{ km}\,\hat{\mathbf{j}}.\end{aligned}$$

Entonces,

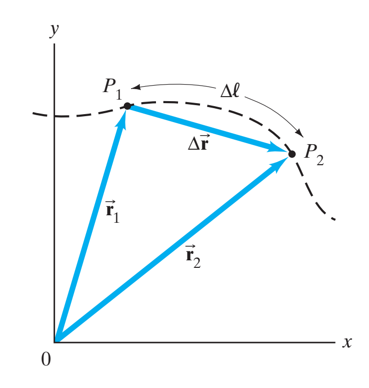
$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{D}}_1 + \vec{\mathbf{D}}_2 &= (0 + 23.5)\text{ km}\,\hat{\mathbf{i}} + (22.0 - 40.7)\text{ km}\,\hat{\mathbf{j}}\\ &= 23.5\text{ km}\,\hat{\mathbf{i}} - 18.7\text{ km}\,\hat{\mathbf{j}}.\end{aligned}$$

Las componentes del desplazamiento resultante $\vec{\mathbf{D}}$, son $D_x = 23.5$ km y $D_y = -18.7$ km. La magnitud de $\vec{\mathbf{D}}$ es $D = \sqrt{(23.5\text{ km})^2 + (18.7\text{ km})^2} = 30.0$ km, al igual que en el ejemplo 3-2.

3–6 Cinemática vectorial

Ahora extenderemos nuestras definiciones de velocidad y aceleración de manera formal al movimiento en dos y en tres dimensiones. Supongamos que una partícula describe una trayectoria en el plano xy como se muestra en la figura 3-16. En el tiempo t_1, la partícula está en el punto P_1; y en el tiempo t_2, está en el punto P_2. El vector $\vec{\mathbf{r}}_1$ es el vector posición de la partícula en el tiempo t_1 (representa la posición de la partícula respecto del origen del sistema coordenado). Y $\vec{\mathbf{r}}_2$ es el vector posición en el tiempo t_2.

FIGURA 3–16 Trayectoria de una partícula en el plano xy. En el tiempo t_1 la partícula está en el punto P_1 dado por el vector posición $\vec{\mathbf{r}}_1$; en el tiempo t_2 la partícula está en el punto P_2 dado por el vector posición $\vec{\mathbf{r}}_2$. El vector desplazamiento para el intervalo de tiempo $t_2 - t_1$ es $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1$.

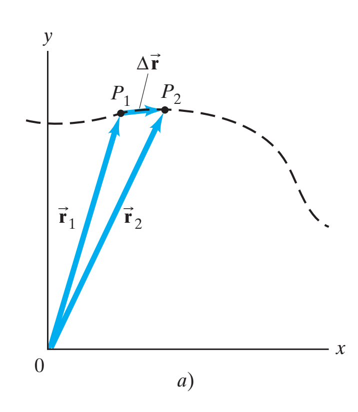


En una dimensión definimos el desplazamiento como el *cambio en la posición* de la partícula. En el caso más general de dos o tres dimensiones, el **vector desplazamiento** se define como el vector que representa el cambio de posición. Lo llamamos $\Delta\vec{\mathbf{r}}$,[†] donde

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1.$$

Esto representa el desplazamiento durante el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$.

[†] Usamos $\vec{\mathbf{D}}$ antes en el capítulo para el vector desplazamiento, al ilustrar la suma de vectores. La nueva notación, $\Delta\vec{\mathbf{r}}$, enfatiza que el desplazamiento es la diferencia entre los dos vectores de posición.



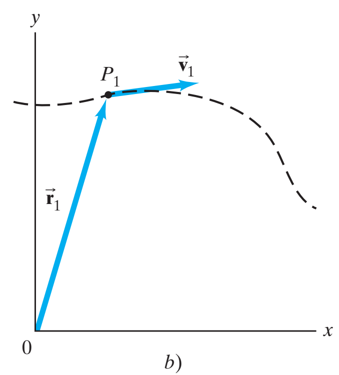
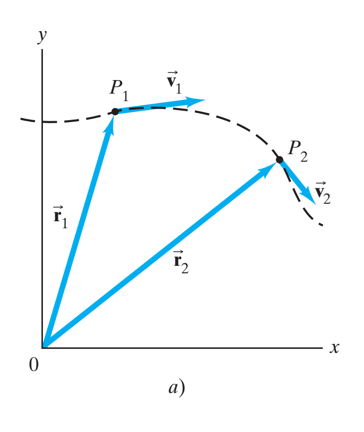
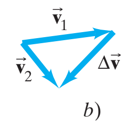


FIGURA 3–17 *a*) Cuando tomamos Δt y $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ cada vez más pequeño [compare con la figura 3-16], vemos que la dirección de $\Delta\mathbf{r}$ y de la velocidad instantánea ($\Delta\vec{\mathbf{r}}/\Delta t$, cuando $\Delta t \rightarrow 0$) es *b*) tangente a la curva en P_1.

FIGURA 3–18 *a*) Vectores velocidad $\vec{\mathbf{v}}_1$ y $\vec{\mathbf{v}}_2$ en los instantes t_1 y t_2 para una partícula en los puntos P_1 y P_2, como en la figura 3-16. *b*) La dirección de la aceleración promedio está en la dirección de $\Delta\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1$.





En la notación de los vectores unitarios, escribimos

$$\vec{\mathbf{r}}_1 = x_1\hat{\mathbf{i}} + y_1\hat{\mathbf{j}} + z_1\hat{\mathbf{k}}, \tag{3–6a}$$

donde x_1, y_1 y z_1 son las coordenadas escalares del punto P_1. Asimismo,

$$\vec{\mathbf{r}}_2 = x_2\hat{\mathbf{i}} + y_2\hat{\mathbf{j}} + z_2\hat{\mathbf{k}}.$$

Por consiguiente,

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = (x_2 - x_1)\hat{\mathbf{i}} + (y_2 - y_1)\hat{\mathbf{j}} + (z_2 - z_1)\hat{\mathbf{k}}. \tag{3–6b}$$

Si el movimiento es sólo a lo largo del eje x, entonces $y_2 - y_1 = 0$, $z_2 - z_1 = 0$, y la magnitud del desplazamiento es $\Delta r = x_2 - x_1$, lo que es consistente con nuestra ecuación unidimensional anterior (sección 2-1). Incluso en una dimensión, el desplazamiento es un vector, como lo son también la velocidad y la aceleración.

El **vector velocidad promedio** en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ se define como

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t}. \tag{3–7}$$

Ahora consideremos intervalos de tiempo cada vez más cortos, es decir, haremos que Δt tienda a cero, de manera que la distancia entre los puntos P_2 y P_1 también tienda a cero. Definimos el **vector velocidad instantánea** como el límite de la velocidad promedio cuando Δt tiende a cero:

$$\vec{\mathbf{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}. \tag{3–8}$$

La dirección de $\vec{\mathbf{v}}$ en cualquier momento es a lo largo de la línea tangente a la trayectoria en ese momento (figura 3-17).

Advierta que la magnitud de la velocidad promedio en la figura 3-16 no es igual a la rapidez promedio, que es la distancia real recorrida, $\Delta\ell$, dividida entre Δt. En algunos casos especiales, la rapidez promedio y la velocidad promedio son iguales (tal como en el movimiento a lo largo de una línea recta en una dirección y sentido), pero en general no lo son. Sin embargo, en el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, Δr siempre tiende a $\Delta\ell$, por lo que la rapidez instantánea *siempre* es igual a la magnitud de la velocidad instantánea en cualquier momento.

La velocidad instantánea (ecuación 3-8) es igual a la derivada del vector posición con respecto al tiempo. La ecuación 3-8 se puede escribir en términos de componentes, empezando con la ecuación 3-6a como:

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}, \tag{3–9}$$

donde $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$, $v_z = dz/dt$ son las componentes escalares x, y y z de la velocidad. Note que $d\hat{\mathbf{i}}/dt = d\hat{\mathbf{j}}/dt = d\hat{\mathbf{k}}/dt = 0$, ya que estos vectores unitarios son constantes tanto en magnitud como en dirección.

La aceleración en dos o en tres dimensiones se trata de manera similar. El **vector aceleración promedio**, sobre un intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ se define como

$$\text{aceleración promedio} = \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{\vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1}{t_2 - t_1}, \tag{3–10}$$

donde $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ es el cambio en el vector velocidad instantánea durante ese intervalo de tiempo: $\Delta\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1$. Advierta que $\vec{\mathbf{v}}_2$ en muchos casos, como en la figura 3-18a, quizá no tenga la misma dirección que $\vec{\mathbf{v}}_1$. Por consiguiente, el vector aceleración instantánea puede tener una dirección diferente de la de $\vec{\mathbf{v}}_1$ o $\vec{\mathbf{v}}_2$ (figura 3-18b). Además, $\vec{\mathbf{v}}_2$ y $\vec{\mathbf{v}}_1$ pueden tener la misma magnitud, pero diferentes direcciones, y la diferencia de dos vectores así no será cero. Por consiguiente, una aceleración puede resultar de un cambio en la magnitud de la velocidad, o de un cambio en la dirección de la velocidad, o de un cambio en ambas.

El **vector aceleración instantánea** se define como el límite del vector de aceleración promedio cuando el intervalo de tiempo Δt tiende a cero:

$$\vec{\mathbf{a}} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}, \tag{3–11}$$

es decir, el vector aceleración instantánea es la derivada de $\vec{\mathbf{v}}$ con respecto a t.

Escribimos $\vec{\mathbf{a}}$ usando componentes:

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathbf{k}}$$

$$= a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}, \qquad \textbf{(3–12)}$$

donde $a_x = dv_x/dt$, etcétera. Como $v_x = dx/dt$, entonces $a_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2$, como vimos en la sección 2-4. De manera que también podemos escribir la aceleración como

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\mathbf{j}} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{\mathbf{k}}. \qquad \textbf{(3–12c)}$$

La aceleración instantánea será diferente de cero no sólo cuando cambie la magnitud de la velocidad, sino también si cambia su dirección. Por ejemplo, una persona que viaja en un automóvil con rapidez constante a lo largo de una curva, o un niño que va en un carrusel, ambos experimentarán una aceleración debida a un cambio en la dirección de la velocidad, aun cuando la rapidez sea constante. (Veremos más acerca de esto en el capítulo 5).

En general, usaremos los términos "velocidad" y "aceleración" para los valores instantáneos. Si queremos analizar valores promedio, usaremos la palabra "promedio".

EJEMPLO 3–5 **Posición dada como función del tiempo.** La posición de una partícula como una función del tiempo está dada por

$$\vec{\mathbf{r}} = \left[(5.0\,\mathrm{m/s})t + (6.0\,\mathrm{m/s^2})t^2\right]\hat{\mathbf{i}} + \left[(7.0\,\mathrm{m}) - (3.0\,\mathrm{m/s^3})t^3\right]\hat{\mathbf{j}},$$

donde r está en metros y t en segundos. *a*) ¿Cuál es el desplazamiento de la partícula entre $t_1 = 2.0$ s y $t_2 = 3.0$ s? *b*) Determine la velocidad instantánea y aceleración de la partícula como una función del tiempo. *c*) Evalúe $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{a}}$ en $t = 3.0$ s.

PLANTEAMIENTO Para *a*), encontramos $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1$, considerando $t_1 = 2.0$ s para calcular $\vec{\mathbf{r}}_1$, y $t_2 = 3.0$ s para $\vec{\mathbf{r}}_2$. En *b*) tomamos las derivadas (ecuaciones 3-9 y 3-11) y en *c*) sustituimos $t = 3.0$ s en nuestro resultado en el inciso *b*).

SOLUCIÓN *a*) En $t_1 = 2.0$ s,

$$\vec{\mathbf{r}}_1 = \left[(5.0\,\mathrm{m/s})(2.0\,\mathrm{s}) + (6.0\,\mathrm{m/s^2})(2.0\,\mathrm{s})^2\right]\hat{\mathbf{i}} + \left[(7.0\,\mathrm{m}) - (3.0\,\mathrm{m/s^3})(2.0\,\mathrm{s})^3\right]\hat{\mathbf{j}}$$
$$= (34\,\mathrm{m})\hat{\mathbf{i}} - (17\,\mathrm{m})\hat{\mathbf{j}}.$$

Asimismo, en $t_2 = 3.0$ s,

$$\vec{\mathbf{r}}_2 = (15\,\mathrm{m} + 54\,\mathrm{m})\hat{\mathbf{i}} + (7.0\,\mathrm{m} - 81\,\mathrm{m})\hat{\mathbf{j}} = (69\,\mathrm{m})\hat{\mathbf{i}} - (74\,\mathrm{m})\hat{\mathbf{j}}.$$

Entonces,

$$\Delta\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_2 - \vec{\mathbf{r}}_1 = (69\,\mathrm{m} - 34\,\mathrm{m})\hat{\mathbf{i}} + (-74\,\mathrm{m} + 17\,\mathrm{m})\hat{\mathbf{j}} = (35\,\mathrm{m})\hat{\mathbf{i}} - (57\,\mathrm{m})\hat{\mathbf{j}}.$$

Es decir, $\Delta x = 35$ m y $\Delta y = -57$ m.

b) Para determinar la velocidad, tomamos la derivada de la posición $\vec{\mathbf{r}}$ dada con respecto al tiempo, considerando (Apéndice B-2) que $d(t^2)/dt = 2t$ y $d(t^3)/dt = 3t^2$:

$$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \left[5.0\,\mathrm{m/s} + (12\,\mathrm{m/s^2})t\right]\hat{\mathbf{i}} + \left[0 - (9.0\,\mathrm{m/s^3})t^2\right]\hat{\mathbf{j}}.$$

La aceleración es (conservando sólo dos cifras significativas):

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = (12\,\mathrm{m/s^2})\hat{\mathbf{i}} - (18\,\mathrm{m/s^3})t\,\hat{\mathbf{j}}.$$

Así, $a_x = 12\,\mathrm{m/s^2}$ es constante; pero $a_y = -(18\,\mathrm{m/s^3})t$ depende linealmente del tiempo, aumentando su magnitud con el tiempo en la dirección y negativa.

c) Sustituimos $t = 3.0$ s en las ecuaciones que hemos derivado para $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{a}}$:

$$\vec{\mathbf{v}} = (5.0\,\mathrm{m/s} + 36\,\mathrm{m/s})\hat{\mathbf{i}} - (81\,\mathrm{m/s})\hat{\mathbf{j}} = (41\,\mathrm{m/s})\hat{\mathbf{i}} - (81\,\mathrm{m/s})\hat{\mathbf{j}}$$
$$\vec{\mathbf{a}} = (12\,\mathrm{m/s^2})\hat{\mathbf{i}} - (54\,\mathrm{m/s^2})\hat{\mathbf{j}}.$$

Sus magnitudes evaluadas en $t = 3.0$ s son $v = \sqrt{(41\,\mathrm{m/s})^2 + (81\,\mathrm{m/s})^2} = 91\,\mathrm{m/s}$, y $a = \sqrt{(12\,\mathrm{m/s^2})^2 + (54\,\mathrm{m/s^2})^2} = 55\,\mathrm{m/s^2}$.

Aceleración constante

En el capítulo 2 estudiamos el importante caso del movimiento unidimensional para el cual la aceleración es constante. En dos o tres dimensiones, si el vector aceleración, $\vec{\mathbf{a}}$, es constante en magnitud y dirección, entonces a_x = constante, a_y = constante, a_z = constante. La aceleración promedio en este caso es igual a la aceleración instantánea en cualquier momento. Las ecuaciones 2-12a, b y c, obtenidas en el capítulo 2 para una dimensión, son aplicables por separado a cada componente perpendicular del movimiento bi o tridimensional. En dos dimensiones, hacemos la velocidad inicial igual a $\vec{\mathbf{v}}_0 = v_{x0}\hat{\mathbf{i}} + v_{y0}\hat{\mathbf{j}}$ y aplicamos las ecuaciones 3-6a, 3-9 y 3-12 para el vector posición $\vec{\mathbf{r}}$, el vector velocidad $\vec{\mathbf{v}}$, y el vector aceleración $\vec{\mathbf{a}}$. Entonces escribimos las ecuaciones 2-12a, b y c para dos dimensiones como se muestra en la tabla 3-1.

TABLA 3–1 Ecuaciones cinemáticas para aceleración constante en 2 dimensiones.

Componente x (horizontal)		Componente y (vertical)
$v_x = v_{x0} + a_x t$	(ecuación 2–12a)	$v_y = v_{y0} + a_y t$
$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	(ecuación 2–12b)	$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2$
$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)$	(ecuación 2–12c)	$v_y^2 = v_{y0}^2 + 2a_y(y - y_0)$

Las primeras dos de las ecuaciones en la tabla 3-1 pueden escribirse más formalmente con notación vectorial:

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_0 + \vec{\mathbf{a}}t \qquad [\vec{\mathbf{a}} = \text{constante}] \quad \textbf{(3–13a)}$$

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 + \vec{\mathbf{v}}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{\mathbf{a}}t^2. \qquad [\vec{\mathbf{a}} = \text{constante}] \quad \textbf{(3–13b)}$$

Aquí, $\vec{\mathbf{r}}$ es el vector posición en cualquier tiempo y $\vec{\mathbf{r}}_0$ es el vector posición en $t = 0$. Esas ecuaciones son los equivalentes vectoriales de las ecuaciones 2-12a y b. En situaciones prácticas, comúnmente usamos la forma en componentes dada en la tabla 3-1.

3–7 Movimiento de proyectiles

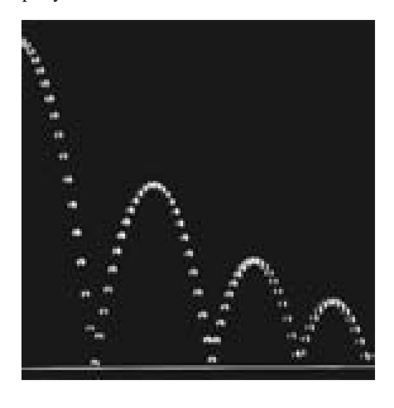


FIGURA 3–19 Esta fotografía estroboscópica de una pelota que rebota muestra la trayectoria "parabólica" característica del movimiento de proyectiles.

En el capítulo 2 estudiamos el movimiento de los objetos en una dimensión en términos de desplazamiento, velocidad y aceleración, incluyendo sólo el movimiento vertical de cuerpos que caen debido a la aceleración de la gravedad. Ahora examinaremos el movimiento traslacional más general de objetos que se mueven en el aire en dos dimensiones, cerca de la superficie terrestre, como una pelota de golf, una pelota de béisbol lanzada o bateada, balones pateados y balas que aceleran. Todos éstos son ejemplos de **movimiento de proyectiles** (véase la figura 3-19), que se describe como un movimiento en dos dimensiones.

Aunque a menudo la resistencia del aire resulta importante, en muchos casos sus efectos pueden despreciarse y así lo haremos en los siguientes análisis. No nos interesa por ahora el proceso mediante el cual se lanza o se proyecta el objeto. Consideraremos sólo su movimiento *después* de que se lanzó y *antes* de que caiga al suelo o es atrapado; es decir examinaremos nuestro objeto lanzado cuando se mueve libremente a través del aire, sin fricción, únicamente bajo la acción de la gravedad. Así, la aceleración del objeto se debe exclusivamente a la gravedad de la Tierra, que le produce una aceleración hacia debajo de magnitud $g = 9.80\ \mathrm{m/s^2}$ y supondremos que es constante.[†]

Galileo fue el primero en describir acertadamente el movimiento de los proyectiles. Demostró que el movimiento puede entenderse analizando por separado sus componentes horizontal y vertical. Por conveniencia, suponemos que el movimiento comienza en el tiempo $t = 0$ en el origen de un sistema coordenado xy (por lo que $x_0 = y_0 = 0$).

Observemos una (pequeña) esfera que rueda hacia el extremo de una mesa horizontal, con una velocidad inicial v_{x0} en la dirección horizontal (x). Véase la figura 3-20, donde, a manera de comparación, se muestra también un objeto que cae verticalmente. El vector velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ en cada instante apunta en la dirección del movimiento de la esfera en ese instante y es siempre tangente a la trayectoria. Siguiendo las ideas de Galileo, tratamos por separado las componentes horizontal y vertical de la velocidad, v_x y v_y, y podemos aplicar las ecuaciones cinemáticas (ecuaciones 2-12a a 2-12c) a cada una de éstas.

Primero, examinamos la componente vertical (y) del movimiento. En el instante en que la esfera sale de lo alto de la mesa ($t = 0$), sólo tiene una componente x de velocidad. Una vez que la esfera deja la mesa (en $t = 0$), experimenta una aceleración verti-

[†]Esto nos restringe a objetos cuya distancia recorrida y altura máxima sobre la Tierra sean pequeñas, en comparación con el radio de la Tierra (6400 km).

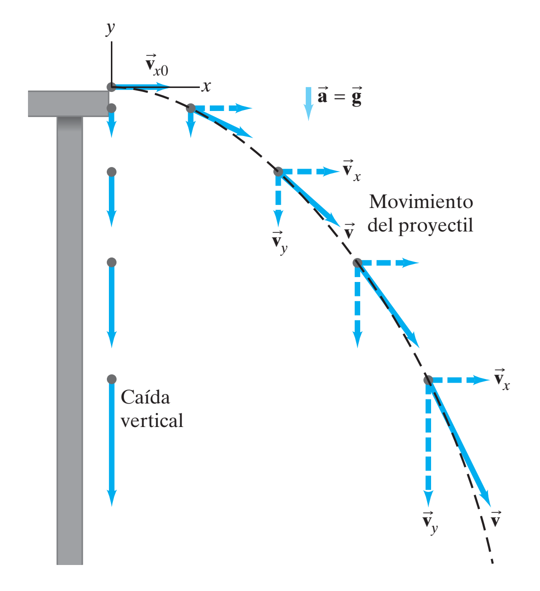


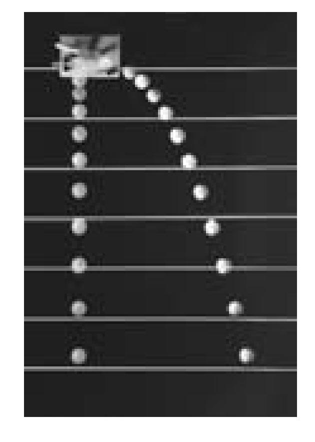
FIGURA 3–20 Movimiento de proyectil de una esfera pequeña lanzada horizontalmente. La línea punteada negra representa la trayectoria del objeto. El vector velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ en cada punto es en la dirección del movimiento, y por lo tanto, es tangente a la trayectoria. Los vectores de velocidad están representados con flechas continuas azules; y las componentes de la velocidad, con flechas punteadas. (Para fines de comparación, a la izquierda se muestra un objeto que cae verticalmente partiendo del mismo punto; v_y es la misma para el objeto que cae y para el proyectil).

cal hacia abajo, g, que es la aceleración debida a la gravedad. Así, v_y es inicialmente cero ($v_{y0} = 0$); pero crece en forma continua en la dirección hacia abajo (hasta que la esfera golpea el suelo). Consideremos que y es positiva hacia arriba. Entonces, $a_y = -g$ y, de la ecuación 2-12a, escribimos $v_y = -gt$ ya que hacemos $v_{y0} = 0$. El desplazamiento vertical está dado por $y = -\frac{1}{2}gt^2$.

Por otro lado, en la dirección horizontal no hay aceleración (estamos despreciando la resistencia del aire). Con $a_x = 0$, la componente horizontal de la velocidad v_x permanece constante, igual a su valor inicial, v_{x0}, y tiene así la misma magnitud en cada punto de la trayectoria. Entonces, el desplazamiento horizontal está dado por $x = v_{x0}t$. Los dos vectores componentes, $\vec{\mathbf{v}}_x$ y $\vec{\mathbf{v}}_y$, se pueden sumar vectorialmente en cualquier instante para obtener la velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ en ese momento (esto es, para cada punto sobre la trayectoria), como se muestra en la figura 3-20.

Un resultado de este análisis, que el mismo Galileo predijo, es que *un objeto lanzado horizontalmente llegará al suelo al mismo tiempo que un objeto que se deja caer verticalmente.* Esto se debe a que los movimientos verticales son los mismos en ambos casos, como se indica en la figura 3-20. La figura 3-21 es una fotografía estroboscópica de un experimento que lo confirma.

FIGURA 3–21 Fotografía estroboscópica que muestra las posiciones de dos esferas en intervalos de tiempo iguales. Una esfera se suelta desde el reposo, al mismo tiempo que la otra se lanza horizontalmente a la derecha. Se ve que la posición vertical de cada esfera es la misma en cada momento.



EJERCICIO D Regrese a la pregunta de inicio del capítulo de la página 51 y contéstela de nuevo. Intente explicar por qué tal vez haya respondido de manera diferente la primera vez.

Si un objeto se lanza con cierta inclinación hacia arriba, como en la figura 3-22, el análisis es similar, excepto que ahora se tiene una componente vertical inicial de la velocidad, v_{y0}. Debido a la aceleración hacia abajo de la gravedad, v_y decrece gradualmente con el tiempo, hasta que el objeto alcanza el punto más alto de su trayectoria, donde $v_y = 0$. A continuación, el objeto se mueve hacia abajo (figura 3-22) y luego v_y empieza a crecer en sentido hacia abajo, como se muestra (es decir, crece negativamente). Al igual que antes, v_x permanece constante.

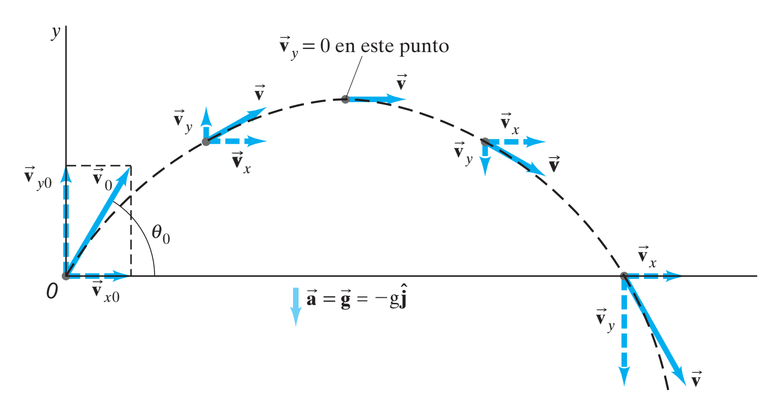


FIGURA 3–22 Trayectoria de un proyectil disparado con velocidad inicial $\vec{\mathbf{v}}_0$ a un ángulo θ_0 con respecto a la horizontal. La trayectoria se muestra en negro; los vectores de velocidad son las flechas continuas; y las componentes de la velocidad son las flechas punteadas. La aceleración $\vec{\mathbf{a}} = d\vec{\mathbf{v}}/dt$ es hacia abajo. Es decir, $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{g}} = -g\hat{\mathbf{j}}$ donde $\hat{\mathbf{j}}$ es el vector unitario en la dirección y positiva. 1= en este punto.

3–8 Resolución de problemas que implican el movimiento de un proyectil

Ahora trabajaremos con varios ejemplos cuantitativos del movimiento de proyectiles.

Podemos simplificar las ecuaciones 2-12 (tabla 3-1), para usarlas en el movimiento de proyectiles, haciendo $a_x = 0$. Véase la tabla 3-2, donde se supone que y es positiva hacia arriba, por lo que $a_y = -g = -9.80\ \text{m/s}^2$. Note también que si θ se elige en relación con el eje $+x$, como en la figura 3-22, entonces,

$$v_{x0} = v_0 \cos \theta_0 ,$$
$$v_{y0} = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 .$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Seleccione el intervalo de tiempo

Al resolver problemas que implican el movimiento de proyectiles, debemos considerar un intervalo de tiempo durante el cual el objeto elegido esté en el aire, influido únicamente por la gravedad. No consideramos el proceso de lanzamiento (o proyección), ni el tiempo después de que el objeto cae al suelo o es atrapado, porque entonces actúan otras influencias sobre el objeto y ya no es posible establecer $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{g}}$.

TABLA 3–2 Ecuaciones cinemáticas para el movimiento de proyectiles
(y positivo hacia arriba; $a_x = 0$, $a_y = -g = -9.80\ \text{m/s}^2$)

Movimiento horizontal ($a_x = 0, v_x =$ constante)		Movimiento vertical† ($a_y = -g =$ constante)
$v_x = v_{x0}$	(Ecuación 2–12a)	$v_y = v_{y0} - gt$
$x = x_0 + v_{x0} t$	(Ecuación 2–12b)	$y = y_0 + v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2$
	(Ecuación 2–12c)	$v_y^2 = v_{y0}^2 - 2g(y - y_0)$

† Si y es positiva hacia arriba, el signo menos (−) antes de g se convierte en signos más (+).

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Movimiento de un proyectil

El enfoque para resolver problemas que vimos en la sección 2-6 también es aplicable aquí. Sin embargo, resolver problemas que implican el movimiento de un proyectil quizá requiera algo de creatividad y es posible que no baste simplemente con seguir algunas reglas. En efecto, se debe evitar sólo sustituir números en las ecuaciones que parecen "funcionar".

1. Como siempre, **lea** cuidadosamente; **elija** el **objeto** (u objetos) que se va a analizar.
2. **Dibuje** con cuidado un **diagrama** que muestre lo que le sucede al objeto.
3. **Elija** un origen y un **sistema coordenado** xy.
4. Decida el **intervalo de tiempo**, que para el movimiento de proyectiles sólo incluya el movimiento bajo el efecto de la gravedad, sin lanzamientos ni aterrizajes. El intervalo de tiempo debe ser el mismo para los análisis de x y de y. Los movimientos x y y están conectados por el tiempo común.
5. **Examine** por separado los **movimientos** horizontal (x) y vertical (y). Si se indica la velocidad inicial, es posible que quiera descomponerla en sus componentes x y y.
6. Elabore una lista con las cantidades **conocidas** y las **incógnitas**; elija $a_x = 0$ y $a_y = -g$ o $+g$, donde $g = 9.80\ \text{m/s}^2$; y utilice los signos + o − dependiendo de si elige el eje y positivo hacia arriba o positivo hacia abajo. Recuerde que v_x nunca cambia a lo largo de la trayectoria, y que $v_y = 0$ en el punto más alto de cualquier trayectoria que regrese hacia abajo. Por lo general, justo antes de aterrizar la velocidad no es cero.
7. Piense durante un minuto antes de lanzarse a resolver las ecuaciones. Un poco de planeación permite llegar lejos. **Aplique** las **ecuaciones relevantes** (tabla 3-2) y combine ecuaciones si es necesario. Es posible que necesite combinar componentes de un vector para obtener su magnitud y su dirección (ecuaciones 3-3).

EJEMPLO 3–6 **Huida por un acantilado.** Un doble de películas que conduce una motocicleta aumenta horizontalmente la rapidez y sale disparado de un acantilado de 50.0 m de altura. ¿A qué rapidez debe salir del acantilado la motocicleta, para aterrizar al nivel del suelo a 90.0 m de la base del acantilado, donde se encuentran las cámaras? Desprecie la resistencia del aire.

PLANTEAMIENTO Seguiremos explícitamente los pasos de la sección anterior de *Estrategia de resolución de problemas*.

SOLUCIÓN

1. y **2. Lea, elija el objeto y dibuje un diagrama**. Nuestro objeto es la motocicleta con el conductor, tomados como una sola unidad. El diagrama se muestra en la figura 3-23.

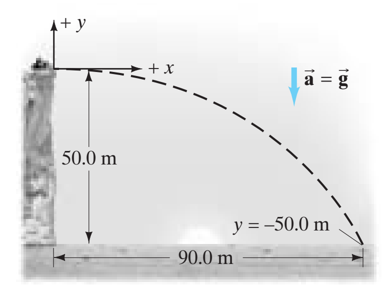


FIGURA 3–23 Ejemplo 3–6.

3. **Elija un sistema coordenado**. Elegimos la dirección y positiva hacia arriba, con la parte superior del acantilado como $y_0 = 0$. La dirección x es horizontal con $x_0 = 0$ en el punto donde la motocicleta sale del acantilado.
4. **Elija un intervalo de tiempo**. Hacemos que el intervalo de tiempo comience ($t = 0$) justo cuando la motocicleta deja lo alto del acantilado en la posición $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; el intervalo de tiempo termina justo antes de que la motocicleta golpee el suelo.
5. **Examine los movimientos *x* y *y***. En la dirección horizontal (x), la aceleración $a_x = 0$, de manera que la velocidad es constante. El valor de x cuando la motocicleta llega al suelo es $x = +90.0$ m. En la dirección vertical, la aceleración es la aceleración debida a la gravedad, $a_y = -g = -9.80 \text{ m/s}^2$. El valor de y cuando la motocicleta llega al suelo es $y = -50.0$ m. La velocidad inicial es horizontal y es nuestra incógnita, v_{x0}; la velocidad inicial vertical es cero, $v_{y0} = 0$.
6. **Elabore una lista con las cantidades conocidas y las incógnitas.** Observe la tabla al margen. Note que, además de no conocer la velocidad horizontal inicial v_{x0} (que permanece constante hasta el aterrizaje), tampoco conocemos el tiempo t que tarda la motocicleta en llegar al suelo.

Datos conocidos	Incógnitas
$x_0 = y_0 = 0$	v_{x0}
$x = 90.0$ m	t
$y = -50.0$ m	
$a_x = 0$	
$a_y = -g = -9.80 \text{ m/s}^2$	
$v_{y0} = 0$	

7. **Aplique las ecuaciones relevantes**. La motocicleta mantiene v_x constante mientras está en el aire. El tiempo que permanece en el aire está determinado por el movimiento y, que es cuando golpea el suelo. Así que primero hay que encontrar el tiempo que toma el movimiento y y luego usar este valor de tiempo en las ecuaciones para x. Para averiguar cuánto le toma a la motocicleta llegar al suelo, emplearemos la ecuación 2-12b (tabla 3-2) para la dirección vertical (y) con $y_0 = 0$ y $v_{y0} = 0$:

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{y0}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 \\ &= 0 + 0 + \tfrac{1}{2}(-g)t^2 \end{aligned}$$

o

$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2.$$

Despejamos t y establecemos que $y = -50.0$ m:

$$t = \sqrt{\frac{2y}{-g}} = \sqrt{\frac{2(-50.0\text{ m})}{-9.80\text{ m/s}^2}} = 3.19\text{ s}.$$

Para calcular la velocidad inicial, v_{x0}, se utiliza de nuevo la ecuación 2-12b, pero ahora para la dirección horizontal (x), con $a_x = 0$ y $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{x0}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \\ &= 0 + v_{x0}t + 0 \end{aligned}$$

o

$$x = v_{x0}t.$$

Entonces,

$$v_{x0} = \frac{x}{t} = \frac{90.0\text{ m}}{3.19\text{ s}} = 28.2\text{ m/s},$$

que es aproximadamente 100 km/h (alrededor de 60 mi/h).

NOTA En el intervalo de tiempo donde tenemos movimiento de proyectiles, la única aceleración es g en la dirección y negativa (hacia abajo). La aceleración en la dirección x es cero.

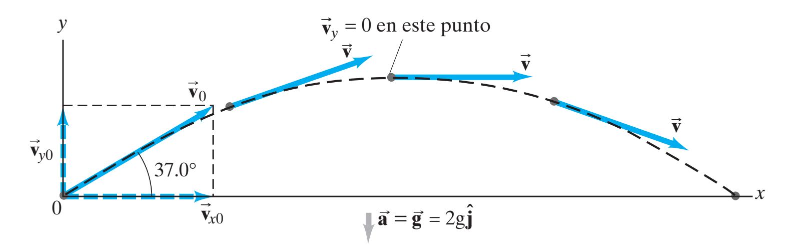


FIGURA 3–24 Ejemplo 3–7.

FÍSICA APLICADA
Deportes

EJEMPLO 3–7 Un balón de fútbol pateado. Un jugador patea un balón de fútbol a un ángulo $\theta_0 = 37.0°$ con una velocidad de salida de 20.0 m/s, como se muestra en la figura 3-24. Calcule *a*) la altura máxima, *b*) el tiempo transcurrido antes de que el balón golpee el suelo, *c*) a qué distancia golpea el suelo, *d*) el vector velocidad en la altura máxima y *e*) el vector aceleración en la altura máxima. Suponga que el balón deja el pie al nivel del suelo; ignore la resistencia del aire y la rotación del balón.

PLANTEAMIENTO Esto parece difícil al principio, pues son muchas preguntas. Pero podemos trabajar con una de ellas a la vez. Se toma la dirección *y* como positiva hacia arriba; en tanto que los movimientos *x* y *y* se tratan por separado. De nuevo, el tiempo total en el aire se determina con el movimiento en *y*. El movimiento en *x* ocurre a velocidad constante. La componente *y* de la velocidad varía, inicialmente es positiva (hacia arriba), disminuye hasta cero en el punto más alto y luego se vuelve negativa conforme el balón cae.

SOLUCIÓN La velocidad inicial se descompone en sus componentes (figura 3-24):

$$v_{x0} = v_0 \cos 37.0° = (20.0\,\mathrm{m/s})(0.799) = 16.0\,\mathrm{m/s}$$
$$v_{y0} = v_0 \operatorname{sen} 37.0° = (20.0\,\mathrm{m/s})(0.602) = 12.0\,\mathrm{m/s}.$$

a) Se considera un intervalo de tiempo que comience justo después de que el balón pierde contacto con el pie y hasta que alcanza su altura máxima. Durante este intervalo de tiempo, la aceleración es *g* hacia abajo. En la altura máxima, la velocidad es horizontal (figura 3-24), de manera que $v_y = 0$; y esto ocurre en un tiempo dado por $v_y = v_{y0} - gt$, con $v_y = 0$ (ecuación 2-12a en la tabla 3-2). Por lo tanto,

$$t = \frac{v_{y0}}{g} = \frac{(12.0\,\mathrm{m/s})}{(9.80\,\mathrm{m/s^2})} = 1.224\,\mathrm{s} \approx 1.22\,\mathrm{s}.$$

A partir de la ecuación 2-12b, con $y_0 = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} y &= v_{y0}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \\ &= (12.0\,\mathrm{m/s})(1.224\,\mathrm{s}) - \tfrac{1}{2}(9.80\,\mathrm{m/s^2})(1.224\,\mathrm{s})^2 = 7.35\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

Alternativamente, podíamos haber empleado la ecuación 2-12c, y despejar *y* para obtener la altura máxima

$$y = \frac{v_{y0}^2 - v_y^2}{2g} = \frac{(12.0\,\mathrm{m/s})^2 - (0\,\mathrm{m/s})^2}{2(9.80\,\mathrm{m/s^2})} = 7.35\,\mathrm{m}.$$

La altura máxima es de 7.35 m.

b) Para encontrar el tiempo que le toma al balón regresar al suelo, se considerará un intervalo de tiempo diferente, que comienza en el momento en el que el balón deja el pie ($t = 0$, $y_0 = 0$) y termina justo antes de que el balón regrese al suelo ($y = 0$ de nuevo). Se emplea la ecuación 2-12b con $y_0 = 0$ y también se establece que $y = 0$ (nivel del suelo):

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{y0}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \\ 0 &= 0 + v_{y0}t - \tfrac{1}{2}gt^2. \end{aligned}$$

Es sencillo factorizar esta ecuación:

$$t\left(\tfrac{1}{2}gt - v_{y0}\right) = 0.$$

Hay dos soluciones, $t = 0$ (que corresponde al punto inicial, y_0) y

$$t = \frac{2v_{y0}}{g} = \frac{2(12.0\,\mathrm{m/s})}{(9.80\,\mathrm{m/s^2})} = 2.45\,\mathrm{s},$$

que es el tiempo de vuelo total del balón.

NOTA El tiempo necesario para todo el viaje, $t = 2v_{y0}/g = 2.45$ s, es el doble del tiempo para llegar al punto más alto, calculado en *a*). Esto es, ignorando la resistencia del aire, el tiempo que le toma para subir es igual al tiempo que le toma para bajar.

c) La distancia total recorrida en la dirección x se encuentra aplicando la ecuación 2-12b con $x_0 = 0$, $a_x = 0$, $v_{x0} = 16.0$ m/s:

$$x = v_{x0}t = (16.0\,\mathrm{m/s})(2.45\,\mathrm{s}) = 39.2\,\mathrm{m}.$$

d) En el punto más alto la componente vertical de la velocidad es cero. Sólo existe la componente horizontal (que permanece constante a lo largo del vuelo), de manera que $v = v_{x0} = v_0 \cos 37.0° = 16.0$ m/s.

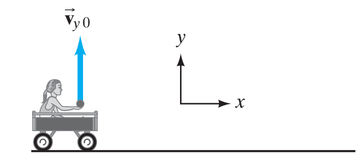
e) El vector aceleración es el mismo en el punto más alto que a lo largo del vuelo, que es 9.80 m/s^2 hacia abajo.

NOTA El balón de fútbol se consideró como si fuese una partícula, y se despreció su rotación. También se ignoró la resistencia del aire, que es significativa en el caso de un balón de fútbol, así que los resultados son tan sólo estimaciones.

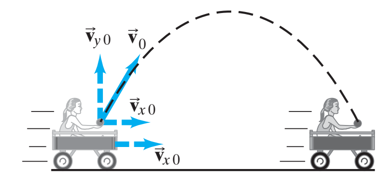
EJERCICIO E Dos bolas se lanzan en el aire en ángulos diferentes, pero cada una alcanza la misma altura. ¿Cuál bola permanece más tiempo en el aire: la que se lanzó en el ángulo más inclinado o la que se lanzó en el ángulo menos inclinado?

EJEMPLO CONCEPTUAL 3–8 **¿En dónde cae la manzana?** Una niña se sienta erguida en un carro de juguete que se mueve hacia la derecha con rapidez constante, como se muestra en la figura 3-25. La niña extiende la mano y avienta una manzana directamente hacia arriba (desde su propio punto de vista, figura 3-25a); mientras que el carro continúa viajando hacia adelante con rapidez constante. Si se desprecia la resistencia del aire, ¿la manzana caerá *a*) atrás del carro, *b*) sobre el carro o *c*) frente al carro?

RESPUESTA La niña lanza la manzana directamente hacia arriba desde su propio marco de referencia con velocidad inicial $\vec{\mathbf{v}}_{y0}$ (figura 3-25a). Pero cuando alguien parado en el suelo ve el movimiento, la velocidad de la manzana también tiene una componente horizontal que es igual a la rapidez del carro, $\vec{\mathbf{v}}_{x0}$. Entonces, para esa persona, la manzana describirá una trayectoria parabólica, como se indica en la figura 3-25b. La manzana no experimenta ninguna aceleración horizontal, por lo que $\vec{\mathbf{v}}_{x0}$ permanecerá constante e igual a la rapidez del carro. Conforme la manzana sigue su arco, el carro permanecerá directamente debajo de ella en todo momento, ya que ambos tienen la misma velocidad horizontal. Cuando la manzana desciende, caerá exactamente en el carro, en la mano extendida de la niña. La respuesta es *b*).



a) Marco de referencia del carro



b) Marco de referencia del suelo

FIGURA 3–25 Ejemplo conceptual 3–8.

EJEMPLO CONCEPTUAL 3–9 **Estrategia equivocada.** Un niño situado en una pequeña colina apunta horizontalmente su lanzadera (resortera) de globos de agua, directamente a un segundo niño que cuelga de la rama de un árbol a una distancia horizontal *d* (figura 3-26). En el momento en que se dispara el globo de agua, el segundo niño se suelta del árbol, esperando que el globo no lo toque. Demuestre que esto es una medida equivocada. (Él aún no había estudiado física). Desprecie la resistencia del aire.

RESPUESTA Tanto el globo de agua como el niño que se suelta del árbol comienzan a caer en el mismo instante, y en un tiempo t ambos caen la misma distancia vertical $y = \frac{1}{2}gt^2$, (véase la figura 3-21). En el tiempo que le toma al globo viajar la distancia horizontal d, el globo tendrá la misma posición y que el niño que cae. Splash. Si el niño hubiera permanecido colgado en el árbol, no habría sido empapado por el globo.

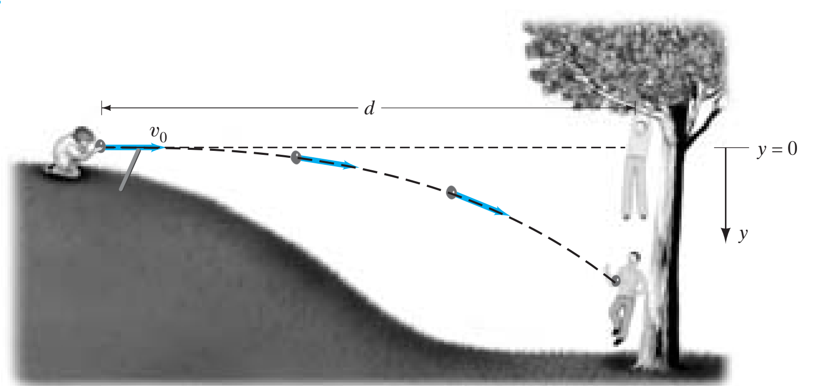
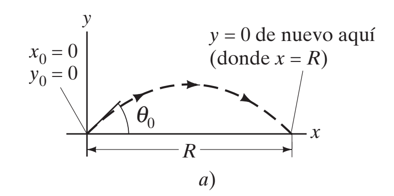


FIGURA 3–26 Ejemplo 3–9.



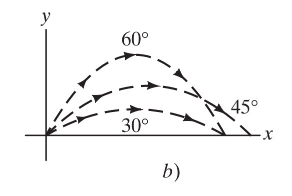


FIGURA 3–27 Ejemplo 3-10.
a) El alcance R de un proyectil;
b) generalmente hay dos ángulos θ_0 que darán el mismo alcance. ¿Puede usted demostrar que si un ángulo es θ_{01}, el otro será $\theta_{02} = 90° - \theta_{01}$?

EJEMPLO 3–10 **Alcance horizontal.** *a*) Deduzca una fórmula para el alcance horizontal R de un proyectil, en términos de su rapidez inicial v_0 y del ángulo de salida θ_0. El *alcance* horizontal se define como la distancia horizontal que recorre el proyectil antes de regresar a su altura original (que por lo general es el suelo); es decir, y (final) $= y_0$. Observe la figura 3-27a. *b*) Suponga que uno de los cañones de Napoleón tiene una rapidez inicial, v_0, de 60.0 m/s. ¿En qué ángulo se debería apuntar (ignore la resistencia del aire) para golpear un blanco que está a 320 m de distancia?

PLANTEAMIENTO La situación es la misma que la del ejemplo 3-7, excepto en que en *a)* ahora no se dan números. Trabajaremos algebraicamente las ecuaciones para obtener el resultado.

SOLUCIÓN *a*) Sea $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$ en $t = 0$. Después de que el proyectil recorre una distancia horizontal R, regresa al mismo nivel, $y = 0$, que es el punto final. Elegimos el intervalo de tiempo que comienza ($t = 0$) justo después de que el proyectil se dispara y que termina cuando regresa a la misma altura vertical. Para encontrar una expresión general para R, establecemos tanto $y = 0$ como $y_0 = 0$ en la ecuación 2-12b para el movimiento vertical, con lo cual obtenemos

$$y = y_0 + v_{y0}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

de modo que

$$0 = 0 + v_{y0}t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Despejamos t, lo cual da dos soluciones: $t = 0$ y $t = 2v_{y0}/g$. La primera solución corresponde al instante inicial cuando se dispara el proyectil y la segunda es el tiempo en que el proyectil regresa a $y = 0$. Entonces el alcance, R, será igual a x en el momento en que t tome este valor, que sustituimos en la ecuación 2-12b para el movimiento *horizontal* ($x = v_{x0}t$, con $x_0 = 0$). En consecuencia, tenemos:

$$R = v_{x0}t = v_{x0}\left(\frac{2v_{y0}}{g}\right) = \frac{2v_{x0}v_{y0}}{g} = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\theta_0 \cos\theta_0}{g}, \qquad [y = y_0]$$

donde hemos escrito $v_{x0} = v_0 \cos\theta_0$ y $v_{y0} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0$. Éste es el resultado que se buscaba. Mediante la identidad trigonométrica $2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta = \operatorname{sen} 2\theta$. (Apéndice A o guardas de este libro), se reescribe como:

$$R = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta_0}{g}. \qquad [\text{sólo si } y \text{ (final)} = y_0]$$

Vemos que el alcance máximo, para una velocidad inicial dada v_0, se obtiene cuando $\operatorname{sen} 2\theta$ toma su valor máximo de 1.0, lo cual sucede para $2\theta_0 = 90°$; de manera que

$$\theta_0 = 45° \text{ para el alcance máximo, y } R_{\text{máx}} = v_0^2/g.$$

[Cuando la resistencia del aire es importante, el alcance es menor para una v_0 dada y el alcance máximo se obtiene en un ángulo más pequeño que 45°].

NOTA El alcance máximo aumenta como $v_{0 \text{ al cuadrado}}$, así que al duplicar la velocidad de salida de un cañón, aumentará su alcance máximo por un factor de 4.

b) Se coloca $R = 320$ m en la ecuación que se acaba de obtener y (suponiendo de manera irreal que no hay resistencia del aire) despejamos para encontrar

$$\operatorname{sen} 2\theta_0 = \frac{Rg}{v_0^2} = \frac{(320\,\text{m})(9.80\,\text{m/s}^2)}{(60.0\,\text{m/s})^2} = 0.871.$$

Debemos despejar para un ángulo θ_0 que esté entre 0° y 90°, lo cual significa que $2\theta_0$ en esta ecuación puede ser tan grande como 180°. Por lo tanto, $2\theta_0 = 60.6°$ es una solución; no obstante, $2\theta_0 = 180° - 60.6° = 119.4°$ es también una solución (véase el Apéndice A-9). En general tendremos dos soluciones (véase la figura 3-27b), que en el presente caso están dadas por

$$\theta_0 = 30.3° \quad \text{o} \quad 59.7°.$$

Cualquiera de los dos valores da el mismo alcance. Sólo cuando $\operatorname{sen} 2\theta_0 = 1$ (así que $\theta_0 = 45°$) se tiene una sola solución (es decir, ambas soluciones coinciden).

EJERCICIO F Se tiene que el alcance máximo de un proyectil es 100 m. Si el proyectil golpea el suelo a una distancia de 82 m, ¿cuál fue el ángulo de lanzamiento? *a*) 35° o 55°; *b*) 30° o 60°; *c*) 27.5° o 72.5°; *d*) 13.75° o 76.25°.

La fórmula del alcance horizontal que se derivó en el ejemplo 3-10 se aplica sólo si el despegue y el aterrizaje tienen la misma altura ($y = y_0$). El siguiente ejemplo 3-11 considera un caso donde no tienen la misma altura ($y \neq y_0$).

EJEMPLO 3–11 **¡A despejar!** Suponga que al balón de fútbol del ejemplo 3-7 se le dio una patada de despeje y que el pie del jugador quedó a una altura de 1.00 m sobre el suelo. ¿Qué distancia viajó el balón antes de golpear el suelo? Considere $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

FÍSICA APLICADA
Deportes



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
No utilice una fórmula a menos que esté seguro de que su rango de validez sea apropiado al problema; la fórmula de alcance horizontal no se aplica aquí porque $y \neq y_0$

PLANTEAMIENTO De nuevo, se trabajan por separado los movimientos x y y. Pero no podemos emplear la fórmula de alcance del ejemplo 3-10, porque ésta es válida sólo si y (final) $= y_0$, lo cual no es el caso aquí. Ahora tenemos $y_0 = 0$, pero el balón de fútbol golpea el suelo en $y = -1.00$ m (véase la figura 3-28). Elegimos el intervalo de tiempo que empieza cuando el balón sale del pie ($t = 0$, $y_0 = 0$, $x_0 = 0$) y termina justo antes de que el balón golpee el suelo ($y = -1.00$ m). A partir de la ecuación 2-12b, $x = v_{x0}t$, se obtiene x, ya que se sabe que $v_{x0} = 16.0$ m/s, de acuerdo con el ejemplo 3-7. Sin embargo, primero hay que encontrar t, el tiempo en que el balón golpea el suelo, que se obtiene a partir del movimiento en y.

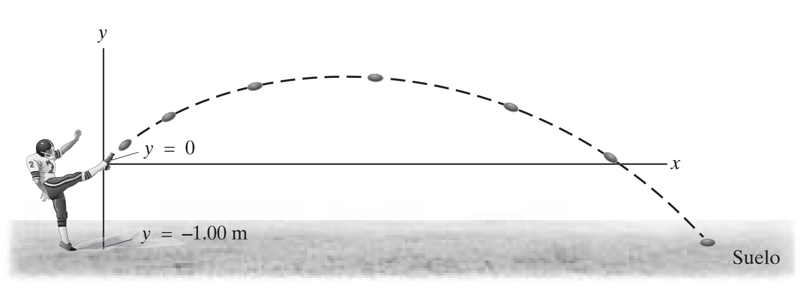


FIGURA 3–28 Ejemplo 3-11: El balón de fútbol sale del pie del jugador en $y = 0$, y llega el suelo en $y = -1.00$ m.

SOLUCIÓN Con $y = -1.00$ m y $v_{y0} = 12.0$ m/s (véase el ejemplo 3-7), utilizamos la ecuación

$$y = y_0 + v_{y0}t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

y obtenemos

$$-1.00\,\text{m} = 0 + (12.0\,\text{m/s})t - (4.90\,\text{m/s}^2)t^2.$$

Reordenamos esta ecuación en la forma estándar ($ax^2 + bx + c = 0$), de manera que podamos utilizar la fórmula cuadrática:

$$(4.90\,\text{m/s}^2)t^2 - (12.0\,\text{m/s})t - (1.00\,\text{m}) = 0.$$

Al emplear la fórmula cuadrática (Apéndice A-1) se obtiene

$$t = \frac{12.0\,\text{m/s} \pm \sqrt{(-12.0\,\text{m/s})^2 - 4(4.90\,\text{m/s}^2)(-1.00\,\text{m})}}{2(4.90\,\text{m/s}^2)}$$

$$= 2.53\,\text{s} \quad \text{o} \quad -0.081\,\text{s}.$$

La segunda solución correspondería a un tiempo anterior al intervalo de tiempo elegido que empieza con la patada, de manera que no se aplica. Con $t = 2.53$ s para el tiempo en que el balón toca el suelo, la distancia horizontal que recorre el balón es (utilizando $v_{x0} = 16.0$ m/s, a partir del ejemplo 3-7):

$$x = v_{x0}t = (16.0\,\text{m/s})(2.53\,\text{s}) = 40.5\,\text{m}.$$

La suposición en el ejemplo 3-7 de que el balón sale del pie al nivel del suelo daría como resultado una subestimación de aproximadamente 1.3 m en la distancia recorrida.

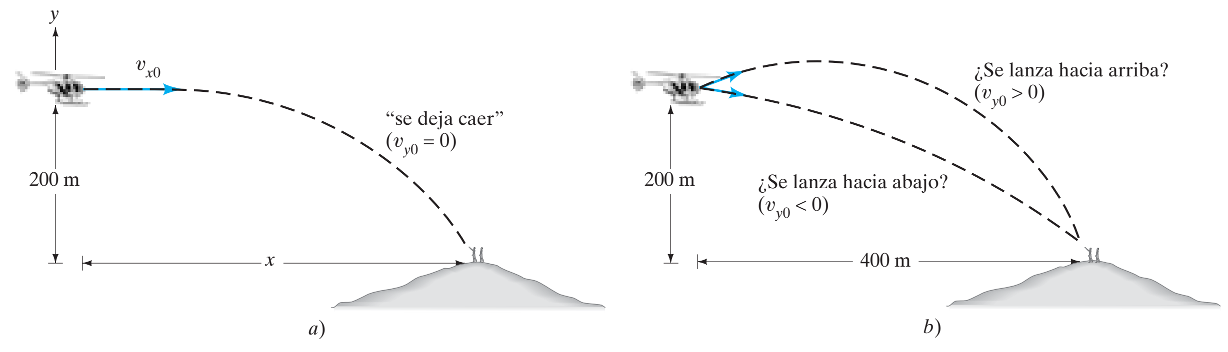


FIGURA 3–29 Ejemplo 3–12.

FÍSICA APLICADA

Alcance de un objetivo desde un helicóptero en movimiento

EJEMPLO 3–12 Helicóptero de rescate lanza suministros. Un helicóptero de rescate deja caer un paquete de suministros a alpinistas que se encuentran aislados en la cima de una colina peligrosa, situada 200 m abajo del helicóptero. Si éste vuela horizontalmente con una rapidez de 70 m/s (250 km/h), *a*) ¿a qué distancia horizontal antes de los alpinistas debe dejarse caer el paquete de suministros (figura 3-29a)? *b*) En vez de esto, suponga que el helicóptero lanza los suministros a una distancia horizontal de 400 m antes de donde se encuentran los alpinistas. ¿Qué velocidad vertical debería darse a los suministros (hacia arriba o hacia abajo) para que éstos caigan precisamente en la posición donde están los alpinistas (figura 3-29b)? *c*) ¿Con qué rapidez aterrizan los suministros en este último caso?

PLANTEAMIENTO Se elige el origen de nuestro sistema de coordenadas *xy* en la posición inicial del helicóptero, tomando $+y$ hacia arriba, y se emplean las ecuaciones cinemáticas (tabla 3-2).

SOLUCIÓN *a*) Se puede encontrar el tiempo para alcanzar a los alpinistas usando la distancia vertical de 200 m. El paquete de suministros se "deja caer", de manera que inicialmente tiene la velocidad horizontal del helicóptero, $v_{x0} = 70$ m/s, $v_{y0} = 0$. Entonces, como $y = -\frac{1}{2}gt^2$, tenemos

$$t = \sqrt{\frac{-2y}{g}} = \sqrt{\frac{-2(-200\,\text{m})}{9.80\,\text{m/s}^2}} = 6.39\,\text{s}.$$

El movimiento horizontal de los suministros al caer tiene rapidez constante de 70 m/s. Entonces,

$$x = v_{x0}t = (70\,\text{m/s})(6.39\,\text{s}) = 447\,\text{m} \approx 450\,\text{m},$$

considerando que los valores dados tenían una precisión de dos cifras significativas.

b) Se nos da $x = 400$ m, $v_{x0} = 70$ m/s, $y = -200$ m y queremos encontrar v_{y0} (véase la figura 3-29b). Al igual que con la mayoría de los problemas, éste puede enfocarse de varias formas. En vez de buscar una fórmula o dos, intentemos razonar de manera sencilla, según lo que hicimos en el inciso *a*). Si conocemos *t*, tal vez podamos obtener v_{y0}. Como el movimiento horizontal de los suministros tiene rapidez constante (una vez que se lanzan, no nos interesa lo que haga el helicóptero), tenemos $x = v_{x0}t$, por lo que

$$t = \frac{x}{v_{x0}} = \frac{400\,\text{m}}{70\,\text{m/s}} = 5.71\,\text{s}.$$

Usemos ahora el movimiento vertical para obtener v_{y0}: $y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$. Como $y_0 = 0$ y $y = -200$ m, despejamos v_{y0}:

$$v_{y0} = \frac{y + \frac{1}{2}gt^2}{t} = \frac{-200\,\text{m} + \frac{1}{2}(9.80\,\text{m/s}^2)(5.71\,\text{s})^2}{5.71\,\text{s}} = -7.0\,\text{m/s}.$$

Entonces, para caer precisamente en la posición de los alpinistas, el paquete de suministros debe lanzarse *hacia abajo* desde el helicóptero con una rapidez de 7.0 m/s.

c) Queremos conocer la v de los suministros en $t = 5.71$ s. Las componentes son:

$$v_x = v_{x0} = 70\,\text{m/s}$$

$$v_y = v_{y0} - gt = -7.0\,\text{m/s} - (9.80\,\text{m/s}^2)(5.71\,\text{s}) = -63\,\text{m/s}.$$

De manera que $v = \sqrt{(70\,\text{m/s})^2 + (-63\,\text{m/s})^2} = 94$ m/s. (Sería mejor no soltar los suministros desde tal altitud o mejor usar un paracaídas).

El movimiento de proyectiles es parabólico

Mostraremos ahora que la trayectoria seguida por cualquier proyectil es una *parábola*, si podemos despreciar la resistencia del aire y consideramos que $\vec{\mathbf{g}}$ es constante. Para hacerlo, necesitamos encontrar la altura y como función de x, eliminando t entre las dos ecuaciones para los movimientos horizontal y vertical (ecuación 2-12b en la tabla 3-2) y, por sencillez tomamos $x_0 = y_0 = 0$:

$$x = v_{x0}t$$

$$y = v_{y0}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

De la primera ecuación, tenemos $t = x/v_{x0}$ y sustituimos esto en la segunda ecuación para obtener

$$y = \left(\frac{v_{y0}}{v_{x0}}\right)x - \left(\frac{g}{2v_{x0}^2}\right)x^2. \tag{3–14}$$

Vemos que y como función de x tiene la forma

$$y = Ax - Bx^2,$$

donde A y B son constantes para cualquier movimiento específico de un proyectil. Ésta es la bien conocida ecuación para una parábola. Véase las figuras 3-19 y 3-30.

En tiempos de Galileo, la idea de que el movimiento de un proyectil es parabólico estaba a la vanguardia de las investigaciones en física. En la actualidad analizamos esto en el capítulo 3 ¡de un libro de introducción a la física!

FIGURA 3–30 Ejemplos del movimiento de proyectiles: Chispas (pequeños fragmentos de metal incandescente que brillan), agua y fuegos artificiales. La trayectoria parabólica característica del movimiento de proyectiles se ve afectada por la resistencia del aire.







3–9 Velocidad relativa

Ahora consideraremos cómo se relacionan entre sí las observaciones efectuadas en diferentes marcos de referencia. Por ejemplo, piense en dos trenes que se acercan una al otro, cada uno con una rapidez de 80 km/h con respecto a la Tierra. Observadores sobre la Tierra al lado de la vía medirán 80 km/h para la rapidez de cada uno de los trenes. Observadores en cualquiera de los trenes (un marco de referencia distinto) medirán una rapidez de 160 km/h para el tren que se acerque a ellos.

Asimismo, cuando un automóvil que viaja a 90 km/h pasa a un segundo automóvil que viaja en el mismo sentido a 75 km/h, el primer automóvil tiene una rapidez relativa al segundo de 90 km/h − 75 km/h = 15 km/h.

Cuando las velocidades van a lo largo de la misma línea, una simple suma o una resta es suficiente para obtener la velocidad relativa. Pero si las velocidades no van a lo largo de la misma línea, tenemos que usar la suma vectorial. como se mencionó en la sección 2-1, enfatizamos que al especificar una velocidad, es importante indicar cuál es el marco de referencia.

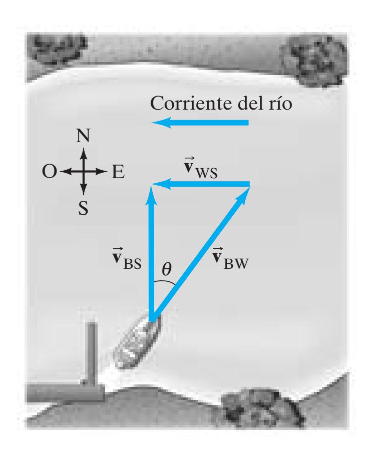


FIGURA 3–31 El bote debe dirigirse río arriba a un ángulo θ, para cruzar directamente a través del río. Los vectores de velocidad se muestran con flechas:

$\vec{\mathbf{v}}_{BS}$ = velocidad del **b**ote con respecto a la orilla (**S**hore),

$\vec{\mathbf{v}}_{BW}$ = velocidad del **b**ote con respecto al agua (**W**ater),

$\vec{\mathbf{v}}_{WS}$ = velocidad del agua (**W**ater) con respecto a la orilla (**S**hore) (corriente del río).

Al determinar la velocidad relativa, es fácil equivocarse sumando o restando las velocidades incorrectas. Por lo tanto, se recomienda dibujar un diagrama y usar un proceso de rotulación cuidadosa que aclare la situación. Cada velocidad se rotula con *dos subíndices: el primero se refiere al objeto, y el segundo al marco de referencia donde éste tiene tal velocidad*. Por ejemplo, suponga que un bote cruza al lado opuesto de un río, como se indica en la figura 3-31. Sea $\vec{\mathbf{v}}_{BW}$ la velocidad del **B**ote con respecto al agua (**W**ater). (Ésta también sería la velocidad del bote relativa a la orilla, si el agua estuviese en reposo). Asimismo, $\vec{\mathbf{v}}_{BS}$ es la velocidad del **B**ote con respecto a la orilla (**S**hore), y $\vec{\mathbf{v}}_{WS}$ es la velocidad del agua (**W**ater) con respecto a la orilla (**S**hore) (ésta es la corriente del río). Advierta que $\vec{\mathbf{v}}_{BW}$ es lo que el motor del bote produce (contra el agua); en tanto que $\vec{\mathbf{v}}_{BS}$ es igual a $\vec{\mathbf{v}}_{BW}$ más el efecto de la corriente, $\vec{\mathbf{v}}_{WS}$. Por lo tanto, la velocidad del bote con respecto a la orilla es (véase el diagrama de vectores, figura 3-31)

$$\vec{\mathbf{v}}_{BS} = \vec{\mathbf{v}}_{BW} + \vec{\mathbf{v}}_{WS}. \tag{3–15}$$

Si escribimos los subíndices según la convención anterior, vemos que los subíndices internos (las dos W) en el lado derecho de la ecuación 3-15 son los mismos; en tanto que los subíndices externos en el lado derecho de la ecuación 3-15 (la B y la S) son los mismos que los dos subíndices para la suma vectorial a la izquierda, $\vec{\mathbf{v}}_{BS}$. Siguiendo esta convención (primer subíndice para el objeto, segundo para el marco de referencia), se puede escribir la ecuación correcta relacionando velocidades en distintos marcos de referencia.† La figura 3-32 da una derivación de la ecuación 3-15.

La ecuación 3-15 es válida en general y puede extenderse a tres o más velocidades. Por ejemplo, si un pescador (**F**isherman) sobre un bote camina con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}_{FB}$ relativa al bote, su velocidad relativa a la orilla es $\vec{\mathbf{v}}_{FS} = \vec{\mathbf{v}}_{FB} + \vec{\mathbf{v}}_{BW} + \vec{\mathbf{v}}_{WS}$. Las ecuaciones que implican velocidades relativas serán correctas, cuando los subíndices interiores adyacentes sean idénticos y cuando los más externos correspondan exactamente a los dos de la velocidad en el lado izquierdo de la ecuación. Pero esto funciona sólo con signos más (en la derecha), no con signos menos.

A menudo es útil recordar que para dos objetos o marcos de referencia cualesquiera, A y B, la velocidad de A relativa a B tiene la misma magnitud, pero sentido opuesto a la velocidad de B relativa a A:

$$\vec{\mathbf{v}}_{BA} = -\vec{\mathbf{v}}_{AB}. \tag{3–16}$$

Por ejemplo, si un tren viaja a 100 km/h con respecto a la Tierra, en una cierta dirección, un observador en el tren vería los objetos sobre la tierra (como los árboles) como si viajaran a 100 km/h en sentido opuesto.

†Sabríamos entonces por inspección que (por ejemplo) la ecuación $\vec{\mathbf{V}}_{BW} = \vec{\mathbf{V}}_{BS} + \vec{\mathbf{V}}_{WS}$ es errónea.

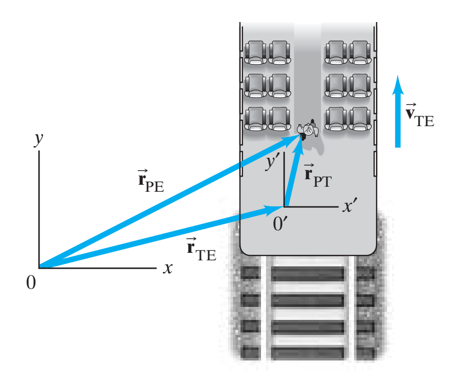


FIGURA 3–32 Derivación de la ecuación para la velocidad relativa (ecuación 3-15), en este caso para un individuo que camina a lo largo del pasillo de un tren. Vemos desde arriba el tren y dos marcos de referencia: xy sobre la Tierra y $x'y'$ fijo sobre el tren. Tenemos:

$\vec{\mathbf{r}}_{PT}$ = vector de posición de la persona (P) con respecto al tren (T),

$\vec{\mathbf{r}}_{PE}$ = vector de posición de la persona (P) con respecto a la Tierra (Earth),

$\vec{\mathbf{r}}_{TE}$ = vector de posición del sistema coordenado del tren (T) con respecto a la Tierra (E). Del diagrama vemos que

$$\vec{\mathbf{r}}_{PE} = \vec{\mathbf{r}}_{PT} + \vec{\mathbf{r}}_{TE}.$$

Tomamos la derivada con respecto al tiempo y obtenemos

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{r}}_{PE}) = \frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{r}}_{PT}) + \frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{r}}_{TE}).$$

o, como $d\vec{\mathbf{r}}/dt = \vec{\mathbf{v}}$,

$$\vec{\mathbf{v}}_{PE} = \vec{\mathbf{v}}_{PT} + \vec{\mathbf{v}}_{TE}.$$

Esto es el equivalente de la ecuación 3-15 para la situación presente (¡compruebe los subíndices!).

EJEMPLO CONCEPTUAL 3–13 **Cruce de un río.** En un pequeño bote de motor una mujer intenta cruzar un río que fluye hacia el oeste con una corriente fuerte. La mujer parte desde el banco sur y trata de alcanzar el banco norte localizado directamente al norte de su punto de partida. ¿Debería *a*) dirigirse hacia el norte, *b*) dirigirse hacia el oeste, *c*) dirigirse hacia el noroeste, *d*) dirigirse hacia el noreste?

RESPUESTA Si la mujer se dirige en línea recta a través del río, la corriente arrastrará el bote corriente abajo (hacia el oeste). Para superar la corriente del río hacia el oeste, el bote debe adquirir tanto una componente de velocidad hacia el este, como una componente hacia el norte. Por lo tanto, el bote debe *d*) dirigirse en una dirección hacia el noreste (véase la figura 3-33). El ángulo real depende de la intensidad de la corriente y de cuán rápido se mueva el bote con respecto al agua. Si la corriente es débil y el motor es fuerte, entonces el bote se dirige casi, pero no demasiado, hacia el norte.

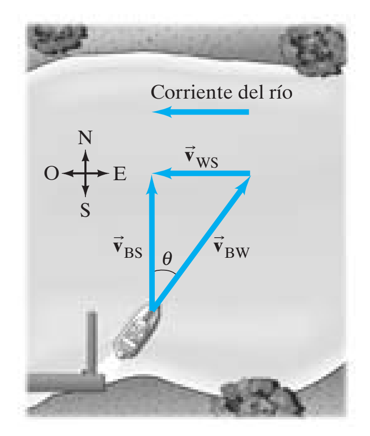


FIGURA 3–33 Ejemplos 3–13 y 3–14.

EJEMPLO 3–14 **Dirigirse corriente arriba.** La rapidez de un bote en aguas tranquilas es $v_{BW} = 1.85$ m/s. Si el bote viaja directamente a través del río, cuya corriente tiene una rapidez $v_{WS} = 1.20$ m/s, ¿a qué ángulo corriente arriba debe dirigirse el bote? (véase la figura 3-33).

PLANTEAMIENTO Razonamos como hicimos en el ejemplo 3-13 y usamos los subíndices como en la ecuación 3-15. La figura 3-33 se dibujó con $\vec{\mathbf{v}}_{BS}$, la velocidad del **B**ote respecto a la orilla (**S**hore), apuntando directamente a través del río, ya que así es como se supone que se mueve el bote. (Note que $\vec{\mathbf{v}}_{BS} = \vec{\mathbf{v}}_{BW} + \vec{\mathbf{v}}_{WS}$.) Para lograr esto, el bote necesita dirigirse corriente arriba para compensar la corriente que lo empuja corriente abajo.

SOLUCIÓN El vector $\vec{\mathbf{v}}_{BW}$ apunta corriente arriba a un ángulo θ, como se muestra en la figura. A partir del diagrama,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{v_{WS}}{v_{BW}} = \frac{1.20\text{ m/s}}{1.85\text{ m/s}} = 0.6486.$$

Por lo tanto, $\theta = 40.4°$, de manera que el bote debe dirigirse corriente arriba a un ángulo de 40.4°.

EJEMPLO 3–15 **Cruce a través del río.** El mismo bote $(v_{BW} = 1.85\text{ m/s})$ ahora transita directamente a través del río, cuya corriente es todavía de 1.20 m/s. *a*) ¿Cuál es la velocidad (magnitud y dirección) del bote relativa a la orilla? *b*) Si el río tiene 110 m de ancho, ¿cuánto tiempo le tomará cruzar y qué tan lejos corriente abajo estará para entonces?

PLANTEAMIENTO Ahora el bote transita directamente a través del río y el agua lo jala corriente abajo, como se observa en la figura 3-34. La velocidad del bote con respecto a la orilla, $\vec{\mathbf{v}}_{BS}$, es la suma de su velocidad con respecto al agua, $\vec{\mathbf{v}}_{BW}$, más la velocidad del agua con respecto a la orilla, $\vec{\mathbf{v}}_{WS}$:

$$\vec{\mathbf{v}}_{BS} = \vec{\mathbf{v}}_{BW} + \vec{\mathbf{v}}_{WS},$$

tal como antes.

SOLUCIÓN *a*) Dado que $\vec{\mathbf{v}}_{BW}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{v}}_{WS}$, podemos obtener v_{BS} mediante el teorema de Pitágoras:

$$v_{BS} = \sqrt{v_{BW}^2 + v_{WS}^2} = \sqrt{(1.85\text{ m/s})^2 + (1.20\text{ m/s})^2} = 2.21\text{ m/s}.$$

Obtenemos el ángulo (note cómo se define θ en el diagrama) a partir de:

$$\tan\theta = v_{WS}/v_{BW} = (1.20\text{ m/s})/(1.85\text{ m/s}) = 0.6486.$$

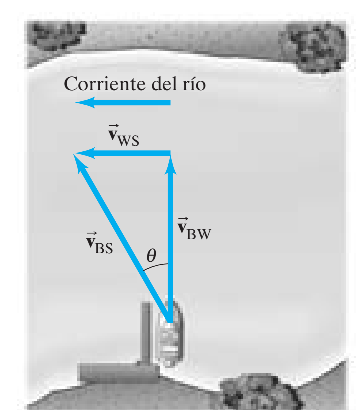
Así $\theta = \tan^{1}(0.6486) = 33.0°$. Advierta que este ángulo no es igual al ángulo calculado en el ejemplo 3-14.

b) El tiempo de recorrido para el bote está determinado por el tiempo que le toma cruzar el río. Dado el ancho del río $D = 110$ m, podemos utilizar la componente de velocidad en la dirección de D, $v_{BW} = D/t$. Al despejar t, obtenemos $t = 110\text{ m}/1.85\text{ m/s} = 59.5$ s. En este tiempo, el bote habrá sido arrastrado corriente abajo una distancia

$$d = v_{WS}\,t = (1.20\text{ m/s})(59.5\text{ s}) = 71.4\text{ m} \approx 71\text{ m}.$$

NOTA En este ejemplo no hay aceleración, así que el movimiento sólo implica velocidades constantes (del bote o del río).

FIGURA 3–34 Ejemplo 3-15. Un bote que cruza directamente un río cuya corriente se mueve a 1.20 m/s.



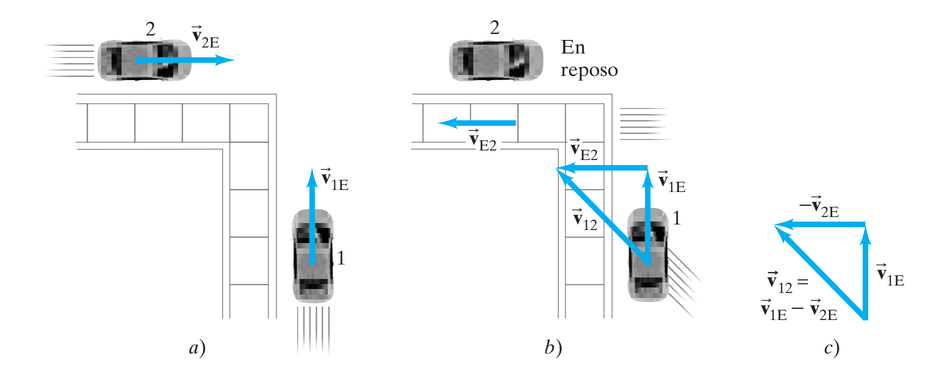


FIGURA 3–35 Ejemplo 3–16.

EJEMPLO 3–16 Velocidades de automóviles a 90°. Dos automóviles se acercan a una esquina formando un ángulo recto entre sí, con la misma rapidez de 40.0 km/h (= 11.11 m/s), como se muestra en la figura 3-35a. ¿Cuál es la velocidad relativa de un automóvil con respecto al otro? Es decir, determine la velocidad del automóvil 1 vista por el automóvil 2.

PLANTEAMIENTO La figura 3-35a muestra la situación en un marco de referencia fijo a la Tierra. Pero queremos ver la situación desde un marco de referencia donde el automóvil 2 está en reposo, y esto se muestra en la figura 3-35b. En este marco de referencia (el mundo visto por el conductor del automóvil 2), la Tierra se mueve hacia el automóvil 2 con velocidad $\vec{v}_{E2}$ (rapidez de 40.0 km/h), que es, por supuesto, igual y opuesta a $\vec{v}_{2E}$, la velocidad del automóvil 2 con respecto a la Tierra (ecuación 3-16):

$$\vec{v}_{2E} = -\vec{v}_{E2}.$$

Por lo tanto, la velocidad del automóvil 1 vista desde el automóvil 2 es (véase ecuación 3-15)

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_{1E} + \vec{v}_{E2}$$

SOLUCIÓN Como $\vec{v}_{E2} = -\vec{v}_{2E}$, entonces,

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_{1E} - \vec{v}_{2E}.$$

Es decir, la velocidad del automóvil 1 vista por el automóvil 2 es la diferencia de sus velocidades, $\vec{v}_{1E} - \vec{v}_{2E}$, ambas medidas con respecto a la Tierra (véase la figura 3-35c). Como las magnitudes de $\vec{v}_{1E}$, $\vec{v}_{2E}$, y $\vec{v}_{E2}$ son iguales (40 km/h = 11.11 m/s), vemos (figura 3-35b) que $\vec{v}_{12}$ apunta a un ángulo de 45° hacia el automóvil 2; la rapidez es

$$v_{12} = \sqrt{(11.11\text{ m/s})^2 + (11.11\text{ m/s})^2} = 15.7\text{ m/s} (= 56.6\text{ km/h}).$$

Resumen

Una cantidad que tiene tanto magnitud como dirección y sentido se denomina **vector**. Una cantidad que tiene sólo magnitud se llama **escalar**.

La suma de vectores puede hacerse gráficamente colocando la cola de cada flecha sucesiva (que representa a cada vector) en la punta del vector previo. La suma, o **vector resultante**, es la flecha dibujada desde la cola del primero hasta la punta del último. Dos vectores también pueden sumarse usando el método del paralelogramo.

Los vectores pueden sumarse con más exactitud, usando el método analítico de sumar sus **componentes** a lo largo de ejes dados usando funciones trigonométricas. Un vector de magnitud V que forma un ángulo θ con el eje x tiene componentes

$$V_x = V\cos\theta \qquad V_y = V\,\text{sen}\,\theta. \tag{3–2}$$

Dadas las componentes, encontramos la magnitud y la dirección a partir de

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}, \qquad \tan\theta = \frac{V_y}{V_x}. \tag{3–3}$$

A menudo es útil expresar un vector en términos de sus componentes a lo largo de ejes seleccionados usando **vectores unitarios**, que son vectores de longitud unitaria a lo largo de los ejes coordenados elegidos; en coordenadas cartesianas, los vectores unitarios a lo largo de los ejes x, y y z se llaman $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$.

Las definiciones generales para la **velocidad instantánea**, $\vec{v}$, y la **aceleración instantánea**, $\vec{a}$, de una partícula (en una, dos o tres dimensiones) son

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{3–8}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \tag{3–11}$$

donde $\vec{r}$ es el vector de posición de la partícula. Las ecuaciones cinemáticas para el movimiento con aceleración constante pueden escribirse para cada una de las componentes x, y y z del movimiento y tienen la misma forma que para el movimiento unidimensional (ecuaciones 2-12). Estas pueden escribirse en la forma vectorial más general:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2 \tag{3–13}$$

El **movimiento de proyectil** que describe un objeto que se mueve en el aire cerca de la superficie terrestre puede analizarse como

dos movimientos separados si se desprecia la resistencia del aire. La componente horizontal del movimiento es con velocidad constante; mientras que la componente vertical del movimiento es con aceleración constante, g, al igual que para un cuerpo que cae verticalmente bajo la acción de la gravedad.

La velocidad de un objeto relativa a un marco de referencia puede encontrarse por suma vectorial, si se conocen tanto su velocidad relativa a un segundo marco de referencia, así como la **velocidad relativa** de los dos marcos de referencia.

Preguntas

1. Un automóvil viaja hacia el este a 40 km/h y un segundo automóvil viaja hacia el norte a 40 km/h. ¿Son iguales sus velocidades? Explique.

2. ¿Puede usted concluir que un automóvil no está acelerando, si el velocímetro indica constantemente 60 km/h?

3. ¿Puede usted dar varios ejemplos del movimiento de un objeto que recorre una gran distancia pero cuyo desplazamiento es cero?

4. ¿El vector desplazamiento de una partícula que se mueve en dos dimensiones puede ser más grande, que la longitud de la trayectoria recorrida por la partícula en el mismo intervalo de tiempo? ¿Puede ser menor? Explique.

5. Durante una práctica de béisbol, un jugador conecta un batazo muy elevado, y luego corre en línea recta y atrapa la pelota. ¿Quién tuvo mayor desplazamiento, el jugador o la pelota?

6. Si $\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_2$, ¿$V$ es necesariamente mayor que V_1 y/o V_2? Explique.

7. Dos vectores tienen longitudes $V_1 = 3.5$ km y $V_2 = 4.0$ km. ¿Cuáles son las magnitudes máxima y mínima de su suma vectorial?

8. ¿Pueden sumarse dos vectores de diferente magnitud y dar un vector cero? ¿Es posible esto con *tres* vectores desiguales? ¿En qué condiciones?

9. ¿La magnitud de un vector puede ser *a*) igual o *b*) menor que alguna de sus componentes?

10. ¿Puede una partícula estar acelerando si su rapidez es constante? ¿Puede estar acelerando si velocidad es constante?

11. ¿El odómetro de un automóvil mide una cantidad escalar o una cantidad vectorial? ¿Y un velocímetro?

12. Un niño desea determinar la rapidez que una lanzadera (resortera) imparte a una piedra. ¿Cómo puede hacerse esto usando sólo una barra de un metro, una piedra y la lanzadera?

13. En arquería, ¿hay que apuntar la flecha directamente hacia el blanco? ¿Cómo dependería su ángulo de mira de la distancia hacia el blanco?

14. Un proyectil se dispara en un ángulo de 30° con respecto a la horizontal, con una rapidez de 30 m/s. ¿Cómo se compara la componente horizontal de su velocidad 1.0 s después del lanzamiento, con la componente horizontal de su velocidad 2.0 s después del lanzamiento?

15. ¿En qué punto de su trayectoria un proyectil tiene su menor rapidez?

16. Se reportó que en la Primera Guerra Mundial un piloto que volaba a una altitud de 2 km atrapó con sus manos desnudas una bala disparada a su avión. Usando el hecho de que la bala desacelera considerablemente debido a la resistencia del aire, explique cómo ocurrió dicho incidente.

17. Dos balas de cañón, A y B, se disparan desde el suelo con idéntica rapidez inicial, pero con θ_A mayor que θ_B. *a*) ¿Cuál bala de cañón alcanza una mayor elevación? *b*) ¿Cuál permanece más tiempo en el aire? *c*) ¿Cuál viaja más lejos?

18. Una persona está sentada en el vagón cerrado de un tren, que se mueve con velocidad constante, y lanza una pelota verticalmente hacia arriba según su marco de referencia. *a*) ¿Dónde caerá la pelota? ¿Cuál es su respuesta si el vagón *b*) acelera, *c*) desacelera, *d*) viaja por una curva, *e*) se mueve con velocidad constante pero está abierto al aire?

19. Si usted viaja en un tren que pasa a otro tren que se mueve en la misma dirección y sentido sobre una vía adyacente, parece que el otro tren se mueve hacia atrás. ¿Por qué?

20. Dos remeros, que pueden remar con la misma rapidez en aguas tranquilas, empiezan a remar en un río al mismo tiempo. Uno rema directamente a través del río y es llevado parcialmente por la corriente en dirección aguas abajo. El otro rema formando un ángulo dirigido aguas arriba para llegar al punto opuesto del sitio de partida. ¿Qué remero llegará primero al lado opuesto?

21. Si usted está inmóvil bajo la lluvia protegido por un paraguas, y las gotas caen verticalmente, permanecerá relativamente seco. Sin embargo, si usted corre, la lluvia comenzará a mojarle las piernas aunque éstas permanezcan bajo el paraguas. ¿Por qué?

Problemas

3–2 a 3–5 Suma de vectores y vectores unitarios

1. (I) Se conduce un automóvil 225 km al oeste y luego 78 km al suroeste (45°). ¿Cuál es el desplazamiento del automóvil desde el punto de partida (magnitud, dirección y sentido)? Dibuje un diagrama.

2. (I) Un camión repartidor viaja 28 cuadras al norte, 16 cuadras al este y 26 cuadras al sur. ¿Cuál es su desplazamiento final desde el origen? Suponga que las cuadras son de igual longitud.

3. (I) Si $V_x = 7.80$ unidades y $V_y = -6.40$ unidades, determine la magnitud, dirección y sentido de $\vec{\mathbf{V}}$.

4. (II) Determine gráficamente la resultante de los siguientes tres vectores de desplazamiento: 1). 24 m, a 36° al norte del este; 2). 18 m, a 37° al este del norte; y 3). 26 m, a 33° al oeste del sur.

5. (II) $\vec{\mathbf{V}}$ es un vector de 24.8 unidades de magnitud y apunta en una dirección a 23.4° sobre el eje x negativo. *a*) Dibuje este vector. *b*) Calcule V_x y V_y. *c*) Use V_x y V_y para obtener (de nuevo) la magnitud y la dirección de $\vec{\mathbf{V}}$. [*Nota:* El inciso *c*) es una buena forma de revisar si el vector se descompuso correctamente en sus componentes cartesianas].

6. (II) La figura 3-36 muestra dos vectores, $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, cuyas magnitudes son $A = 6.8$ unidades y $B = 5.5$ unidades. Determine $\vec{\mathbf{C}}$ si *a*) $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$, *b*) $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$, *c*) $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}}$. Dé la magnitud y la dirección de cada uno.

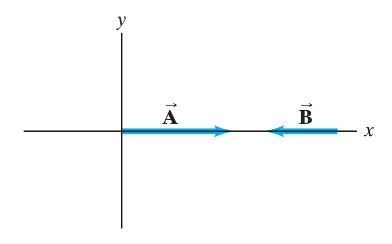


FIGURA 3–36 Problema 6.

7. (II) Un avión vuela a 835 km/h en dirección a 41.5° al oeste del norte (figura 3-37). *a*) Encuentre las componentes del vector velocidad en las direcciones norte y oeste. *b*) ¿Qué tan lejos ha viajado el avión al norte y cuánto al oeste, después de 2.50 horas?

FIGURA 3–37 Problema 7.

8. (II) Sea $\vec{\mathbf{V}}_1 = -6.0\hat{\mathbf{i}} + 8.0\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{V}}_2 = 4.5\hat{\mathbf{i}} - 5.0\hat{\mathbf{j}}$. Determine la magnitud, dirección y sentido de *a*) $\vec{\mathbf{V}}_1$, *b*) $\vec{\mathbf{V}}_2$, *c*) $\vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_2$ y *d*) $\vec{\mathbf{V}}_2 - \vec{\mathbf{V}}_1$.

9. (II) *a*) Determine la magnitud, dirección y sentido de la suma de los tres vectores $\vec{\mathbf{V}}_1 = 4.0\hat{\mathbf{i}} - 8.0\hat{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{V}}_2 = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$, y $\vec{\mathbf{V}}_3 = -2.0\hat{\mathbf{i}} + 4.0\hat{\mathbf{j}}$. *b*) Determine $\vec{\mathbf{V}}_1 - \vec{\mathbf{V}}_2 + \vec{\mathbf{V}}_3$.

10. (II) En la figura 3-38 se muestran tres vectores. Sus magnitudes están dadas en unidades arbitrarias. Determine la suma de los tres vectores. Dé la resultante en términos de *a*) componentes, *b*) magnitud y ángulo medido a partir del eje *x* positivo.

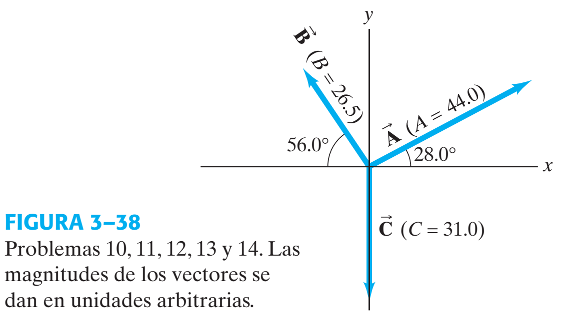


FIGURA 3–38 Problemas 10, 11, 12, 13 y 14. Las magnitudes de los vectores se dan en unidades arbitrarias.

11. (II) *a*) Dados los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ que se indican en la figura 3-38, determine $\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}}$. *b*) Determine $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$ sin usar su respuesta en *a*). Luego compare sus resultados y vea si los vectores son opuestos.

12. (II) Determine el vector $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{C}}$, dados los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{C}}$ que se indican en la figura 3-38.

13. (II) Para los vectores dados en la figura 3-38, determine *a*) $\vec{\mathbf{B}} - 2\vec{\mathbf{A}}$, *b*) $2\vec{\mathbf{A}} - 3\vec{\mathbf{B}} + 2\vec{\mathbf{C}}$.

14. (II) Para los vectores mostrados en la figura 3-38, determine *a*) $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$, (*b*) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{C}}$, y *c*) $\vec{\mathbf{C}} - \vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$.

15. (II) La cima de una montaña está a 2450 m de altura sobre la base de un campamento, y según un mapa, está a 4580 m horizontalmente desde el campamento en una dirección 32.4° al oeste del norte. ¿Cuáles son las componentes del vector desplazamiento desde el campamento hasta la cima de la montaña? ¿Cuál es la magnitud del desplazamiento? Seleccione el eje *x* como este, el eje *y* como norte y el eje *z* hacia arriba.

16. (III) Un vector en el plano *xy* tiene una magnitud de 90.0 unidades y una componente *y* de −55.0 unidades. *a*) ¿Cuáles son las dos posibilidades para su componente *x*? *b*) Suponiendo que se sabe que la componente *x* es positiva, especifique otro vector que, sumado al original, dará un vector resultante con una magnitud de 80.0 y que apunta exactamente en la dirección −*x*.

3–6 Cinemática vectorial

17. (I) La posición de una partícula como función del tiempo está dada por la ecuación $\vec{\mathbf{r}} = (9.60\,t\,\hat{\mathbf{i}} + 8.85\hat{\mathbf{j}} - 1.00\,t^2\hat{\mathbf{k}})$ m. Determine la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo.

18. (I) ¿Cuál es la velocidad promedio de la partícula en el problema 17 entre $t = 1.00$ s y $t = 3.00$ s? ¿Cuál es la magnitud de la velocidad instantánea en $t = 2.00$ s?

19. (II) ¿Qué forma tiene la trayectoria de la partícula en el problema 17?

20. (II) Un automóvil viaja con una rapidez de 18.0 m/s hacia el sur en un momento y a 27.5 m/s hacia el este 8.00 s después. En ese intervalo de tiempo, determine la magnitud, dirección y sentido de *a*) su velocidad promedio, *b*) su aceleración promedio. *c*) ¿Cuál es su rapidez promedio? [*Sugerencia*: ¿Puede usted determinar todo esto con la información proporcionada?]

21. (II) En $t = 0$, una partícula parte del reposo en $x = 0$, $y = 0$, y se mueve en el plano *xy* con una aceleración $\vec{\mathbf{a}} = (4.0\hat{\mathbf{i}} + 3.0\hat{\mathbf{j}})$ m/s². Determine *a*) las componentes *x* y *y* de la velocidad; *b*) la rapidez de la partícula; y *c*) la posición de la partícula, todo ellos en función del tiempo. *d*) Evalúe todo lo anterior en $t = 2.0$ s.

22. (II) *a*) Un esquiador acelera a 1.80 m/s² hacia abajo sobre una colina inclinada 30.0° sobre la horizontal (figura 3-39). *a*) ¿Cuál es la componente vertical de su aceleración? *b*) ¿Cuánto tiempo le tomará alcanzar el fondo de la colina, suponiendo que parte del reposo y acelera uniformemente, si el cambio de elevación es de 325 m?

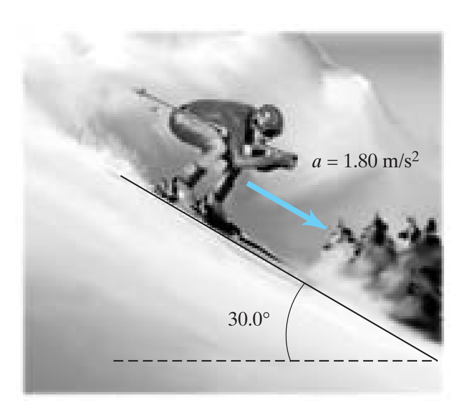


FIGURA 3–39 Problema 22.

23. (II) Una hormiga camina sobre una hoja de papel cuadriculado en línea recta a lo largo del eje *x* una distancia de 10.0 cm en 2.00 s. Luego da una vuelta a 30.0° a la izquierda y camina en línea recta otros 10.0 cm en 1.80 s. Por último da vuelta otros 70.0° hacia la izquierda y camina otros 10.0 cm más en 1.55 s. Determine *a*) las componentes *x* y *y* de la velocidad promedio de la hormiga, y *b*) su magnitud, dirección y sentido.

24. (II) Una partícula parte del origen en $t = 0$ con una velocidad inicial de 5.0 m/s a lo largo del eje *x* positivo. Si la aceleración es $(-3.0\hat{\mathbf{i}} + 4.5\hat{\mathbf{j}})$ m/s², determine la velocidad y la posición de la partícula en el momento en que ésta alcanza su coordenada *x* máxima.

25. (II) Suponga que la posición de un objeto está dada por $\vec{\mathbf{r}} = (3.0\,t^2\hat{\mathbf{i}} - 6.0\,t^3\hat{\mathbf{j}})$ m. *a*) Determine su velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ y su aceleración $\vec{\mathbf{a}}$, como función del tiempo. *b*) determine $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ en $t = 2.5$ s.

26. (II) Un objeto, que se encuentra en el origen en $t = 0$, tiene una velocidad inicial $\vec{\mathbf{v}}_0 = (-14.0\hat{\mathbf{i}} - 7.0\hat{\mathbf{j}})$ m/s y una aceleración constante $\vec{\mathbf{a}} = (6.0\hat{\mathbf{i}} + 3.0\hat{\mathbf{j}})$ m/s². Encuentre el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}$ donde el objeto llega al reposo (momentáneamente).

27. (II) La posición de una partícula como una función del tiempo t está dada por $\vec{\mathbf{r}} = (5.0\,t + 6.0\,t^2)\,\mathrm{m}\,\hat{\mathbf{i}} + (7.0 - 3.0\,t^3)\,\mathrm{m}\,\hat{\mathbf{j}}$. Cuando $t = 5.0$ s, encuentre la magnitud, dirección y sentido del vector desplazamiento de la partícula $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ con respecto al punto $\vec{\mathbf{r}}_0 = (0.0\hat{\mathbf{i}} + 7.0\hat{\mathbf{j}})$ m.

3–7 y 3–8 Movimiento de proyectiles (desprecie la resistencia del aire)

28. (I) Un tigre salta horizontalmente desde una roca de 7.5 m de altura, con una rapidez de 3.2 m/s. ¿Qué tan lejos de la base de la roca caerá al suelo?

29. (I) Un clavadista corre a 2.3 m/s y se lanza horizontalmente desde el borde de un acantilado vertical y toca el agua 3.0 s después. ¿Qué tan alto es el acantilado y qué tan lejos de la base del acantilado golpea el agua el clavadista?

30. (II) Determine qué tan alto puede saltar un ser humano en la Luna, en comparación con la Tierra, si la rapidez de despegue y el ángulo inicial son los mismos. La aceleración de la gravedad en la Luna es un sexto de la que hay en la Tierra.

31. (II) Una manguera contra incendios mantenida cerca del suelo lanza agua con una rapidez de 6.5 m/s. ¿Con qué ángulo(s) debe apuntar la boquilla (tobera), para que el agua llegue a 2.5 m de distancia (figura 3-40)? ¿Por qué hay dos ángulos diferentes? Dibuje las dos trayectorias posibles.

FIGURA 3–40 Problema 31.

32. (II) Una pelota se lanza horizontalmente desde el techo de un edificio de 9.0 m de altura y cae a 9.5 m de la base del edificio. ¿Cuál fue la rapidez inicial de la pelota?

33. (II) Un balón de fútbol se patea al nivel del suelo y sale con una rapidez de 18.0 m/s formando un ángulo de 38.0° con respecto a la horizontal. ¿Cuánto tiempo tarda el balón en regresar al suelo?

34. (II) Una pelota lanzada horizontalmente a 23.7 m/s desde el techo de un edificio cae a 31.0 m de la base del edificio. ¿Qué tan alto es el edificio?

35. (II) Un atleta olímpico lanza la bala (de masa = 7.3 kg) con una rapidez inicial de 14.4 m/s a un ángulo de 34.0° con respecto a la horizontal. Calcule la distancia horizontal recorrida por la bala, si ésta sale de la mano del atleta a una altura de 2.10 m por arriba del suelo.

36. (II) Demuestre que el tiempo requerido para que un proyectil alcance su punto más alto es igual al tiempo necesario para que retorne a su altura original (desprecie la resistencia del aire).

37. (II) Usted compra una pistola de dardos de plástico y, como es un inteligente estudiante de física, decide hacer un cálculo rápido para encontrar su alcance horizontal máximo. Dispara la pistola en línea recta hacia arriba y el dardo tarda 4.0 s en regresar al cañón. ¿Cuál es el alcance horizontal máximo de la pistola?

38. (II) Se batea una pelota de béisbol de modo que sale disparada con una rapidez de 27.0 m/s a un ángulo de 45.0°. La pelota cae sobre el techo plano de un edificio cercano de 13.0 m de altura. Si la pelota fue bateada cuando estaba a 1.0 m del suelo, ¿qué distancia horizontal viaja la pelota antes de caer sobre el edificio?

39. (II) En el ejemplo 3-11 elegimos el eje x hacia la derecha y el eje y hacia arriba. Vuelva a resolver este problema definiendo el eje x hacia la izquierda y el eje y hacia abajo, y demuestre que la conclusión sigue siendo la misma: es decir, el balón de fútbol cae al suelo 40.5 m a la derecha del pie del jugador que la despejó.

40. (II) Un saltamontes salta a lo largo de un camino horizontal. En cada salto, el saltamontes brinca a un ángulo $\theta_0 = 45°$ y tiene un alcance $R = 1.0$ m. ¿Cuál es la rapidez horizontal promedio del saltamontes conforme avanza por el camino? Ignore los intervalos de tiempo en los que el saltamontes está en el suelo entre un salto y otro.

41. (II) Aficionados a los deportes extremos saltan desde lo alto de "El Capitán", un escarpado acantilado de granito de 910 m de altura en el Parque Nacional de Yosemite. Suponga que una saltadora corre horizontalmente desde la cima de El Capitán con una rapidez de 5.0 m/s y, al saltar, disfruta de una caída libre hasta que está a 150 m encima del suelo del valle; y en ese momento abre su paracaídas (figura 3-41). *a*) ¿Durante cuánto tiempo la saltadora va en caída libre? Ignore la resistencia del aire. *b*) Es importante estar tan lejos del acantilado como sea posible antes de abrir el paracaídas. ¿Qué tan lejos del risco está la saltadora cuando abre su paracaídas?

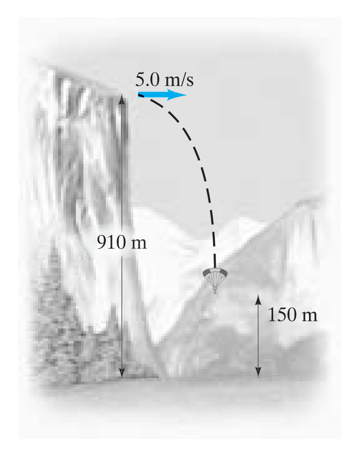


FIGURA 3–41 Problema 41.

42. (II) Veamos algo que puede intentarse en un evento deportivo. Demuestre que la altura máxima h que alcanza un objeto proyectado en el aire, como una pelota de béisbol o un balón de fútbol, está dada aproximadamente por

$$h \approx 1.2\,t^2\,\mathrm{m},$$

donde t es el tiempo total de vuelo del objeto en segundos. Suponga que el objeto regresa al mismo nivel desde el cual fue lanzado, como en la figura 3-42. Por ejemplo, si usted toma el tiempo y encuentra que la pelota de béisbol estuvo en el aire un tiempo $t = 5.0$ s, la altura máxima alcanzada será $h = 1.2 \times (5.0)^2 = 30$ m. La belleza de esta relación es que h puede determinarse sin conocer la rapidez de lanzamiento v_0 o el ángulo de lanzamiento θ_0.

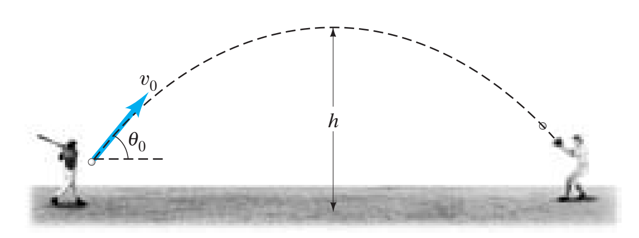


FIGURA 3–42 Problema 42.

43. (II) El piloto de un avión que viaja horizontalmente a 170 km/h quiere lanzar suministros a las víctimas de una inundación, que están aisladas en una porción de terreno situada a 150 m abajo. ¿Cuántos segundos antes de que el avión esté directamente sobre las víctimas deben dejarse caer los suministros?

44. (II) *a*) Una atleta que practica salto de longitud deja el suelo a 45° por arriba de la horizontal y cae a 8.0 m de distancia. ¿Cuál es su rapidez de "despegue" v_0? *b*) Ahora la atleta emprende una caminata y llega a la ribera izquierda de un río. No hay puente y la orilla derecha del río está a 10.0 m de distancia horizontal y a 2.5 m de distancia vertical hacia abajo. Si la atleta salta desde la orilla de la ribera izquierda a 45° con la rapidez calculada en el inciso *a*), ¿qué tan lejos o qué tan cerca de la ribera opuesta caerá (figura 3-43)?

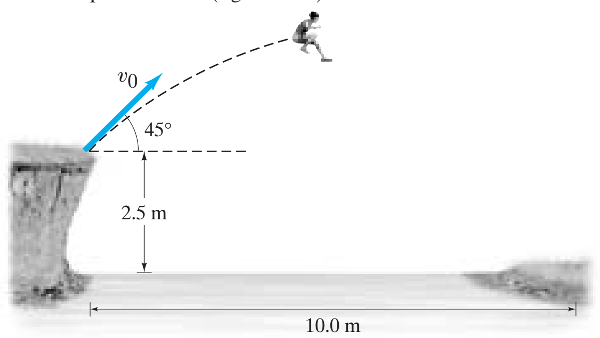


FIGURA 3–43 Problema 44.

45. (II) Una clavadista sale del extremo de un trampolín de 5.00 m de altura y golpea el agua 1.3 s después, 3.0 m más allá del final del trampolín. Si se considera a la clavadista como una partícula, determine: *a*) su velocidad inicial, $\vec{\mathbf{v}}_0$; *b*) la altura máxima que alcanza, y *c*) la velocidad $\vec{\mathbf{v}}_f$ con la que entra al agua.

46. (II) Se dispara un proyectil desde el borde de un acantilado, que está a 115 m arriba del nivel del suelo, con una rapidez inicial de 65.0 m/s a un ángulo de 35.0° sobre la horizontal, como se muestra en la figura 3-44. *a*) Determine el tiempo que le toma al proyectil llegar al punto P a nivel del suelo. *b*) Determine la distancia horizontal *X* desde el punto P hasta la base del acantilado. En el instante justo antes de que el proyectil llegue al punto P, encuentre *c*) las componentes horizontal y vertical de su velocidad, *d*) la magnitud de la velocidad, y *e*) el ángulo formado por el vector velocidad con la horizontal. *f*) Determine la altura máxima, por arriba de la parte superior del acantilado, que alcanza el proyectil.

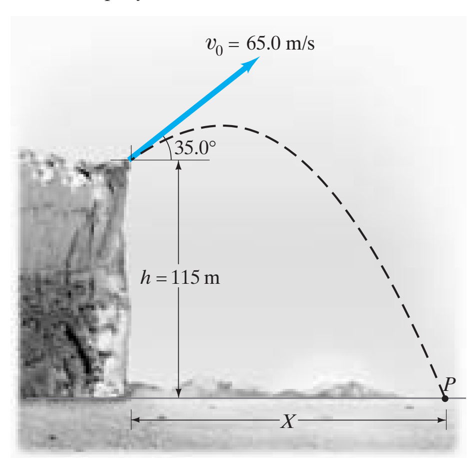


FIGURA 3–44 Problema 46.

47. (II) Suponga que la patada en el ejemplo 3-7 se intenta a 36.0 m de los postes de gol de campo, cuyo travesaño está a una altura de 3.00 m del suelo. Si el balón va dirigido exactamente entre los postes, ¿pasará sobre el travesaño y será gol de campo? Muestre por qué sí o por qué no. Si es no, ¿desde qué distancia horizontal mínima debe patearse el balón para anotar el gol de campo?

48. (II) Exactamente 3.0 s después de que se dispara un proyectil al aire desde el suelo, se observa que tiene una velocidad $\vec{\mathbf{v}} = (8.6\hat{\mathbf{i}} + 4.8\hat{\mathbf{j}})\,\mathrm{m/s}$, donde el eje *x* es positivo a la derecha y el eje *y* es positivo hacia arriba. Determine *a*) el alcance horizontal del proyectil, *b*) su altura máxima sobre el suelo y *c*) su rapidez y ángulo de movimiento justo antes de golpear en el suelo.

49. (II) Resuelva de nuevo el ejemplo 3-9 suponiendo ahora que el niño con la resortera está justo *debajo* del niño en el árbol (figura 3-45), por lo que apunta *hacia arriba,* directamente hacia el niño en el árbol. Demuestre que el niño en el árbol hace nuevamente un movimiento equivocado al dejarse caer en el momento en que se dispara el globo de agua.

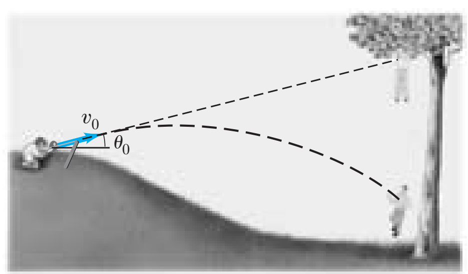


FIGURA 3–45 Problema 49.

50. (II) Un atrevido conductor de autos quiere saltar con su vehículo sobre 8 autos estacionados lado a lado debajo de una rampa horizontal (figura 3-46). *a*) ¿Con qué rapidez mínima debe salir de la rampa horizontal? La distancia vertical de la rampa es de 1.5 m sobre los autos, y la distancia horizontal que debe librarse es de 22 m. *b*) ¿Cuál es la rapidez mínima necesaria si ahora la rampa está inclinada hacia arriba, de manera que el "ángulo de despegue" es de 7.0° por arriba de la horizontal?

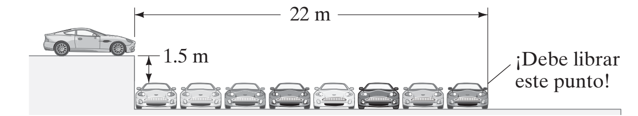


FIGURA 3–46 Problema 50.

51. (II) Una pelota se lanza horizontalmente desde la parte superior de un acantilado, con rapidez inicial v_0 (en $t = 0$). En un momento dado, su vector velocidad forma un ángulo θ con la horizontal (figura 3-47). Obtenga una fórmula para el ángulo θ en función del tiempo *t* si la pelota describe la trayectoria de un proyectil.

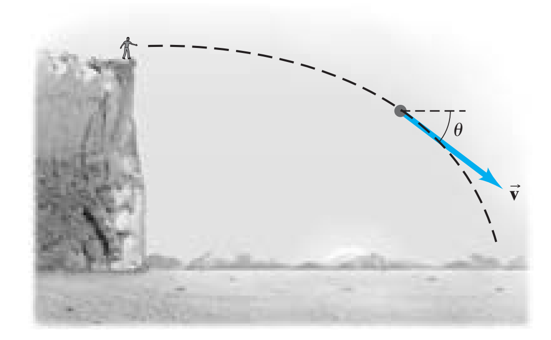


FIGURA 3–47 Problema 51.

52. (II) ¿Con qué ángulo de proyección el alcance de un proyectil será igual a su altura máxima?

53. (II) Se dispara un proyectil con una rapidez inicial de 46.6 m/s a un ángulo de 42.2° por arriba de la horizontal, sobre un terreno de pruebas largo y plano. Determine *a*) la altura máxima alcanzada por el proyectil, *b*) el tiempo total de vuelo del proyectil, *c*) la distancia horizontal total que recorre (es decir, su alcance) y *d*) la velocidad del proyectil (magnitud y dirección) 1.50 s después del disparo.

54. (II) Un atleta de salto de longitud salta a un ángulo de 27.0° y cae a 7.80 m de distancia. *a*) ¿Cuál fue la rapidez de despegue? *b*) Si esta rapidez se incrementara tan sólo en un 5.0%, ¿por cuánto será el salto más largo?

55. (III) Una persona está parada en la base de una colina, que es un plano inclinado recto y forma un ángulo ϕ con la horizontal (figura 3-48). Para una rapidez inicial dada v_0, ¿a qué ángulo θ (con respecto a la horizontal) debería lanzarse un objeto, de manera que la distancia d a la que cae en la colina sea la máxima posible?

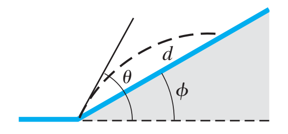


FIGURA 3–48 Problema 55. Dados ϕ y v_0, determine θ para que d sea máxima.

56. (III) Obtenga una fórmula para el alcance horizontal R de un proyectil, cuando éste cae a una altura h arriba de su punto inicial. (Para $h < 0$, el proyectil aterriza a una distancia $-h$ debajo del punto inicial.) Suponga que se dispara a un ángulo θ_0 con una rapidez inicial v_0.

3–9 Velocidad relativa

57. (I) Una persona que sale a trotar por la mañana en la cubierta de un barco corre hacia la proa (hacia el frente) de la nave a 2.0 m/s, mientras que el barco se mueve hacia delante a 8.5 m/s. ¿Cuál es la velocidad del individuo que trota relativa al agua? Más tarde, el trotador se mueve hacia la popa (hacia atrás) del barco. ¿Cuál es ahora la velocidad del individuo respecto del agua?

58. (I) Huck Finn camina con una rapidez de 0.70 m/s respecto de su balsa de manera perpendicular al movimiento de la balsa respecto de la orilla (figura 3-49). Si la balsa viaja por el río Mississippi con una rapidez de 1.50 m/s respecto de la orilla del río. ¿Cuál es la velocidad de Huck (magnitud, dirección y sentido) respecto de la orilla río?



FIGURA 3–49 Problema 58.

59. (II) Determine la rapidez del bote con respecto a la orilla en el ejemplo 3-14.

60. (II) Dos aviones se aproximan frontalmente entre sí. Cada uno tiene una rapidez de 780 km/h y divisa al otro cuando están inicialmente a 12.0 km de distancia. ¿Cuánto tiempo tienen los pilotos para efectuar una maniobra evasiva?

61. (II) Un niño que está a 45 m del banco de un río es arrastrado peligrosamente río abajo por la rápida corriente de 1.0 m/s. Cuando el niño pasa en frente de una salvavidas que está en la orilla del río, la salvavidas empieza a nadar en línea recta hasta que alcanza al niño en un punto río abajo (figura 3.50). Si la salvavidas puede nadar a una rapidez de 2.0 m/s relativa al agua, ¿cuanto tiempo le tomará alcanzar al niño? ¿Qué tan lejos corriente abajo interceptará la salvavidas al niño?

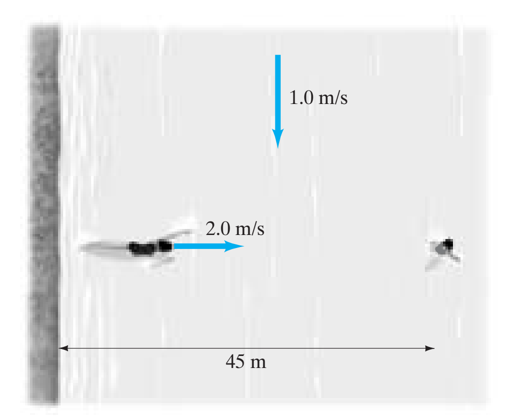


FIGURA 3–50 Problema 61.

62. (II) Un pasajero en un barco que se mueve a 1.70 m/s en un lago tranquilo sube por la escalera del barco con rapidez de 0.60 m/s, figura 3-51. La escalera está a 45° y apunta en la dirección del movimiento del barco como se indica en la figura. ¿Cuál es la velocidad del pasajero con respecto al agua?

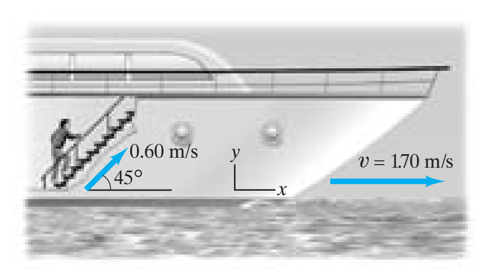


FIGURA 3–51 Problema 62.

63. (II) Una persona en la canastilla de pasajeros de un globo aerostático lanza una pelota horizontalmente hacia afuera de la canastilla con una rapidez inicial de 10.0 m/s (figura 3-52). ¿Cuál es la velocidad inicial (magnitud y dirección) de la pelota medida por una persona que está de pie sobre el suelo, *a*) si el globo aerostático se eleva a 5.0 m/s respecto del piso durante este lanzamiento, *b*) si el globo desciende a 5.0 m/s respecto del piso?

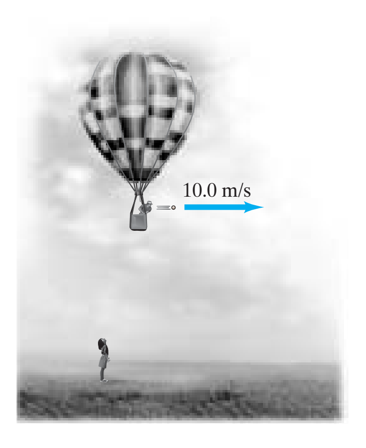


FIGURA 3–52 Problema 63.

64. (II) Un avión vuela rumbo al sur con una rapidez de 580 km/h. Si empieza a soplar un viento desde el suroeste con rapidez de 90.0 km/h (en promedio), calcule: *a*) la velocidad (magnitud, dirección y sentido) del avión con respecto al suelo, y *b*) ¿cuánto se habrá desviado de su curso original después de 11.0 min, si el piloto no toma una acción correctiva? [*Sugerencia*: Dibuje primero un diagrama].

65. (II) ¿En qué dirección deberá conducir el piloto al avión del problema 64, de manera que vuele efectivamente hacia el sur?

66. (II) Dos automóviles se acercan a una esquina en ángulos rectos entre sí (véase la figura 3-35). El automóvil 1 viaja a 35 km/h y el automóvil 2 a 45 km/h. ¿Cuál es la velocidad relativa del automóvil 1 vista por el automóvil 2? ¿Cuál es la velocidad del automóvil 2 respecto al automóvil 1?

67. (II) Una nadadora es capaz de nadar a 0.60 m/s en aguas tranquilas. *a*) Si se dirige directamente a través de un río de 55 m de ancho, cuya corriente es de 0.50 m/s, ¿qué tan lejos aguas abajo (desde un punto opuesto al punto de partida) alcanzará la orilla? *b*) ¿Cuánto tiempo le tomará llegar al lado opuesto?

68. (II) *a*) ¿A qué ángulo aguas arriba debe apuntar la nadadora del problema 67 para llegar al punto directamente enfrente del otro lado de la corriente? *b*) ¿Cuánto tiempo le llevará?

69. (II) Un bote de motor cuya rapidez en aguas tranquilas es de 3.40 m/s debe apuntar aguas arriba con un ángulo de 19.5° (con respecto a una línea perpendicular a la orilla), para navegar directamente a través de la orilla. *a*) ¿Cuál es la rapidez de la corriente? *b*) ¿Cuál es la rapidez resultante del bote con respecto a la orilla? (Véase la figura 3-31).

70. (II) Un bote, cuya rapidez en aguas tranquilas es de 2.70 m/s, debe cruzar un río de 280 m de ancho, y llegar a un punto a 120 m aguas arriba de su punto de partida (figura 3-53). Para lograrlo, el piloto debe dirigir el bote a 45.0° aguas arriba. ¿Cuál es la rapidez de la corriente del río?

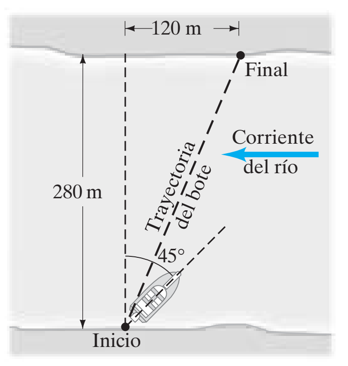


FIGURA 3–53
Problema 70.

71. (III) Un avión, cuya velocidad con respecto al aire es de 580 km/h, debe volar en una trayectoria recta a 38.0° hacia el noreste. Sin embargo, un viento estable de 72 km/h está soplando desde el norte. ¿En qué dirección debería dirigirse el avión?

Problemas generales

72. Dos vectores, $\vec{\mathbf{V}}_1$ y $\vec{\mathbf{V}}_2$, se suman y dan la resultante $\vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{V}}_1 + \vec{\mathbf{V}}_2$. Describa $\vec{\mathbf{V}}_1$ y $\vec{\mathbf{V}}_2$ si *a*) $V = V_1 + V_2$, *b*) $V^2 = V_1^2 + V_2^2$, *c*) $V_1 + V_2 = V_1 - V_2$.

73. Un fontanero (plomero) baja de su camión, camina 66 m hacia el este y 35 m hacia el sur, y luego toma un elevador 12 m hacia el sótano de un edificio, donde hay una intensa fuga de agua. ¿Cuál es el desplazamiento del fontanero con respecto a su camión? Dé su respuesta en componentes y también en notación de magnitud y ángulo, con respecto al eje x en los planos horizontal y vertical. Suponga que el eje x es hacia el este, el eje y hacia el norte, y el eje z hacia arriba.

74. En caminos montañosos con pendientes descendentes, a veces se construyen desviaciones al lado de la carretera, para los camiones cuyos frenos podrían fallar. Suponiendo una pendiente constante hacia arriba de 26°, calcule las componentes horizontal y vertical de la aceleración de un camión que desaceleró de 110 km/h al reposo en 7.0 s. Véase la figura 3-54.

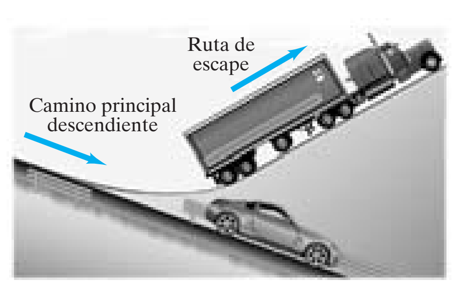


FIGURA 3–54
Problema 74.

75. Una avioneta se dirige hacia el sur con velocidad de 185 km/h respecto del aire. Después de 1.00 h, el piloto se da cuenta de que la avioneta ha viajado sólo 135 km y su dirección no es al sur sino al sureste (45.0°). ¿Cuál es la velocidad del viento?

76. Un atleta olímpico de salto de distancia es capaz de saltar 8.0 m. Suponiendo que su rapidez horizontal es de 9.1 m/s cuando abandona el terreno, ¿qué tiempo está en el aire y qué altura alcanza? Suponga que cae parado, es decir, de la misma manera en que abandonó el terreno.

77. Romeo está lanzando guijarros suavemente hacia a la ventana de Julieta y quiere que los guijarros golpeen la ventana con una velocidad sólo con componente horizontal. Él está parado en el borde de un jardín de rosas a 8.0 m por debajo de la ventana y a 9.0 m de la base del muro (figura 3-55). ¿Qué tan rápido viajan los guijarros cuando golpean la ventana?

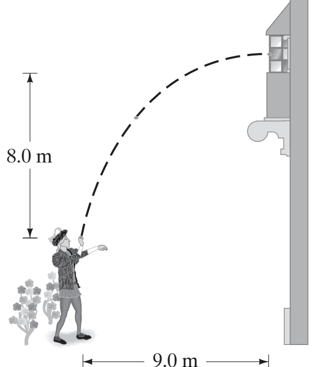


FIGURA 3–55
Problema 77.

78. Las gotas de lluvia forman un ángulo θ con la vertical cuando se ven a través de la ventana de un tren en movimiento (figura 3-56). Si la rapidez del tren es v_T, ¿cuál será la rapidez de las gotas de lluvia en el marco de referencia de la Tierra donde se supone que caen verticalmente?



FIGURA 3–56
Problema 78.

79. Los astronautas del Apolo llevaron un "hierro nueve" a la Luna y golpearon una pelota de golf que recorrió una distancia aproximada de 180 m. Suponiendo que la oscilación del golpe, el ángulo de lanzamiento, etcétera, fueron igual que en la Tierra, en donde el mismo astronauta podía desplazarla sólo 32 m, estime la aceleración de la gravedad sobre la superficie de la Luna. (Despreciamos la resistencia del aire en ambos casos, lo cual es correcto en el caso de la Luna).

80. Un cazador apunta directamente hacia un blanco (al mismo nivel) situado a 68.0 m de distancia horizontal. *a*) Si la bala sale del arma con una rapidez de 175 m/s, ¿por cuánta distancia no dará en el blanco? *b*) ¿Con qué ángulo debería apuntar el cazador para dar en el blanco?

81. Los clavadistas de la "quebrada de Acapulco" se lanzan horizontalmente desde una plataforma rocosa, que está aproximadamente a 35 m sobre el agua; sin embargo, ellos deben librar protuberancias rocosas al nivel del mar, que se extienden hasta 5.0 m desde la base del acantilado directamente debajo su punto de lanzamiento. Véase la figura 3-57. ¿Qué rapidez mínima inicial es necesaria para lograrlo? ¿Cuánto tiempo permanecen en el aire?

35 m

5.0 m

FIGURA 3–57
Problema 81.

82. *Babe Ruth* pegó un jonrón sobre una barda de 8.0 m de altura a 98 m de distancia desde el *home*, ¿cuál era la rapidez mínima aproximada de la pelota al salir del bate? Considere que la pelota fue golpeada 1.0 m arriba del terreno y que su trayectoria formó inicialmente un ángulo de 36° con el suelo.

83. La rapidez de un bote en aguas tranquilas es v. El bote va a efectuar un viaje redondo en un río cuya corriente viaja con rapidez u. Obtenga una fórmula para el tiempo requerido para efectuar un viaje redondo de distancia total D, si el bote hace el viaje redondo moviéndose *a*) aguas arriba y aguas abajo de regreso, y *b*) directamente a través del río y de regreso. Debemos suponer $u < v$; ¿por qué?

84. Al servir, un jugador de tenis golpea la pelota horizontalmente. ¿Qué velocidad mínima se requiere para que la pelota libre la red de 0.90 m de alto situada aproximadamente a 15.0 m de la posición de servicio, si se "dispara" desde una altura de 2.50 m? ¿Dónde golpeará el suelo la pelota si ésta apenas pasa la red (y el "saque es bueno", en el sentido de que golpeará el suelo dentro de los 7.0 m desde la red)? ¿Qué tiempo estará la pelota en el aire? Véase la figura 3-58.

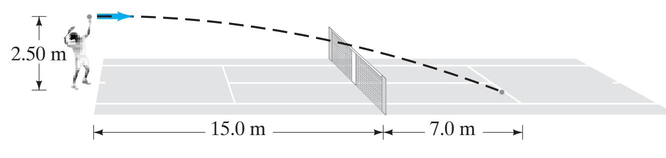


FIGURA 3–58 Problema 84.

85. La espía secreta Chris está volando horizontalmente con una rapidez constante de 208 km/h (respecto de Tierra) en un helicóptero a baja altura, y desea arrojar documentos secretos hacia el automóvil descapotado de su contacto, que viaja a 156 km/h sobre una carretera horizontal a 78.0 m debajo del helicóptero. ¿A qué ángulo (con respecto a la horizontal) debería estar el automóvil en su campo visual al dejar caer el paquete para lograr su objetivo (véase la figura 3-59)?

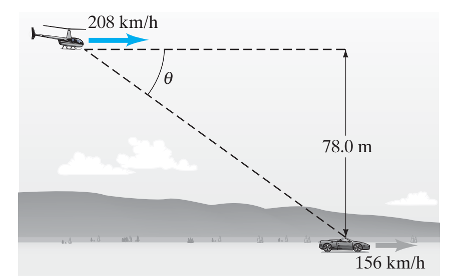


FIGURA 3–59
Problema 85.

86. Una pelota de básquetbol sale de las manos de un jugador a una altura de 2.10 m sobre el piso. La canasta está a 3.05 m arriba del piso. El jugador lanza la pelota con un ángulo de 38.0°. Si el lanzamiento se hace desde una distancia horizontal de 11.00 m y debe ser exacto dentro de una precisión de ±0.22 m (horizontalmente), ¿cuál es el rango de las rapideces iniciales posibles para ensartar la pelota en la canasta?

87. Una partícula tiene una velocidad de $\vec{\mathbf{v}} = \left(-2.0\hat{\mathbf{i}} + 3.5t\hat{\mathbf{j}}\right)\mathrm{m/s}$. La partícula inicia en $\vec{\mathbf{r}} = \left(1.5\hat{\mathbf{i}} - 3.1\hat{\mathbf{j}}\right)\mathrm{m}$ en $t = 0$. Determine la posición y la aceleración de la partícula como función del tiempo. ¿Cuál será la forma de la trayectoria resultante?

88. Se lanza un proyectil desde el nivel del suelo hacia la parte superior de un acantilado, que se encuentra a una distancia horizontal de 195 m y que tiene una altura de 135 m (véase la figura 3-60). Si el proyectil cae en la parte superior del acantilado 6.6 s después de que se dispara, encuentre la velocidad inicial del proyectil (magnitud, dirección y sentido). Desprecie la resistencia del aire.

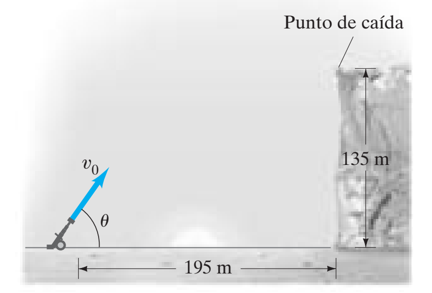


FIGURA 3–60
Problema 88.

89. En una persecución intensa, el agente Logan del FBI debe cruzar directamente un río de 1200 m de ancho en un tiempo mínimo. La corriente del río viaja a 0.80 m/s, él puede remar un bote a 1.60 m/s y puede correr a 3.00 m/s. Describa la trayectoria que debe tomar (al remar y al correr a lo largo de la orilla) para cruzar en el tiempo mínimo y determine este tiempo mínimo.

90. Una embarcación puede viajar a 2.20 m/s en aguas tranquilas. *a*) Si la embarcación apunta su proa directamente a través de una corriente que viaja a 1.30 m/s, ¿cuál es la velocidad (magnitud, dirección y sentido) de la embarcación con respecto a la orilla? *b*) ¿Cuál será la posición de la embarcación, en relación con su punto de partida, después de 3.00 s?

91. Una embarcación viaja por un río donde hay una corriente de 0.20 m/s hacia el este (figura 3-61). Para evadir unas rocas a cierta distancia de la orilla, la embarcación debe salvar una boya que está en dirección NNE (22.5°) y a 3.0 km de distancia de la embarcación. La rapidez de la embarcación en aguas tranquilas es de 2.1 m/s. Si se desea que la embarcación pase a 0.15 km a la derecha de la boya, ¿a qué ángulo debería dirigirse?

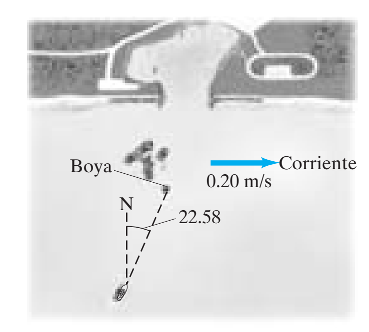


FIGURA 3–61
Problema 91.

92. Un niño corre pendiente abajo en una colina inclinada 12° y de repente salta hacia arriba a un ángulo de 15° por arriba de la horizontal de modo que aterriza a 1.4 m colina abajo del punto donde saltó. ¿Cuál era la rapidez inicial del niño?

93. Un balón de básquetbol se lanza a una altura de 2.4 m (figura 3-62) con una rapidez inicial $v_0 = 12$ m/s dirigida a un ángulo $\theta_0 = 35°$ sobre la horizontal. *a*) ¿A qué distancia de la canasta estaba el jugador si logró anotar? *b*) ¿Con qué ángulo con respecto a la horizontal entró el balón en la canasta?

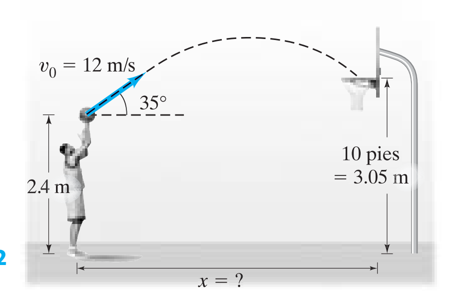


FIGURA 3–62
Problema 93.

94. Usted conduce hacia el sur en una autopista a 25 m/s (aproximadamente a 55 mi/h) durante una tormenta de nieve. Al detenerse, nota que la nieve cae verticalmente, pero cuando el auto está en movimiento nota que la nieve pasa la ventanilla a un ángulo de 37° con respecto a la horizontal. Estime la rapidez de los copos de nieve con respecto al automóvil y con respecto al suelo.

95. Se patea una piedra horizontalmente a 15 m/s desde una colina con una pendiente a 45° (figura 3-63). ¿Cuánto tiempo tarda la piedra en caer al suelo?

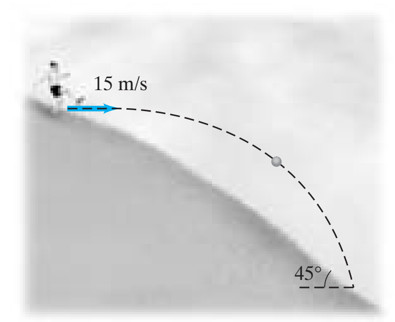


FIGURA 3–63
Problem 95.

96. Un bateador golpea una pelota que deja de hacer contacto con el bat a 0.90 m por encima del suelo y sale disparada a un ángulo de 61° con una rapidez inicial de 28 m/s apuntando hacia el jardín central. Ignore la resistencia del aire. *a*) ¿Qué tan lejos del *home* caerá la pelota si no la atrapan? *b*) La pelota es atrapada por el jardinero central, quien —empezando a una distancia de 105 m desde el *home*— corre directo hacia el *home* a una rapidez constante y hace la atrapada al nivel del suelo. Encuentre la rapidez de este jardinero.

97. Una bola se lanza desde lo alto de un edificio con una velocidad inicial de 18 m/s a un ángulo $\theta = 42°$ sobre la horizontal. *a*) ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial? *b*) Si un edificio cercano está a la misma altura y a 55 m de distancia horizontal, ¿a qué distancia por debajo de la parte superior de ese edificio golpeará la bola?

98. En $t = 0$, un jugador batea una pelota de béisbol con una rapidez inicial de 28 m/s a un ángulo de 55° con respecto a la horizontal. Un jardinero está a 85 m del bateador en $t = 0$ y, como se ve desde *home*, la línea de visión hacia el jardinero forma un ángulo horizontal de 22° con el plano en que la pelota se mueve (véase la figura 3-64). ¿Qué rapidez y dirección debe tomar el jardinero para atrapar la pelota a la misma altura que fue bateada? Determine el ángulo con respecto a la línea de visión del jardinero hacia *home*.

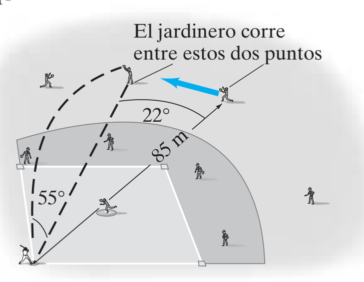


FIGURA 3–64
Problema 98.

* Problemas numéricos/por computadora

***99.** (II) Unos estudiantes lanzan horizontalmente bolas de plástico usando un *lanzaproyectiles*. Miden la distancia x que la bola recorre horizontalmente, la distancia y que la bola cae verticalmente y el tiempo total t que la bola está en el aire para seis alturas diferentes del lanzaproyectiles. Sus datos se presentan a continuación.

Tiempo, t (s)	Distancia horizontal, x (m)	Distancia vertical y (m)
0.217	0.642	0.260
0.376	1.115	0.685
0.398	1.140	0.800
0.431	1.300	0.915
0.478	1.420	1.150
0.491	1.480	1.200

a) Determine la línea recta que ajuste mejor la representación de x como función de t. ¿Cuál es la rapidez inicial de la bola obtenida a partir del ajuste anterior? *b*) Determine la ecuación cuadrática que ajuste mejor la representación de y como función de t. ¿Cuál es la aceleración de la bola en la dirección vertical?

***100.** (III) Un atleta olímpico lanza la bala desde una altura de h = 2.1 m por arriba del suelo, como se muestra en figura 3-65, con una rapidez inicial de $v_0 = 13.5$ m/s. *a*) Obtenga una relación que describa la dependencia entre la distancia horizontal recorrida d y el ángulo de lanzamiento θ_0. *b*) Usando los valores dados para v_0 y h, utilice una calculadora gráfica o una computadora para graficar d versus θ_0. Según su gráfica, ¿qué valor del ángulo θ_0 maximiza la distancia d?

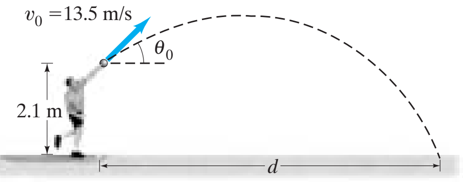


FIGURA 3–65 Problema 100.

Respuestas a los ejercicios

A: Cuando los dos vectores D_1 y D_2 apuntan en la misma dirección.

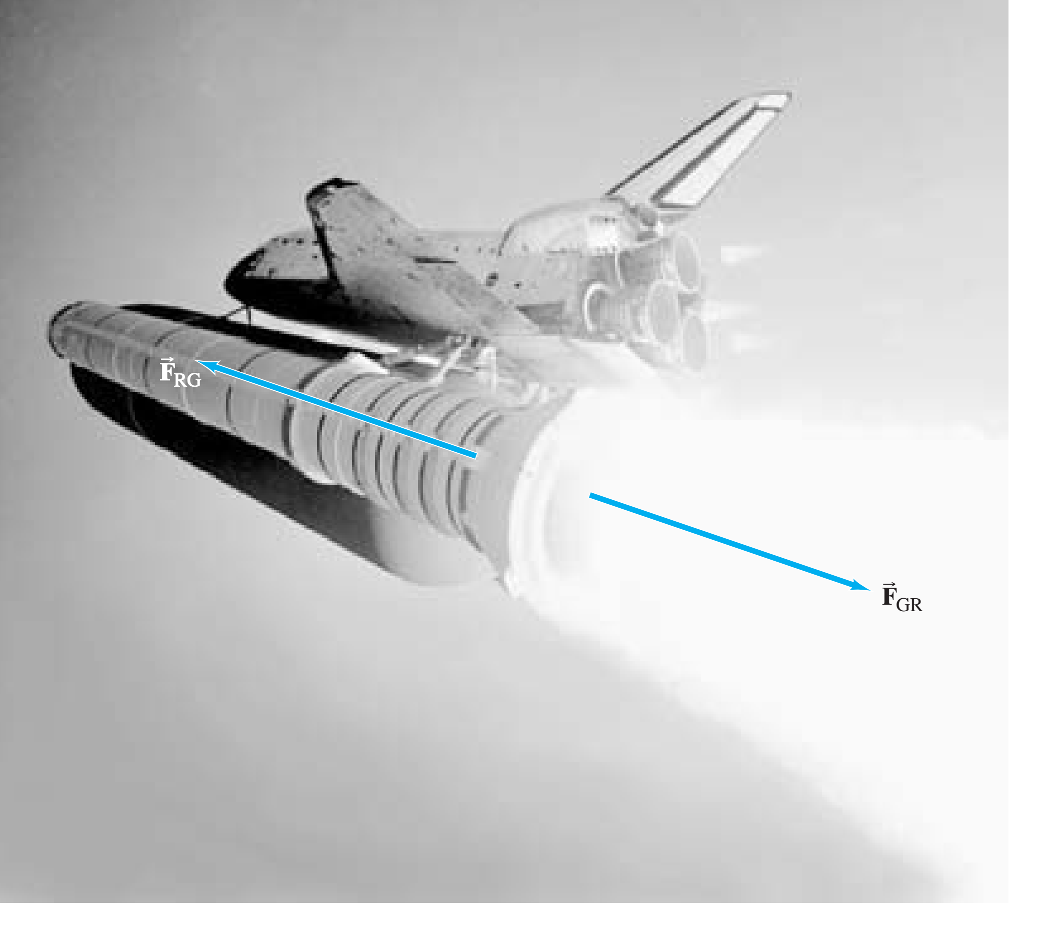
B: $3\sqrt{2} = 4.24$.

C: *a*).

D: *d*).

E: Ambas bolas alcanzan la misma altura; por lo tanto, están en el aire durante el mismo lapso de tiempo.

F: *c*).



El transbordador espacial Discovery se lanza al espacio impulsado por cohetes potentes que aceleran, aumentando rápidamente la velocidad. Para hacerlo, se debe ejercer una fuerza sobre ellos, de acuerdo con la segunda ley de Newton, $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$. ¿Qué es lo que ejerce esta fuerza? Los motores del cohete ejercen una fuerza sobre los gases que expulsan desde la parte posterior de los cohetes (marcada como $\vec{\mathbf{F}}_{GR}$). De acuerdo con la tercera ley de Newton, los gases expulsados ejercen a su vez una fuerza de igual magnitud y dirección pero de sentido opuesto sobre los cohetes en dirección hacia el frente. Esta fuerza "de reacción" ejercida por los gases sobre los cohetes, designada $\vec{\mathbf{F}}_{RG}$, es la que acelera a los cohetes hacia adelante.



Dinámica: Leyes de Newton del movimiento

PREGUNTAS DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine qué!

Un jugador de fútbol de 150 kg de masa se estrella de frente contra un corredor de 75 kg. Durante el choque, el jugador más pesado ejerce una fuerza de magnitud F_A sobre el jugador más ligero. Si el jugador más ligero ejerce una fuerza de F_B sobre el jugador más pesado, ¿cuál es la respuesta correcta?

a) $F_B = F_A$.
b) $F_B < F_A$.
c) $F_B > F_A$.
d) $F_B = 0$.
e) Necesitamos más información.

Segunda pregunta:

Un verso del poeta T. S. Eliot (de *Murder in the Cathedral*) reza que la mujer de Canterbury dice: "la tierra empuja nuestros pies hacia arriba". ¿De qué fuerza se trata?

a) Gravedad.
b) La fuerza normal.
c) Una fuerza de fricción.
d) La fuerza centrífuga.
e) Ninguna fuerza; es sólo poesía.

CONTENIDO

Hemos visto *cómo* describir el movimiento en términos de velocidad y aceleración. Ahora trataremos el problema de *por qué* los objetos se mueven como lo hacen: ¿Qué hace que un objeto en reposo empiece a moverse? ¿Qué ocasiona que un cuerpo acelere o desacelere? ¿Qué está implícito cuando un objeto se mueve en una trayectoria curva? Podemos responder que en cada caso se requiere una fuerza. En este capítulo,† investigaremos la conexión entre fuerza y movimiento, que es el tema llamado **dinámica**.

4–1 Fuerza

Intuitivamente, experimentamos una **fuerza** como cualquier empuje o jalón sobre un objeto. Cuando usted empuja un automóvil averiado o un carrito de supermercado (figura 4-1), está ejerciendo una fuerza sobre él. Cuando un motor levanta un elevador, cuando un martillo golpea un clavo, o cuando el viento sopla sobre las hojas de un árbol, se está ejerciendo una fuerza. Por lo general llamamos a éstas *fuerzas de contacto*, porque la fuerza se ejerce cuando un objeto entra en contacto con otro. Por otro lado, decimos que un objeto cae debido a la *fuerza de la gravedad*.

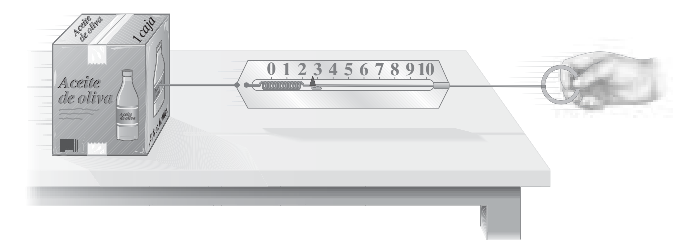


FIGURA 4–1 Una fuerza ejercida sobre un carrito de supermercado, en este caso ejercida por una persona.

Si un objeto está en reposo, para empezar a moverlo se requiere una fuerza, es decir, para acelerarlo desde una velocidad cero hasta una velocidad diferente de cero. Para el caso de un objeto que ya está en movimiento, si se quiere cambiar su velocidad —ya sea en dirección o en magnitud—, se requiere también aplicar una fuerza. En otras palabras, para acelerar un objeto se requiere siempre una fuerza. En la sección 4-4 analizaremos la relación precisa entre aceleración y fuerza neta, que se conoce como la segunda ley de Newton.

Una forma de medir la magnitud (o intensidad) de una fuerza consiste en utilizar una báscula de resorte, o dinamómetro (figura 4-2). Normalmente, dicha báscula se usa para determinar el peso de un objeto; por peso queremos decir la fuerza de gravedad que actúa sobre el objeto (sección 4-6). La báscula de resorte, una vez calibrada, se puede usar también para medir otros tipos de fuerzas, como el jalón que se ilustra en la figura 4-2.

Si una fuerza se ejerce en una dirección diferente tendrá un efecto distinto. Por lo tanto, una fuerza tiene magnitud, dirección y sentido y es, de hecho, un vector que sigue las reglas de la suma vectorial analizadas en el capítulo 3. Podemos representar cualquier fuerza con una flecha sobre un diagrama, tal como lo hicimos con la velocidad o la aceleración. El sentido de la flecha es la dirección del empuje o jalón, y su longitud se dibuja proporcional a la magnitud de la fuerza.



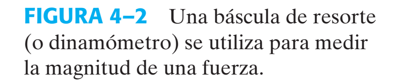


FIGURA 4–2 Una báscula de resorte (o dinamómetro) se utiliza para medir la magnitud de una fuerza.

4–2 Primera ley de Newton del movimiento

¿Cuál es la relación entre fuerza y movimiento? Aristóteles (384-322 a. C.) creía que se requería una fuerza para mantener un objeto en movimiento a lo largo de un plano horizontal. Según Aristóteles, el estado natural de un cuerpo era el reposo y creía que se necesitaba una fuerza para mantener un objeto en movimiento. Además, pensaba que cuanto mayor fuera la fuerza sobre el objeto, mayor sería su rapidez.

Aproximadamente 2000 años después, Galileo estuvo en desacuerdo con ello, y señaló que para un objeto es tan natural estar en movimiento con velocidad constante así como estar en reposo.

Para entender la noción de Galileo, considere las siguientes observaciones que implican un movimiento a lo largo de un plano horizontal. Para empujar un objeto rugoso o áspero, sobre la superficie de una mesa con rapidez constante, se requiere de cierta cantidad de fuerza. Para empujar un objeto del mismo peso pero muy liso a tra-

†Trataremos el movimiento de objetos de la vida diaria. El mundo submicroscópico de átomos y moléculas, así como el caso de velocidades extremadamente altas, cercanas a la rapidez de la luz (3.0×10^8 m/s), deben tratarse usando la teoría cuántica (capítulo 37 ff) y la teoría de la relatividad (capítulo 36), respectivamente.

vés de la mesa con la misma rapidez, se requerirá entonces una menor fuerza. Si se coloca una capa de aceite u otro lubricante entre la superficie del objeto y la mesa, entonces casi no se requerirá fuerza alguna para mover el objeto. Advierta que en cada paso sucesivo, se requiere menos fuerza. Como paso siguiente, imaginamos que el objeto no experimenta en absoluto fricción contra la mesa (se tiene así un lubricante perfecto entre el objeto y la mesa) y teorizamos que una vez iniciado el movimiento del objeto, éste se moverá sobre la mesa con rapidez constante *sin* fuerza alguna aplicada. Una esfera de acero que rueda sobre una superficie dura horizontal se aproxima a esta situación. Lo mismo sucede con un disco sobre una mesa de aire, en la cual una delgada capa de aire reduce la fricción casi a cero.

Se requirió el genio de Galileo para imaginar tal mundo idealizado; en este caso, uno donde no hubiera fricción, y saber que podría generar una noción más útil y precisa del mundo real. Fue esta idealización lo que condujo a Galileo a su sorprendente conclusión de que si no se aplica una fuerza a un objeto en movimiento, éste continuará moviéndose con rapidez constante en línea recta. Un objeto desacelera sólo si se ejerce una fuerza sobre él. De manera que Galileo interpretó la fricción como una fuerza similar un empuje o un jalón ordinarios.

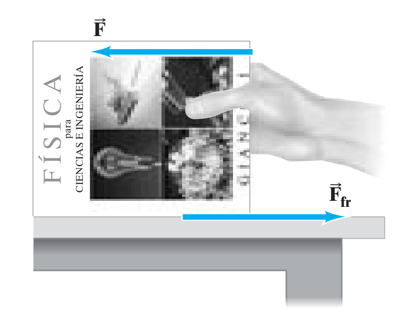


FIGURA 4–3 $\vec{\mathbf{F}}$ representa la fuerza aplicada por la persona sobre el libro y $\vec{\mathbf{F}}_{fr}$ representa la fuerza de fricción aplicada por la mesa sobre el libro.

Para empujar un objeto sobre una mesa, con rapidez constante, se requiere la fuerza de la mano para equilibrar la fuerza de fricción (figura 4-3). Cuando el objeto se mueve con rapidez constante, la fuerza de empuje sobre él es igual en magnitud a la fuerza de fricción; no obstante, esas dos fuerzas tienen sentidos opuestos, por lo que la fuerza *neta* sobre el objeto (la suma vectorial de ambas fuerzas) es cero. Esto es congruente con el punto de vista de Galileo, ya que el objeto se mueve con rapidez constante cuando ninguna fuerza neta actúa sobre él.

Isaac Newton (figura 4-4) construyó su célebre teoría del movimiento basándose en los cimientos asentados por Galileo El análisis de Newton acerca del movimiento se resume en sus famosas “tres leyes del movimiento”. En su gran obra, los *Principia* (publicada en 1687), Newton reconoció su deuda con Galileo. De hecho, **la primera ley de Newton del movimiento** está basada en las conclusiones de Galileo. Esta ley establece que:

PRIMERA LEY DE NEWTON DEL MOVIMIENTO

Todo cuerpo continúa en su estado de reposo, o con velocidad uniforme en línea recta, a menos que actúe sobre él una fuerza neta.

La tendencia de un objeto a mantener su estado de reposo o de velocidad uniforme en línea recta se llama **inercia**. Por ello, la primera ley de Newton suele llamarse también **ley de la inercia**.

FIGURA 4–4 Isaac Newton (1642–1727).



EJEMPLO CONCEPTUAL 4–1 **Primera ley de Newton.** Un autobús escolar frena bruscamente y todas las mochilas en el piso comienzan a deslizarse hacia adelante. ¿Qué fuerza provoca este deslizamiento?

RESPUESTA No es una “fuerza” lo que lo hace. De acuerdo con la primera ley de Newton, las mochilas continúan su estado de movimiento conservando su velocidad. Las mochilas desaceleran cuando se les aplica una fuerza, como lo es la fricción con el piso.

Marcos de referencia inerciales

La primera ley de Newton no es válida en cualquier marco de referencia. Por ejemplo, si su marco de referencia está fijo en un automóvil que acelera, un objeto, como una taza colocada sobre el tablero, puede comenzar a moverse hacia usted (sin embargo, la taza permanecerá en reposo en tanto que la velocidad del automóvil permanezca constante). La taza se acelera hacia usted, pero ni usted ni nadie más ejercen una fuerza sobre ella en esa dirección. Asimismo, en el marco de referencia del autobús que desacelera en el ejemplo 4-1, no había ninguna fuerza que empujara a las mochilas hacia adelante. En tal marco de referencia acelerado, no es válida la primera ley de Newton. Los marcos de referencia en los que es válida la primera ley de Newton se llaman **marcos de referencia inerciales** (es decir, la ley de la inercia es válida en ellos). Para la mayoría de los propósitos de este libro, supondremos usualmente que los marcos de referencia fijos sobre la Tierra son marcos de referencia inerciales. Estrictamente hablando, esto no es del todo cierto, debido a los movimientos de rotación y traslación de la Tierra; pero usualmente es una buena aproximación.

Cualquier marco de referencia que se mueve con velocidad constante (digamos, un automóvil o un avión) relativa a un marco de referencia inercial es también un marco de referencia inercial. Los marcos de referencia donde *no* es válida la ley de la inercia —como los marcos de referencia acelerados vistos arriba— se llaman, marcos de referencia **no inerciales**. ¿Cómo podremos estar seguros de que un marco de referencia sea inercial o no? Verificando si la primera ley de Newton se cumple en él. Así, la primera ley de Newton nos sirve para definir un el concepto de marco de referencia inercial.

4–3 Masa

La segunda ley de Newton, que estudiaremos en la siguiente sección, implica el concepto de masa. Newton usó el término *masa* como sinónimo de *cantidad de materia*. Esta noción intuitiva de la masa de un objeto no es muy precisa porque el concepto "cantidad de materia" no está muy bien definido. Con mayor precisión, podemos decir que la **masa** es una *medida de la inercia* de un objeto. Cuanto mayor sea la masa de un cuerpo, tanto mayor será la fuerza necesaria para darle una aceleración específica. A mayor masa, es más difícil empezar a mover un cuerpo desde el reposo, o detenerlo si ya se está moviendo, o cambiar su velocidad lateralmente a partir de una trayectoria en línea recta. Un camión tiene mucho más inercia que una pelota de béisbol que se mueve con la misma rapidez y se requiere una fuerza mucho mayor para cambiar la velocidad del camión a la misma razón que la de la pelota. Por lo tanto, decimos que el camión tiene una masa mucho mayor.

Para cuantificar el concepto de masa, debemos definir un estándar. En unidades del SI, la unidad de masa es el **kilogramo** (kg), como vimos en el capítulo 1, sección 1-4.

CUIDADO
Hay que distinguir entre masa y peso

Los términos *masa* y *peso* a menudo se confunden entre sí; sin embargo, en física es importante distinguir uno del otro. La masa es una propiedad del objeto mismo, es decir, es una medida de la inercia del cuerpo o de su "cantidad de materia". Por otro lado, el peso es una fuerza, es decir, el jalón de la gravedad que actúa sobre un objeto. Para entender la diferencia, supongamos que llevamos un objeto a la Luna. El objeto pesará aproximadamente sólo un sexto de lo que pesa en la Tierra, ya que la fuerza de la gravedad es más débil en la Luna; sin embargo, su masa será la misma. Tendrá la misma cantidad de materia que en la Tierra y justo la misma inercia; pues si no hay fricción, sería igualmente difícil comenzar a moverlo en la Tierra o en la Luna, o detenerlo una vez que se esté moviendo. (Veremos más sobre el peso en la sección 4-6).

4–4 Segunda ley de Newton del movimiento



FIGURA 4–5 El trineo acelera porque el equipo ejerce una fuerza.

La primera ley de Newton establece que si ninguna fuerza neta actúa sobre un objeto en reposo, éste permanecerá en reposo; o si el objeto está en movimiento, continuará moviéndose con rapidez constante en línea recta. Pero, ¿qué ocurre si una fuerza neta *se* ejerce sobre un objeto? Newton percibió que la velocidad del objeto cambiaría (figura 4-5). Una fuerza neta ejercida sobre un objeto puede incrementar su rapidez; o si la fuerza neta tiene un sentido opuesto al movimiento, la fuerza reducirá la velocidad del objeto. Si la fuerza neta actúa lateralmente sobre un objeto en movimiento, la *dirección* de la velocidad cambiará (y quizá también la magnitud). Ya que un cambio en la velocidad es una aceleración (sección 2-4), decimos que *una fuerza neta produce una aceleración*.

¿Cuál es precisamente la relación entre aceleración y fuerza? La experiencia cotidiana puede responder esta pregunta. Considere la fuerza requerida para empujar un carrito cuya fricción es tan pequeña que se desprecia. (Si hay fricción, considere la fuerza *neta*, que es la fuerza que usted ejerce menos la fuerza de fricción.) Si usted empuja el carro con una fuerza ligera pero constante, durante cierto periodo, el carro acelerará desde el reposo hasta cierta rapidez, digamos, 3 km/h. Si empuja con el doble de la fuerza, verá que el carro alcanza los 3 km/h en la mitad del tiempo. Es decir, la aceleración será del doble. Si se triplica la fuerza, la aceleración también se triplicará, y así sucesivamente. Entonces, la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta aplicada. Pero la aceleración depende también de la masa del objeto. Si usted empuja un carrito de supermercado vacío con la misma fuerza con que empuja uno que está lleno de comestibles, encontrará que el carrito lleno acelerará más lentamente. Cuanto mayor sea la masa, menor será la aceleración para la misma fuerza neta. La relación matemática, como lo indicó Newton, establece que la aceleración de un objeto es inversamente proporcional a su masa. Esta relación es válida en general y se resume de la siguiente manera:

SEGUNDA LEY DE NEWTON DEL MOVIMIENTO

La aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él, y es inversamente proporcional a su masa. La dirección de la aceleración es en la dirección de la fuerza neta que actúa sobre el objeto.

Ésta es la **segunda ley de Newton del movimiento**.

Como ecuación, la segunda ley de Newton puede escribirse así:

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\Sigma \vec{\mathbf{F}}}{m},$$

donde $\vec{\mathbf{a}}$ significa aceleración, m significa masa y $\Sigma\vec{\mathbf{F}}$ es la *fuerza neta* sobre el objeto. El símbolo Σ ("sigma" griega) significa "suma de"; $\vec{\mathbf{F}}$ significa fuerza, por lo que $\Sigma\vec{\mathbf{F}}$ significa la *suma vectorial de todas las fuerzas* que actúan sobre el objeto, lo cual definimos como **fuerza neta**.

Reordenamos esta ecuación para obtener el enunciado familiar de la segunda ley de Newton:

SEGUNDA LEY DE NEWTON DEL MOVIMIENTO

$$\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}. \qquad \textbf{(4–1a)}$$

La segunda ley de Newton relaciona la descripción del movimiento (la aceleración) con la causa del mismo (la fuerza). Se trata de una de las relaciones más fundamentales de la física. De la segunda ley de Newton podemos definir más precisamente la **fuerza** como *una acción capaz de acelerar un objeto*.

Toda fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ es un vector, con magnitud, dirección y sentido. La ecuación 4-1a es una ecuación vectorial que es válida en cualquier marco de referencia inercial. En forma de componentes en coordenadas rectangulares se escribe como:

$$\Sigma F_x = ma_x, \qquad \Sigma F_y = ma_y, \qquad \Sigma F_z = ma_z, \qquad \textbf{(4–1b)}$$

donde

$$\vec{\mathbf{F}} = F_x\hat{\mathbf{i}} + F_y\hat{\mathbf{j}} + F_z\hat{\mathbf{k}}.$$

La componente de aceleración en cada dirección se ve afectada sólo por la componente de la fuerza neta en esa dirección.

En unidades del SI, con la masa en kilogramos, la unidad de fuerza se llama **newton** (N). Por lo tanto, un newton es la fuerza requerida para impartir una aceleración de 1 m/s^2 a una masa de 1 kg. Entonces, 1 N = 1 kg·m/s^2.

En unidades cgs, la unidad de masa es el gramo (g), como se mencionó antes.† La unidad de fuerza es la *dina*, que se define como la fuerza neta necesaria para impartir una aceleración de 1 cm/s^2 a una masa de 1 g. Así, 1 dina = 1 g·cm/s^2. Es fácil demostrar que 1 dina = 10^{-5} N.

En el sistema inglés, la unidad de fuerza es la *libra* (que se abrevia lb), donde 1 lb = 4.448222 N ≈ 4.45 N. La unidad de masa es el *slug*, que se define como aquella masa que tendrá una aceleración de 1 ft/s^2 cuando una fuerza de 1 lb se aplique sobre ella. Así, 1 lb = 1 slug·ft/s^2. La tabla 4-1 resume las unidades en los diferentes sistemas.

TABLA 4–1 Unidades de masa y fuerza

Sistema	Masa	Fuerza
SI	kilogramo (kg)	newton (N) (= kg·m/s^2)
cgs	gramo (g)	dina (= g·cm/s^2)
British	slug	libra (lb)

Factores de conversión: 1 dina = 10^{-5} N; 1 lb ≈ 4.45 N.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Utilice un conjunto de unidades consistente

Es muy importante usar sólo un conjunto de unidades en un cálculo o un problema dado; y normalmente trabajamos con el SI. Cuando la fuerza se da, digamos, en newton y la masa en gramos, entonces, antes de intentar expresar la aceleración en unidades SI, debemos cambiar la masa a kilogramos. Por ejemplo, si la fuerza se da como 2.0 N a lo largo del eje x y la masa se da igual a 500 g, cambiamos esta última a 0.50 kg, y la aceleración resultará automáticamente en m/s^2 cuando se use la segunda ley de Newton:

$$a_x = \frac{\Sigma F_x}{m} = \frac{2.0\,\text{N}}{0.50\,\text{kg}} = \frac{2.0\,\text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{0.50\,\text{kg}} = 4.0\,\text{m/s}^2.$$

EJEMPLO 4–2 ESTIMACIÓN Fuerza para acelerar un automóvil rápido. Estime la fuerza neta necesaria para acelerar *a*) un automóvil de 1,000 kg a $\frac{1}{2}g$; *b*) una manzana de 200 g a la misma rapidez.

PLANTEAMIENTO Utilizamos la segunda ley de Newton para encontrar la fuerza neta necesaria para cada objeto. Esto es una estimación (no se indica que $\frac{1}{2}$ sea preciso), así que se redondea a una cifra significativa.

SOLUCIÓN *a*) La aceleración del automóvil es $a = \frac{1}{2}g = \frac{1}{2}(9.8\,\text{m/s}^2) \approx 5\,\text{m/s}^2$. Usamos la segunda ley de Newton para obtener la fuerza neta necesaria para lograr esta aceleración:

$$\Sigma F = ma \approx (1000\,\text{kg})(5\,\text{m/s}^2) = 5000\,\text{N}.$$

(Si usted está acostumbrado a las unidades inglesas, para tener una idea de cuánto es una fuerza de 5000 N, divida ésta entre 4.45 N/lb y obtendrá una fuerza de aproximadamente 1000 lb).

b) Para la manzana, m = 200 g = 0.2 kg, por lo que

$$\Sigma F = ma \approx (0.2\,\text{kg})(5\,\text{m/s}^2) = 1\,\text{N}.$$

†Tenga cuidado en no confundir g para gramo con g para la aceleración debida a la gravedad. Ésta última se escribe siempre en cursivas (o en negritas como vector).

EJEMPLO 4–3 **Fuerza para detener un automóvil.** ¿Qué fuerza neta promedio se requiere para llevar un automóvil de 1500 kg al reposo, desde una rapidez de 100 km/h en una distancia de 55 m?

PLANTEAMIENTO Usamos la segunda ley de Newton, $\Sigma F = ma$ para calcular la fuerza; pero primero debemos determinar la aceleración a. Suponemos que la aceleración es constante, de manera que podemos usar las ecuaciones cinemáticas, ecuaciones 2-12, para calcularla.

$v_0 = 100$ km/h
$v = 0$
x (m)
$x = 0$
$x = 55$ m

FIGURA 4–6
Ejemplo 4–3.

SOLUCIÓN Suponemos que el movimiento es a lo largo del eje $+x$ (figura 4-6). Se nos da la velocidad inicial $v_0 = 100$ km/h $= 27.8$ m/s (sección 1-5), la velocidad final $v = 0$ y la distancia recorrida $x - x_0 = 55$ m. De la ecuación 2-12c, tenemos

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0),$$

por lo que

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)} = \frac{0 - (27.8\,\text{m/s})^2}{2(55\,\text{m})} = -7.0\,\text{m/s}^2.$$

La fuerza neta requerida es entonces

$$\Sigma F = ma = (1500\,\text{kg})(-7.1\,\text{m/s}^2) = -1.1 \times 10^4\,\text{N}.$$

La fuerza debe ejercerse en sentido *opuesto* al de la velocidad inicial, que es lo que significa el signo negativo.

NOTA Si la aceleración no es precisamente constante, determinamos una aceleración "promedio" y obtenemos una fuerza neta "promedio".

La segunda ley de Newton, al igual que la primera, sólo es válida en marcos de referencia inerciales (sección 4-2). En el marco de referencia no inercial de un automóvil que acelera, por ejemplo, una taza en el tablero comienza a deslizarse (es decir, a acelerar) incluso cuando la fuerza neta sobre ella sea cero; por lo tanto, $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ no se aplica en tal marco de referencia acelerado ($\Sigma\vec{\mathbf{F}} = 0$, pero $\vec{\mathbf{a}} \neq 0$ en este marco no inercial).

EJERCICIO A Suponga que usted observa que una taza se desliza sobre el tablero (suave) de un automóvil que acelera como recién lo estudiamos, pero esta vez desde un marco de referencia inercial fuera del auto, es decir, en la calle. Desde el marco inercial de usted, las leyes de Newton son válidas. ¿Qué fuerza tira la taza del tablero?

Definición precisa de masa

Como se mencionó en la sección 4-3, podemos cuantificar el concepto de masa usando su definición como medida de la inercia. Como hacer esto es evidente de la ecuación 4-1a, donde vemos que la aceleración de un objeto es inversamente proporcional a su masa. Si la misma fuerza neta ΣF actúa para acelerar cada una de las dos masas, m_1 y m_2, entonces la razón de sus masas puede definirse como la razón inversa de sus aceleraciones:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Si se conoce una de las masas (podría ser el kilogramo estándar) y las dos aceleraciones se miden precisamente, entonces la masa desconocida se obtiene a partir de esta definición. Por ejemplo, si $m_1 = 1.00$ kg, y para una fuerza particular $a_1 = 3.00\,\text{m/s}^2$ y $a_2 = 2.00\,\text{m/s}^2$, entonces, $m_2 = 1.50$ kg.

4–5 Tercera ley de Newton del movimiento

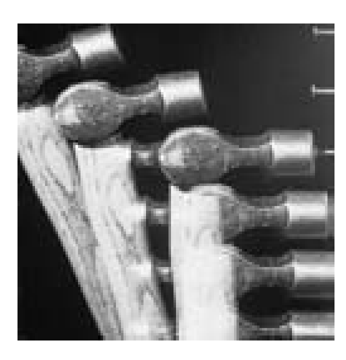


FIGURA 4–7 Un martillo que golpea un clavo. El martillo ejerce una fuerza sobre el clavo y el clavo ejerce una fuerza contraria sobre el martillo. Esta última fuerza desacelera el martillo y lo lleva al reposo.

La segunda ley de Newton del movimiento describe cuantitativamente cómo las fuerzas afectan el movimiento. Pero quizá nos preguntamos ¿de dónde vienen las fuerzas? Las observaciones sugieren que una fuerza aplicada a cualquier objeto es siempre aplicada *por otro objeto*. Un caballo tira de una carreta, una persona empuja un carrito de supermercado, un martillo empuja un clavo, un imán atrae un clip sujetapapeles. En cada uno de esos ejemplos, se ejerce una fuerza *sobre* un objeto y ésta es ejercida *por* otro objeto. Por ejemplo, la fuerza que se ejerce *sobre* el clavo es ejercida *por* el martillo.

Sin embargo, Newton se dio cuenta de que el asunto no era tan unilateral. Es cierto que el martillo ejerce una fuerza sobre el clavo (figura 4-7); pero éste evidentemente ejerce también una fuerza opuesta sobre el martillo, dado que la rapidez del martillo se reduce rápidamente a cero durante el contacto. Sólo una gran fuerza puede causar esa rápida desaceleración del martillo. Entonces, dijo Newton, los dos cuerpos deben tratarse según la misma base. El martillo ejerce una fuerza sobre el clavo y éste ejerce una fuerza opuesta sobre el martillo. Ésta es la esencia de la **tercera ley de Newton del movimiento**:

TERCERA LEY DE NEWTON DEL MOVIMIENTO

> **Siempre que un objeto ejerce una fuerza sobre un segundo objeto, el segundo ejerce una fuerza de igual magnitud, en la misma dirección, pero en sentido opuesto sobre el primero.**

En ocasiones esta ley se parafrasea como "para toda acción existe una reacción igual y opuesta". Esto es perfectamente válido. No obstante, para evitar confusiones, es muy importante recordar que la fuerza de "acción" y la fuerza de "reacción" actúan sobre objetos *diferentes*.

 **CUIDADO**

Las fuerzas de acción y de reacción actúan sobre objetos diferentes

Como evidencia de la validez de la tercera ley de Newton, observe su mano cuando empuja contra el borde de un escritorio (figura 4-8). La forma de la mano se altera, lo cual es clara evidencia de que se ejerce una fuerza sobre ella. Puede *ver* el borde del escritorio oprimiendo su mano, e incluso *sentir* al escritorio ejerciendo una fuerza sobre su mano, lo cual por cierto duele. Cuanto más fuerte empuje usted contra el escritorio, más fuerte empujará el escritorio contra su mano. (Note que sólo siente las fuerzas ejercidas *sobre* usted; cuando usted ejerce una fuerza sobre otro objeto, lo que siente es que el objeto empuja en dirección opuesta sobre usted).

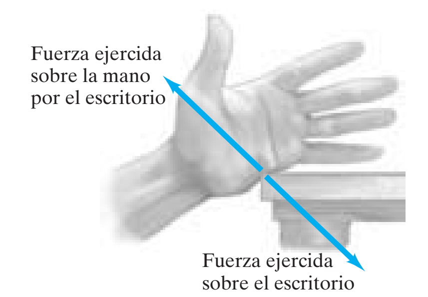


FIGURA 4–8 Si se empuja con una mano el extremo de un escritorio (el vector fuerza se muestra en anaranjado), el escritorio empuja de vuelta contra la mano (este vector fuerza se muestra en gris, para recordar que esta fuerza actúa sobre un objeto diferente).

La fuerza que el escritorio ejerce sobre su mano tiene la misma magnitud que la fuerza que su mano ejerce sobre el escritorio. Esto es válido no sólo cuando el escritorio está en reposo, sino incluso cuando el escritorio acelera debido a la fuerza que ejerce su mano.

Como otra demostración de la tercera ley de Newton, considere la patinadora de la figura 4-9. Como hay muy poca fricción entre sus patines y el hielo, la patinadora se moverá libremente si una fuerza es ejercida sobre ella; la patinadora empuja contra la pared, y entonces *ella* se empieza a mover hacia atrás. La fuerza que ella ejerce sobre la pared no puede *moverla*, pues tal fuerza actúa sobre la pared. Algo tiene que haber ejercido una fuerza s*obre ella* para que empiece a moverse y esa fuerza sólo puede haber sido ejercida por la pared. La fuerza con que la pared empuja sobre la patinadora es, por la tercera ley de Newton, igual y opuesta a la fuerza que la patinadora ejerce sobre la pared.

FIGURA 4–9 Un ejemplo de la tercera ley de newton: cuando una patinadora empuja contra la pared, la pared empuja de vuelta y esta fuerza provoca que ella acelere alejándose.



Cuando una persona arroja un paquete fuera de un bote pequeño (inicialmente en reposo), éste empieza a moverse en sentido opuesto. La persona ejerce una fuerza sobre el paquete y éste ejerce una fuerza igual y opuesta sobre la persona, y dicha fuerza impulsa a la persona (y al bote) ligeramente hacia atrás.



FIGURA 4–10 Otro ejemplo de la tercera ley de Newton: el lanzamiento de un cohete. El motor de un cohete empuja los gases hacia abajo, y éstos ejercen una fuerza igual y opuesta hacia arriba sobre el cohete, de modo que lo aceleran hacia arriba. (Un cohete *no* acelera como resultado de los gases expulsados que empujan contra el suelo).

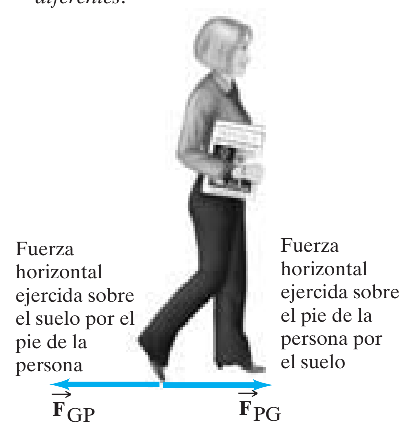
El impulso de los cohetes se explica también usando la tercera ley de Newton (figura 4-10). Un error común es pensar que los cohetes aceleran debido a que los gases que salen por la parte posterior de los motores empujan contra el suelo o la atmósfera. Esto no es correcto. Lo que sucede es que el cohete ejerce una poderosa fuerza sobre los gases, echándolos fuera; así que los gases ejercen una fuerza igual y opuesta *sobre el cohete*. Esta última fuerza es la que impulsa al cohete hacia adelante: la fuerza ejercida *sobre* el cohete *por* los gases (véase la foto de inicio de capítulo, p. 83). Por lo tanto, un vehículo espacial se maniobra en el espacio vacío disparando sus cohetes en sentido opuesto a aquel en que se quiere acelerar. Cuando el cohete empuja sobre los gases en una dirección, éstos empujan sobre el cohete en la dirección opuesta. Un avión a reacción también acelera porque los gases que expulsa hacia atrás ejercen una fuerza hacia adelante sobre los motores (tercera ley de Newton).

Considere cómo caminamos. Una persona empieza a caminar empujando con el pie hacia atrás contra el suelo. Entonces el suelo ejerce una fuerza igual y opuesta hacia adelante sobre la persona (figura 4-11) y es esta fuerza, *sobre* la persona, que mueve a la persona hacia adelante. (Si usted lo duda, intente caminar normalmente donde no haya fricción, por ejemplo, sobre hielo muy liso y resbaloso). De manera similar, un pájaro vuela hacia adelante ejerciendo una fuerza hacia atrás sobre el aire; pero es el aire el que empuja hacia adelante (tercera ley de Newton) sobre las alas del ave lo que la impulsa hacia adelante.

EJEMPLO CONCEPTUAL 4–4 **¿Qué ejerce la fuerza para mover un automóvil?** ¿Qué hace que un automóvil vaya hacia adelante?

RESPUESTA Una respuesta común es que el motor hace al automóvil moverse hacia adelante. Pero el asunto no es tan sencillo. El motor hace girar los neumáticos. Pero qué ocurre si los neumáticos están sobre hielo resbaloso o sobre una capa gruesa de fango. Simplemente girarán sin avanzar. Se necesita la fricción. En el suelo sólido, los neumáticos empujan hacia atrás contra el suelo debido a la fricción. Por la tercera ley de Newton, el suelo empuja sobre los neumáticos en la dirección opuesta, acelerando el automóvil hacia adelante.

FIGURA 4–11 Una persona puede caminar hacia adelante porque, cuando un pie empuja hacia atrás contra el suelo, el suelo empuja hacia adelante sobre el pie (tercera ley de Newton). Note que, las dos fuerzas que se muestran *actúan sobre objetos diferentes*.



Solemos asociar las fuerzas con objetos activos tales como seres humanos, animales, motores o un objeto en movimiento como un martillo. A menudo es difícil saber cómo un objeto inanimado en reposo, como un muro o un escritorio, o la pared de una pista de hielo (figura 4-9), pueden ejercer una fuerza. La explicación está en que cada material, sin importar qué tan duro sea, es elástico, por lo menos en cierto grado. Una banda elástica estirada puede ejercer una fuerza sobre una bola de papel y hacerla volar por la habitación. Otros materiales quizá no se alarguen tan fácilmente como el hule, pero se alargan o se comprimen cuando se les aplica una fuerza. Y así como una banda elástica estirada ejerce una fuerza, también lo hace un muro estirado (o comprimido), un escritorio o el parachoques de un automóvil.

De los ejemplos vistos antes, queda claro que es muy importante recordar *sobre* qué objeto se ejerce una fuerza dada y *qué* objeto ejerce esa fuerza. Una fuerza influye en el movimiento de un objeto sólo cuando se aplica *sobre* el objeto. Una fuerza ejercida *por* un objeto no influye en ese mismo objeto; sólo influye en otro objeto *sobre* el cual se ejerce la fuerza. Entonces, para evitar confusiones, las dos preposiciones *sobre* y *por* deben usarse siempre y con cuidado.

Una manera de tener claro qué fuerza actúa sobre qué objeto consiste en usar subíndices dobles. Por ejemplo, la fuerza ejercida sobre la **P**ersona por el suelo (**G**round) en la figura 4-11 puede rotularse $\vec{F}_{PG}$. Por otro lado, la fuerza ejercida sobre el suelo por la persona es $\vec{F}_{GP}$. Por la tercera ley de Newton,

TERCERA LEY DE NEWTON DEL MOVIMIENTO

$$\vec{F}_{GP} = -\vec{F}_{PG}. \tag{4–2}$$

$\vec{F}_{GP}$ y $\vec{F}_{PG}$ tienen la misma magnitud y dirección (tercera ley de Newton) y el signo menos nos indica que esas dos fuerzas actúan en sentidos opuestos.

Note cuidadosamente que las dos fuerzas mostradas en la figura 4-11 actúan sobre objetos diferentes; por consiguiente, usamos colores ligeramente diferentes para las flechas que representan tales fuerzas. Esas dos fuerzas no deben aparecer juntas en la sumatoria de fuerzas de la segunda ley de Newton $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$. ¿Por qué? Porque actúan sobre objetos diferentes: $\vec{a}$ es la aceleración de un objeto en particular y $\Sigma\vec{F}$ debe incluir *sólo* las fuerzas que actúan sobre ese único objeto.

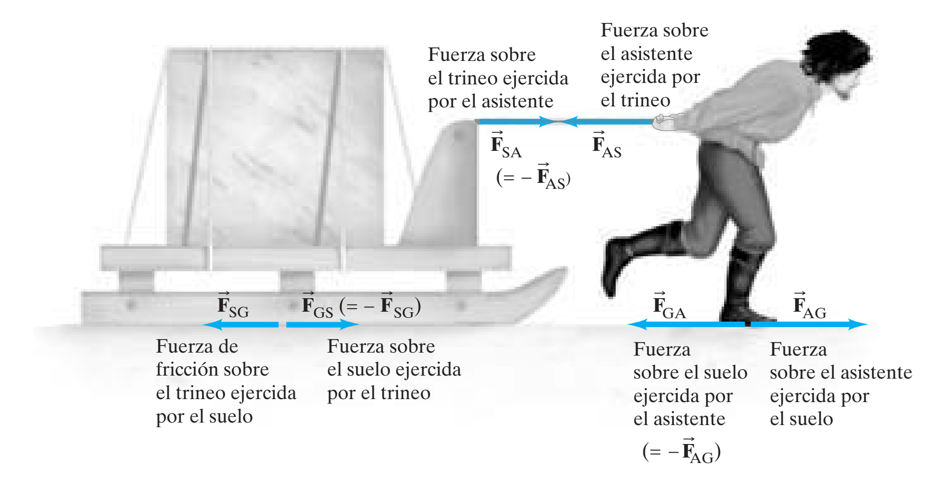


FIGURA 4–12 Ejemplo 4-5, que muestra sólo fuerzas horizontales. Miguel Ángel ha seleccionado un fino bloque de mármol para su próxima escultura. Se muestra aquí a su asistente jalando el bloque sobre un trineo desde la cantera. Las fuerzas sobre el asistente se indican con flechas azules; las fuerzas sobre el trineo, se indican con flechas negras; y las fuerzas sobre el suelo, con flechas punteadas. Los pares de fuerzas acción-reacción que son iguales y opuestos están rotulados con los mismos subíndices, pero en orden inverso (como $\vec{F}_{GA}$ y $\vec{F}_{AG}$).

EJEMPLO CONCEPTUAL 4–5 **Aclaración de la tercera ley.** Al asistente de Miguel Ángel se le asignó la tarea de mover un bloque de mármol usando un trineo (figura 4-12). Él le dice a su jefe: "Cuando ejerzo una fuerza hacia adelante sobre el trineo, éste ejerce una fuerza igual y opuesta hacia atrás. ¿Cómo puedo entonces empezar a moverlo? Sin importar qué tanto jalo, la fuerza de reacción hacia atrás siempre iguala a mi fuerza hacia adelante, de manera que la fuerza neta debe ser cero. Nunca podré mover esta carga." ¿Está él en lo correcto?

RESPUESTA No. Aunque es cierto que las fuerzas de acción y de reacción son iguales en magnitud y dirección pero de diferente sentido, el asistente ha olvidado que actúan sobre objetos diferentes. La fuerza hacia adelante ("acción") es ejercida por el asistente sobre el trineo (figura 4-12); en tanto que la fuerza de "reacción" hacía atrás, es ejercida por el trineo sobre el asistente. Para determinar si el *asistente* se mueve o no, debemos considerar sólo las fuerzas que actúan *sobre el asistente* y luego aplicar $\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$, donde $\Sigma\vec{F}$ es la fuerza neta *sobre el asistente*, $\vec{a}$ es la aceleración del asistente y m es la masa de éste. Hay dos fuerzas sobre el asistente que afectan su movimiento hacia adelante y ellas se muestran con flechas azules en las figuras 4-12 y 4-13: ellas son (1) la fuerza horizontal $\vec{F}_{AG}$ ejercida sobre el asistente por el suelo (cuanto más fuerte empuja él hacia atrás contra el suelo, más fuerte empujará el suelo hacia adelante sobre él −tercera ley de Newton), y (2) la fuerza $\vec{F}_{AS}$ que ejerce el trineo sobre el asistente, jalando hacia atrás sobre él; véase la figura 4-13. Si él empuja lo suficientemente fuerte sobre el suelo, la fuerza ejercida por el suelo sobre él $\vec{F}_{AG}$, será mayor que la fuerza que ejerce el trineo hacia atrás $\vec{F}_{AS}$, y el asistente podrá acelerar hacia adelante (segunda ley de Newton). Por otra parte, el trineo acelera hacia adelante cuando la fuerza ejercida por el asistente sobre el trineo es mayor que la fuerza de fricción ejercida hacia atrás que ejerce el suelo sobre el trineo (es decir, cuando $\vec{F}_{SA}$ tiene una magnitud mayor que $\vec{F}_{SG}$ en la figura 4-12).



Un estudio de la segunda y tercera leyes de Newton

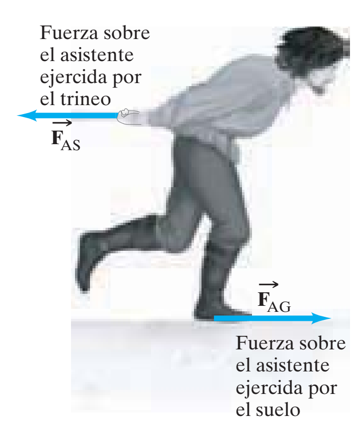


FIGURA 4–13 Ejemplo 4-5. Las fuerzas horizontales sobre el asistente.

El uso de subíndices dobles para aclarar la tercera ley de Newton puede resultar engorroso y comúnmente no los usaremos para ello. Por lo general utilizaremos un solo subíndice para indicar qué o quién ejerce la fuerza sobre el objeto que estamos analizando. Sin embargo, si tiene alguna duda respecto a una fuerza dada, use los los subíndices dobles para identificar *sobre* qué objeto actúa la fuerza y qué objeto la ejerce.

EJERCICIO B Regrese a la pregunta inicial del capítulo de la página 83 y respóndala de nuevo. Intente explicar por qué quizás usted respondió de manera diferente la primera vez.

EJERCICIO C Un camión pesado choca de frente contra un pequeño automóvil deportivo. *a*) ¿Cuál vehículo experimenta la mayor fuerza de impacto? *b*) ¿Cuál experimenta la mayor aceleración durante el impacto? *c*) ¿Cuál o cuáles de las leyes de Newton son útiles para obtener la respuesta correcta?

EJERCICIO D Si usted empuja sobre un escritorio pesado, ¿significa que el escritorio empuja hacia atrás sobre usted? *a*) No a menos que alguien más también empuje sobre él. *b*) Sí, si está fuera en el espacio. *c*) Para empezar un escritorio nunca empuja. *d*) No. *e*) Sí.

4–6 Fuerza de gravedad (peso) y fuerza normal



Como vimos en el capítulo 2, Galileo afirmaba que los objetos que se sueltan cerca de la superficie de la Tierra caen todos con la misma aceleración, $\vec{\mathbf{g}}$, si puede despreciarse la resistencia del aire. La fuerza que da lugar a esta aceleración se llama *fuerza de gravedad* o *fuerza gravitacional*. ¿Qué ejerce la fuerza gravitacional sobre un objeto? Es la Tierra, como se explicará en el capítulo 6, y la fuerza actúa verticalmente[†] hacia abajo, hacia el centro de la Tierra. Apliquemos la segunda ley de Newton a un objeto de masa m que cae libremente debido a la fuerza de gravedad; para la aceleración, $\vec{\mathbf{a}}$, usamos la aceleración hacia abajo debida a la gravedad, $\vec{\mathbf{g}}$. Entonces, la **fuerza gravitacional** sobre un objeto $\vec{\mathbf{F}}_G$, se escribirse como

$$\vec{\mathbf{F}}_G = m\vec{\mathbf{g}}. \tag{4–3}$$

La dirección de esta fuerza es hacia el centro de la Tierra. La magnitud de la fuerza de gravedad sobre un objeto, mg, comúnmente se llama el **peso** del objeto.

En unidades SI, $g = 9.80\ \text{m/s}^2 = 9.80\ \text{N/kg}$,[‡] por lo que el peso de una masa de 1.00 kg sobre la Tierra es de $1.00\ \text{kg} \times 9.80\ \text{m/s}^2 = 9.80\ \text{N}$. Nos ocuparemos principalmente del peso de objetos sobre la Tierra; pero hacemos hincapié en que el peso de una masa dada sobre la Luna, en otros planetas o en el espacio, será diferente que el peso de la misma masa en la Tierra. Por ejemplo, sobre la Luna, la aceleración debida a la gravedad es aproximadamente igual a un sexto del valor de la gravedad sobre la Tierra, y una masa de 1.0 kg pesa sólo 1.6 N. Aunque no usaremos unidades inglesas, consideraremos que para fines prácticos sobre la Tierra, una masa de 1 kg pesa aproximadamente 2.2 lb. (Sobre la Luna, 1 kg pesaría aproximadamente sólo 0.4 lb).

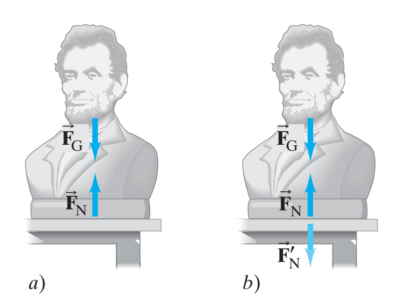


FIGURA 4–14 La fuerza neta sobre un objeto en reposo es cero, de acuerdo con la segunda ley de Newton. Por lo tanto, la fuerza de gravedad hacia abajo ($\vec{\mathbf{F}}_G$) sobre un objeto debe estar equilibrada por una fuerza vertical hacia arriba (la fuerza normal $\vec{\mathbf{F}}_N$) ejercida por la mesa en este caso. *b*) $\vec{\mathbf{F}}'_N$ es la fuerza ejercida sobre la mesa por el busto y es la fuerza de reacción a $\vec{\mathbf{F}}_N$ según la tercera ley de Newton. ($\vec{\mathbf{F}}'_N$ se muestra en color negro para recordarnos que actúa sobre un objeto diferente). La fuerza de reacción a $\vec{\mathbf{F}}_G$ no se muestra.



CUIDADO

El peso y la fuerza normal **no** *son pares acción-reacción*

La fuerza de gravedad actúa sobre un objeto mientras está cayendo. Cuando un objeto está en reposo sobre la Tierra, la fuerza gravitacional sobre él no desaparece, lo cual sabemos al pesarlo en una báscula. La misma fuerza, dada por la ecuación 4-3, continúa actuando. ¿Por qué entonces el objeto no se mueve? De la segunda ley de Newton, la fuerza neta sobre un objeto que permanece en reposo es cero. Debe haber otra fuerza sobre el objeto que equilibre la fuerza gravitacional. Para un objeto que descansa sobre una mesa, ésta ejerce una fuerza vertical hacia arriba sobre el objeto; véase la figura 4-14a. La mesa se comprime ligeramente debajo del objeto y debido a su elasticidad, empuja hacia arriba el objeto como se muestra. La fuerza ejercida por la mesa se denomina a menudo **fuerza de contacto**, ya que ocurre cuando dos objetos están en contacto. (La fuerza de la mano que empuja sobre un carrito también es una fuerza de contacto.) Cuando una fuerza de contacto actúa *perpendicularmente* a la superficie común de contacto, se le llama **fuerza normal** ("normal" significa perpendicular); por ello, se designa $\vec{\mathbf{F}}_N$ en la figura 4-14a.

Las dos fuerzas que se indican en la figura 4-14a actúan sobre el busto, que permanece en reposo, por lo que la suma vectorial de esas dos fuerzas debe ser cero (segunda ley de Newton). Por consiguiente, $\vec{\mathbf{F}}_G$ y $\vec{\mathbf{F}}_N$ deben ser de igual magnitud y de sentidos opuestos. Pero note que ellas *no* son las fuerzas de acción-reacción, iguales y de sentido opuesto que menciona la tercera ley de Newton. Las fuerzas de acción y de reacción de la tercera ley de Newton actúan sobre *objetos diferentes*; en tanto que las dos fuerzas que se muestran en la figura 4-14a actúan sobre el *mismo* objeto. Para cada una de las fuerzas mostradas en la figura 4-14a nos preguntamos: "¿Cuál es la fuerza de reacción?" La fuerza hacia arriba, $\vec{\mathbf{F}}_N$, sobre el busto es ejercida por la mesa. La reacción a esta fuerza es una fuerza hacia abajo ejercida por el busto sobre la mesa. Esto se ilustra en la figura 4-14b, donde se designa $\vec{\mathbf{F}}'_N$. Esta fuerza $\vec{\mathbf{F}}'_N$, ejercida sobre la mesa por el busto, es la fuerza de reacción a $\vec{\mathbf{F}}_N$ de acuerdo con la tercera ley de Newton. ¿Y qué sucede con la otra fuerza sobre el busto, la fuerza de gravedad $\vec{\mathbf{F}}_G$ ¿Puede usted ver cuál es la reacción a esta fuerza? En el capítulo 6 veremos que la fuerza de reacción es la fuerza gravitacional ejercida por el busto sobre la Tierra.

EJERCICIO E Ahora regrese a la segunda pregunta de inicio de capítulo, página 83, y respóndala de nuevo. Intente explicar por qué tal vez usted la contestó de manera diferente la primera vez.

[†]El concepto de "vertical" está ligado a la gravedad. La mejor definición de *vertical* es que se trata de la dirección en que caen los objetos. Una superficie que es "horizontal", por otro lado, es una superficie donde un objeto redondo no comenzará a rodar: la gravedad no tiene efecto. Horizontal significa perpendicular a vertical.

[‡]Como $1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$ (sección 4-4), entonces, $1\ \text{m/s}^2 = 1\ \text{N/kg}$.

EJEMPLO 4–6 **Peso, fuerza normal y una caja.** Un amigo le ha dado a usted un regalo especial, una caja de 10.0 kg de masa con una sorpresa misteriosa dentro de ella. La caja descansa sobre la superficie horizontal lisa (sin fricción) de una mesa (figura 4-15a). *a*) Determine el peso de la caja y la fuerza normal ejercida sobre ella por la mesa. *b*) Ahora su amigo empuja hacia abajo sobre la caja con una fuerza de 40.0 N, como en la figura 4-15b. Determine de nuevo la fuerza normal ejercida sobre la caja por la mesa. *c*) Si su amigo jala hacia arriba sobre la caja con una fuerza de 40.0 N (figura 4-15c), ¿cuál es ahora la fuerza normal ejercida sobre la caja por la mesa?

PLANTEAMIENTO La caja se encuentra en reposo sobre la mesa, de manera que en cada caso la fuerza neta sobre la caja es cero (segunda ley de Newton). El peso de la caja tiene magnitud mg en los tres casos.

SOLUCIÓN *a*) El peso de la caja es $mg = (10.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2) = 98.0\text{ N}$ y esta fuerza actúa hacia abajo. La única otra fuerza que actúa sobre la caja es la fuerza normal que ejerce la mesa hacia arriba, como se muestra en la figura 4-15a. Elegimos el sentido hacia arriba como el sentido y positivo; entonces, la fuerza neta ΣF_y sobre la caja es $\Sigma F_y = F_N - mg$; el signo menos indica que mg actúa en la dirección y negativa (m y g son magnitudes). Como la caja está en reposo, la fuerza neta sobre ella debe ser cero (segunda ley de Newton, $\Sigma F_y = ma_y$ y $a_y = 0$). Entonces,

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= ma_y \\ F_N - mg &= 0, \end{aligned}$$

por lo que tenemos

$$F_N = mg.$$

La fuerza normal sobre la caja, ejercida por la mesa, es de 98.0 N hacia arriba, y tiene una magnitud igual al peso de la caja.

(*b*) Su amigo está empujando hacia abajo sobre la caja con una fuerza de 40.0 N. Como se muestra en la figura 4-15b, en vez de sólo dos fuerzas, ahora hay tres fuerzas que actúan sobre la caja. El peso de ésta sigue siendo $mg = 98.0$ N. La fuerza neta en este caso es $\Sigma F_y = F_N - mg - 40.0$ N y es igual a cero, ya que la caja permanece en reposo ($a = 0$). La segunda ley de Newton queda

$$\Sigma F_y = F_N - mg - 40.0\text{ N} = 0.$$

Despejamos la fuerza normal de esta ecuación:

$$F_N = mg + 40.0\text{ N} = 98.0\text{ N} + 40.0\text{ N} = 138.0\text{ N},$$

que es mayor que en el inciso *a*). La mesa empuja hacia arriba con más fuerza cuando una persona empuja hacia abajo sobre la caja. ¡La fuerza normal no siempre es igual al peso!

c) El peso de la caja es aún de 98.0 N y actúa hacia abajo. La fuerza ejercida por su amigo y la fuerza normal actúan ambas hacia arriba (dirección positiva), como se muestra en la figura 4-15c. La caja no se mueve, puesto que la fuerza hacia arriba de su amigo es menor que el peso. La fuerza neta, de nuevo igualada a cero en la segunda ley de Newton, (con $a = 0$), es

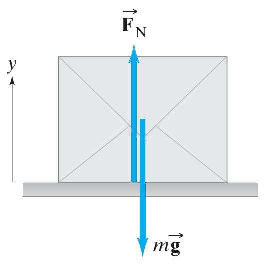
$$\Sigma F_y = F_N - mg + 40.0\text{ N} = 0,$$

por lo que

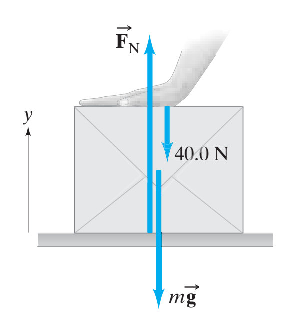
$$F_N = mg - 40.0\text{ N} = 98.0\text{ N} - 40.0\text{ N} = 58.0\text{ N}.$$

La mesa no carga todo el peso total de la caja debido al jalón hacia arriba ejercido por su amigo.

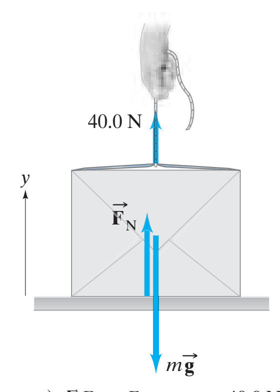
NOTA El peso de la caja (= mg) no cambia como resultado del empuje o jalón de su amigo. Sólo la fuerza normal resulta afectada.




a) $\Sigma F_y = F_N - mg = 0$



b) $\Sigma F_y = F_N - mg - 40.0\text{ N} = 0$



c) $\Sigma F_y = F_N - mg + 40.0\text{ N} = 0$

FIGURA 4–15 Ejemplo 4-6. *a*) Una caja de regalo de 10 kg está en reposo sobre una mesa. *b*) Una persona empuja hacia abajo sobre la caja con una fuerza de 40.0 N. *c*) una persona jala hacia arriba la caja con una fuerza de 40.0 N. Se supone que todas las fuerzas actúan a lo largo de una línea; aquí se representan ligeramente desplazadas con la finalidad de hacerlas distinguibles. Sólo se ilustran las fuerzas que actúan sobre la caja.

Recuerde que la fuerza normal es elástica en origen (la mesa de la figura 4-15 se hunde ligeramente bajo el peso de la caja). La fuerza normal en el ejemplo 4-6 es vertical, perpendicular a la mesa horizontal, sin embargo, la fuerza normal no siempre es vertical. Cuando usted empuja contra una pared vertical, por ejemplo, la fuerza normal con que la pared empuja sobre usted es horizontal (figura 4-9). Para un objeto sobre un plano inclinado en un ángulo con la horizontal, como un esquiador o un automóvil que van por la colina, la fuerza normal actúa en forma perpendicular al plano y, por lo tanto, no es vertical.


CUIDADO

La fuerza normal no necesariamente es igual al peso


CUIDADO

La fuerza normal, $\vec{\mathbf{F}}_N$*, no necesariamente es vertical*

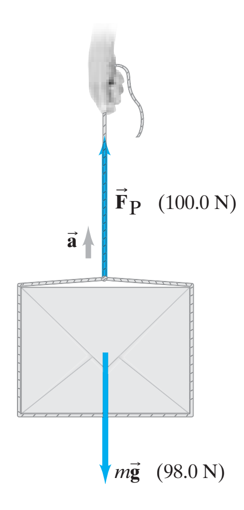


FIGURA 4–16 Ejemplo 4-7. La caja acelera hacia arriba porque $F_P > mg$.

EJEMPLO 4–7 **Aceleración de la caja.** ¿Qué sucede cuando una persona jala hacia arriba la caja en el ejemplo 4-6*c*) con una fuerza igual a, o mayor que, el peso de la caja? Por ejemplo, sea $F_P = 100.0$ N (figura 4-16) en vez de los 40.0 N que se muestran en la figura 4-15c?

PLANTEAMIENTO Comenzamos igual que en el ejemplo 4-6, pero prepárese para una sorpresa.

SOLUCIÓN La fuerza neta es ahora

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= F_N - mg + F_P \\ &= F_N - 98.0\,\text{N} + 100.0\,\text{N}, \end{aligned}$$

y si hacemos esto igual a cero (pensando que la aceleración podría ser cero), obtendríamos $F_N = -2.0$ N. Esto no tiene sentido, ya que el signo negativo implica que F_N señala hacia abajo y ciertamente la mesa no puede *jalar* hacia abajo sobre la caja (a menos que hubiera pegamento sobre la mesa). El menor valor que F_N puede tomar es cero, como ocurre en este caso. Lo que realmente sucede aquí es que la caja acelera hacia arriba porque la fuerza neta no es cero. La fuerza neta (haciendo la fuerza normal $F_N = 0$) es

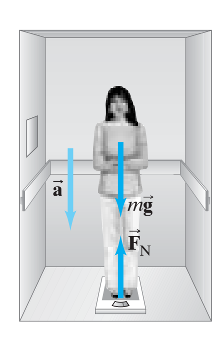
$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= F_P - mg = 100.0\,\text{N} - 98.0\,\text{N} \\ &= 2.0\,\text{N} \end{aligned}$$

hacia arriba. Véase la figura 4-16. Aplicamos la segunda ley de Newton y vemos que la caja se mueve hacia arriba con una aceleración

$$\begin{aligned} a_y &= \frac{\Sigma F_y}{m} = \frac{2.0\,\text{N}}{10.0\,\text{kg}} \\ &= 0.20\,\text{m/s}^2. \end{aligned}$$

EJEMPLO 4–8 **Aparente pérdida de peso.** Una mujer de 65 kg desciende en un elevador que acelera brevemente a 0.20*g* hacia abajo. Ella está parada sobre una báscula que da su lectura en kilogramos. *a*) Durante esta aceleración, ¿cuál es el peso de la mujer y qué registra la báscula? *b*) ¿Qué registra la báscula cuando el elevador desciende con rapidez constante de 2.0 m/s?

FIGURA 4–17 Ejemplo 4-8. El vector aceleración se muestra con una flecha negra para distinguirlo de los vectores de fuerza mostrados en azul.



PLANTEAMIENTO *a*) La figura 4-17 muestra todas las fuerzas que actúan sobre la mujer (y *sólo* las que actúan sobre ella). El sentido de la aceleración es hacia abajo, que se toma como positivo (esta es una elección opuesta a la que se hizo en los ejemplos 4-6 y 4-7).

SOLUCIÓN *a*) De la segunda ley de Newton,

$$\begin{aligned} \Sigma F &= ma \\ mg - F_N &= m(0.20g). \end{aligned}$$

Si despejamos F_N:

$$F_N = mg - 0.20mg = 0.80mg,$$

y actúa hacia arriba. La fuerza normal $\vec{F}_N$ es la fuerza que la báscula ejerce sobre la persona, y es igual y opuesta a la fuerza que la persona ejerce sobre la báscula: $F'_N = 0.80\,mg$ hacia abajo. Su peso (fuerza de la gravedad sobre ella) es aún $mg = (65\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2) = 640$ N. Pero la báscula, que necesita ejercer una fuerza de sólo 0.80 *mg*, mostrará su lectura como $0.80m = 52$ kg.

b) Ahora no hay aceleración, $a = 0$, por lo que, de acuerdo con la segunda ley de Newton, $mg - F_N = 0$ y $F_N = mg$. La báscula registra su masa correcta de 65 kg.

NOTA La báscula en *a*) puede arrojar una lectura de 52 kg (como una "masa aparente"), pero en realidad la masa de la mujer no cambia como resultado de la aceleración: permanece en 65 kg.

4–7 Resolución de problemas con las leyes de Newton: Diagramas de cuerpo libre

La segunda ley de Newton nos indica que la aceleración de un objeto es proporcional a la *fuerza neta* que actúa sobre el objeto. La **fuerza neta**, como se mencionó antes, es la *suma vectorial* de todas las fuerzas que actúan sobre el objeto. De hecho, diversos experimentos han demostrado que las fuerzas se suman precisamente como vectores, de acuerdo con las reglas que desarrollamos en el capítulo 3. Por ejemplo, en la figura 4-18, muestra dos fuerzas de igual magnitud (cada una de 100 N) que actúan sobre un objeto y que forman 90° entre sí. Intuitivamente, vemos que el objeto se empezará a mover a un ángulo de 45° sobre el eje x, y por lo tanto, la fuerza neta también formará un ángulo de 45° con el eje x. Esto es lo que justamente dan las reglas de la suma vectorial. Del teorema de Pitágoras, la magnitud de la fuerza resultante es $F_R = \sqrt{(100\text{ N})^2 + (100\text{ N})^2} = 141\text{ N}$.

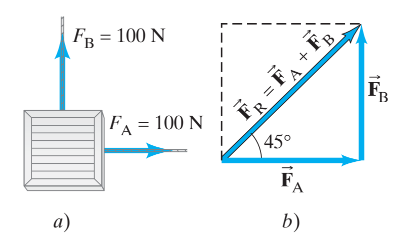
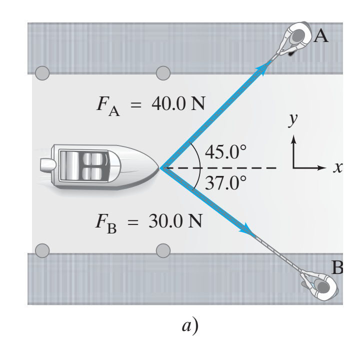
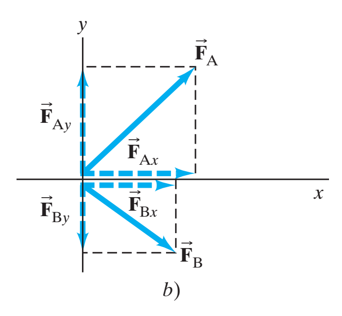
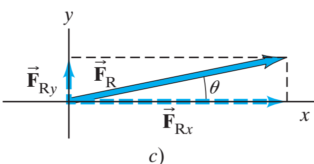


FIGURA 4–18 *a*) Dos fuerzas, $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$, que se ejercen por los trabajadores A y B, actúan sobre una caja. *b*) La suma o resultante de $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$ es $\vec{F}_R$.

FIGURA 4–19 Ejemplo 4-9: Dos vectores de fuerza actúan sobre un bote.







EJEMPLO 4–9 **Suma vectorial de fuerzas.** Calcule la suma vectorial de las dos fuerzas ejercidas sobre el bote por los trabajadores A y B en la figura 4-19a.

PLANTEAMIENTO Sumamos los vectores de fuerza como otros vectores cualesquiera, como se describió en el capítulo 3. El primer paso consiste en elegir un sistema coordenado xy (véase la figura 14-19a), y luego en descomponer los vectores.

SOLUCIÓN La figura 4-19b muestra las componentes cartesianas de estas dos fuerzas. Sumamos las fuerzas usando el método de las componentes. Las componentes de $\vec{F}_A$ son

$$F_{Ax} = F_A \cos 45.0° = (40.0\text{ N})(0.707) = 28.3\text{ N},$$
$$F_{Ay} = F_A \operatorname{sen} 45.0° = (40.0\text{ N})(0.707) = 28.3\text{ N}.$$

Las componentes de $\vec{F}_B$ son

$$F_{Bx} = +F_B \cos 37.0° = +(30.0\text{ N})(0.799) = +24.0\text{ N},$$
$$F_{By} = -F_B \operatorname{sen} 37.0° = -(30.0\text{ N})(0.602) = -18.1\text{ N}.$$

F_{By} es negativa porque señala a lo largo del eje y negativo. Las componentes de la fuerza resultante son (véase la figura 4-19c)

$$F_{Rx} = F_{Ax} + F_{Bx} = 28.3\text{ N} + 24.0\text{ N} = 52.3\text{ N},$$
$$F_{Ry} = F_{Ay} + F_{By} = 28.3\text{ N} - 18.1\text{ N} = 10.2\text{ N}.$$

Para encontrar la magnitud de la fuerza resultante, usamos el teorema de Pitágoras:

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(52.3)^2 + (10.2)^2}\text{ N} = 53.3\text{ N}.$$

La única pregunta restante es sobre el ángulo θ que la fuerza neta $\vec{F}_R$ forma con el eje x. Usamos:

$$\tan\theta = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \frac{10.2\text{ N}}{52.3\text{ N}} = 0.195,$$

y $\tan^{-1}(0.195) = 11.0°$. La fuerza neta sobre el bote tiene una magnitud de 53.3 N y actúa a un ángulo de 11.0° con respecto al eje x.

Al resolver problemas relacionados con las leyes de Newton y fuerzas, es muy importante dibujar un diagrama que muestre todas las fuerzas que actúan *sobre* cada objeto implicado. Tal diagrama se llama **diagrama de cuerpo libre** o **diagrama de fuerzas**: elija un objeto y dibuje una flecha para representar cada fuerza que actúe sobre él. Incluya *cualquier* fuerza que actúe sobre ese objeto. No muestre fuerzas que el objeto elegido ejerza sobre *otros* objetos. Para ayudarle a identificar cada fuerza, y todas las que se ejerzan sobre el objeto elegido, pregúntese que otros objetos podrían ejercer una fuerza sobre él. Si el problema implica más de un objeto, es necesario un diagrama de cuerpo libre separado para cada uno. Por ahora, las fuerzas que probablemente estén actuando son la *gravedad* y las *fuerzas de contacto* (un objeto que empuja o jala a otro, fuerza normal, fricción). Más adelante consideraremos la resistencia del aire, la fricción, la flotabilidad y la presión, así como fuerzas eléctricas y magnéticas.



Diagrama de cuerpo libre

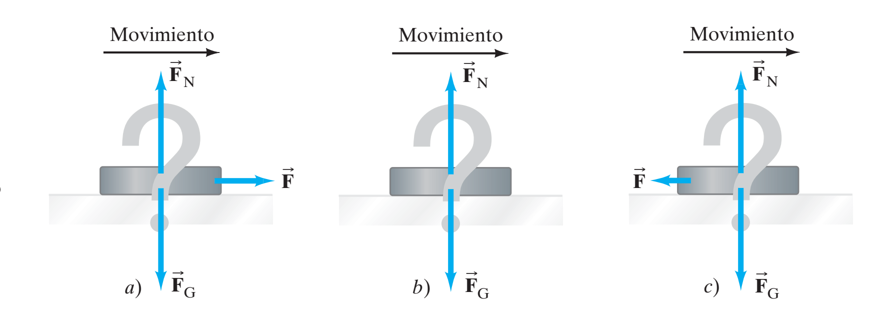


FIGURA 4–20 Ejemplo 4-10. ¿Cuál es el diagrama de cuerpo libre correcto, para el disco de hockey que se desliza sobre una superficie de hielo sin fricción?

EJEMPLO CONCEPTUAL 4–10 **El disco de hockey.** Un disco de hockey se desliza a velocidad constante sobre una superficie plana horizontal de hielo que suponemos sin fricción. ¿Cuál de los dibujos en la figura 4-20 es el diagrama de cuerpo libre correcto para este disco? ¿Cuál sería su respuesta si el disco desacelera?

RESPUESTA ¿Eligió usted *a*)? Si fue así, responda la pregunta: ¿qué o quién ejerce la fuerza horizontal rotulada $\vec{\mathbf{F}}$ sobre el disco? Si usted indica que es la fuerza necesaria para mantener el movimiento, pregúntese: ¿qué ejerce esta fuerza? Recuerde que otro objeto debe ejercer la fuerza y aquí nadie empuja al bloque una vez que inició su movimiento. Por lo tanto, *a*) es falsa. Además, la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ en la figura 4-20a daría lugar a una aceleración de acuerdo con la segunda ley de Newton. La respuesta correcta es *b*). Ninguna fuerza neta actúa sobre el disco, y éste se desliza con velocidad constante sobre el hielo.

En el mundo real, donde incluso el hielo liso ejerce al menos una pequeña fuerza de fricción, la respuesta correcta sería *c*). La pequeña fuerza de fricción actúa en sentido opuesto al del movimiento y la velocidad del disco disminuye, aunque muy lentamente.

Veamos ahora un breve resumen de cómo resolver problemas que impliquen las leyes de Newton.



Leyes de newton; diagramas de cuerpo libre

1. **Haga un dibujo** de la situación.
2. Considere sólo un objeto (a la vez) y dibuje un **diagrama de cuerpo libre** para ese objeto, que muestre *todas* las fuerzas que actúan *sobre* ese objeto. Incluya cualesquiera fuerzas desconocidas que haya que encontrar. No muestre las fuerzas que el objeto elegido ejerza sobre otros objetos.

   Dibuje la flecha para cada vector fuerza con exactitud razonable con respecto a dirección y magnitud. Rotule cada fuerza que actúe sobre el objeto, incluyendo las fuerzas que usted debe calcular, con respecto a su fuente (gravedad, personas, fricción, etcétera).

   Si varios objetos están implicados, dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo *por separado*, mostrando todas las fuerzas que actúan *sobre ese objeto* (*sólo* las fuerzas que actúan sobre ese objeto). Para todas y cada una de las fuerzas consideradas, debe ser claro para usted: *sobre* qué objeto actúa esa fuerza; y qué objeto ejerce la fuerza. Sólo las fuerzas que actúan *sobre* un objeto dado pueden incluirse en $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ para ese cuerpo.
3. La segunda ley de Newton implica vectores y usualmente es importante **descomponer los vectores** en componentes. **Elija** un **eje** x y un **eje** y de manera que se simplifiquen los cálculos. A menudo lo más conveniente es elegir un eje coordenado paralelo a la aceleración.
4. Para cada objeto, **aplique la segunda ley de Newton** por separado a las componentes x y y. Es decir, la componente x de la fuerza neta sobre ese cuerpo estará relacionada con la componente x de la aceleración de ese objeto: $\Sigma F_x = ma_x$ y similarmente para la dirección y.
5. **Despeje** la(s) incógnita(s) de la ecuación o las ecuaciones.

Esta Estrategia de resolución de problemas no debe considerarse como una receta inflexible. Más bien, se trata de un resumen de las cosas que pondrán su mente a pensar y le ayudarán a plantear y entender el problema que tenga entre manos.

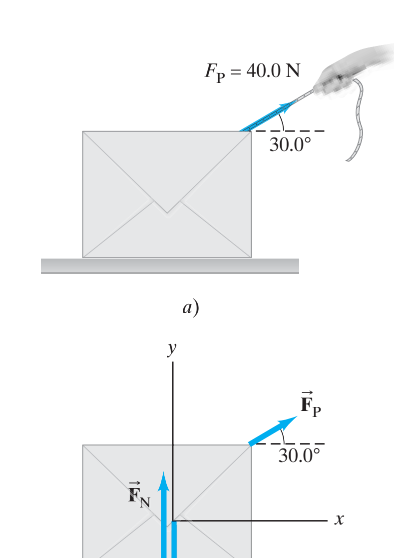


Un objeto tratado como partícula puntual

Considerando sólo el movimiento traslacional, podemos dibujar las fuerzas que actúan sobre el objeto como si actuaran en el centro del objeto, lo que significa tratar el objeto como si fuera una *partícula puntual.* Sin embargo, para problemas que involucran rotación o equilibrio, también es importante el punto de aplicación de cada fuerza, como veremos en los capítulos 10, 11 y 12.

En los siguientes ejemplos, suponemos que todas las superficies son muy lisas, de manera que puede ignorarse la fricción. (La fricción y los ejemplos donde se usa se estudiarán en el siguiente capítulo).

EJEMPLO 4–11 **Jalando la caja misteriosa.** Suponga que una amiga le pide examinar la caja de 10.0 kg que le han regalado a usted (ejemplo 4-6, figura 4-15), esperando adivinar lo que hay dentro. Usted le responde: “Claro, jala la caja hacia ti.” Luego, ella jala la caja tirando de la cuerda que la rodea, como se muestra en la figura 4-21a, a lo largo de la superficie lisa de la mesa. La magnitud de la fuerza ejercida por la persona es $F_P = 40.0$ N y es ejercida a un ángulo de 30.0° como se muestra. Calcule *a*) la aceleración de la caja y *b*) la magnitud de la fuerza F_N hacia arriba, ejercida por la mesa sobre la caja. Suponga que la fricción puede despreciarse.



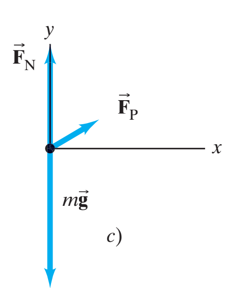


FIGURA 4–21 *a*) Jalando la caja, ejemplo 4-11; *b*) es el diagrama de cuerpo libre para la caja; y *c*) es el diagrama de cuerpo libre considerando que todas las fuerzas actúan sobre un punto (sólo movimiento traslacional, que es lo que tenemos aquí).

PLANTEAMIENTO Seguimos la Estrategia de resolución de problemas de la página anterior.

SOLUCIÓN

1. **Haga un dibujo:** La situación se muestra en la figura 4-21*a*; se representan la caja y la fuerza aplicada por la persona, F_P.
2. **Diagrama de cuerpo libre:** La figura 4-21b ilustra el diagrama de cuerpo libre de la caja. Para dibujarlo correctamente, indicamos *todas* las fuerzas que actúan sobre la caja y *sólo* las fuerzas que actúan sobre ella, que son: la fuerza de gravedad, $m\vec{g}$; la fuerza normal ejercida por la mesa, $\vec{F}_N$; y la fuerza ejercida por la persona, $\vec{F}_P$. Como sólo nos interesa el movimiento traslacional, las tres fuerzas se representan como si actuaran en un punto, que se conoce como centro de masa (figura 4-21c).
3. **Elija los ejes y efectúe la descomposición de los vectores:** Esperamos que el movimiento sea horizontal, así elegimos el eje *x* horizontal y el eje *y* vertical. El jalón de 40.0 N tiene las componentes

$$F_{Px} = (40.0\,\text{N})(\cos 30.0°) = (40.0\,\text{N})(0.866) = 34.6\,\text{N},$$
$$F_{Py} = (40.0\,\text{N})(\text{sen}\, 30.0°) = (40.0\,\text{N})(0.500) = 20.0\,\text{N}.$$

En la dirección horizontal (*x*), $\vec{F}_N$ y $m\vec{g}$ tienen componentes cero. Por lo tanto, la componente horizontal de la fuerza neta es F_{Px}.

4. *a*) **Aplique la segunda ley de Newton** para determinar la componente *x* de la aceleración:

$$F_{Px} = ma_x.$$

5. *a*) **Despeje:**

$$a_x = \frac{F_{Px}}{m} = \frac{(34.6\,\text{N})}{(10.0\,\text{kg})} = 3.46\,\text{m/s}^2.$$

La aceleración de la caja es de 3.46 m/s² hacia la derecha.

b) A continuación queremos encontrar F_N.

4′. *b*) **Aplique la segunda ley de Newton** a la dirección vertical (*y*), considerando arriba como positivo:

$$\Sigma F_y = ma_y$$
$$F_N - mg + F_{Py} = ma_y.$$

5′. *b*) **Despeje:** Tenemos $mg = (10.0\,\text{kg})(9.80\,\text{m/s}^2) = 98.0$ N y, del punto 3 anterior, $F_{Py} = 20.0$ N. Más aún, dado que $F_{Py} < mg$, la caja no se mueve verticalmente, así que $a_y = 0$. Por lo tanto,

$$F_N - 98.0\,\text{N} + 20.0\,\text{N} = 0,$$

De manera que

$$F_N = 78.0\,\text{N}.$$

NOTA F_N es menor que mg: la mesa no carga todo el peso de la caja, porque parte del jalón ejercido por la persona es vertical hacia arriba.

EJERCICIO F Una caja de 10.0 kg es arrastrada sobre una superficie horizontal sin fricción por una fuerza horizontal de 10.0 N. Si se duplica la fuerza aplicada, la fuerza normal sobre la caja *a*) se incrementará, *b*) permanecerá igual; *c*) disminuirá.

Tensión en una cuerda flexible

Cuando una cuerda flexible tira de un objeto, se dice que la cuerda está bajo **tensión**, y la fuerza que ejerce la cuerda sobre el objeto es la tensión F_T. Si la cuerda tiene una masa despreciable, la fuerza ejercida en un extremo se transmite sin cambio a cada parte adyacente de la cuerda, a lo largo de toda su longitud hasta el otro extremo. ¿Por qué? Porque $\Sigma\vec{F} = m\vec{a} = 0$ para la cuerda, si la masa *m* de la cuerda es igual a cero (o despreciable), sin importar cuál sea $\vec{a}$ por consiguiente, las fuerzas que jalan la cuerda en sus dos extremos deben sumar cero (F_T y $-F_T$). Advierta que los cables y las cuerdas flexibles sólo pueden jalar. No pueden empujar porque se doblan.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Las cuerdas pueden jalar, pero no pueden empujar; la tensión existe a lo largo de una cuerda

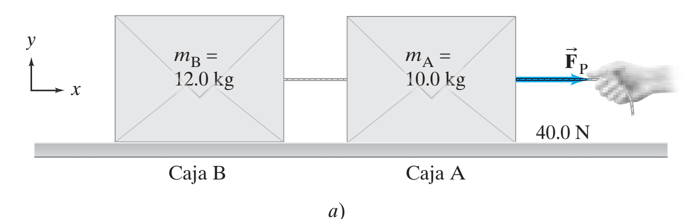
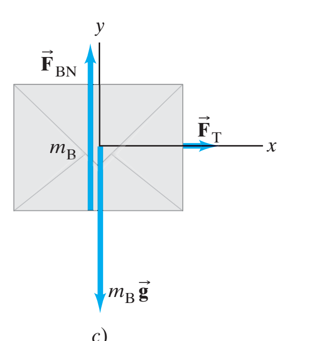


FIGURA 4–22 Ejemplo 4-12. *a*) Dos cajas, A y B, están conectadas por una cuerda. Una persona jala horizontalmente sobre la caja A con una fuerza F_P = 40.0 N. *b*) Diagrama de cuerpo libre de la caja A. *c*) Diagrama de cuerpo libre de la caja B.



y
$\vec{F}_{BN}$
$\vec{F}_T$
x
m_B
$m_B\vec{g}$
c)

El siguiente ejemplo considera dos cajas atadas mediante una cuerda. Nos referimos a este grupo de objetos como un sistema, que se define como cualquier grupo de uno o más objetos que se eligen considerar y estudiar.

EJEMPLO 4–12 **Dos cajas atadas con una cuerda.** Dos cajas, A y B, están atadas con una cuerda delgada y descansan sobre una mesa lisa (sin fricción). Las cajas tienen masa de 12.0 kg y 10.0 kg. Una fuerza horizontal F_P de 40.0 N se aplica a la caja de 10.0 kg, como se muestra en la figura 4-22a. Encuentre *a*) la aceleración de cada caja, y *b*) la tensión en la cuerda que las une.

PLANTEAMIENTO Simplificamos el planteamiento al no mencionar cada paso (como en el ejemplo anterior). Tenemos dos cajas, así que dibujamos un diagrama de cuerpo libre para cada una. Para dibujarlos correctamente, debemos considerar las fuerzas que actúan sobre *cada* caja, de manera que podamos aplicar la segunda ley de Newton a cada una. La persona ejerce una fuerza F_P sobre la caja A. La caja A ejerce una fuerza F_T sobre la cuerda y ésta ejerce una fuerza F_T de la misma magnitud pero de sentido opuesto sobre la caja A (tercera ley de Newton). Esas fuerzas horizontales sobre la caja A se muestran en la figura 4-22b, junto con la fuerza de gravedad $m_A\vec{g}$ hacia abajo y la fuerza normal $\vec{F}_{AN}$ eque ejerce la mesa hacia arriba. La cuerda es delgada así que consideramos que su masa es despreciable. Por lo tanto, la tensión en cada extremo de la cuerda es la misma. En consecuencia, la cuerda ejerce una fuerza F_T sobre la segunda caja; la figura 4-22c muestra las fuerzas sobre la caja B, que son $\vec{F}_T$, $m_B\vec{g}$, y la fuerza normal $\vec{F}_{BN}$. Habrá sólo movimiento horizontal y tomamos el eje x positivo hacia la derecha.

SOLUCIÓN *a*) Aplicamos $\Sigma F_x = ma_x$ a la caja A:

$$\Sigma F_x = F_P - F_T = m_A a_A. \qquad \text{[caja A]}$$

Para la caja B, la única fuerza horizontal es F_T, por lo que

$$\Sigma F_x = F_T = m_B a_B. \qquad \text{[caja B]}$$

Las cajas están conectadas, y si la cuerda permanece tensa y no se estira, entonces las dos cajas tendrán la misma aceleración a. Por lo tanto, $a_A = a_B = a$ y se nos dan m_A = 10.0 kg y m_B = 12.0 kg. Sumamos las dos ecuaciones anteriores para eliminar una incógnita (F_T) y obtenemos

$$(m_A + m_B)a = F_P - F_T + F_T = F_P$$

o bien,

$$a = \frac{F_P}{m_A + m_B} = \frac{40.0\,\text{N}}{22.0\,\text{kg}} = 1.82\,\text{m/s}^2,$$

que es la aceleración que estamos buscando.

Solución alterna Habríamos obtenido el mismo resultado considerando un solo sistema de masa $m_A + m_B$, sobre el que actúa una fuerza horizontal neta igual a F_P. (Las fuerzas de tensión F_T se consideran fuerzas internas al sistema como un todo y, sumadas harían una contribución cero a la fuerza neta sobre el sistema *completo*).

b) De la ecuación anterior para la caja B ($F_T = m_B a_B$), la tensión en la cuerda es

$$F_T = m_B a = (12.0\,\text{kg})(1.82\,\text{m/s}^2) = 21.8\,\text{N}.$$

Así, F_T es menor que F_P (= 40.0 N), como esperábamos, ya que F_T acelera sólo a m_B.

NOTA Sería tentador afirmar que la fuerza que ejerce la persona, F_P, no sólo actúa sobre la caja A, sino que también actúa sobre la caja B. Sin embargo, no es así. F_P sólo actúa sobre la caja A y afecta a la caja B a través de la tensión en la cuerda, F_T, que actúa sobre la caja B y la acelera.



Para cualquier objeto dado, considere sólo las fuerzas que actúan sobre dicho objeto para calcular $\Sigma F = ma$

EJEMPLO 4–13 **Elevador y contrapeso (máquina de Atwood).** A un sistema de dos objetos suspendidos sobre una polea mediante un cable flexible, según se muestra en la figura 4-23a, se le llama a veces *máquina de Atwood*. Considere la aplicación de la vida real de un elevador (m_E) y su contrapeso (m_C). Para minimizar el trabajo hecho por el motor para levantar y bajar el elevador con seguridad, se toman valores similares de las masas m_E y m_C. Dejamos el motor fuera del sistema para este cálculo y suponemos que la masa del cable es despreciable y que la masa de la polea, así como cualquier fricción, es pequeña y despreciable. Estas suposiciones garantizan que la tensión F_T en el cable tiene la misma magnitud en ambos lados de la polea. Sea la masa del contrapeso $m_C = 1000$ kg. Supongamos que la masa del elevador vacío es de 850 kg y que su masa al llevar cuatro pasajeros es $m_E = 1150$ kg. Para este último caso ($m_E = 1150$ kg), calcule *a*) la aceleración del elevador y *b*) la tensión en el cable.



Elevador (como una máquina de Atwood)

PLANTEAMIENTO De nuevo tenemos dos objetos y es necesario aplicar la segunda ley de Newton a cada uno de ellos por separado. Sobre cada masa actúan dos fuerzas: la gravedad hacia abajo y la tensión del cable que jala hacia arriba, $\vec{\mathbf{F}}_T$. Las figuras 4-23b y c muestran los diagramas de cuerpo libre para el elevador (m_E) y para el contrapeso (m_C). El elevador, siendo lo más pesado, acelerará hacia abajo y el contrapeso acelerará hacia arriba. Las magnitudes de sus aceleraciones serán iguales (suponemos que el cable no se estira). Para el contrapeso, $m_C g = (1000 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 9800$ N, por lo que F_T debe ser mayor que 9800 N (para que m_C acelere hacia arriba). Para el elevador, $m_E g = (1150 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 11{,}300$ N, que debe tener una magnitud mayor que F_T para que m_E acelere hacia abajo. Nuestro cálculo debe entonces dar F_T entre 9800 N y 11,300 N.

SOLUCIÓN *a*) Para encontrar F_T así como la aceleración *a*, aplicamos la segunda ley de Newton, $\Sigma F = ma$ a cada objeto. Tomamos como positiva la dirección *y* hacia arriba para ambos objetos. Con esta elección de ejes, $a_C = a$ porque m_C acelera hacia arriba, y $a_E = -a$ porque m_E acelera hacia abajo. Entonces,

$$F_T - m_E g = m_E a_E = -m_E a$$
$$F_T - m_C g = m_C a_C = +m_C a.$$

Restamos la primera ecuación de la segunda y obtenemos

$$(m_E - m_C)g = (m_E + m_C)a,$$

donde *a* es ahora la única incógnita. Despejamos *a*:

$$a = \frac{m_E - m_C}{m_E + m_C} g = \frac{1150 \text{ kg} - 1000 \text{ kg}}{1150 \text{ kg} + 1000 \text{ kg}} g = 0.070g = 0.68 \text{ m/s}^2.$$

El elevador (m_E) acelera hacia abajo (y el contrapeso m_C acelera hacia arriba) con $a = 0.070g = 0.68 \text{ m/s}^2$.

b) La tensión F_T en el cable puede obtenerse de cualquiera de las dos ecuaciones $\Sigma F = ma$, considerando que $a = 0.070g = 0.68 \text{ m/s}^2$:

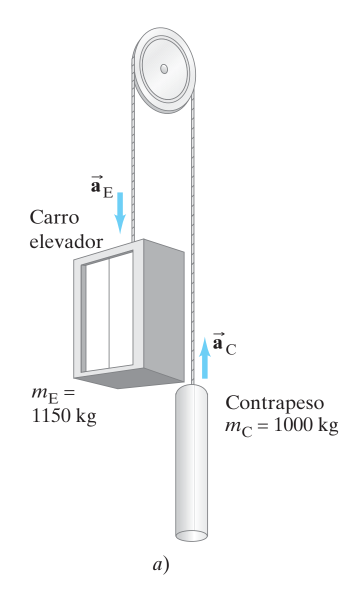
$$F_T = m_E g - m_E a = m_E(g - a)$$
$$= 1150 \text{ kg}\left(9.80 \text{ m/s}^2 - 0.68 \text{ m/s}^2\right) = 10{,}500 \text{ N},$$

o bien,

$$F_T = m_C g + m_C a = m_C(g + a)$$
$$= 1000 \text{ kg}\left(9.80 \text{ m/s}^2 + 0.68 \text{ m/s}^2\right) = 10{,}500 \text{ N},$$

que son consistentes. Como se predijo, nuestro resultado se encuentra entre 9800 N y 11,300 N.

NOTA Podemos comprobar nuestra ecuación para la aceleración *a* en este ejemplo notando que si las masas son iguales ($m_E = m_C$), entonces nuestra ecuación de arriba para *a* daría $a = 0$, como esperaríamos. Además, si una de las masas es cero (digamos, $m_C = 0$), entonces la otra masa ($m_E \neq 0$) según nuestra ecuación aceleraría a $a = g$, también como esperaríamos.



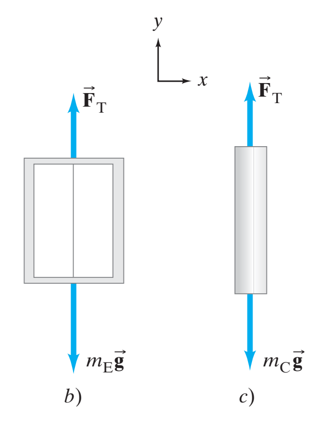


FIGURA 4–23 Ejemplo 4.13. *a*) Máquina de Atwood en forma de un sistema elevador-contrapeso. *b*) y *c*) Diagramas de cuerpo libre para los dos objetos.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Compruebe su resultado viendo si predice situaciones donde la respuesta puede estimarse fácilmente

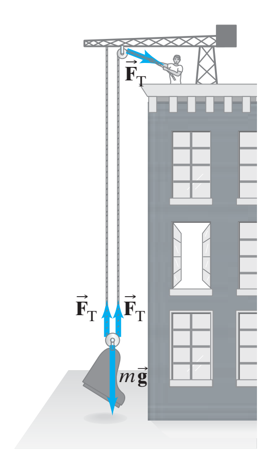


FIGURA 4–24 Ejemplo 4–14.

EJEMPLO CONCEPTUAL 4–14 **La ventaja mecánica de una polea.** Un trabajador de mudanzas intenta levantar un piano (lentamente) hasta un departamento en un segundo piso (figura 4-24). Usa una cuerda que pasa alrededor de dos poleas, como se muestra. ¿Qué fuerza debe ejercer el trabajador sobre la cuerda para levantar lentamente el piano de 2000 N de peso?

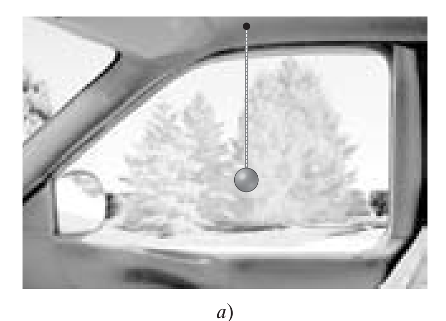
RESPUESTA Si ignoramos la masa de la cuerda, la magnitud de la fuerza de tensión F_T en la cuerda es la misma en cualquier punto a lo largo de toda la cuerda. Primero hay que enfocarse en las fuerzas que actúan sobre la polea inferior. El peso del piano jala hacia abajo sobre la polea mediante un cable corto. La tensión en la cuerda, que pasa alrededor de esta polea, jala el *doble* hacia arriba, una vez a cada lado de la polea. Apliquemos la segunda ley de Newton a la combinación polea-piano (de masa m), eligiendo la dirección positiva hacia arriba:

$$2F_T - mg = ma.$$

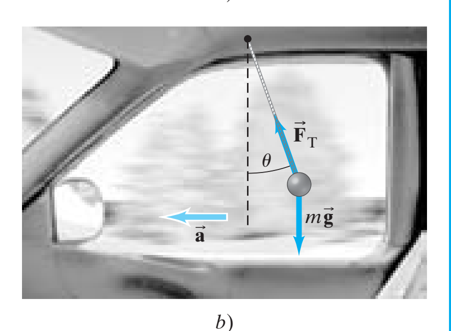
Para mover el piano con rapidez constante (es decir, $a = 0$ en esta ecuación) se requiere una tensión en la cuerda y, por lo tanto, un jalón sobre ésta de $F_T = mg/2$. El trabajador puede ejercer una fuerza igual a la mitad del peso del piano. Decimos entonces que la polea tiene una **ventaja mecánica** de 2, ya que sin la polea el trabajador tendría que ejercer una fuerza doble.

FÍSICA APLICADA
Acelerómetro

FIGURA 4–25 Ejemplo 4–15.



a)



b)

EJEMPLO 4–15 **Acelerómetro.** Una pequeña masa m cuelga de una cuerda delgada y puede oscilar como un péndulo. Usted la fija arriba de la ventanilla de su automóvil, como se muestra en la figura 4-25a. Cuando el automóvil está en reposo, la cuerda cuelga verticalmente. ¿Qué ángulo θ forma la cuerda *a*) cuando el automóvil acelera con una aceleración constante $a = 1.20\ \text{m/s}^2$, y *b*) cuando el automóvil se mueve con una velocidad constante, $v = 90$ km/h?

PLANTEAMIENTO El diagrama de cuerpo libre de la figura 4-25b muestra el péndulo formando un ángulo θ con la vertical y las fuerzas que actúan sobre él: $m\vec{g}$ hacia abajo y la tensión $\vec{F}_T$ en la cuerda. Si $\theta \neq 0$, estas fuerzas no suman cero, y dado que tenemos una aceleración a, por lo tanto, esperamos que $\theta \neq 0$. Note que θ es el ángulo relativo a la vertical.

SOLUCIÓN *a*) La aceleración $a = 1.20\ \text{m/s}^2$ es horizontal, por lo que de la segunda ley de Newton queda,

$$ma = F_T \operatorname{sen}\theta$$

para la componente horizontal, mientras que la componente vertical da

$$0 = F_T \cos\theta - mg.$$

Al dividir estas dos ecuaciones, obtenemos

$$\tan\theta = \frac{F_T \operatorname{sen}\theta}{F_T \cos\theta} = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}$$

o bien,

$$\tan\theta = \frac{1.20\ \text{m/s}^2}{9.80\ \text{m/s}^2} = 0.122,$$

por lo que

$$\theta = 7.0°.$$

b) La velocidad es constante, por lo que $a = 0$ y $\tan\theta = 0$. Por consiguiente, el péndulo cuelga verticalmente ($\theta = 0°$).

NOTA Este dispositivo sencillo es un **acelerómetro**, y puede usarse para medir la aceleración.

Planos inclinados

Ahora consideraremos lo que sucede cuando un objeto resbala hacia abajo sobre un plano inclinado, como una colina o una rampa. Tales problemas son interesantes porque la gravedad es la fuerza aceleradora, pero esta aceleración no es vertical. En general, los problemas son más fáciles de resolver si elegimos el sistema coordenado *xy*, de manera que un eje señale en la dirección de la aceleración. Por consiguiente, a menudo consideramos el eje *x* positivo apuntando a lo largo del plano inclinado y el eje *y* perpendicular a éste; véase la figura 4-26a. Advierta también que la fuerza normal no es vertical, sino perpendicular al plano (figura 4-26b).



Una buena selección del sistema coordenado simplifica los cálculos

EJEMPLO 4–16 Una caja se desliza hacia abajo por un plano inclinado. Una caja de masa m se coloca sobre un plano inclinado (sin fricción) que forma un ángulo θ con la horizontal, como se muestra en la figura 4-26a. *a*) Determine la fuerza normal sobre la caja. *b*) Determine la aceleración de la caja. *c*) Evalúe lo anterior para una masa $m = 10$ kg y un plano inclinado con un ángulo $\theta = 30°$.

PLANTEAMIENTO El movimiento se da a lo largo del plano inclinado, por lo que elegimos el eje *x* positivo hacia abajo a lo largo de la pendiente (p.ej. en la dirección del movimiento). El eje *y* se toma perpendicular al plano inclinado, es decir hacia arriba. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 4-26b. Las fuerzas sobre la caja son su peso mg que actúa verticalmente hacia abajo, y se muestra resuelto en sus componentes paralela y perpendicular al plano inclinado y la fuerza normal F_N. El plano inclinado actúa como una restricción, permitiendo el movimiento a lo largo de su superficie. La fuerza "restrictiva" es la fuerza normal.

SOLUCIÓN *a*) No hay movimiento en la dirección *y*, por lo que $a_y = 0$. Aplicando la segunda ley de Newton, tenemos

$$F_y = ma_y$$
$$F_N - mg\cos\theta = 0,$$

donde F_N y la componente *y* de la gravedad ($mg \cos\theta$) son todas las fuerzas que actúan sobre la caja en la dirección *y*. Entonces, la fuerza normal está dada por

$$F_N = mg\cos\theta.$$

Note cuidadosamente que a menos que $\theta = 0°$, F_N tiene una magnitud menor que el peso mg.

(*b*) En la dirección *x*, la única fuerza que actúa es la componente *x* de $m\vec{\mathbf{g}}$, que vemos del diagrama que es igual a $mg \text{ sen }\theta$. La aceleración a está en la dirección *x*, por lo que

$$F_x = ma_x$$
$$mg \text{ sen }\theta = ma,$$

y vemos que la aceleración hacia abajo del plano es

$$a = g \text{ sen }\theta.$$

La aceleración a lo largo de un plano inclinado es siempre menor que g, excepto cuando $\theta = 90°$, en cuyo caso $\text{sen }\theta = 1$ y $a = g$. Esto tiene sentido, ya que para $\theta = 90°$ se tiene una caída vertical pura. Para $\theta = 0°$, $a = 0$, lo cual tiene sentido, ya que $\theta = 0°$ significa que el plano es horizontal y la gravedad no causa aceleración alguna. Advierta también que la aceleración no depende de la masa m de la caja.

c) Para $\theta = 30°$, $\cos\theta = 0.866$ y $\text{sen }\theta = 0.500$, así que

$$F_N = 0.866mg = 85\,\text{N},$$

y

$$a = 0.500g = 4.9\,\text{m/s}^2.$$

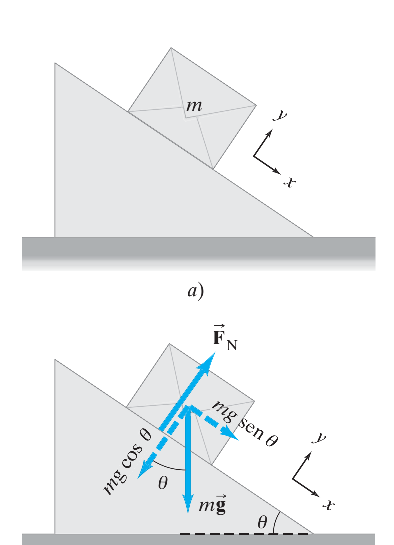


FIGURA 4–26 Ejemplo 4-16. *a*) Caja que se desliza sobre un plano inclinado. *b*) Diagrama de cuerpo libre de la caja.

Veremos más ejemplos acerca del movimiento sobre un plano inclinado en el capítulo siguiente, donde se incluirá la fricción.

4–8 Resolución de problemas: Un enfoque general

Una parte básica de un curso de física consiste en la resolución efectiva de problemas. El enfoque discutido aquí, aunque enfatiza las leyes de Newton, puede aplicarse por lo general para los otros temas que se verán a lo largo de este libro.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En general

1. **Lea** y relea cuidadosamente los problemas. Un error común es dejar fuera una palabra o dos durante la lectura, lo cual puede cambiar por completo el significado de un problema.
2. **Dibuje** un diagrama o croquis preciso de la situación. (Esto es lo que se pasa por alto con mayor frecuencia y, sin embargo, es lo más fundamental en la resolución de problemas). Use flechas para representar vectores tales como velocidad o fuerza, y márquelos con símbolos apropiados. Al tratar con fuerzas y usar las leyes de Newton, asegúrese de incluir todas las fuerzas que actúan sobre un objeto dado, incluidas las fuerzas desconocidas, y establezca claramente cuáles fuerzas actúan sobre cada cuerpo (de otra manera podría usted equivocarse en la determinación de la *fuerza neta* sobre un objeto específico).
3. Dibuje un **diagrama de cuerpo libre** por separado para cada objeto implicado, que muestre *todas* las fuerzas externas que actúan sobre un objeto dado (y sólo sobre ese objeto). No muestre las fuerzas que ejerce el objeto sobre otros objetos.
4. Elija un **sistema coordenado** *xy* conveniente (uno que haga sus cálculos más fáciles, por ejemplo considerando un eje paralelo o antiparalelo a la aceleración). Descomponga los vectores en sus componentes a lo largo de los ejes coordenados elegidos. Al usar la segunda ley de Newton, aplique $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ por separado a las componentes x y y, considerando que las fuerzas en la dirección x están relacionadas con a_x y similarmente para y. Si interviene más de un objeto, puede elegir sistemas coordenados diferentes (convenientes) para cada uno.
5. Elabore una lista de los datos conocidos y de las incógnitas (que está usted tratando de determinar) y decida lo que necesita para hallarlas. Para los problemas de este capítulo, usamos las leyes de Newton. Por lo general, ayudan a ver si hay una o más **relaciones** (o **ecuaciones**) que relacionen las incógnitas con los datos de entrada. Sin embargo, asegúrese de que cada relación sea aplicable en el caso considerado. Es muy importante conocer los límites de validez de cada fórmula o relación, es decir, cuándo es válida y cuándo no. En este libro, se han numerado las ecuaciones más generales, pero incluso ésas pueden tener un rango de validez limitado (a menudo indicado entre corchetes, a la derecha de la ecuación).
6. Trate de resolver el problema en forma aproximada, para ver si se puede resolver (verificar si tenemos información suficiente) y si es razonable. Use su intuición y haga **cálculos burdos**; véase “estimación del orden de magnitud” en la sección 1-6. Un cálculo burdo o una conjetura razonable acerca del posible rango de las respuestas finales resulta de mucha utilidad. Además, un cálculo burdo puede compararse con la respuesta final para detectar errores en el cálculo, tales como la posición del punto decimal o las potencias de 10.
7. **Resuelva** el problema, lo que puede incluir manipulaciones algebraicas de ecuaciones y/o cálculos numéricos. Recuerde la regla matemática de que se requieren tantas ecuaciones independientes como incógnitas que se tengan; por ejemplo, si usted tiene tres incógnitas, necesitará tres ecuaciones independientes. Usualmente, es mejor trabajar algebraicamente antes de insertar los valores numéricos. ¿Por qué? Porque *a*) puede entonces resolver una serie de problemas similares con valores numéricos diferentes; *b*) puede revisar su resultado para casos bien entendidos (digamos, $\theta = 0°$ o $90°$); *c*) puede haber cancelaciones u otras simplificaciones; *d*) habrá usualmente menos posibilidades de cometer errores numéricos; y *e*) porque así puede tener una mejor comprensión del problema.
8. Asegúrese de llevar un control de **unidades**, ya que pueden servirle como una comprobación (deben quedar equilibradas en ambos lados de cualquier ecuación).
9. De nuevo, considere si su respuesta es **razonable**. El uso del análisis dimensional, descrito en la sección 1-7, también sirve como una comprobación en muchos problemas.

Resumen

Las **tres leyes de Newton del movimiento** son las leyes clásicas básicas que describen el movimiento.

La **primera ley de Newton** (la ley de la inercia) establece que si la fuerza neta sobre un objeto es cero, entonces un objeto originalmente en reposo permanecerá en reposo, y un objeto originalmente en movimiento permanecerá en movimiento en línea recta con velocidad constante.

La **segunda ley de Newton** establece que la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él, e inversamente proporcional a su masa:

$$\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}. \qquad \textbf{(4–1a)}$$

La segunda ley de Newton es una de las leyes más importantes y fundamentales en la física clásica.

La **tercera ley de Newton** establece que siempre que un objeto ejerce una fuerza sobre un segundo objeto, el segundo objeto siempre ejerce una fuerza sobre el primer objeto, de la misma magnitud y dirección pero de sentido contrario:

$$\vec{\mathbf{F}}_{AB} = -\vec{\mathbf{F}}_{BA}, \quad (4–2)$$

donde $\vec{\mathbf{F}}_{BA}$ es la fuerza que ejerce el objeto A sobre el objeto B. Esto es válido incluso si los objetos se están moviendo o acelerando, y/o si tienen masas diferentes.

La tendencia de un objeto a resistir un cambio en su movimiento se llama **inercia**. La **masa** es una medida de la inercia de un objeto.

El **peso** se refiere a la **fuerza gravitacional** que ejerce la Tierra sobre un objeto, y es igual al producto de la masa m del objeto y de la aceleración de la gravedad $\vec{\mathbf{g}}$:

$$\vec{\mathbf{F}}_G = m\vec{\mathbf{g}}. \quad (4–3)$$

La **fuerza**, que es un vector, puede considerarse como un empuje o como un jalón; o de acuerdo con la segunda ley de Newton, la fuerza se define como una acción capaz de dar producir una aceleración. La **fuerza neta** sobre un objeto es la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el objeto.

Para resolver problemas que implican fuerzas sobre uno o más objetos, es esencial dibujar un **diagrama de cuerpo libre** para cada objeto, que muestre todas las fuerzas que actúan sobre sólo ese objeto. La segunda ley de Newton puede aplicarse a las componentes vectoriales para cada objeto.

Preguntas

1. ¿Por qué un niño en un carrito parece que cae hacia atrás, cuando usted le da al carrito un jalón repentino hacia adelante?
2. Una caja descansa sobre la plataforma (sin fricción) de un camión. El conductor del camión lo pone en marcha y acelera hacia adelante. La caja comienza inmediatamente a deslizarse hacia la parte trasera de la plataforma del camión. Analice el movimiento de la caja en términos de las leyes de Newton, como es visto *a*) por Andrea que está parada en el suelo al lado del camión, y *b*) por Jim que viaja en el camión (figura 4-27).

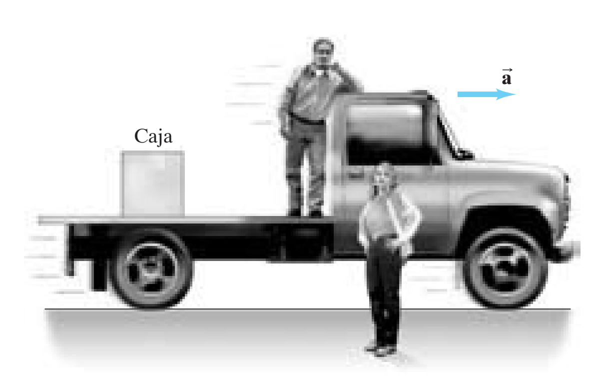


FIGURA 4–27 Pregunta 2.

3. Si la aceleración de un objeto es cero, ¿significa que no actúan fuerzas sobre el objeto? Explique.
4. Si un objeto se mueve, ¿es posible que la fuerza neta que actúa sobre él sea cero?
5. Sólo actúa una fuerza sobre un objeto. ¿El objeto puede tener aceleración cero? ¿Puede tener velocidad cero? Explique.
6. Cuando una pelota de golf se deja caer al pavimento, rebota hacia arriba. *a*) ¿Es necesaria una fuerza para hacerla rebotar? *b*) Si es así, ¿qué es lo que ejerce esa fuerza?
7. Si usted intenta caminar sobre un tronco que flota en un lago, ¿por qué el tronco se mueve en dirección opuesta?
8. ¿Por qué podría lastimarse el pie si usted patea un escritorio pesado o una pared?
9. Cuando usted está corriendo y quiere detenerse rápidamente, debe desacelerar muy rápido. *a*) ¿Cuál es el origen de la fuerza que ocasiona que usted se detenga? *b*) Estime (usando su propia experiencia) la tasa máxima de desaceleración de una persona, que corre a velocidad máxima, necesaria para alcanzar el reposo.
10. *a*) ¿Por qué empuja usted hacia abajo con más fuerza sobre los pedales de una bicicleta al principio, que cuando ésta se mueve con rapidez constante? *b*) ¿Por qué necesita pedalear cuando rueda con rapidez constante?
11. Un padre y su hija pequeña patinan sobre hielo y se encuentran de frente entre sí en reposo; luego, se empujan mutuamente, moviéndose en direcciones opuestas. ¿Cuál de ellos tendrá la mayor velocidad final?
12. Suponga que usted está parado sobre una caja de cartón que justo apenas logra sostenerlo. ¿Qué le pasaría a la caja si usted saltara hacia arriba en el aire? *a*) se colapsaría; *b*) no se vería afectada; c) se elevaría un poco; *d*) se movería lateralmente.
13. Una piedra cuelga de un hilo delgado del techo y una sección del mismo hilo cuelga por debajo de la piedra (figura 4-28). Si una persona le da un fuerte jalón a la hebra que cuelga, ¿dónde es más probable que el hilo se rompa: debajo de la piedra o arriba de ella? ¿Y si la persona le da un jalón lento y constante? Explique sus respuestas.

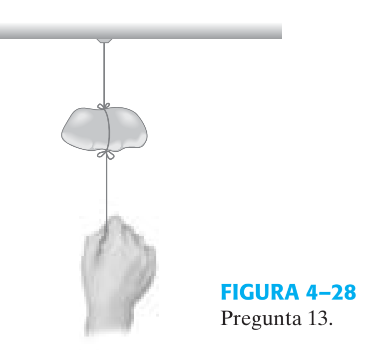


FIGURA 4–28 Pregunta 13.

14. La fuerza de gravedad sobre una roca de 2 kg es dos veces mayor que sobre una roca de 1 kg. ¿Por qué la roca más pesada no cae más rápido?
15. ¿Una báscula de resorte que se lleva a la Luna proporcionaría resultados precisos si la báscula se hubiera calibrado en la Tierra, *a)* en libras o *b)* en kilogramos?
16. Usted jala una caja aplicando una fuerza constante, a lo largo de una mesa sin fricción mediante una cuerda que la ata y que se mantiene horizontalmente. Si ahora jala la soga con la misma fuerza en un ángulo con la horizontal (con la caja todavía sobre la mesa), ¿la aceleración de la caja *a*) permanece igual, *b*) aumenta, o *c*) disminuye? Explique su respuesta.
17. Cuando un objeto cae libremente bajo la influencia de la gravedad, existe una fuerza neta mg sobre el objeto que es ejercida por la Tierra. Sin embargo, por la tercera ley de Newton, el objeto ejerce una fuerza de la misma magnitud y dirección pero de sentido opuesto sobre la Tierra. ¿La Tierra se mueve?
18. Compare el esfuerzo (o fuerza) necesario(a) para levantar un objeto de 10 kg en la Luna, con el esfuerzo necesario para levantarlo en la Tierra. Compare la fuerza necesaria para lanzar un objeto de 2 kg horizontalmente con una rapidez dada en la Luna y en la Tierra.

19. ¿Cuál de los siguientes objetos pesa aproximadamente 1 N: *a*) una manzana, *b*) un mosquito, *c*) este libro, *d*) usted?

20. De acuerdo con la tercera ley de Newton, en la competencia de jalar la cuerda (figura 4-29) cada equipo jala con una fuerza de igual magnitud pero sentido opuesto sobre el otro equipo. ¿Qué determina entonces qué equipo ganará?



FIGURA 4–29 Pregunta 20. Juego de jalar la cuerda. Describa las fuerzas ejercidas sobre cada uno de los equipos y sobre la cuerda.

21. Cuando está parado sobre el suelo, ¿qué tan grande es la fuerza que el suelo ejerce sobre usted? ¿Por qué esta fuerza no lo levanta a usted en el aire?

22. En ocasiones, en los accidentes automovilísticos, los tripulantes sufren lesiones cervicales cuando el automóvil de la víctima es golpeado violentamente por atrás. Explique por qué la cabeza de la víctima parece ser lanzada hacia atrás en esta situación. ¿Es así realmente?

23. Mary ejerce una fuerza hacia arriba de 40 N para sostener una bolsa de provisiones. Describa la fuerza de “reacción” a esta fuerza (tercera ley de Newton) enunciando *a*) su magnitud, *b*) su sentido, *c*) sobre qué objeto se ejerce, y *d*) y qué objeto la ejerce.

24. El dispositivo que se muestra en la figura 4-30 se usa en algunos parques nacionales para mantener las provisiones de los excursionistas fuera del alcance de los osos. Explique por qué la fuerza necesaria para levantar las provisiones aumenta cuando éstas están cada vez más altas. ¿Es posible jalar la cuerda lo suficientemente fuerte para que no tenga deflexión alguna?

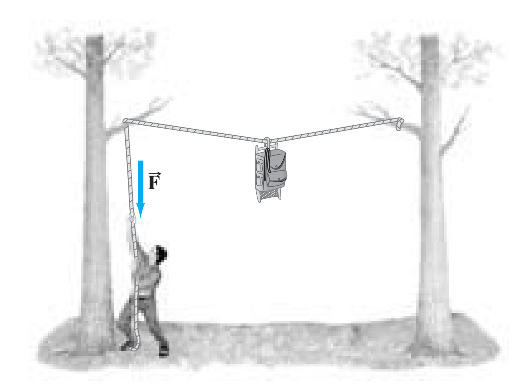


FIGURA 4–30 Pregunta 24.

Problemas

4–4 a 4-6 Leyes de Newton, fuerza gravitacional, fuerza normal

1. (I) ¿Qué fuerza se requiere para acelerar a un niño sobre un trineo (masa total = 55 kg) a 1.4 m/s^2?

2. (I) Una fuerza neta de 265 N acelera a una persona en bicicleta a 2.30 m/s^2. ¿Cuál es la masa de la persona junto con la bicicleta?

3. (I) ¿Cuál es el peso de un astronauta de 68 kg *a*) en la Tierra, *b*) en la Luna (g = 1.7 m/s^2), *c*) en Marte (g = 3.7 m/s^2), *d*) en el espacio exterior viajando con velocidad constante?

4. (I) ¿Cuánta tensión debe resistir una cuerda si se usa para acelerar horizontalmente un automóvil de 1210 kg, a lo largo de una superficie sin fricción a 1.20 m/s^2?

5. (II) Superman debe detener un tren que viaja a 120 km/h en 150 m para evitar que choque contra un automóvil parado sobre las vías. Si la masa del tren es de 3.6×10^5 kg, ¿cuánta fuerza debe ejercer el superhéroe? Compárela con el peso del tren (dado como %). ¿Cuanta fuerza ejerce el tren sobre Superman?

6. (II) ¿Qué fuerza promedio se requiere para detener un automóvil de 950 kg en 8.0 s, si éste viaja inicialmente a 95 km/h?

7. (II) Estime la fuerza promedio ejercida por un lanzador de bala sobre una bala de 7.0 kg, si ésta se mueve a lo largo de una distancia de 2.8 m y se suelta con una rapidez de 13 m/s.

8. (II) Una pelota de béisbol de 0.140 kg que viaja a 35.0 m/s golpea el guante del *catcher*, que al llevarla al reposo, se mueve hacia atrás 11.0 cm. ¿Cuál fue la fuerza promedio aplicada por la pelota al guante?

9. (II) Un deportista saca verticalmente del agua un pescado con una aceleración de 2.5 m/s^2, usando un cordel para pescar muy ligero, que aguanta una tensión máxima de 18 N ($\approx$ 4 lb) antes de romperse. Por desgracia, el pescador pierde a su presa porque el cordel se rompe. ¿Qué puede usted decir acerca de la masa del pez?

10. (II) Una caja de 20.0 kg descansa sobre una mesa. *a*) ¿Cuáles son el peso de la caja y la fuerza normal que actúa sobre ella? *b*) Una caja de 10.0 kg se coloca sobre la parte superior de la caja de 20.0 kg, como se indica en la figura 4-31. Determine la fuerza normal que ejerce la mesa sobre la caja de 20.0 kg y la fuerza normal que ejerce la caja de 20.0 kg sobre la caja de 10.0 kg.

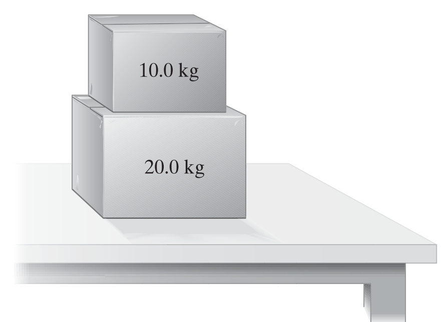


FIGURA 4–31 Problema 10.

11. (II) ¿Qué fuerza promedio se necesita para acelerar una bala de 9.20 gramos, desde el reposo hasta 125 m/s en una distancia de 0.800 m a lo largo del barril de un fusil?

12. (II) ¿Cuánta tensión debe resistir una cuerda, si se utiliza para acelerar un vehículo de 1200 kg verticalmente hacia arriba a 0.70 m/s^2?

13. (II) Una cubeta de 14.0 kg se baja verticalmente por una cuerda, en la que hay una tensión de 163 N en un instante dado. ¿Cuál es entonces la aceleración de la cubeta? ¿Es hacia arriba o hacia abajo?

14. (II) Un automóvil de carreras específico puede recorrer un cuarto de milla (402 m) en 6.40 segundos, partiendo del reposo. Suponiendo que la aceleración es constante, ¿cuántas “g” sufrirá el piloto? Si la masa combinada del piloto y del auto es de 535 kg, ¿qué fuerza horizontal debe ejercer el camino sobre los neumáticos?

15. (II) Un ladrón de poca monta de 75 kg quiere escapar de la cárcel por la ventana de un tercer piso. Para su mala fortuna, una cuerda hecha de sábanas unidas entre sí puede soportar sólo una masa de 58 kg. ¿Cómo podría usar el ladrón esta "cuerda" para escapar? Dé una respuesta cuantitativa.

16. (II) Debe diseñarse un elevador (masa de 4850 kg) de manera que su aceleración máxima sea de $0.0680g$. ¿Cuáles son las fuerzas máxima y mínima que el motor debe ejercer en el cable de soporte?

17. (II) ¿Los automóviles pueden frenarse a lo largo de una moneda? Calcule la aceleración de un auto de 1400 kg, si éste puede detenerse desde 35 km/h hasta cero a lo largo de una moneda (diámetro = 1.7 cm). ¿A cuántas g corresponde esta aceleración? ¿Cuál es la fuerza que siente un pasajero de 68 kg en el auto?

18. (II) Una persona está parada sobre una báscula de baño en un elevador en reposo. Cuando el elevador empieza a moverse, la báscula registra por unos instantes sólo 0.75 del peso regular de la persona. Calcule la aceleración del elevador y encuentre el sentido de ésta.

19. (II) Los elevadores de alta velocidad funcionan con dos limitaciones: 1) la magnitud máxima de la aceleración vertical que un cuerpo humano promedio puede experimentar sin sentir incomodidad es de aproximadamente 1.2 m/s^2; y 2) la rapidez máxima típica alcanzable es de aproximadamente 9.0 m/s. Usted se sube a un elevador en la planta baja de un rascacielos y se transporta 180 m por arriba del nivel del suelo en tres etapas: aceleración de magnitud 1.2 m/s^2 desde el reposo hasta 9.0 m/s, seguida por una etapa de velocidad constante hacia arriba de 9.0 m/s, y por último una desaceleración de magnitud 1.2 m/s^2 desde 9.0 m/s hasta el reposo. *a*) Determine el tiempo transcurrido en cada una de las tres etapas. *b*) Determine el cambio en la magnitud de la fuerza normal ejercida por el piso del elevador, expresada como un porcentaje de su peso normal durante cada etapa. *c*) ¿En qué fracción del tiempo total de recorrido, la fuerza normal no es igual al peso de la persona?

20. (II) Usando luz láser enfocada, una *pinza óptica* puede aplicar una fuerza de aproximadamente 10 pN a una cuenta de poliestireno de 1.0 μm de diámetro, cuya densidad es casi igual a la del agua: un volumen de 1.0 cm^3 tiene una masa de aproximadamente 1.0 g. Estime la aceleración de la cuenta expresada en múltiplos de g.

21. (II) Un cohete tiene una masa de 2.75×10^6 kg y ejerce una fuerza vertical de 3.55×10^7 N sobre los gases que expele. Determine *a*) la aceleración del cohete, *b*) su velocidad después de 8.0 s, y *c*) qué tiempo le tomará alcanzar una altura de 9500 m. Suponga que g permanece constante y desprecie la masa del gas expelido (lo cual no es realista).

22. (II) *a*) ¿Cuál es la aceleración de dos paracaidistas en caída (masa = 132 kg incluyendo el paracaídas), cuando la fuerza hacia arriba de resistencia del aire es igual a un cuarto de su peso? *b*) Después de que se abren los paracaídas, las personas descienden tranquilamente al suelo con rapidez constante. ¿Cuál es ahora la fuerza de resistencia del aire sobre los paracaidistas y sus paracaídas? Véase la figura 4-32.



FIGURA 4–32 Problema 22.

23. (II) Un excepcional salto de pie eleva a una persona 0.80 m desde el suelo. Para esto, ¿qué fuerza debe ejercer la persona de 68 kg contra el suelo? Suponga que antes de saltar, la persona se agacha una distancia de 0.20 m de modo que la fuerza hacia arriba tiene que actuar sobre esta distancia antes de dejar el suelo.

24. (II) El cable que soporta un elevador de 2125 kg tiene una resistencia máxima de 21,750 N. ¿Qué aceleración máxima hacia arriba le puede dar al elevador sin romperse?

25. (III) Los mejores atletas corren los 100 m planos en 10.0 segundos. Un corredor de 66 kg acelera uniformemente en los primeros 45 m para alcanzar su rapidez máxima, la cual mantiene durante los 55 m restantes. *a*) ¿Cuál es la componente horizontal promedio de la fuerza ejercida por el suelo sobre los pies durante la etapa de aceleración? *b*) ¿Cuál es la rapidez del corredor en los últimos 55 m de la carrera (es decir, su rapidez máxima)?

26. (III) Una persona salta desde el techo de una casa de 3.9 m de altura. Cuando toca el suelo, dobla las rodillas de manera que su torso desacelera durante una distancia aproximada de 0.70 m. Si la masa del torso (sin incluir las piernas) es de 42 kg, encuentre *a*) su velocidad justo antes de que los pies toquen el suelo, y *b*) la fuerza promedio ejercida por las piernas sobre el torso durante la desaceleración.

4–7 Uso de las leyes de Newton

27. (I) Una caja que pesa 77.0 N descansa sobre una mesa. Una cuerda unida a la caja corre verticalmente hacia arriba, pasa sobre una polea y se cuelga un peso en el otro extremo (figura 4-33). Determine la fuerza que ejerce la mesa sobre la caja, si el peso que cuelga en el otro lado de la polea pesa *a*) 30.0 N, *b*) 60.0 N y *c*) 90.0 N.

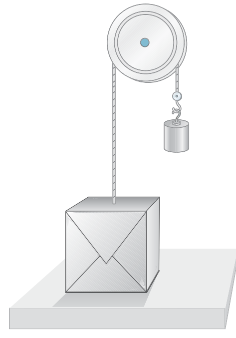


FIGURA 4–33 Problema 27.

28. (I) Dibuje el diagrama de cuerpo libre para un jugador de básquetbol, *a*) justo antes de dejar el suelo al brincar, y *b*) mientras está en el aire. Véase la figura 4-34.



FIGURA 4–34 Problema 28.

29. (I) Elabore el diagrama de cuerpo libre de una pelota de béisbol, *a*) en el momento en que es golpeada por el bate, y *b*) cuando ha dejado el bate y va volando hacia uno de los jardines.

30. (I) Una fuerza de 650 N actúa en dirección noroeste. ¿En qué dirección debe ejercerse una segunda fuerza de 650 N para que la resultante de las dos fuerzas apunte hacia el oeste? Ilustre su respuesta con un diagrama de vectores.

31. (II) Christian está construyendo una "tirolesa" como el que se muestra en la figura 4-35. Es decir, él libra un abismo atando una cuerda entre un árbol a un lado del abismo y otro árbol en el lado opuesto, a 25 m de distancia. La cuerda debe combarse lo suficiente como para que no se rompa. Suponga que la cuerda resiste una fuerza de tensión de hasta 29 kN antes de romperse, y use un "factor de seguridad" de 10 (esto es, la cuerda se someterá sólo hasta una tensión de 2.9 kN) en el centro de la "tirolesa". *a*) Determine la distancia x vertical que la cuerda debe combarse, si está dentro del rango de seguridad recomendado y la masa de Christian es de 72.0 kg. *b*) Si la "tirolesa" se coloca de manera incorrecta y la cuerda se comba sólo un cuarto de la distancia encontrada en *a*), determine la fuerza de tensión en la cuerda. ¿Se romperá la cuerda?

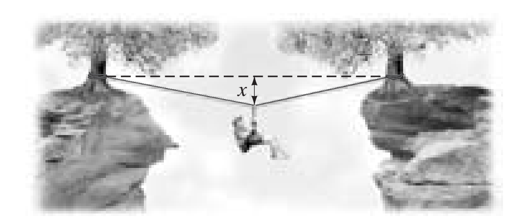


FIGURA 4–35 Problema 31.

32. (II) Una lavadora de ventanas se eleva usando el aparato de cubeta y polea que se muestra en la figura 4-36. *a*) ¿Con qué fuerza debe ella jalar hacia abajo para levantarse lentamente con rapidez constante? *b*) Si ella incrementa esta fuerza en 15%, ¿cuál será su aceleración? La masa de la persona más la cubeta es de 72 kg.



FIGURA 4–36 Problema 32.

33. (II) La figura 4-37 muestra dos cubetas de pintura, de 3.2 kg cada una, que cuelgan unidas mediante dos cuerdas ligeras. *a*) Si las cubetas están en reposo, ¿cuál es la tensión en cada cuerda? *b*) Si las dos cubetas son jaladas hacia arriba por la cuerda superior con una aceleración de 1.25 m/s^2, calcule la tensión en cada cuerda.

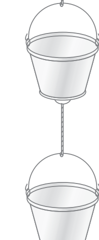


FIGURA 4–37 Problemas 33 y 34.

34. (II) Considere ahora que las cuerdas que aceleran a las cubetas del problema 33b (figura 4-37) tienen cada una un peso de 2.0 N. Determine la tensión en cada cuerda en los tres puntos de conexión mostrados en la figura.

35. (II) En la Antártida dos tractores de nieve remolcan una casa móvil a una nueva ubicación, como se muestra en la figura 4-38. La suma de las fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_A$ y $\vec{\mathbf{F}}_B$ ejercidas por los cables horizontales sobre la casa es paralela a la línea L y $F_A = 4500$ N. Determine la magnitud de $\vec{\mathbf{F}}_A + \vec{\mathbf{F}}_B$.

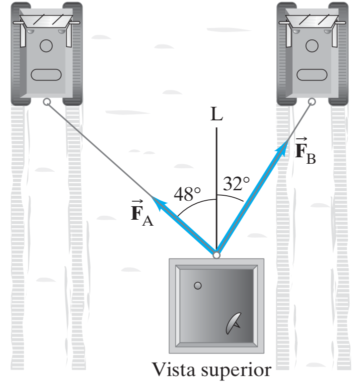


FIGURA 4–38 Problema 35.

36. (II) La locomotora de un tren jala dos carros de la misma masa detrás de sí (figura 4-39). Determine la razón de la tensión en el acoplamiento (como si fuera una cuerda) entre la locomotora y el primer carro (F_{T1}), respecto de la tensión en el acoplamiento entre el primer carro y el segundo carro (F_{T2}), para cualquier aceleración del tren distinta de cero.

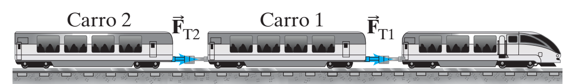


FIGURA 4–39 Problema 36.

37. (II) Las dos fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$ que se muestran en la figura 4-40a y b (vistas desde arriba) actúan sobre un objeto de 18.5 kg sobre una mesa sin fricción. Si $F_1 = 10.2$ N y $F_2 = 16.0$ N, encuentre la fuerza neta sobre el objeto y su aceleración para los casos *a*) y *b*).

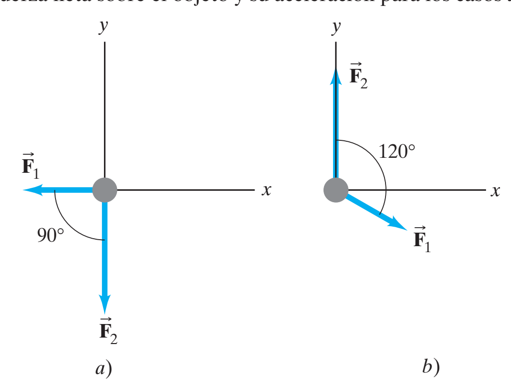


FIGURA 4–40 Problema 37.

38. (II) En el instante en que comienza una carrera, un corredor de 65 kg ejerce una fuerza de 720 N sobre el bloque de partida a un ángulo de 22° con respecto al suelo. *a*) ¿Cuál es la aceleración horizontal del corredor? *b*) Si la fuerza se ejerció durante 0.32 s, ¿con qué rapidez salió el corredor del punto de partida?

39. (II) Una masa m está en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción en $t = 0$. Luego, actúa sobre ella una fuerza constante F_0 durante un tiempo t_0. Repentinamente la fuerza se duplica a $2F_0$ y permanece constante hasta $t = 2t_0$. Determine la distancia total recorrida entre $t = 0$ y $t = 2t_0$.

40. (II) Las siguientes dos fuerzas actúa sobre un objeto de 3.0 kg:

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = (16\hat{\mathbf{i}} + 12\hat{\mathbf{j}})\,\text{N}$$
$$\vec{\mathbf{F}}_2 = (-10\hat{\mathbf{i}} + 22\hat{\mathbf{j}})\,\text{N}$$

Si el objeto está inicialmente en reposo, determine su velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ en $t = 3.0$ s.

41. (II) En ocasiones se construyen rampas de escape cuesta arriba al lado de la carretera, en zonas con pendientes descendentes, para los camiones cuyos frenos podrían fallar. Para una simple rampa de 11° hacia arriba, ¿cuál sería la longitud necesaria para un camión fuera de control que viaja a 140 km/h? Advierta el gran tamaño de su longitud calculada. (Si se usa arena para la plataforma de la rampa, su longitud podría reducirse aproximadamente en un factor de 2).

42. (II) Un niño sobre un trineo alcanza la parte inferior de una colina con una velocidad de 10.0 m/s y después recorre 25.0 m a lo largo de una superficie horizontal. Su juntos el niño y el trineo tienen una masa de 60.0 kg, ¿cuál es la fuerza retardadora promedio que actúa sobre el trineo durante el tramo horizontal?

43. (II) Un adolescente que va en motopatín, con una rapidez inicial de 2.0 m/s, rueda hacia abajo prácticamente sin fricción, sobre un plano inclinado recto de 18 m de largo, en 3.3 s. ¿Cuál es el ángulo de inclinación θ del plano inclinado?

44. (II) Como se muestra en la figura 4-41, cinco esferas (cuyas masas son de 2.00. 2.05, 2.10, 2.15 y 2.20 kg) cuelgan de un travesaño. Cada masa está colgada con un hilo para pescar que resiste una tensión máxima de 22.2 N (= 5 lb). Cuando este dispositivo se coloca en un elevador que acelera hacia arriba, sólo los hilos que sostienen las esferas de 2.05 y 2.00 kg no se rompen. ¿Dentro de que rango está la aceleración del elevador?

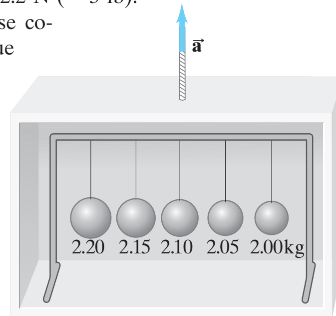


FIGURA 4–41 Problema 44.

45. (II) Un candelero de 27 kg pende del techo colgado mediante un alambre vertical de 4.0 m de longitud. *a*) ¿Qué fuerza horizontal se requiere para desplazar su posición 0.15 m hacia un lado? *b*) ¿Cuál será la tensión en el alambre en esas condiciones?

46. (II) Tres bloques sobre una superficie horizontal sin fricción están en contacto entre sí, como se muestra en la figura 4-42. Se aplica una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ sobre el bloque A (masa m_A). *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada bloque. Determine *b*) la aceleración del sistema (en términos de m_A, m_B y m_C). *c*) La fuerza neta sobre cada bloque, y *d*) la fuerza de contacto que cada bloque ejerce sobre su vecino. *e*) Si $m_A = m_B = m_C = 10.0$ kg y $F = 96.0$ N, dé respuestas numéricas para *b*), *c*) y *d*). Explique de qué manera sus respuestas tienen sentido intuitivamente.

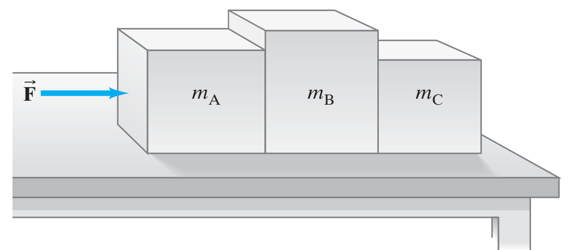


FIGURA 4–42 Problema 46.

47. (II) Resuelva otra vez el ejemplo 4-13, pero *a*) establezca las ecuaciones de manera que el sentido de la aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ de cada objeto esté en la dirección del movimiento de ese objeto. (En el ejemplo 4-13, tomamos $\vec{\mathbf{a}}$ positiva hacia arriba para ambas masas.) *b*) Resuelva las ecuaciones y obtenga las mismas respuestas que en el ejemplo 4-13.

48. (II) El bloque que se muestra en la figura 4-43 tiene una masa $m = 7.0$ kg y se encuentra sobre un plano fijo liso sin fricción inclinado a un ángulo $\theta = 22.0°$ con respecto a la horizontal. *a*) Determine la aceleración del bloque conforme éste se desliza por el plano. *b*) Si el bloque parte del reposo a 12.0 m arriba en el plano desde su base, ¿cuál será la rapidez del bloque cuando el bloque llegue al fondo del plano inclinado?

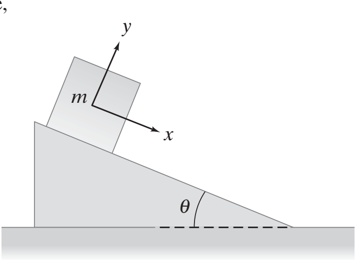


FIGURA 4–43 Bloque sobre un plano inclinado. Problemas 48 y 49.

49. (II) A un bloque se le da una rapidez inicial de 4.5 m/s hacia arriba del plano inclinado a 22° sobre la horizontal que se indica en la figura 4-43. *a*) ¿Qué tan lejos sobre el plano viajará el bloque? *b*) ¿Cuánto tiempo pasará antes de que vuelva a su punto inicial? Ignore la fricción.

50. (II) Sostenido de un cordel, un objeto cuelga del espejo retrovisor de su automóvil. Mientras usted acelera de manera uniforme desde el reposo hasta 28 m/s en 6.0 s, ¿qué ángulo θ formará el cordel con la vertical? Véase la figura 4-44.

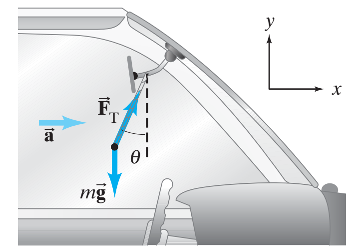


FIGURA 4–44 Problema 50.

51. (II) La figura 4-45 muestra un bloque (masa m_A) sobre una superficie horizontal lisa, que está conectado mediante una cuerda delgada, que pasa alrededor de una polea, a un segundo bloque (m_B), que cuelga verticalmente. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada bloque, que incluya la fuerza de gravedad sobre cada uno, la fuerza (de tensión) ejercida por la cuerda y cualquier fuerza normal. *b*) Aplique la segunda ley de Newton para determinar expresiones para la aceleración del sistema y para la tensión en la cuerda. Desprecie la fricción y las masas de la polea y de la cuerda.

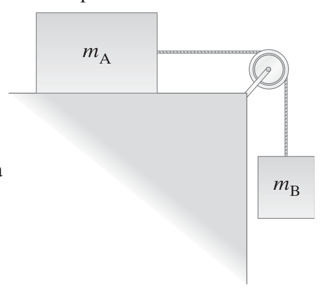




FIGURA 4–45 Problemas 51, 52, y 53. La masa m_A descansa sobre una superficie horizontal lisa, y la masa m_B cuelga verticalmente.

52. (II) *a*) Si $m_A = 13.0$ kg y $m_B = 5.0$ kg en la figura 4-45, determine la aceleración de cada bloque. *b*) Si inicialmente m_A está en reposo a 1.250 m desde el borde de la mesa, ¿cuánto tiempo le tomará alcanzar el borde de la mesa si el sistema se deja en libertad? *c*) Si $m_B = 1.0$ kg, ¿qué tan grande debe ser m_A para que la aceleración del sistema se mantenga en $\frac{1}{100}g$?

53. (III) Obtenga una expresión para la aceleración del sistema mostrado en la figura 4-45 (véase el problema 51), si la cuerda tiene una masa no despreciable m_C. Exprese la fórmula en términos de las longitudes de cuerda ℓ_A y ℓ_B, desde las masas respectivas a la polea. (La longitud total de la cuerda es $\ell = \ell_A + \ell_B$).

54. (III) Suponga que la polea de la figura 4-46 está suspendida de una cuerda C. Determine la tensión en esta cuerda después de que se liberan las masas y antes de que alguna toque el suelo. Desprecie la masa de la polea y de las cuerdas.

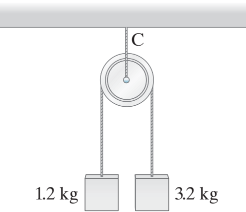


FIGURA 4–46 Problema 54.

55. (III) Un pequeño bloque de masa m descansa sobre el lado inclinado de un bloque triangular de masa M, que a la vez descansa sobre una mesa horizontal como se muestra en la figura 4-47. Suponiendo que todas las superficies son lisas (no tienen fricción), determine la magnitud de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ que debe aplicarse a M para que m permanezca en una posición fija respecto de M (es decir, que m no se mueva sobre el plano inclinado). [Sugerencia: Tome los ejes x y y como horizontal y vertical, dado que la aceleración de m es horizontal respecto de un sistema de referencia inercial].

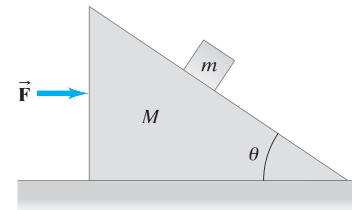


FIGURA 4–47 Problema 55.

56. (III) La doble máquina de Atwood que se presenta en la figura 4-48 tiene poleas ligeras que pueden girar libremente y cuerdas ligeras. Determine *a*) la aceleración de las masas m_A, m_B y m_C y *b*) las tensiones F_{TA} y F_{TC} en las cuerdas.

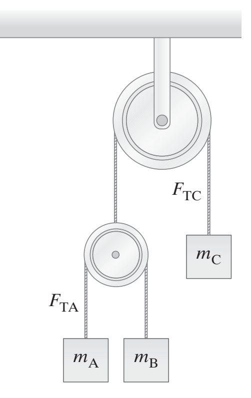


FIGURA 4–48 Problema 56.

57. (III) Considere dos cajas que están atadas mediante una cuerda gruesa de 1.0 kg de masa sobre una mesa sin fricción. Calcule la aceleración de cada caja y la tensión en cada extremo de la cuerda, con la ayuda de los diagramas de cuerpo libre que se ilustran en la figura 4-49. Se supone que $F_P = 35.0$ N y desprecie las combas de la cuerda. Compare sus resultados con el ejemplo 4-12 y la figura 4-22.

58. (III) Las dos masas que se muestran en la figura 4-50 están cada una inicialmente a 1.8 m sobre el suelo, y la polea ligera y bien engrasada está fija a 4.8 m sobre el suelo. ¿Qué altura máxima alcanzará el objeto más ligero después de soltar el sistema? [*Sugerencia*: Determine primero la aceleración de la masa más ligera y luego su velocidad en el momento en que el objeto más pesado toca el suelo. Ésta es la rapidez de "lanzamiento". Suponga que la masa no toca la polea e ignore la masa de la cuerda].

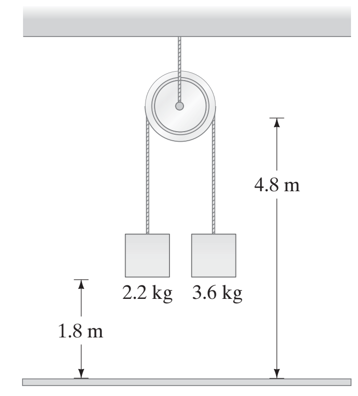


FIGURA 4–50 Problema 58.

59. (III) Determine una fórmula para la magnitud de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ ejercida sobre el bloque grande (m_C) en la figura 4-51, de manera que la masa m_A no se mueva con respecto a m_C. Desprecie la fricción en todas las superficies y suponga que m_B no tiene contacto con m_C.

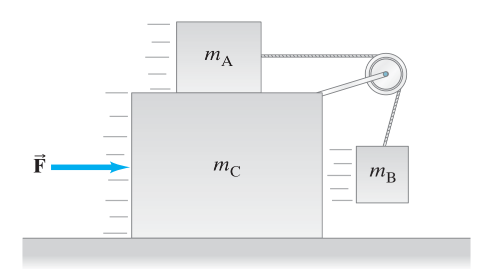


FIGURA 4–51 Problema 59.

60. (III) Una partícula de masa m, inicialmente en reposo en $x = 0$, es acelerada por una fuerza que se incrementa con forme pasa el tiempo de acuerdo con la relación $F = Ct^2$. Determine su velocidad v y su posición x como función del tiempo.

61. (III) Un cable pesado de acero de longitud ℓ y masa M pasa alrededor de una polea pequeña sin masa y sin fricción. *a*) Si una longitud y cuelga de un lado de la polea (de modo que $\ell - y$ cuelgue del otro lado), calcule la aceleración del cable en función de y. *b*) Suponiendo que el cable parte del reposo con longitud y_0 en un lado de la polea, determine la velocidad v_f en el momento en que todo el cable haya caído de la polea. *c*) Evalúe v_f para $y_0 = \frac{2}{3}\ell$. [*Sugerencia*: Use la regla de la cadena, $dv/dt = (dv/dy)(dy/dt)$, e integre].

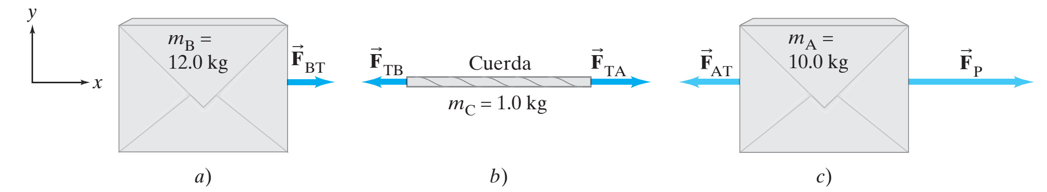


FIGURA 4–49 Problema 57. Diagramas de cuerpo libre para cada uno de los objetos del sistema que se indica en la figura 4-22a. Las fuerzas verticales, $\vec{\mathbf{F}}_N$ y $\vec{\mathbf{F}}_G$, no se muestran.

Problemas generales

62. Una persona tiene una oportunidad razonable de sobrevivir a un choque en automóvil si la desaceleración que experimenta no es mayor a 30 *g*. Calcule la fuerza sobre una persona de 65 kg acelerando a tasa. ¿Qué distancia se recorre si el auto frena de 95 km/h hasta el reposo?

63. Se deja caer una bolsa de 2.0 kg desde la parte superior de la torre inclinada de Pisa y cae 55 m antes de tocar el suelo con una rapidez de 27 m/s. ¿Cuál fue la fuerza promedio de la resistencia del aire?

64. El planeador de Tom soporta su peso usando las seis cuerdas que se muestran en la figura 4-52. Cada cuerda está diseñada para soportar una fracción igual al peso de Tom. La masa de Tom es de 74.0 kg. ¿Cuál es la tensión en cada una de las cuerdas de soporte?

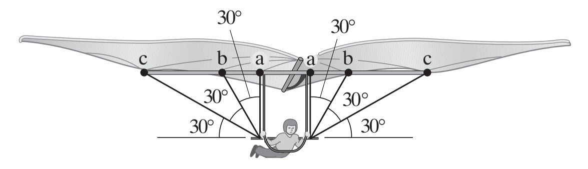


FIGURA 4–52 Problema 64.

65. Una barra húmeda de jabón (m = 150 g) se desliza libremente por una rampa de 3.0 m de longitud que está inclinada a 8.5°. ¿Qué tiempo le tomará llegar al fondo? ¿Cómo cambiaría el resultado si la masa del jabón fuera de 300 g?

66. El carro de una grúa en el punto P de la figura 4-53 se mueve por unos segundos hacia la derecha con aceleración constante, y la carga de 870 kg cuelga a un ángulo de 5.0° con respecto a la vertical, como se muestra. ¿Cuál es la aceleración del carro y de la carga?

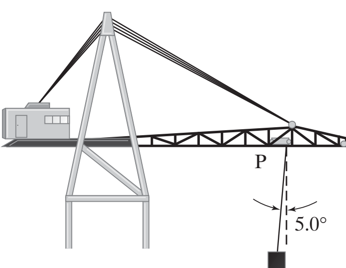


FIGURA 4–53 Problema 66.

67. Un bloque (masa m_A) que se encuentra sobre un plano inclinado sin fricción está conectado a una masa m_B mediante una cuerda que pasa alrededor de una polea, como se muestra en la figura 4-54. *a*) Obtenga una fórmula para la aceleración del sistema en términos de m_A, m_B, θ y g. *b*) ¿Qué condiciones son aplicables a las masas m_A y m_B para que la aceleración se dé en un sentido (digamos, m_A hacia abajo del plano), o en el sentido opuesto? Desprecie la masa de la cuerda y de la polea.

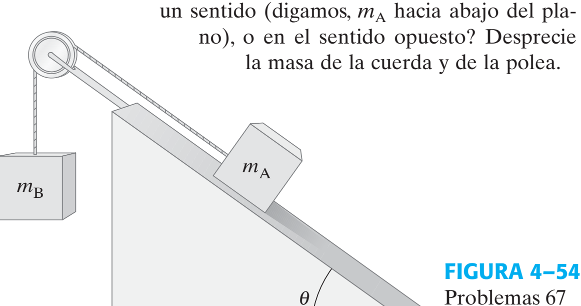


FIGURA 4–54 Problemas 67 y 68.

68. *a*) En la figura 4-54, si $m_A = m_B = 1.00$ kg y $\theta = 33.0°$, ¿cuál será la aceleración del sistema? *b*) Si $m_A = 1.00$ kg y el sistema permanece en reposo, ¿cuál debe ser la masa m_B? *c*) Calcule la tensión en la cuerda para los casos *a*) y *b*).

69. Las masas m_A y m_B se deslizan sobre los planos inclinados lisos (sin fricción) que se indican en la figura 4-55. *a*) Determine una fórmula para la aceleración del sistema en términos de m_A, m_B, θ_A, θ_B y g. *b*) Si $\theta_A = 32°$, $\theta_B = 23°$ y $m_A = 5.0$ kg, ¿qué valor de m_B mantendrá al sistema en reposo? ¿Cuál sería la tensión en la cuerda en este caso (desprecie la masa)? *c*) ¿Qué razón, m_A/m_B, permitiría que las masas se movieran con rapidez constante a lo largo de sus rampas en cualquiera de las direcciones?

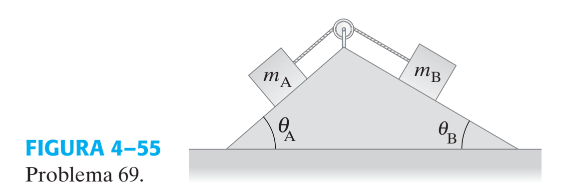


FIGURA 4–55 Problema 69.

70. Una persona de 75.0 kg está parada sobre una báscula en un elevador. ¿Qué registra la báscula (en N y en kg), cuando *a*) el elevador está en reposo, *b*) el elevador sube con rapidez constante de 3.0 m/s, *c*) el elevador baja a 3.0 m/s, *d*) el elevador acelera hacia arriba a 3.0 m/s^2, *e*) el elevador acelera hacia abajo a 3.0 m/s^2?

71. Un ingeniero civil trabaja en el rediseño de la parte accidentada de una ciudad. Una consideración importante es qué tan empinadas pueden ser las carreteras, de manera que aun los automóviles de baja potencia sean capaces de subir las colinas sin desacelerar. Un pequeño auto específico con masa de 920 kg puede acelerar en una carretera a nivel, desde el reposo hasta 21 m/s (75 km/h), en 12.5 s. Con esos datos, calcule la inclinación máxima de una colina.

72. Si un ciclista de 65 kg de masa (incluyendo la bicicleta) puede descender libremente por una colina de 6.5° con rapidez constante de 6.0 km/h debido a la resistencia del aire, ¿qué fuerza debe aplicar para subir la colina con la misma rapidez (y la misma resistencia del aire)?

73. Un ciclista puede descender libremente una colina de 5.0° con rapidez constante de 6.0 km/h. Si la fuerza de la resistencia del aire es proporcional a la rapidez v de manera que $F_{aire} = cv$, calcule *a*) el valor de la constante *c;* y *b*) la fuerza promedio que debe aplicarse para descender la colina a 18.0 km/h. Considere que la masa del ciclista junto con su bicicleta es de 80.0 kg.

74. Francisca cuelga su reloj de un cordel delgado mientras el avión donde viaja acelera para despegar, lo cual le toma 16 s. Estime la rapidez de despegue del avión, si el cordel forma un ángulo de 25° con respecto a la vertical durante todo el despegue (figura 4-56).

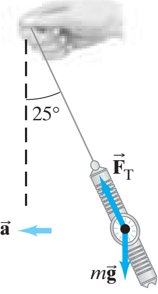


FIGURA 4–56 Problema 74.

75. *a*) ¿Qué fuerza mínima F se requiere para levantar el piano (masa M) usando el aparato de poleas que se muestra en la figura 4-57? *b*) Determine la tensión en cada sección de cuerda: F_{T1}, F_{T2}, F_{T3} y F_{T4}.

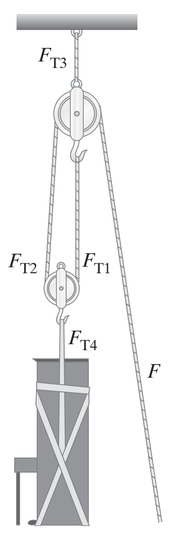
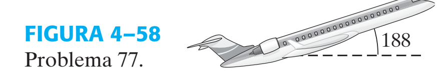


FIGURA 4–57 Problema 75.

76. En el diseño de un supermercado se tienen varias rampas que conectan diferentes partes de la tienda. Los clientes tendrán que empujar carritos de comestibles hacia arriba por las rampas y, evidentemente, se desea que esto no resulte muy difícil. Un ingeniero hizo investigaciones y encontró que casi nadie se queja, si la fuerza requerida no es mayor que 18 N. Despreciando la fricción, ¿a qué ángulo máximo θ deben construirse las rampas, suponiendo un carrito lleno de 25 kg?

77. Un avión a chorro acelera a 3.8 m/s^2 conforme asciende a un ángulo de 18° sobre la horizontal (figura 4-58). ¿Cuál es la fuerza total que el asiento de la cabina ejerce sobre el piloto de 75 kg?

FIGURA 4–58 Problema 77.



78. En una construcción, un helicóptero de 7650 kg acelera hacia arriba a 0.80 m/s^2 mientras levanta un armazón de 1250 kg (figura 4-59). *a*) ¿Cuál es la fuerza de sustentación ejercida por el aire sobre las aspas del helicóptero? *b*) ¿Cuál es la tensión en el cable *ligero* que conecta el armazón al helicóptero? *c*) ¿Cuál es la fuerza que ejerce el cable sobre el helicóptero?

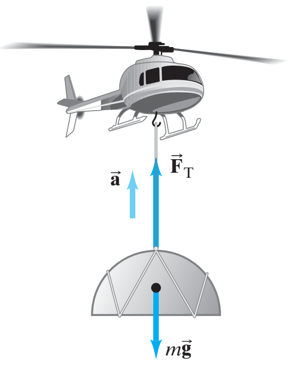


FIGURA 4–59 Problema 78.

79. Un tren italiano de alta velocidad con 14 vagones tiene una masa de 640 toneladas métricas (640,000 kg) y puede ejercer una fuerza máxima de 400 kN horizontalmente contra las vías; mientras que a velocidad máxima constante (300 km/h), ejerce una fuerza de aproximadamente 150 kN. Calcule *a*) su aceleración máxima, y *b*) estime la fuerza de fricción y la resistencia del aire cuando va a velocidad máxima.

80. Un pescador en un bote está usando un cordel de "prueba de 10 lb" para pescar. Esto significa que el cordel puede ejercer una fuerza de hasta 45 N sin romperse (1 lb = 4.45 N). *a*) ¿Cuál es el peso máximo de un pez que puede pescar el pescador, si jala verticalmente hacia arriba con rapidez constante? *b*) Si el pescador acelera al pez hacia arriba a 2.0 m/s^2, ¿cuál es el peso máximo de un pez que puede sacar del agua? *c*) ¿Es posible sacar una trucha de 15 lb con el cordel de prueba de 10 lb? ¿Por qué sí o por qué no?

81. Un elevador en un edificio alto puede admitir una rapidez máxima de 3.5 m/s al descender. Si el elevador tiene una masa de 1450 kg incluidos los ocupantes, ¿cuál debe ser la tensión en el cable para detener este elevador en una distancia de 2.6 m?

82. Dos escaladores de rocas, William y Karen, usan sogas de seguridad de longitud similar. La soga de Karen es más elástica, del tipo que los escaladores llaman *soga dinámica*. William tiene una *soga estática*, que no se recomienda para propósitos de seguridad en el escalamiento profesional. *a*) Karen cae libremente unos 2.0 m y después la cuerda la detiene a lo largo de una distancia de 1.0 m (figura 4-60). Suponiendo que la fuerza que ejerce la cuerda es constante, estime cuál será la fuerza que ejerce la cuerda. (Exprese el resultado en múltiplos de su peso). *b*) En una caída similar, la soga de William se alarga sólo 30 cm. ¿Cuál es la fuerza que ejerce la cuerda sobre William en términos de su peso? ¿Cuál escalador tiene más probabilidades de salir lastimado?

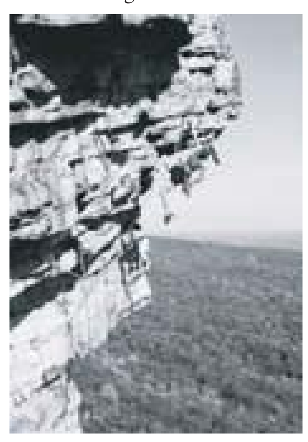


FIGURA 4–60 Problema 82.

83. Tres escaladores de montaña en línea unidos con sogas, ascienden por una superficie helada inclinada 31.0° con respecto a la horizontal (figura 4-61). El último escalador resbala, y hace caer al segundo escalador. El primer escalador es capaz de sostener a sus dos compañeros. Si cada escalador tiene una masa de 75 kg, calcule la tensión en cada una de las dos cuerdas. Ignore la fricción entre el hielo y los escaladores que están en el piso.

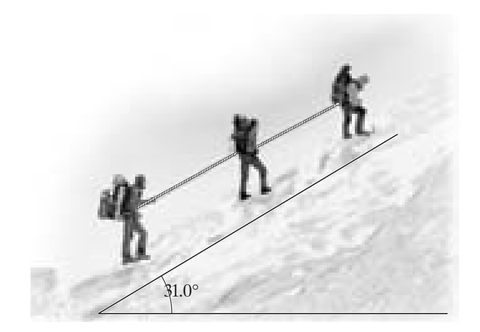


FIGURA 4–61 Problema 83.

84. Un asteroide potencialmente catastrófico con una masa de 1.0×10^{10} kg se desplaza por el espacio. A menos que la rapidez del asteroide cambie en aproximadamente 0.20 cm/s, chocará contra la Tierra causando una devastación. Los investigadores sugieren que un "desviador espacial" enviado a la superficie del asteroide podría ejercer una suave fuerza constante de 2.5 N. ¿Durante cuánto tiempo debería actuar esta fuerza?

85. Se intenta descargar un piano de 450 kg de un camión, haciéndolo deslizar por una rampa inclinada a 22°. La fricción es insignificante y la rampa mide 11.5 m de largo. Dos trabajadores disminuyen la tasa con la que el piano se mueve, empujándolo con una fuerza combinada de 1420 N paralela a la rampa. Si el piano parte del reposo, ¿qué tan rápido se moverá al final del recorrido?

86. Considere el sistema que se ilustra en la figura 4-62 con $m_A = 9.5$ kg y $m_B = 11.5$ kg. Los ángulos son $\theta_A = 59°$ y $\theta_B = 32°$. *a*) En ausencia de fricción, ¿qué fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ e requeriría para jalar las masas hacia arriba de los planos inclinados fijos con una velocidad constante? *b*) Ahora se elimina la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ ¿Cuál es la magnitud y dirección de la aceleración de los dos bloques? *c*) En ausencia de $\vec{\mathbf{F}}$, ¿cuál es la tensión en la cuerda?

FIGURA 4–62 Problema 86.

87. Un bloque de 1.5 kg está en reposo sobre otro bloque de 7.5 kg (figura 4-63). La cuerda y la polea tienen masas insignificantes, y no hay fricción significativa en ninguna parte. *a*) ¿Qué fuerza *F* debe aplicarse al bloque inferior, de manera que el que está en la parte superior acelere hacia la derecha a 2.5 m/s^2? *b*) ¿Cuál es la tensión en la cuerda que une los bloques?

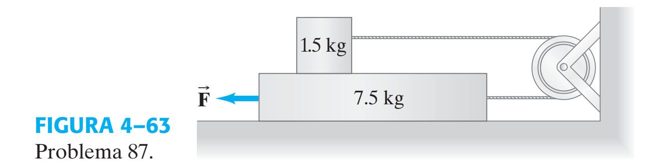


FIGURA 4–63 Problema 87.

88. Usted va manejando a casa en un automóvil de 750 kg a 15 m/s. A 45 m del inicio de una intersección, usted observa que la luz verde del semáforo cambia a amarillo, que usted espera que dure 4.0 s y la distancia al lado más lejano de la intersección es de 65 m (figura 4-64). *a*) Si usted opta por acelerar, el motor de su auto consigue desarrollar una fuerza hacia adelante de 1200 N. ¿Logrará atravesar por completo la intersección antes de que la luz cambie a rojo? *b*) Si usted decide detenerse, sus frenos ejercerán una fuerza de 1800 N. ¿Se detendrá antes de entrar en la intersección?

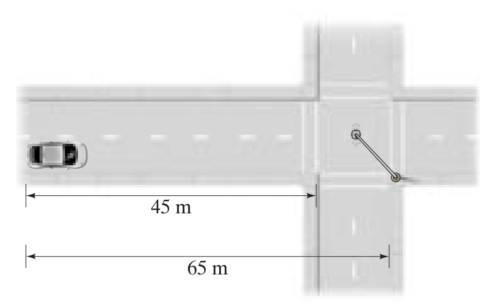


FIGURA 4–64 Problema 88.

* Problemas numéricos/por computadora

*** 89.** (II) Una caja grande de 1500 kg de masa empieza a deslizarse desde el reposo a lo largo de una rampa sin fricción, cuya longitud es ℓ y cuya inclinación con la horizontal es θ. *a*) Determine como una función de θ: *i)* la aceleración *a* de la caja conforme se desliza hacia abajo; *ii)* el tiempo *t* que le toma llegar a la parte inferior del plano inclinado; *iii)* la velocidad final *v* de la caja cuando llega a la parte inferior de la rampa, y *iv)* la fuerza normal F_N que ejerce la rampa sobre la caja. *b*) Ahora considere $\ell = 100$ m. Utilice una hoja de cálculo para calcular y graficar *a*, *t*, *v* y F_N como funciones de θ desde $\theta = 0°$ hasta 90° en incrementos de 1°. ¿Sus resultados son consistentes con los resultados conocidos en los casos límite $\theta = 0° =$ y $\theta = 90°$?

Respuestas a los ejercicios

A: No se requiere fuerza alguna. Es el auto debajo de la taza el que acelera. Piense en la primera ley de Newton (véase el ejemplo 4-1).

B: *a*).

C: *a*) La misma; *b*) el auto deportivo; *c*) tercera ley para el inciso *a*), y la segunda ley para *b*).

D: *e*).

E: *b*).

F: *b*).



Las leyes de Newton son fundamentales en física y estas imágenes muestran dos situaciones en las que el uso de las leyes de Newton implica algunos nuevos elementos, adicionales a los vistos en el capítulo anterior. La esquiadora ilustra la *fricción* sobre un plano inclinado, aunque en ese momento ella no está tocando la nieve, por lo que sólo está siendo frenada por la resistencia del aire, que es una fuerza dependiente de la velocidad (un tema opcional en este capítulo). La gente en las sillas voladoras del parque de diversiones ejemplifica la dinámica del movimiento circular.





Aplicaciones de las leyes de Newton: Fricción, movimiento circular y arrastre

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine qué!
Usted hace girar una pelota atada una cuerda, alrededor sí mismo, en un círculo horizontal con rapidez constante, tal como se muestra en la vista superior de la viñeta anexa. ¿Qué trayectoria seguirá la pelota si usted suelta la cuerda en el punto P?

a) b) c) d) e) P

CONTENIDO

En este capítulo continuaremos nuestro estudio de las leyes de Newton y destacaremos su importancia fundamental en física. Veremos algunas aplicaciones importantes de tales leyes, incluyendo la fricción y el movimiento circular. Aunque parte del material de este capítulo parezca repetir temas vistos en el capítulo 4, en realidad incluye nuevos elementos.

5–1 Aplicaciones de las leyes de Newton que implican fricción

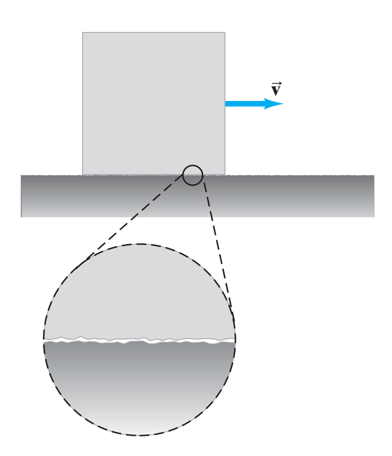


FIGURA 5–1 Un objeto que se mueve hacia la derecha sobre una mesa o el piso. En una escala microscópica las dos superficies en contacto son rugosas.

Hasta ahora hemos ignorado la fricción; sin embargo, debe tomarse en cuenta en la mayoría de los casos prácticos. La fricción existe entre dos superficies sólidas, porque aun la superficie aparentemente más lisa resulta bastante rugosa a una escala microscópica (figura 5-1). Cuando tratamos de deslizar un objeto sobre otra superficie, algunas protuberancias microscópicas se oponen al movimiento. Lo que pasa exactamente a nivel microscópico aún no se entiende por completo. Se considera que los átomos sobre la protuberancia de una superficie estarían tan cerca de los átomos de la otra superficie que las fuerzas eléctricas de atracción entre los átomos pueden formar "enlaces", como si hubiera una pequeña soldadura entre ambas superficies. El deslizamiento de un objeto sobre una superficie a menudo es desigual debido quizás a la existencia y ruptura de esos enlaces. Incluso cuando un cuerpo rueda sobre una superficie se tiene cierta fricción, llamada *fricción de rodadura*, aunque ésta es por lo general mucho menor que cuando un objeto se desliza sobre una superficie. En esta sección nos ocuparemos principalmente de la fricción por deslizamiento a la que suele llamarse **fricción cinética** (*cinética* se deriva de la palabra griega para "movimiento").

Cuando un objeto está en movimiento a lo largo de una superficie rugosa, la fuerza de fricción cinética sobre el objeto actúa en sentido opuesto a la velocidad del objeto. La magnitud de la fuerza de la fricción cinética depende de la naturaleza de las dos superficies en contacto. Para superficies dadas, los experimentos muestran que la fuerza de fricción es aproximadamente proporcional a la *fuerza normal* entre las dos superficies, que es la fuerza que cada objeto ejerce sobre el otro en la dirección perpendicular a la superficie de contacto común (véase la figura 5-2). En muchos casos, la fuerza de fricción entre superficies duras depende muy poco del área de la superficie total de contacto; es decir, la fuerza de fricción sobre este libro es casi la misma si se está deslizando sobre su cara ancha o sobre su lomo, suponiendo que ambas superficies son igualmente lisas. Consideramos un modelo de fricción sencillo donde hacemos la suposición de que la fuerza de fricción es independiente del área. De manera que escribimos la proporcionalidad entre las magnitudes de la fuerza de fricción F_{fr} y la fuerza normal F_N a través de una constante de proporcionalidad μ_k:

$$F_{fr} = \mu_k F_N. \qquad \text{[fricción cinética]}$$

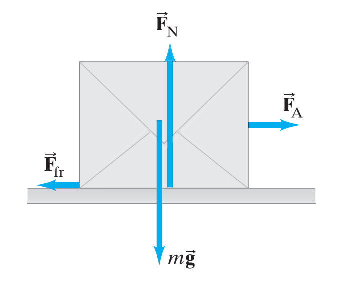


FIGURA 5–2 Cuando un objeto es jalado a lo largo de una superficie por una fuerza aplicada $(\vec{\mathbf{F}}_A)$, la fuerza de fricción $\vec{\mathbf{F}}_{fr}$ se opone al movimiento. La magnitud de $\vec{\mathbf{F}}_{fr}$ es proporcional a la magnitud de la fuerza normal (F_N).

Esta relación no es una ley fundamental, es una relación experimental entre la magnitud de la fuerza de fricción F_{fr} que actúa paralela a las dos superficies de contacto, y la magnitud de la fuerza normal F_N que actúa perpendicular a las superficies. *No* es una ecuación vectorial, ya que las dos fuerzas son perpendiculares entre sí. El término μ_k se llama *coeficiente de fricción cinética* y su valor depende de la naturaleza de las dos superficies. En la tabla 5-1 se dan valores medidos para varias superficies. No obstante, esos valores son sólo aproximados, ya que μ depende de si las superficies están húmedas o secas, de cuánto se hayan alisado, de si quedan rebabas en sus superficies y de otros factores. Pero μ_k es casi independiente de la rapidez del deslizamiento y del área de contacto.

TABLA 5–1 Coeficientes de fricción†

Superficie	Coeficiente de fricción estática, μ_s	Coeficiente de fricción cinética, μ_k
Madera sobre madera	0.4	0.2
Hielo sobre hielo	0.1	0.03
Metal sobre metal (lubricado)	0.15	0.07
Acero sobre acero (sin lubricar)	0.7	0.6
Hule sobre concreto seco	1.0	0.8
Hule sobre concreto húmedo	0.7	0.5
Hule sobre otras superficies sólidas	1–4	1
Teflón® sobre teflón en aire	0.04	0.04
Teflón sobre acero en aire	0.04	0.04
Cojinetes de bolas lubricados	<0.01	<0.01
Articulaciones sinoviales (en miembros humanos)	0.01	0.01


†Los valores son aproximados y deben considerarse únicamente como guías.

Lo que hemos analizado hasta ahora es la *fricción cinética*, es decir, cuando un objeto se desliza sobre otro. Se tiene también **fricción estática**, que se refiere a una fuerza paralela a las dos superficies de contacto que puede surgir aun si las superficies no se están deslizando. Suponga que un objeto tal como un escritorio descansa sobre un piso horizontal. Si no se ejerce ninguna fuerza horizontal sobre el escritorio, entonces no hay fuerza de fricción. Sin embargo, ahora suponga que usted trata de empujarlo pero que el escritorio no se mueve. Usted ejerce una fuerza horizontal, pero el escritorio no se mueve, por lo tanto debe actuar otra fuerza sobre el escritorio que impida que el escritorio se mueva (la fuerza neta sobre un objeto en reposo es cero). Ésta es la fuerza de *fricción estática* ejercida por el piso sobre el escritorio. Si usted empuja con una fuerza mayor aun sin mover el escritorio, la fuerza de fricción estática también se habrá incrementado. Si usted empuja suficientemente fuerte, finalmente el escritorio empezará a moverse y actuará entonces la fricción cinética. En este punto, usted ha excedido la fuerza máxima de fricción estática, que está dada por $(F_{\text{fr}})_{\text{máx}} = \mu_s F_N$, donde μ_s es el *coeficiente de fricción estática* (tabla 5-1). Como la fuerza de fricción estática va desde cero hasta este valor máximo, escribimos

$$F_{\text{fr}} \leq \mu_s F_N. \qquad \text{[Fricción estática]}$$

Quizás usted haya notado que a menudo es más fácil mantener un objeto pesado en movimiento que empezar a moverlo. Esto es consistente con el hecho de que μ_s es por lo general mayor que μ_k (véase la tabla 5-1).

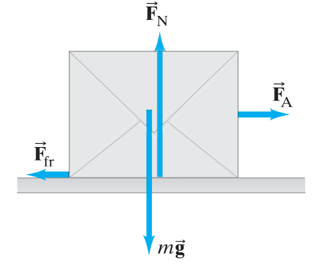


FIGURA 5–2 Repetida para el ejemplo 5-1.

EJEMPLO 5–1 **Fricción: estática y cinética.** Nuestra caja misteriosa de 10.0 kg descansa sobre un piso horizontal. El coeficiente de fricción estática entre las superficies es $\mu_s = 0.40$ y el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.30$. Determine la fuerza de fricción F_{fr} que actúa sobe la caja, si se aplica una fuerza F_A horizontal externa sobre la caja de magnitud: *a*) 0, *b*) 10 N, *c*) 20 N, *d*) 38 N y *e*) 40 N.

PLANTEAMIENTO De entrada, no sabemos si estamos trabajando con fricción estática o con fricción cinética, ni si la caja permanece en reposo o acelera. Necesitamos dibujar un diagrama de cuerpo libre y determinar en cada caso si la caja se moverá o no: la caja empezará a moverse, si la fuerza aplicada F_A es mayor que la fuerza de fricción estática máxima (segunda ley de Newton). Las fuerzas sobre la caja son la gravedad $m\vec{g}$, la fuerza normal ejercida por el piso $\vec{F}_N$ la fuerza horizontal aplicada $\vec{F}_A$, y la fuerza de fricción $\vec{F}_{\text{fr}}$, como se muestra en la figura 5-2.

SOLUCIÓN El diagrama de cuerpo libre de la caja se muestra en la figura 5-2. En la dirección vertical no hay movimiento, por lo que la segunda ley de Newton en la dirección vertical queda $\Sigma F_y = ma_y = 0$, que nos indica que $F_N - mg = 0$. Por consiguiente, la fuerza normal en este caso es

$$F_N = mg = (10.0\,\text{kg})(9.80\,\text{m/s}^2) = 98.0\,\text{N}.$$

a) Como $F_A = 0$ en este primer caso, la caja no se mueve y $F_{\text{fr}} = 0$.

b) La fuerza de fricción estática se opondrá a cualquier fuerza aplicada, hasta un máximo de

$$\mu_s F_N = (0.40)(98.0\,\text{N}) = 39\,\text{N}.$$

Cuando la fuerza aplicada es $F_A = 10$ N, la caja no se moverá. La segunda ley de Newton da $\Sigma F_x = F_A - F_{\text{fr}} = 0$, por lo tanto, $F_{\text{fr}} = 10$ N.

c) Una fuerza aplicada de 20 N tampoco será suficiente para mover la caja. Así que, $F_{\text{fr}} = 20$ N para equilibrar la fuerza aplicada.

d) La fuerza aplicada de 38 N aún no es lo suficientemente grande para mover la caja; la fuerza de fricción se ha incrementado ahora hasta 38 N para mantener la caja en reposo.

e) Una fuerza de 40 N empezará a mover la caja, ya que esta fuerza supera la fuerza de fricción estática máxima, $\mu_s F_N = (0.40)(98\text{ N}) = 39$ N. En este caso, en vez de fricción estática, tendremos ahora fricción cinética y su magnitud será

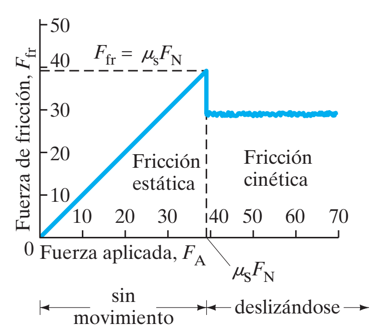
$$F_{\text{fr}} = \mu_k F_N = (0.30)(98.0\,\text{N}) = 29\,\text{N}.$$

Se tiene ahora una fuerza neta (horizontal) sobre la caja de magnitud $F = 40\text{ N} - 29\text{ N} = 11$ N, de manera que la caja acelerará a razón de

$$a_x = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{11\,\text{N}}{10.0\,\text{kg}} = 1.1\,\text{m/s}^2$$

siempre y cuando la fuerza aplicada sea de 40 N. La figura 5-3 muestra una gráfica que resume este ejemplo.

FIGURA 5–3 Ejemplo 5-1. Magnitud de la fuerza de fricción en función de la fuerza externa aplicada sobre un objeto inicialmente en reposo. Conforme la fuerza aplicada se incrementa en magnitud, la fuerza de fricción estática crece linealmente para igualarla, hasta que la fuerza aplicada alcanza el valor $\mu_s F_N$. Si la fuerza aplicada se incrementa aún más, el objeto empezará a moverse y la fuerza de fricción descenderá a un valor aproximadamente constante, característico de la fricción cinética.



La fricción puede ser un inconveniente. Desacelera los objetos en movimiento y provoca calentamiento y atascamiento entre las partes móviles de una maquinaria. La fricción puede reducirse utilizando lubricantes como el aceite. Un manera más efectiva para reducir la fricción entre dos superficies consiste en mantener una capa de aire o de algún otro gas entre ellas. Los dispositivos que usan este recurso —que no es práctico en la mayoría de los casos— incluyen rieles de aire y mesas de aire, en los que la capa de aire se mantiene forzando al aire a pasar a través de muchos orificios pequeños. Otra técnica para mantener la capa de aire es suspender los objetos en el aire utilizando campos magnéticos ("levitación magnética"). Por otro lado, la fricción puede resultar de utilidad. Nuestra capacidad para caminar depende de la fricción entre las suelas de los zapatos (o los pies) y el suelo. (Caminar implica fricción estática, no cinética. ¿Por qué?) El movimiento de un automóvil y también su estabilidad dependen de la fricción. Cuando la fricción es pequeña, como en el hielo, resulta difícil caminar o conducir vehículos con seguridad.

EJEMPLO CONCEPTUAL 5–2 **Una caja contra una pared.** Usted puede sostener una caja contra una pared rugosa (figura 5-4) e impedir que resbale hacia abajo presionándola fuerte de manera horizontal. ¿Cómo es que la aplicación de una fuerza horizontal impide que un objeto se mueva verticalmente?

RESPUESTA Esto no funcionará bien si la pared es resbalosa. Usted necesita la fricción. Incluso así, si no presiona lo suficientemente fuerte, la caja se deslizará. La fuerza horizontal que usted aplica produce una fuerza normal sobre la caja ejercida por la pared (la fuerza neta en la horizontal es cero porque la caja no se mueve de manera horizontal). La fuerza de gravedad mg, que actúa hacia abajo sobre la caja, se puede ahora equilibrar por una fuerza de fricción estática hacia arriba, cuya magnitud máxima es proporcional a la fuerza normal. Cuanto más fuerte empuje usted, mayores serán F_N y F_{fr}. Si usted no presiona lo suficientemente fuerte, entonces $mg > \mu_s F_N$ y la caja empezará a deslizarse hacia abajo.

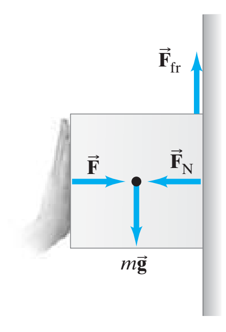


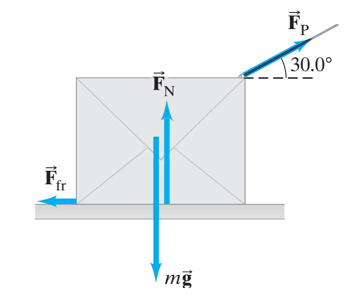
FIGURA 5–4 Ejemplo 5–2.

EJERCICIO A Si $\mu_s = 0.40$ y $mg = 20$ N, ¿qué fuerza mínima F evitará que la caja se caiga: *a*) 100 N; *b*) 80 N; *c*) 50 N; *d*) 20 N; *e*) 8 N?

EJEMPLO 5–3 **Jalando contra la fricción.** Se tira de una caja de 10.0 kg, a lo largo de una superficie horizontal, con una fuerza F_P de 40.0 N aplicada a un ángulo de 30.0° con respecto a la horizontal. Éste ejercicio es como el del ejemplo 4-11, excepto que ahora se tiene fricción y suponemos un coeficiente de fricción cinética de 0.30. Calcule la aceleración.



FIGURA 5–5 Ejemplo 5–3.



PLANTEAMIENTO El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 5-5, que es muy parecido a la figura 4-21, pero con una fuerza horizontal adicional: la fuerza de fricción.
SOLUCIÓN El cálculo para la dirección vertical (y) es igual que antes (ejemplo 4-11), $mg = (10.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 98.0$ N y $F_{Py} = (40.0 \text{ N})(\text{sen } 30.0°) = 20.0$ N. Tomando y como positiva hacia arriba y $a_y = 0$, tenemos

$$F_N - mg + F_{Py} = ma_y$$
$$F_N - 98.0 \text{ N} + 20.0 \text{ N} = 0,$$

de modo que la fuerza normal es $F_N = 78.0$ N. Ahora aplicamos la segunda ley de Newton para la dirección (x) horizontal (consideramos positivo hacia la derecha) e incluimos la fuerza de fricción:

$$F_{Px} - F_{fr} = ma_x.$$

La fuerza de fricción es cinética siempre que $F_{fr} = \mu_k F_N$ sea menor que $F_{Px} = (40.0 \text{ N}) \cos 30.0° = 34.6$ N, que es:

$$F_{fr} = \mu_k F_N = (0.30)(78.0 \text{ N}) = 23.4 \text{ N}.$$

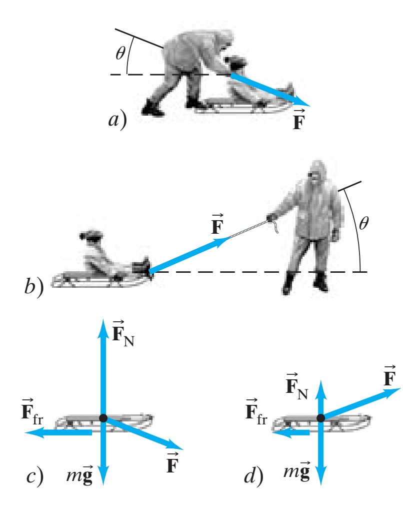
Por lo tanto, la caja sí acelera.

$$a_x = \frac{F_{Px} - F_{fr}}{m} = \frac{34.6 \text{ N} - 23.4 \text{ N}}{10.0 \text{ kg}} = 1.1 \text{ m/s}^2.$$

En ausencia de fricción, como vimos en el ejemplo 4-11, la aceleración sería mucho mayor que esto.

NOTA Nuestra respuesta final tiene sólo dos cifras significativas porque el valor de nuestra entrada menos significativa ($\mu_k = 0.30$) tiene sólo dos.

EJERCICIO B Si $\mu_k F_N$ fuera mayor que F_{Px}, ¿qué concluiría usted?



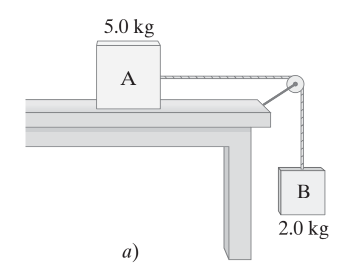
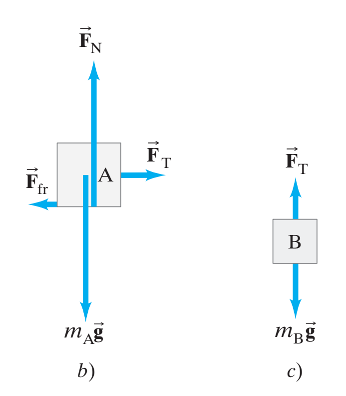


FIGURA 5–6 Ejemplo 5–4.

EJEMPLO CONCEPTUAL 5–4 **¿Empujar o jalar un trineo?** Su hermanita quiere que usted la pasee en su trineo. Si el terreno es plano, ¿usted ejercerá menos fuerza al empujarlo o al jalarlo? Véase las figuras 5-6a y b. Suponga el mismo ángulo θ en cada caso.

RESPUESTA Dibujemos diagramas de cuerpo libre para la combinación trineo-hermanita, como se indica en las figuras 5-6c y d, que muestran, para ambos casos, las fuerzas ejercidas por usted, $\vec{\mathbf{F}}$ (una incógnita), por la nieve, $\vec{\mathbf{F}}_\mathrm{N}$ y $\vec{\mathbf{F}}_\mathrm{fr}$, y por la gravedad $m\vec{\mathbf{g}}$. *a*) Si usted la empuja y $\theta > 0$, la fuerza que usted aplica una componente vertical hacia abajo. Por lo tanto, la fuerza normal hacia arriba ejercida por el suelo (figura 5-6c) será mayor que mg (donde m es la masa de la niña más el trineo). *b*) Si usted la jala, la fuerza que usted aplica tendrá una componente vertical hacia arriba, por lo que la fuerza normal F_N será menor que mg, figura 5-6d. Como la fuerza de fricción es proporcional a la fuerza normal, F_fr será menor si usted la jala; es decir, usted ejercerá menos fuerza al jalar.

FIGURA 5–7 Ejemplo 5–5.



EJEMPLO 5–5 **Dos cajas y una polea.** En la figura 5-7a dos cajas están conectadas mediante una cuerda que pasa por una polea. El coeficiente de fricción cinética entre la caja A y la mesa es de 0.20. Despreciamos la masa de la cuerda y de la polea, así como cualquier fricción en el eje de la polea, lo cual significa que podemos suponer que una fuerza aplicada a un extremo de la cuerda tendrá la misma magnitud en el otro extremo. Queremos encontrar la aceleración a del sistema, que tendrá la misma magnitud para ambas cajas si suponemos que la cuerda no se estira. Conforme la caja B se mueve hacia abajo, la caja A se mueve hacia la derecha.

PLANTEAMIENTO Los diagramas de cuerpo libre para cada caja se muestran en las figuras 5-7b y c. Las fuerzas sobre la caja A son las que jalan la cuerda F_T, la gravedad $m_\mathrm{A}g$, la fuerza normal ejercida por la mesa F_N y una fuerza de fricción ejercida por la mesa F_fr; las fuerzas sobre la caja B son la gravedad $m_\mathrm{B}g$ y la fuerza con la que jala la cuerda hacia arriba, F_T.

SOLUCIÓN La caja A no se mueve verticalmente, por lo que la segunda ley de Newton nos indica que la fuerza normal sólo equilibra el peso,

$$F_\mathrm{N} = m_\mathrm{A}\,g = (5.0\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/s^2}) = 49\,\mathrm{N}.$$

En la dirección horizontal hay dos fuerzas sobre la caja A (figura 5-7b): F_T, la tensión en la cuerda (cuyo valor desconocemos) y la fuerza de fricción

$$F_\mathrm{fr} = \mu_\mathrm{k} F_\mathrm{N} = (0.20)(49\,\mathrm{N}) = 9.8\,\mathrm{N}.$$

La aceleración horizontal es lo que queremos encontrar; usamos la segunda ley de Newton en la dirección x, $\Sigma F_{\mathrm{A}x} = m_\mathrm{A}\,a_x$, que adquiere la forma (al tomar el sentido positivo hacia la derecha y haciendo $a_{\mathrm{A}x} = a$):

$$\Sigma F_{\mathrm{A}x} = F_\mathrm{T} - F_\mathrm{fr} = m_\mathrm{A}\,a. \qquad \text{[caja A]}$$

Ahora consideramos la caja B. La fuerza de gravedad $m_\mathrm{B}g = (2.0\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/s^2}) = 19.6\,\mathrm{N}$ tira hacia abajo, y la cuerda jala hacia arriba con una fuerza F_T. Podemos entonces escribir la segunda ley de Newton para la caja B (tomando el sentido hacia abajo como positivo):

$$\Sigma F_{\mathrm{B}y} = m_\mathrm{B}\,g - F_\mathrm{T} = m_\mathrm{B}\,a. \qquad \text{[caja B]}$$

[Advierta que si $a \neq 0$, entonces F_T no es igual a $m_\mathrm{B}g$].

Tenemos dos incógnitas, a y F_T, y también dos ecuaciones. Despejamos F_T de la ecuación para la caja A:

$$F_\mathrm{T} = F_\mathrm{fr} + m_\mathrm{A}\,a,$$

y sustituimos este valor en la ecuación para la caja B:

$$m_\mathrm{B}\,g - F_\mathrm{fr} - m_\mathrm{A}\,a = m_\mathrm{B}\,a.$$

Ahora despejamos a e insertamos valores numéricos:

$$a = \frac{m_\mathrm{B}\,g - F_\mathrm{fr}}{m_\mathrm{A} + m_\mathrm{B}} = \frac{19.6\,\mathrm{N} - 9.8\,\mathrm{N}}{5.0\,\mathrm{kg} + 2.0\,\mathrm{kg}} = 1.4\,\mathrm{m/s^2},$$

que es la aceleración de la caja A hacia la derecha y de la caja B hacia abajo.

Si lo deseamos, podemos calcular F_T usando la ecuación para F_T dada anteriormente:

$$F_\mathrm{T} = F_\mathrm{fr} + m_\mathrm{A}\,a = 9.8\,\mathrm{N} + (5.0\,\mathrm{kg})(1.4\,\mathrm{m/s^2}) = 17\,\mathrm{N}.$$

NOTA La caja B no está en caída libre. No cae con $a = g$ porque una fuerza adicional, F_T, actúa hacia arriba sobre ella.

En el capítulo 4 examinamos el movimiento sobre rampas y planos inclinados, y vimos que por lo general resulta conveniente elegir el eje x, a lo largo del plano, en la dirección de la aceleración. Habíamos despreciado la fricción, pero ahora la tomaremos en cuenta.

EJEMPLO 5–6 **El esquiador.** El esquiador en la figura 5-8a desciende la pendiente de 30°, con rapidez constante. ¿Qué puede decir usted acerca del coeficiente de fricción cinética μ_k?

FÍSICA APLICADA
Esquí

PLANTEAMIENTO Seleccionamos el eje x a lo largo de la pendiente, con x positivo apuntando hacia abajo de la pendiente, en la dirección del movimiento del esquiador. El eje y es perpendicular a la superficie, como se indica en la figura 5-8b, que es el diagrama de cuerpo libre de nuestro sistema, el cual elegimos como el esquiador y sus esquíes (masa total m). Las fuerzas que actúan son la gravedad $\vec{\mathbf{F}}_G = m\vec{\mathbf{g}}$, que apunta verticalmente hacia abajo (es decir, *no* es perpendicular a la pendiente), y las dos fuerzas ejercidas sobre los esquíes por la nieve: la fuerza normal perpendicular a la superficie nevada (que *no* es vertical) y la fuerza de fricción paralela a la superficie. Por conveniencia, en la figura 5-8b se muestran estas tres fuerzas actuando en un solo punto.

SOLUCIÓN Sólo tenemos que descomponer un vector; el peso $\vec{\mathbf{F}}_G$, y sus componentes se muestran con líneas punteadas en la figura 5-8c.

$$F_{Gx} = mg \operatorname{sen}\theta,$$
$$F_{Gy} = -mg\cos\theta,$$

donde por ahora usamos θ en vez de 30°. No hay aceleración, por lo que aplicando la segunda ley de Newton a las componentes x y y se tiene

$$\Sigma F_y = F_N - mg\cos\theta = ma_y = 0$$
$$\Sigma F_x = mg\operatorname{sen}\theta - \mu_k F_N = ma_x = 0.$$

De la primera ecuación tenemos $F_N = mg\cos\theta$. Sustituimos F_N en la segunda ecuación:

$$mg\operatorname{sen}\theta - \mu_k(mg\cos\theta) = 0.$$

Ahora despejamos μ_k:

$$\mu_k = \frac{mg\operatorname{sen}\theta}{mg\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

que para $\theta = 30°$ queda

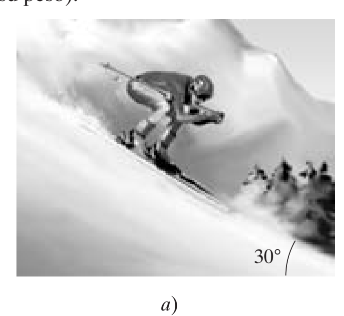
$$\mu_k = \tan\theta = \tan 30° = 0.58.$$

Note que podríamos utilizar la ecuación

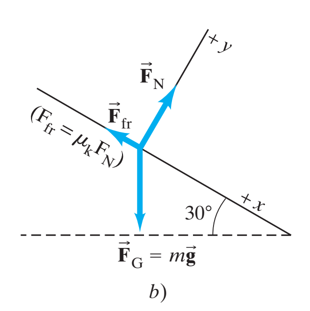
$$\mu_k = \tan\theta$$

para determinar μ_k en una variedad de condiciones. Ahora todo lo que necesitamos es observar para qué ángulo de la pendiente el esquiador desciende con rapidez constante. Es otra de las causas de por qué a menudo es útil insertar los valores numéricos hasta el final del desarrollo: obtenemos un resultado general que también es útil en otras situaciones.

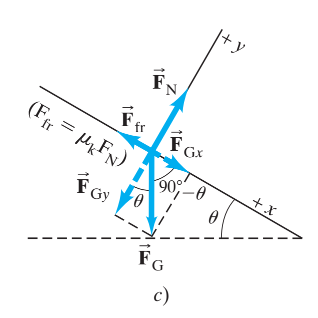
FIGURA 5–8 Ejemplo 5-6. Un esquiador que desciende por una pendiente; $\vec{\mathbf{F}}_G = m\vec{\mathbf{g}}$ es la fuerza de gravedad sobre el esquiador (es decir, su peso).



a)



b)



c)

En los problemas relacionados con una pendiente o con un "plano inclinado", es frecuente cometer un error en la dirección de la fuerza normal o en la dirección de la gravedad. La fuerza normal *no* es vertical: es perpendicular a la pendiente o el plano. Y la gravedad *no* es perpendicular a la pendiente: actúa verticalmente hacia abajo, es decir, hacia el centro de la Tierra.

CUIDADO
Cuidado con la dirección de la gravedad y de la fuerza normal

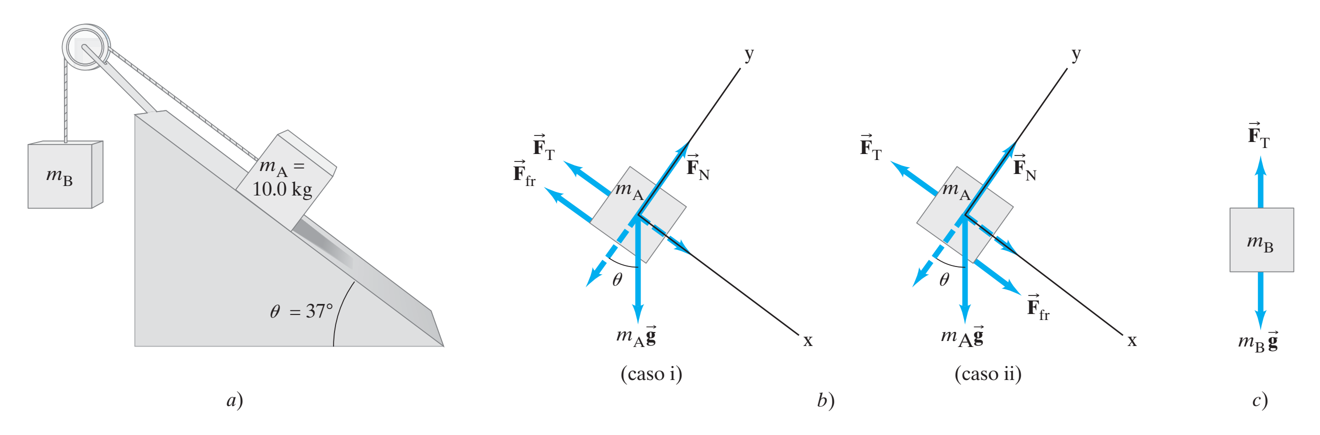


FIGURA 5–9 Ejemplo 5-7. Advierta la selección de los ejes *x* y *y*.

EJEMPLO 5–7 **Una rampa, una polea y dos cajas.** Una caja de masa $m_A = 10.0$ kg descansa sobre una superficie inclinada a $\theta = 37°$ con respecto a la horizontal. La caja está conectada por una cuerda ligera, que pasa alrededor de una polea ideal (sin masa y sin fricción), a una segunda caja de masa m_B, cuelga libremente como se muestra en la figura 5-9a. *a*) Si el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.40$, determine qué rango de valores para la masa m_B mantendrá al sistema en reposo. *b*) Si el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.30$ y $m_B = 10.0$ kg, determine la aceleración del sistema.

PLANTEAMIENTO La figura 5-9b muestra dos diagramas de cuerpo libre para la caja m_A dado que la fuerza de fricción puede apuntar hacia arriba o hacia abajo de la pendiente, dependiendo de la dirección en la que se deslice la caja: *i)* si $m_B = 0$ o es lo suficientemente pequeña, m_A tenderá a deslizarse hacia abajo del plano inclinado, por lo que $\vec{F}_{fr}$ estará dirigida hacia arriba del plano inclinado; *ii)* si m_B es lo suficientemente grande, m_A tenderá a ser jalada hacia arriba del plano, por lo que $\vec{F}_{fr}$ estará dirigida hacia abajo del plano. La fuerza de tensión ejercida por la cuerda está indicada como $\vec{F}_T$.

SOLUCIÓN *a*) Para ambos casos *i)* y *ii)*, la segunda ley de Newton para la dirección *y* (perpendicular al plano) es la misma:

$$F_N - m_A g \cos\theta = m_A a_y = 0$$

ya que no hay movimiento en *y*. Así que,

$$F_N = m_A g \cos\theta.$$

Ahora para el movimiento en *x*. Consideramos primero el caso *i)* para el cual $\Sigma F = ma$ nos da

$$m_A g \operatorname{sen}\theta - F_T - F_{fr} = m_A a_x.$$

Consideramos $a_x = 0$ y despejamos F_T ya que F_T está relacionada con m_B (cuyo valor es lo que estamos buscando) a través de $F_T = m_B g$ (véase la figura 5-9c). Entonces,

$$m_A g \operatorname{sen}\theta - F_{fr} = F_T = m_B g.$$

Despejamos m_B e igualamos F_{fr} a su valor máximo $\mu_s F_N = \mu_s m_A g \cos\theta$ para encontrar el valor mínimo que puede tener m_B para impedir el movimiento ($a_x = 0$): ($a_x = 0$):

$$\begin{aligned} m_B &= m_A \operatorname{sen}\theta - \mu_s m_A \cos\theta \\ &= (10.0\text{ kg})(\operatorname{sen} 37° - 0.40 \cos 37°) = 2.8\text{ kg}. \end{aligned}$$

Así, si $m_B < 2.8$ kg, entonces la caja A se deslizará hacia abajo por el plano inclinado.

Ahora para el caso *ii)* en la figura 5-9b, la caja A tiende a moverse *hacia arriba* del plano inclinado. La segunda ley de Newton queda

$$m_A g \operatorname{sen}\theta + F_{fr} - F_T = m_A a_x = 0.$$

Entonces, el valor máximo que puede tener m_B sin producir aceleración está dado por

$$F_T = m_B g = m_A g \operatorname{sen}\theta + \mu_s m_A g \cos\theta$$

o bien,

$$m_B = m_A \operatorname{sen}\theta + \mu_s m_A \cos\theta$$

$$= (10.0\text{ kg})(\operatorname{sen} 37° + 0.40 \cos 37°) = 9.2\text{ kg}.$$

Así, para impedir el movimiento, tenemos la condición

$$2.8\text{ kg} < m_B < 9.2\text{ kg}.$$

(*b*) Si $m_B = 10.0$ kg y $\mu_k = 0.30$, entonces m_B bajará y m_A subirá por el plano (caso *ii*). Para encontrar la aceleración a, utilizamos $\Sigma F = ma$ para la caja A:

$$m_A a = F_T - m_A g \operatorname{sen}\theta - \mu_k F_N.$$

Como m_B acelera hacia abajo, la segunda ley de Newton aplicada a la caja B (figura 5-9c) nos indica que $m_B a = m_B g - F_T$, o $F_T = m_B g - m_B a$, y sustituimos esto en la ecuación anterior:

$$m_A a = m_B g - m_B a - m_A g \operatorname{sen}\theta - \mu_k F_N.$$

Despejamos la aceleración a y sustituimos $F_N = m_A g \cos\theta$, y luego $m_A = m_B = 10.0$ kg, para encontrar

$$a = \frac{m_B g - m_A g \operatorname{sen}\theta - \mu_k m_A g \cos\theta}{m_A + m_B}$$

$$= \frac{(10.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(1 - \operatorname{sen} 37° - 0.30 \cos 37°)}{20.0\text{ kg}}$$

$$= 0.079g = 0.78\text{ m/s}^2.$$

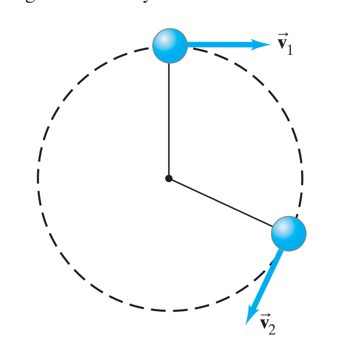
NOTA Vale la pena comparar esta ecuación para aceleración a con la obtenida en el ejemplo 5-5: si aquí hacemos $\theta = 0$, el plano será horizontal como en el ejemplo 5-5, y obtenemos $a = (m_B g - \mu_k m_A g)/(m_A + m_B)$ como en el ejemplo 5-5.

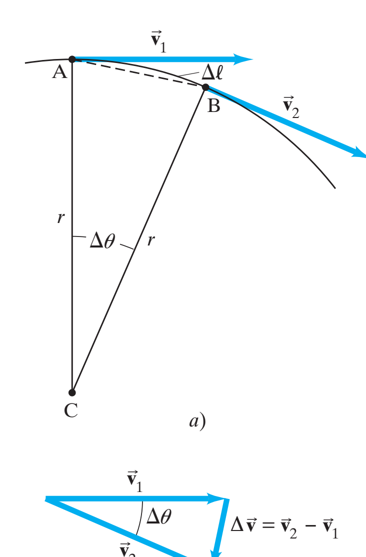
5–2 Movimiento circular uniforme: Cinemática

Un objeto se mueve en una línea recta si la fuerza neta que actúa sobre él es paralela (o antiparalela) a la dirección del movimiento, o si la fuerza neta es cero. Si la fuerza neta actúa en un ángulo con respecto a la dirección del movimiento en un momento dado, entonces el objeto se moverá en una trayectoria curva. Un ejemplo de este último caso es el movimiento de un proyectil, que se estudió en el capítulo 3. Otro caso importante es el de un objeto que se mueve en un círculo, como una pelota unida al extremo de una cuerda que gira alrededor de la cabeza de alguien, o el movimiento casi circular de la Luna alrededor de la Tierra.

Se dice que un objeto que se mueve en una trayectoria circular con *rapidez* constante v experimenta un **movimiento circular uniforme**. En este caso, la *magnitud* de la velocidad permanece constante; pero la *dirección* de la velocidad cambia continuamente conforme el objeto se mueve alrededor del círculo (figura 5-10). Dado que la aceleración se define como la tasa del cambio de la velocidad, un cambio en la dirección de esta última implica una aceleración, así como un cambio en la magnitud de la velocidad también implica una aceleración. Así, un objeto que describe una trayectoria circular está acelerando constantemente, aun cuando la rapidez permanece constante ($v_1 = v_2 = v$). Ahora investigaremos dicha aceleración de manera cuantitativa.

FIGURA 5–10 Un pequeño objeto que se mueve en círculo muestra cómo cambia la velocidad. En cada punto, el vector velocidad instantánea es tangente a la trayectoria circular.





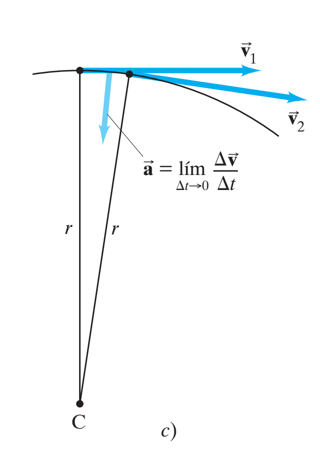


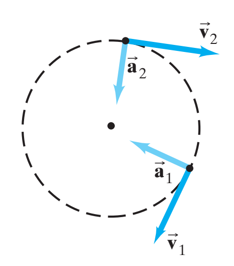
FIGURA 5–11 Determinación del cambio en velocidad, $\Delta\vec{v}$, para una partícula que se mueve en una trayectoria circular. La longitud $\Delta\ell$ es la distancia a lo largo del arco, desde A hasta B.



CUIDADO

En el movimiento circular uniforme la rapidez es constante, pero la aceleración no es cero

FIGURA 5–12 Para el movimiento circular uniforme, $\vec{a}$ siempre es perpendicular a $\vec{v}$.



La aceleración se define como

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

donde $\Delta\vec{v}$ es el cambio en la velocidad durante el corto intervalo de tiempo Δt. Finalmente consideraremos la situación en que Δt tiende a cero y, por lo tanto, obtendremos la aceleración instantánea. Pero, con el propósito de hacer un dibujo claro (figura 5-11), consideraremos un intervalo de tiempo distinto de cero. Durante el intervalo de tiempo Δt, la partícula de la figura 5-11a se mueve desde el punto A hasta el punto B, y cubre una distancia $\Delta\ell$ *a lo largo del arco* que subtiende un ángulo $\Delta\theta$. El cambio en el vector velocidad es $\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \Delta\vec{v}$, y se muestra en la figura 5-11b.

Si hacemos que Δt se reduzca considerablemente (es decir, si tiende a cero), entonces $\Delta\ell$ y $\Delta\theta$ también serán muy pequeños, y $\vec{v}_2$ será casi paralelo a $\vec{v}_1$ (figura 5-11c); $\Delta\vec{v}$ será esencialmente perpendicular a ellos. De esta forma, $\Delta\vec{v}$ apunta hacia el centro del círculo. Dado que por definición $\vec{a}$, está en la misma dirección que $\Delta\vec{v}$, entonces también debe apuntar hacia el centro del círculo. Por esta razón, a esta aceleración se le llama **aceleración centrípeta** (aceleración "que apunta hacia el centro") o **aceleración radial** (ya que se dirige a lo largo del radio, hacia el centro del círculo), y se le denota como $\vec{a}_R$.

A continuación, determinaremos la magnitud de la aceleración centrípeta (radial), a_R. Puesto que el segmento CA en la figura 5-11a es perpendicular a $\vec{v}_1$, y CB es perpendicular a $\vec{v}_2$, se sigue que el ángulo $\Delta\theta$, definido como el ángulo entre CA y CB, también es el ángulo entre $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. Por lo tanto, los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\Delta\vec{v}$ en la figura 5-11b forman un triángulo que es geométricamente similar† al triángulo CAB de la figura 5-11a. Si tomamos $\Delta\theta$ muy pequeño (es decir Δt muy pequeño) y se establece que $v = v_1 = v_2$ pues la magnitud de la velocidad no cambia, escribimos

$$\frac{\Delta v}{v} \approx \frac{\Delta\ell}{r},$$

o bien,

$$\Delta v \approx \frac{v}{r}\Delta\ell.$$

Ésta es una igualdad exacta cuando Δt tiende a cero, porque entonces la longitud del arco $\Delta\ell$ es igual a la longitud de la cuerda AB. Queremos encontrar la aceleración instantánea, a_R, de manera que utilizamos la expresión anterior para escribir

$$a_R = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{r}\frac{\Delta\ell}{\Delta t}.$$

Entonces, como

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\ell}{\Delta t}$$

es justo la rapidez lineal, v, del objeto, tenemos que la aceleración centrípeta (radial) es

$$a_R = \frac{v^2}{r}. \qquad \text{[aceleración (radial) centrípeta]} \quad \textbf{(5–1)}$$

La ecuación 5-1 es válida incluso cuando v no es constante.

Para resumir, *un objeto que se mueve en un círculo de radio r con rapidez constante v tiene una aceleración que está dirigida hacia el centro del círculo y cuya magnitud es* $a_R = v^2/r$. No debe sorprender que esta aceleración dependa de v y de r. Cuanto mayor sea la rapidez v, más rápido cambiará de dirección la velocidad; y cuanto mayor sea el radio, menos rápidamente cambiará de dirección la velocidad.

El vector aceleración apunta hacia el centro del círculo; sin embargo, el vector velocidad siempre apuntará en la dirección de movimiento, que es tangencial al círculo. Así, los vectores de velocidad y de aceleración son perpendiculares entre sí, en cada punto de la trayectoria para el movimiento circular uniforme (figura 5-12). Éste es otro ejemplo que ilustra el error de creer que la aceleración y la velocidad están siempre en la misma dirección. Para un objeto que cae verticalmente $\vec{a}$ y $\vec{v}$ de hecho, son paralelos. Pero en el movimiento circular, $\vec{a}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, no paralelos (tampoco eran paralelos en el movimiento de proyectiles, sección 3-7).

EJERCICIO C ¿Las ecuaciones 2-12, las ecuaciones cinemáticas para aceleración constante, pueden utilizarse para movimiento circular uniforme? Por ejemplo, la ecuación 2-12b serviría para calcular el tiempo en el que la pelota que gira de la figura 5-12 completa una revolución.

†El Apéndice A incluye un repaso de geometría.

A menudo al movimiento circular se le describe en términos de la **frecuencia** f, es decir, el número de revoluciones por segundo. El **periodo** T de un objeto que se mueve en una trayectoria circular es el tiempo requerido para completar una revolución. El periodo y la frecuencia están relacionados por

$$T = \frac{1}{f}. \qquad \textbf{(5–2)}$$

Por ejemplo, si un objeto gira con una frecuencia de 3 rev/s, entonces cada revolución tarda $\frac{1}{3}$ s. Para un objeto que da vueltas en un círculo (de circunferencia $2\pi r$) con rapidez constante v, podemos escribir

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

puesto que en una revolución el objeto recorre una circunferencia.

EJEMPLO 5–8 **Aceleración de una pelota que gira.** Una pelota de 150 g unida a una cuerda gira de manera uniforme en un círculo horizontal de 0.600 m de radio, como se indica en las figuras 5-10 o 5-12. La pelota da 2.00 revoluciones en un segundo. ¿Cuál es su aceleración centrípeta?

PLANTEAMIENTO La aceleración centrípeta es $a_R = v^2/r$. Se nos da r y podemos encontrar la rapidez de la pelota, v, a partir del radio y la frecuencia dados.

SOLUCIÓN Si la pelota da dos revoluciones completas por segundo, entonces la pelota viaja en un círculo completo en un intervalo de tiempo igual a 0.500 s, que es su periodo T. La distancia recorrida en este tiempo es la circunferencia del círculo, $2\pi r$, donde r es el radio del círculo. Por lo tanto, la pelota tiene una rapidez

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(0.600\,\text{m})}{(0.500\,\text{s})} = 7.54\,\text{m/s}.$$

La aceleración centrípeta† es

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{(7.54\,\text{m/s})^2}{(0.600\,\text{m})} = 94.7\,\text{m/s}^2.$$

EJERCICIO D Si el radio se duplica a 1.20 m, pero todo lo demás permanece igual, ¿en qué factor cambiará la aceleración centrípeta? *a*) 2, *b*) 4, *c*) $\frac{1}{2}$, *d*) $\frac{1}{4}$, *e)* ninguno de los anteriores.

EJEMPLO 5–9 **Aceleración centrípeta de la Luna.** La órbita casi circular de la Luna alrededor de la Tierra tiene un radio aproximado de 384,000 km y un periodo T de 27.3 días. Determine la aceleración de la Luna hacia la Tierra.

PLANTEAMIENTO De nuevo necesitamos encontrar la velocidad v para determinar a_R. Tendremos que convertir a unidades SI para obtener v en m/s.

SOLUCIÓN En una órbita alrededor de la Tierra, la Luna recorre una distancia $2\pi r$, donde $r = 3.84 \times 10^8$ m es el radio de su trayectoria circular. El tiempo que se requiere para una órbita completa es el periodo lunar de 27.3 d. La rapidez de la Luna en su órbita alrededor de la Tierra es $v = 2\pi r/T$. El periodo T en segundos es $T = (27.3\text{ d})(24.0\text{ h/d})(3600\text{ s/h}) = 2.36 \times 10^6$ s. En consecuencia,

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi r)^2}{T^2 r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2(3.84 \times 10^8\,\text{m})}{(2.36 \times 10^6\,\text{s})^2}$$
$$= 0.00272\,\text{m/s}^2 = 2.72 \times 10^{-3}\,\text{m/s}^2.$$

Podemos expresar esta aceleración en términos de $g = 9.80\text{ m/s}^2$ (la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre) como

$$a = 2.72 \times 10^{-3}\,\text{m/s}^2\left(\frac{g}{9.80\,\text{m/s}^2}\right) = 2.78 \times 10^{-4} g.$$

NOTA La aceleración centrípeta de la Luna, $a = 2.78 \times 10^{-4}\,g$, *no* es la aceleración de la gravedad para los objetos en la superficie lunar debida a la gravedad de nuestro satélite. En cambio, es la aceleración debida a la gravedad *de la Tierra* para cualquier objeto (como la Luna) que está a 384,000 km de la Tierra. Note cuán pequeña es esta aceleración en comparación con la aceleración de los objetos cerca de la superficie terrestre.



Es necesario distinguir entre la gravedad de la Luna sobre los objetos en su superficie, y la gravedad de la Tierra que actúa sobre la Luna (este ejemplo)

†Las diferencias en el dígito final pueden depender de si se conservan todos los dígitos en su calculadora para v (que da $a_R = 94.7\text{ m/s}^2$), o si usted usa $v = 7.54$ m/s, en cuyo caso obtiene $a_R = 94.8\text{ m/s}^2$. Ambos resultados son válidos porque la precisión supuesta es aproximadamente de ± 0.1 m/s (véase la sección 1-3).

FÍSICA APLICADA

Centrifugadora

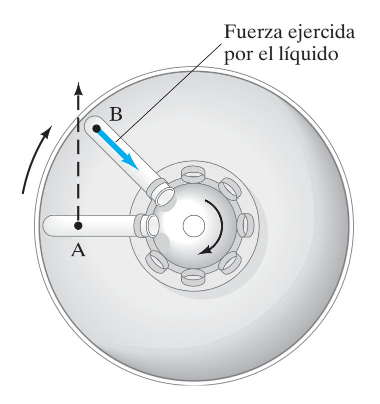


FIGURA 5–13 Dos posiciones de un tubo de ensayo en rotación en una centrifugadora (vista superior). En A el punto negro representa una macromolécula u otra partícula que se va a sedimentar. Dicho punto tenderá a seguir la línea punteada, hacia el fondo del tubo; pero el fluido se resiste a este movimiento al ejercer una fuerza sobre la partícula, como se observa en el punto B.

*Centrifugación

La centrifugadora y la ultracentrifugadora de muy alta rapidez se utilizan para sedimentar materiales rápidamente o para separarlos. Los tubos de ensayo que se sostienen en el rotor centrifugador se aceleran a una rapidez de rotación muy alta. Observe la figura 5-13, donde se representa un tubo de ensayo en dos posiciones conforme el rotor gira. El pequeño punto azul representa una partícula pequeña, tal vez una macromolécula, en un tubo de ensayo lleno de fluido. En la posición A, la partícula muestra una tendencia a moverse en línea recta; pero el fluido, que resiste al movimiento de las partículas, ejerce una fuerza centrípeta que mantiene a las partículas moviéndose casi en un círculo. Por lo general, la fuerza de resistencia ejercida por el fluido (líquido, gas o gel, dependiendo de la aplicación) difiere mucho de mv^2/r, de modo que las partículas llegan lentamente al fondo del tubo. El propósito de una centrifugadora consiste en proporcionar una “gravedad efectiva” mucho mayor que la gravedad normal, mediante la alta rapidez de rotación que, por consiguiente, provoca una sedimentación más rápida.

EJEMPLO 5–10 **Ultracentrifugadora.** El rotor de una ultracentrifugadora gira a 50,000 rpm (revoluciones por minuto). Una partícula en la parte superior de un tubo de ensayo (figura 5-13) está a 6.00 cm del eje de rotación. Calcule su aceleración centrípeta en g.

PLANTEAMIENTO Calculamos la aceleración centrípeta a partir de $a_R = v^2/r$.

SOLUCIÓN El tubo de ensayo completa 5.00×10^4 revoluciones cada minuto, o bien, al dividir entre 60 s/min, 833 rev/s. El tiempo para completar una revolución, el periodo T, es

$$T = \frac{1}{(833 \text{ rev/s})} = 1.20 \times 10^{-3} \text{ s/rev}.$$

En la parte superior del tubo, una partícula gira en un círculo de circunferencia $2\pi r = (2\pi)(0.0600 \text{ m}) = 0.377$ m por revolución. La rapidez de la partícula es, entonces,

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \left(\frac{0.377 \text{ m/rev}}{1.20 \times 10^{-3} \text{ s/rev}}\right) = 3.14 \times 10^2 \text{ m/s}.$$

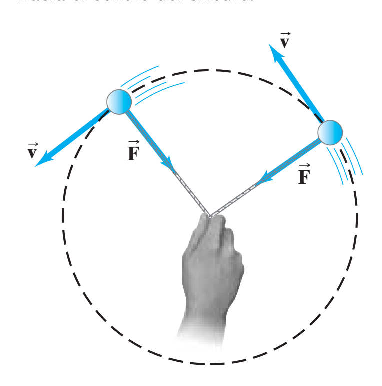
La aceleración centrípeta es

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{(3.14 \times 10^2 \text{ m/s})^2}{0.0600 \text{ m}} = 1.64 \times 10^6 \text{ m/s}^2,$$

que, al dividir entre $g = 9.80 \text{ m/s}^2$, es $1.67 \times 10^5\, g = 167{,}000$ g.

5–3 Dinámica del movimiento circular uniforme

FIGURA 5–14 Se requiere una fuerza para mantener un objeto moviéndose en un círculo. Si la rapidez es constante, la fuerza está dirigida hacia el centro del círculo.



De acuerdo con la segunda ley de Newton, $(\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}})$, si un objeto está acelerado debe haber una fuerza neta no nula actuando sobre él. Un objeto que se mueve en un círculo, como una pelota atada al extremo de una cuerda, debe tener una fuerza aplicada sobre el objeto para seguir moviéndose en ese círculo. Es decir, es necesaria una fuerza neta para darle una aceleración centrípeta. La magnitud de la fuerza neta requerida puede calcularse usando la segunda ley de Newton para la componente radial, $\Sigma F_R = ma_R$, donde a_R es la aceleración centrípeta, $a_R = v^2/r$ y ΣF_R es la fuerza total (o fuerza neta) en la dirección radial:

$$\Sigma F_R = ma_R = m\frac{v^2}{r}. \qquad \text{[movimiento circular]} \qquad \textbf{(5–3)}$$

Para el movimiento circular uniforme (v = constante), la aceleración es a_R, que apunta hacia el centro del círculo en cualquier momento. Así, *la fuerza neta también debe estar dirigida hacia el centro del círculo* (figura 5-14). Es necesaria una fuerza neta porque, si no hubiera una fuerza neta ejercida sobre el objeto, éste no se movería en un círculo sino en una línea recta, como nos lo indica la primera ley de Newton. La dirección de la fuerza cambia continuamente, de manera que siempre está dirigida hacia el centro del círculo. Esta fuerza se llama a veces fuerza centrípeta (“que apunta hacia el centro”). Pero esté consciente de que “fuerza centrípeta” no significa algún nuevo tipo de fuerza. El término únicamente describe la *dirección* de la fuerza neta necesaria para producir una trayectoria circular: la fuerza neta está dirigida hacia el centro del círculo. La fuerza *debe ser aplicada por otros objetos*. Por ejemplo, para hacer girar una pelota atada al extremo de una cuerda, usted jala la cuerda y ésta ejerce una fuerza sobre la pelota. (Inténtelo).

CUIDADO

La fuerza centrípeta no es un nuevo tipo de fuerza (cualquier fuerza debe ser ejercida por un objeto)

Se tiene la noción incorrecta de que cuando un objeto se mueve en un círculo existe una fuerza que actúa sobre él hacia afuera, una fuerza llamada centrífuga ("que escapa del centro"). Esto es erróneo: *no hay una fuerza hacia afuera* sobre el objeto que da vueltas. Por ejemplo, considere a una persona que hace girar una pelota en el extremo de una cuerda alrededor de su cabeza (figura 5-15). Si ha hecho usted esto alguna vez, sabrá que se siente sobre su mano una fuerza que jala hacia afuera. La falsa noción surge cuando este jalón se interpreta como una fuerza "centrífuga" (hacia fuera), que jala sobre la pelota y que se transmite a lo largo de la cuerda hasta su mano. Esto no es lo que sucede en realidad. Para mantener la pelota moviéndose en un círculo, usted jala *hacia adentro* la cuerda, que a la vez ejerce la una fuerza sobre la pelota, y la por tercera ley de Newton, la pelota ejerce una fuerza igual y opuesta sobre la cuerda, y *ésta* es la fuerza hacia afuera que siente su mano (véase la figura 5-15).

La fuerza *sobre la pelota* es ejercida *hacia adentro* sobre ella por usted mediante la cuerda. Como una evidencia aún más convincente de que no actúa ninguna "fuerza centrífuga" sobre la pelota, considere lo que sucede cuando usted suelta la cuerda. Si estuviera actuando una fuerza centrífuga, la pelota saldría volando hacia afuera, como se muestra en la figura 5-16a. Pero no sucede así; la pelota sale volando tangencialmente (figura 5-16b), en la dirección que tenía la velocidad en el momento en que fue soltada, porque la fuerza hacia adentro ya no actúa. ¡Inténtelo y observe!

EJERCICIO E Regrese a la Pregunta de inicio de capítulo de la página 112 y respóndala de nuevo. Intente explicar porque quizás usted respondió de manera diferente la primera vez.

EJEMPLO 5–11 **ESTIMACIÓN** **Fuerza sobre una pelota en rotación (horizontal).** Estime la fuerza que una persona debe ejercer sobre una cuerda unida a una pelota de 0.150 kg para que ésta gire en un círculo horizontal de 0.600 m de radio. La pelota gira a 2.00 revoluciones por segundo ($T = 0.500$ s), al igual que en el ejemplo 5-8. Ignore la masa de la cuerda.

PLANTEAMIENTO Primero dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la pelota. Las fuerzas que actúan sobre la pelota son la fuerza de gravedad, $m\vec{\mathbf{g}}$ hacia abajo, y la fuerza de tensión $\vec{\mathbf{F}}_T$ que ejerce la cuerda hacia la mano en el centro (que ocurre porque la persona ejerce esa misma fuerza sobre la cuerda). El diagrama de cuerpo libre para la pelota se muestra en la figura 5-17. El peso de la pelota complica el asunto y hace imposible que la pelota gire con la cuerda en un plano perfectamente horizontal. Suponemos que el peso es pequeño y hacemos $\phi \approx 0$ en la figura 5-17. Así $\vec{\mathbf{F}}_T$ actuará casi horizontalmente y, en cualquier caso, proporcionará la fuerza necesaria para dar a la pelota su aceleración centrípeta.

SOLUCIÓN Aplicamos la segunda ley de Newton a la dirección radial, que es ahora horizontal:

$$(\Sigma F)_R = ma_R,$$

donde $a_R = v^2/r$ y $v = 2\pi r/T = 2\pi(0.600\,\text{m})/(0.500\,\text{s}) = 7.54\,\text{m/s}$. Entonces,

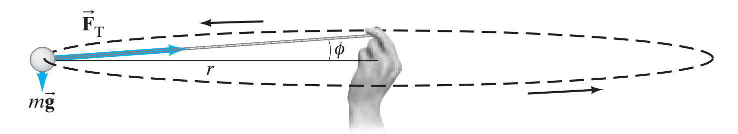
$$F_T = m\frac{v^2}{r} = (0.150\,\text{kg})\frac{(7.54\,\text{m/s})^2}{(0.600\,\text{m})} \approx 14\,\text{N}.$$

NOTA Conservamos sólo dos cifras significativas en la respuesta porque ignoramos el peso de la pelota; esto es, $mg = (0.150\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2) = 1.5$ N, que es aproximadamente $\frac{1}{10}$ de nuestro resultado, y aunque es pequeño, no lo es tanto como para justificar una respuesta más precisa para F_T.

NOTA Para incluir el efecto de $m\vec{\mathbf{g}}$, en la figura 5-17 resuelva $\vec{\mathbf{F}}_T$ en componentes y haga la componente horizontal de $\vec{\mathbf{F}}_T$ igual a mv^2/r y su componente vertical igual a mg.



FIGURA 5–17 Ejemplo 5–11.



CUIDADO

No existe una "fuerza centrífuga" real

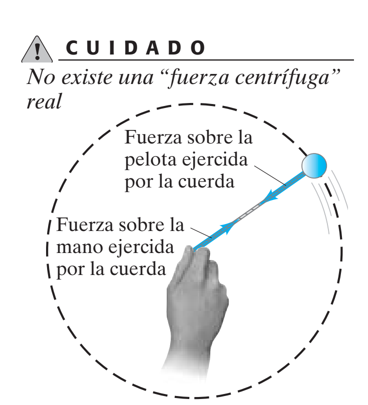
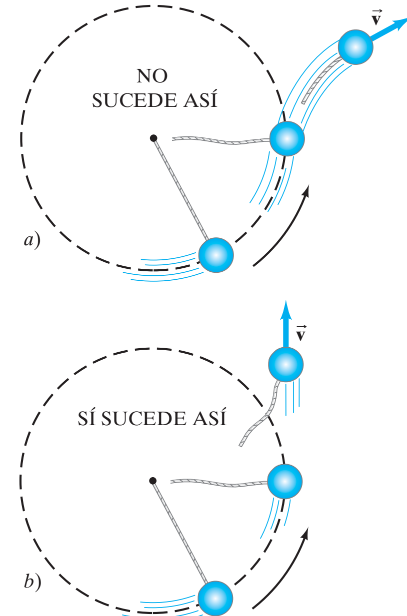
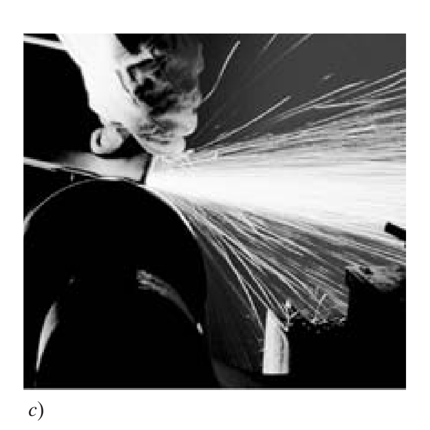


FIGURA 5–15 Movimiento circular de una pelota en el extremo de una cuerda.

FIGURA 5–16 Si existiera fuerza centrífuga, al soltarse la pelota saldría volando como en *a*). De hecho, sale tangencialmente como en *b*). Por ejemplo, en *c*) las chispas vuelan en línea recta tangencialmente desde el borde de una rueda esmeriladora en rotación.





c)

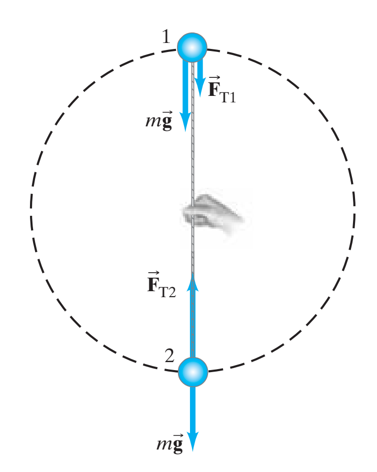


FIGURA 5–18 Ejemplo 5-12. Diagramas de cuerpo libre para las posiciones 1 y 2.

CUIDADO

Sólo hay movimiento circular si la cuerda está tensa

EJEMPLO 5–12 **Pelota en rotación (círculo vertical).** Una pelota de 0.150 kg unida al extremo de una cuerda ligera de 1.10 m de longitud se hace girar en un círculo *vertical*. *a*) Determine la rapidez mínima que la pelota debe tener en la parte superior de su arco, para moverse continuamente en un círculo. *b*) Calcule la tensión en la cuerda en el fondo del arco, suponiendo que la pelota se está moviendo al doble de la rapidez del inciso *a*).

PLANTEAMIENTO La pelota se mueve en un círculo vertical y *no* experimenta movimiento circular uniforme. El radio se supone constante, pero la rapidez v cambia a causa de la gravedad. No obstante, la ecuación 5-1 es válida en cada punto a lo largo del círculo, y la utilizamos en los puntos superior e inferior. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 5-18 para ambas posiciones.

SOLUCIÓN *a*) Arriba (punto 1), actúan dos fuerzas sobre la pelota: $m\vec{g}$, la fuerza de gravedad y $\vec{F}_{T1}$, la fuerza de tensión que ejerce la cuerda en el punto 1. Ambas fuerzas actúan hacia abajo y su suma vectorial es la responsable de dar a la pelota su aceleración centrípeta a_R. Aplicamos la segunda ley de Newton en la dirección vertical y elegimos el sentido positivo hacia abajo (hacia el centro), ya que la aceleración es hacia abajo:

$$(\Sigma F)_R = ma_R$$

$$F_{T1} + mg = m\frac{v_1^2}{r}. \qquad \text{[parte superior]}$$

De esta ecuación observamos que la fuerza de tensión F_{T1} en el punto 1 resultará mayor si v_1 (la rapidez de la pelota en la parte superior del círculo) se hace mayor, como es de esperarse. Sin embargo, se nos pide la rapidez *mínima* para mantener a la pelota moviéndose en un círculo. La cuerda permanecerá tensa siempre que haya tensión en ella; pero si la tensión desaparece (por ser v_1 muy pequeña), la cuerda se aflojará y la pelota ya no seguirá una trayectoria circular. De manera que la rapidez mínima ocurrirá si $F_{T1} = 0$, para la cual tenemos

$$mg = m\frac{v_1^2}{r}. \qquad \text{[rapidez mínima en la parte superior]}$$

Despejamos v_1 manteniendo un digito adicional para usarlo en el inciso *b*):

$$v_1 = \sqrt{gr} = \sqrt{(9.80\,\text{m/s}^2)(1.10\,\text{m})} = 3.283\,\text{m/s}.$$

Ésta es la rapidez mínima en la parte superior del círculo para que la pelota continúe moviéndose en una trayectoria circular.

b) Cuando la pelota está en la parte inferior del círculo (punto 2 en la figura 5-18), la cuerda ejerce una fuerza de tensión F_{T2} hacia arriba; mientras que la fuerza de gravedad, $m\vec{g}$, actúa hacia abajo. La segunda ley de Newton, esta vez con sentido positivo *hacia arriba* (puesto que la aceleración apunta hacia arriba) da

$$(\Sigma F)_R = ma_R$$

$$F_{T2} - mg = m\frac{v_2^2}{r}. \qquad \text{[hacia abajo]}$$

La rapidez v_2 está dada como el doble del valor encontrado en *a*), a saber, 6.566 m/s. Despejamos F_{T2}:

$$F_{T2} = m\frac{v_2^2}{r} + mg$$

$$= (0.150\,\text{kg})\frac{(6.566\,\text{m/s})^2}{(1.10\,\text{m})} + (0.150\,\text{kg})(9.80\,\text{m/s}^2) = 7.35\,\text{N}.$$

EJERCICIO F Un pasajero de la rueda de la fortuna se mueve en un círculo vertical de radio r con rapidez constante v (figura 5-19). La fuerza normal que ejerce el asiento sobre el pasajero en la parte superior de la trayectoria es *a*) menor que, *b*) mayor que o c) igual a la fuerza que ejerce el asiento ejerce sobre el pasajero la parte inferior de la trayectoria.

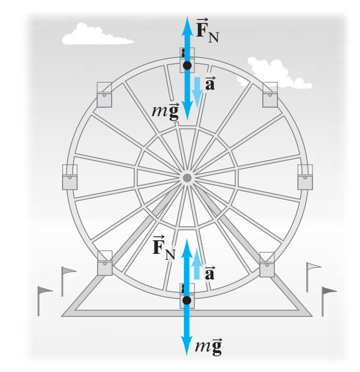


FIGURA 5–19 Ejercicio F.

EJEMPLO 5–13 **Péndulo cónico.** Una pequeña pelota de masa m, suspendida de una cuerda de longitud ℓ, gira en un círculo de radio $r = \ell$ sen θ, donde θ es el ángulo que forma la cuerda con la vertical (figura 5-20). *a*) ¿Qué dirección tiene la aceleración de la pelota y qué causa esa aceleración? *b*) Calcule la rapidez y el periodo (tiempo requerido para completar una revolución) de la pelota en términos de ℓ, θ, g.

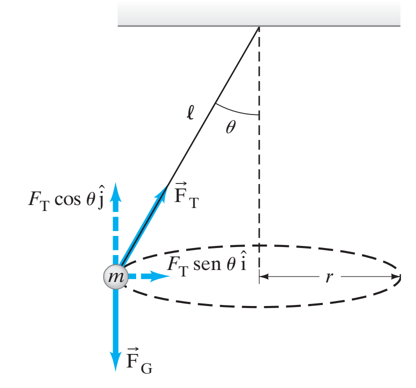


FIGURA 5–20 Ejemplo 5–13. Péndulo cónico.

PLANTEAMIENTO Podemos responder el inciso *a*) si observamos la figura 5-20, la cual muestra las fuerzas sobre la pelota que gira en un instante dado: la aceleración apunta horizontalmente hacia el centro de la trayectoria circular (no a lo largo de la cuerda). La fuerza responsable de la aceleración es la fuerza *neta* que aquí es la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre la masa m: su peso $\vec{\mathbf{F}}_G$ (de magnitud $F_G = mg$) y la fuerza ejercida por la cuerda tensa, $\vec{\mathbf{F}}_T$. Ésta última tiene componentes horizontal y vertical de magnitud F_T sen θ y $F_T \cos\theta$, respectivamente.

SOLUCIÓN *a*) Aplicamos la segunda ley de Newton a las direcciones horizontal y vertical. En la dirección vertical no hay movimiento, por lo que la aceleración es cero y la fuerza neta en la dirección vertical es cero:

$$F_T \cos\theta - mg = 0.$$

En la dirección horizontal hay sólo una fuerza, de magnitud F_T sen θ, que actúa sobre la pelota hacia el centro del círculo y origina la aceleración v^2/r. La segunda ley de Newton nos dice que:

$$F_T \operatorname{sen}\theta = m\frac{v^2}{r}.$$

De la segunda ecuación despejamos v y sustituimos F_T en la primera ecuación (y usamos $r = \ell$ sen θ):

$$v = \sqrt{\frac{rF_T \operatorname{sen}\theta}{m}} = \sqrt{\frac{r}{m}\left(\frac{mg}{\cos\theta}\right)\operatorname{sen}\theta} = \sqrt{\frac{\ell g \operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}}.$$

El periodo T es el tiempo requerido para efectuar una revolución con una longitud de $2\pi r = 2\pi\ell$ sen θ. La rapidez v entonces puede escribirse como $v = 2\pi\ell$ sen θ/T; así,

$$T = \frac{2\pi\ell \operatorname{sen}\theta}{v} = \frac{2\pi\ell\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\frac{\ell g \operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell\cos\theta}{g}}.$$

NOTA Ni la rapidez ni el periodo dependen de la masa m de la pelota; dependen de ℓ y de θ.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Movimiento circular uniforme

1. **Dibuje un diagrama de cuerpo libre** que muestre todas las fuerzas externas que actúan sobre cada objeto en consideración. Asegúrese de identificar la fuente de cada fuerza (tensión en una cuerda, gravedad de la Tierra, fricción, fuerza normal, etcétera). No incluya algo que no pueda identificar con un agente físico (como una fuerza centrífuga).
2. **Determine** cuál de esas fuerzas, o cuál de sus componentes actúa para producir la aceleración centrípeta, es decir, todas las **fuerzas o componentes que actúan radialmente**, hacia o desde el centro de la trayectoria circular. La suma de esas fuerzas (o componentes) es responsable de producir la aceleración centrípeta $a_R = v^2/r$.
3. **Elija un sistema coordenado conveniente**, de preferencia con un eje a lo largo de la dirección (y sentido) de la aceleración.
4. **Aplique la segunda ley de Newton** a la componente radial:

$$(\Sigma F)_R = ma_R = m\frac{v^2}{r}. \qquad \text{[dirección radial]}$$

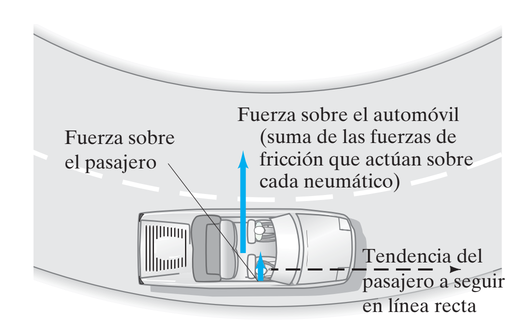


FIGURA 5–21 El camino ejerce una fuerza hacia adentro (fricción en los neumáticos) sobre un automóvil que lo hace moverse en una trayectoria circular. El automóvil ejerce una fuerza hacia adentro sobre el pasajero.



FIGURA 5–22 Automóvil de carreras que se dirige hacia una curva. Por las marcas de los neumáticos en el pavimento, vemos que la mayoría de los autos de carreras experimentan una fuerza de fricción suficiente para darles la aceleración centrípeta necesaria y tomar la curva con seguridad. Pero también vemos unas cuantas marcas de neumáticos de autos sobre los cuales no actuó suficiente fuerza, y que desafortunadamente siguieron trayectorias casi rectas.

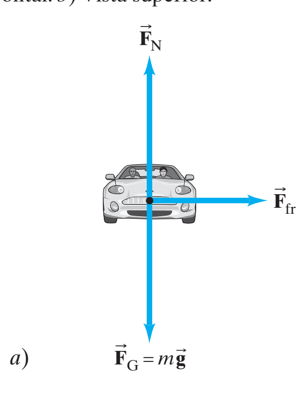
5–4 Curvas en las carreteras: peraltadas y sin peralte

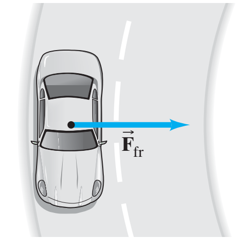
Un ejemplo de aceleración centrípeta ocurre cuando un automóvil toma una curva, digamos, hacia la izquierda. En tal situación, quizás usted sienta que está siendo lanzado hacia afuera, hacia la puerta del lado derecho. Pero no hay ninguna fuerza centrífuga misteriosa jalando de usted. Lo que sucede es que usted tiende a moverse en línea recta, mientras que el automóvil ha comenzado a seguir una trayectoria curva. Para obligarle a moverse en la trayectoria curva, el asiento (fricción) o la puerta del vehículo (contacto directo) ejercen una fuerza sobre usted (figura 5-21). El automóvil mismo debe experimentar una fuerza ejercida sobre él, hacia el centro de la curva, para que se mueva en esa curva. En un camino plano, esta fuerza es suministrada por la fricción entre los neumáticos y el pavimento.

Si las ruedas y los neumáticos del automóvil están girando normalmente sin deslizarse o derraparse, la parte inferior del neumático está en reposo respecto del camino en cada instante; por lo tanto, la fuerza de fricción que ejerce el camino sobre los neumáticos es una fricción estática. Sin embargo, si la fuerza de fricción estática no es lo suficientemente grande, por ejemplo para piso congelado o autos a gran rapidez, la fuerza de fricción no será suficiente para mantener al vehículo en la trayectoria curva y el vehículo se derrapará, desviándose de una trayectoria circular hacia una trayectoria con menor curvatura. Véase la figura 5-22. Una vez que el vehículo se desliza o derrapa, la fuerza de fricción se vuelve fricción cinética, que es menor que la fricción estática.

EJEMPLO 5–14 **Derrapando sobre una curva.** Un automóvil de 1000 kg toma una curva plana de 50 m de radio a una rapidez de 15 m/s (54 km/h). ¿El auto seguirá por la curva o se derrapará? Suponga que *a*) el pavimento está seco y el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.60$; *b*) el pavimento está cubierto de hielo con $\mu_s = 0.25$.

FIGURA 5–23 Ejemplo 5-14. Fuerzas sobre un auto en una curva sobre un camino plano. *a*) Vista frontal. *b*) Vista superior.





PLANTEAMIENTO Las fuerzas sobre el automóvil son la gravedad *mg* hacia abajo, la fuerza normal F_N ejercida hacia arriba por la carretera y una fuerza de fricción horizontal ejercida también por la carretera. Las fuerzas se representan en la figura 5-23 que muestra el diagrama de cuerpo libre del auto. Si la fuerza de fricción estática máxima es mayor que la masa del auto por la aceleración centrípeta, éste seguirá moviéndose por la curva.

SOLUCIÓN En la dirección vertical no hay aceleración. La segunda ley de Newton nos indica que la fuerza normal F_N sobre el auto es igual al peso *mg*:

$$F_N = mg = (1000\,\text{kg})(9.80\,\text{m/s}^2) = 9800\,\text{N}.$$

En dirección horizontal, la única fuerza que actúa es la fricción, y debemos compararla con la fuerza necesaria para producir la aceleración centrípeta y saber si es suficiente o no. La fuerza horizontal neta requerida para mantener al automóvil moviéndose en un círculo alrededor de la curva es

$$(\Sigma F)_R = ma_R = m\frac{v^2}{r} = (1000\,\text{kg})\frac{(15\,\text{m/s})^2}{(50\,\text{m})} = 4500\,\text{N}.$$

Calculamos ahora la fuerza de fricción estática total máxima (la suma de las fuerzas de fricción que actúan sobre cada uno de los cuatros neumáticos) para saber si es lo suficientemente grande como para brindar una aceleración centrípeta segura. Para *a*), $\mu_s = 0.60$, y la fuerza de fricción máxima alcanzable (recuerde de la sección 5-1 que $F_{fr} \leq \mu_s F_N$) es

$$(F_{fr})_{\text{máx}} = \mu_s F_N = (0.60)(9800\,\text{N}) = 5880\,\text{N}.$$

Como se necesita sólo una fuerza de 4500 N y de hecho, es lo que ejercerá el camino como fuerza de fricción estática, el automóvil puede tomar la curva sin problemas. Pero en *b*), la fuerza de fricción estática máxima posible es

$$(F_{fr})_{máx} = \mu_s F_N = (0.25)(9800\text{ N}) = 2450\text{ N}.$$

El automóvil derrapará porque el terreno no puede ejercer suficiente fuerza (se requieren 4500 N) para mantenerlo moviéndose en una curva de 50 m de radio a una rapidez de 54 km/h.

El peralte o inclinación transversal en las curvas puede reducir la posibilidad de derrapes. La fuerza normal ejercida por el camino peraltado, actuando perpendicularmente a éste, tendrá una componente hacia el centro del círculo (figura 5-24), reduciendo así la dependencia en la fricción. Para un ángulo peraltado θ, habrá una rapidez para la cual no se requiere ninguna fricción. Éste será el caso cuando la componente horizontal de la fuerza normal hacia el centro de la curva, F_N sen θ (véase la figura 5-24), sea justamente igual a la fuerza requerida para darle a un vehículo la aceleración centrípeta necesaria, es decir, cuando

$$F_N \operatorname{sen}\theta = m\frac{v^2}{r}. \qquad \text{[no se requiere fricción]}$$

El ángulo de peralte θ de un camino, se elige de manera que esta condición se cumpla para una rapidez particular, llamada "rapidez de diseño".

FÍSICA APLICADA
Curvas peraltadas

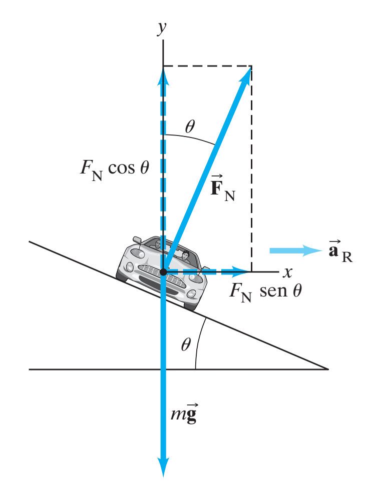


FIGURA 5–24 Fuerza normal sobre un auto en una curva con peralte, descompuesta en sus componentes horizontal y vertical. La aceleración centrípeta es horizontal (y *no* paralela al camino inclinado). La fuerza de fricción sobre los neumáticos, que no se muestra, podría señalar hacia arriba o hacia abajo de la pendiente, según la rapidez del auto. La fuerza de fricción será cero para una rapidez particular.

EJEMPLO 5–15 Ángulo de peralte (inclinación transversal). *a*) Para un automóvil que viaja con rapidez v alrededor de una curva de radio r, determine una fórmula para el ángulo al que debe inclinarse transversalmente (peraltarse) el camino de manera que no se requiera fricción. *b*) ¿Cuál es este ángulo para una curva de salida de una autopista con radio de 50 m y una rapidez de diseño de 50 km/h?

PLANTEAMIENTO Aun cuando la carretera esté peraltada, el automóvil todavía se mueve a lo largo de de un círculo horizontal, de manera que la aceleración centrípeta es horizontal. Elegimos los ejes x y y en dirección horizontal y vertical, de modo que a_R, que es horizontal, quede a lo largo del eje x. Las fuerzas sobre el auto son la gravedad de la Tierra mg hacia abajo y la fuerza normal F_N ejercida por la carretera de forma perpendicular a su superficie. Observe la figura 5-24 donde también se observan las componentes de F_N. No necesitamos considerar la fricción sobre el camino porque estamos diseñando una carretera peraltada de tal forma que se elimine la dependencia en la fricción.

SOLUCIÓN *a*) Como no hay movimiento vertical, $\Sigma F_y = ma_y$ nos da

$$F_N\cos\theta - mg = 0.$$

Entonces,

$$F_N = \frac{mg}{\cos\theta}.$$

[Advierta que en este caso $F_N \geq mg$ ya que $\cos\theta \leq 1$].

Sustituimos esta relación por F_N en la ecuación para el movimiento horizontal,

$$F_N \operatorname{sen}\theta = m\frac{v^2}{r},$$

y obtenemos

$$\frac{mg}{\cos\theta}\operatorname{sen}\theta = m\frac{v^2}{r}$$

o bien,

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}.$$

Ésta es la fórmula para el ángulo de peralte θ o inclinación transversal: un automóvil con rapidez v no se necesita fricción para tomar la curva.

b) Para $r = 50$ m y $v = 50$ km/h (o 14 m/s),

$$\tan\theta = \frac{(14\text{ m/s})^2}{(50\text{ m})(9.8\text{ m/s}^2)} = 0.40,$$

por lo que $\theta = 22°$.

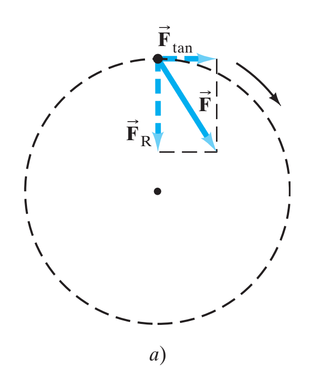
CUIDADO
F_N no siempre es igual a mg

EJERCICIO G El ángulo de peralte de una curva para una rapidez de diseño v es θ_1. ¿Qué ángulo de peralte θ_2 se necesita para una rapidez de diseño de $2v$? *a*) $\theta_2 = 4\theta_1$; *b*) $\theta_2 = 2\theta_1$; *c*) $\tan\theta_2 = 4\tan\theta_1$; *d*) $\tan\theta_2 = 2\tan\theta_1$.

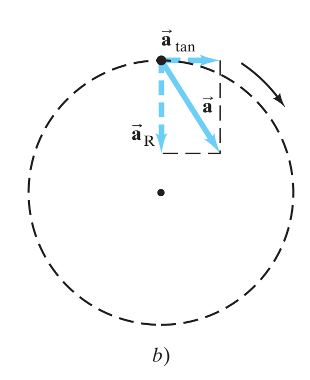
EJERCICIO H ¿Un camión pesado y un automóvil pequeño pueden viajar con seguridad a la misma rapidez por una curva peraltada cubierta de hielo?

*5–5 Movimiento circular no uniforme

El movimiento circular con rapidez constante ocurre cuando la fuerza neta sobre un objeto se ejerce hacia el centro del círculo. Si la fuerza neta no está dirigida hacia el centro, sino que forma un ángulo dado con la trayectoria, como se ilustra en la figura 5-25a, la fuerza tiene dos componentes. La componente que se dirige hacia el centro del círculo, $\vec{\mathbf{F}}_R$, da origen a la aceleración centrípeta, $\vec{\mathbf{a}}_R$, y mantiene al objeto en movimiento circular. La componente tangente al círculo, $\vec{\mathbf{F}}_{tan}$, aumenta (o disminuye) la rapidez y, por lo tanto, da origen a una componente de la aceleración tangente al círculo, $\vec{\mathbf{a}}_{tan}$. Cuando la rapidez del objeto cambia, la fuerza aplicada tiene un componente tangencial.



a)



b)

FIGURA 5–25 La rapidez de un objeto que se mueve en círculo cambia si la fuerza que se ejerce sobre él tiene una componente tangencial, F_{tan}. La parte *a*) muestra la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ y sus componentes vectoriales; la parte *b*) muestra el vector aceleración y sus componentes vectoriales.

Cuando usted empieza a girar una pelota atada al extremo de una cuerda alrededor de su cabeza, debe darle aceleración tangencial. Esto es posible jalando la cuerda con su mano localizada fuera del centro del círculo. En atletismo, un lanzador de martillo acelera éste tangencialmente en una forma similar para que alcance una gran rapidez antes de soltarlo.

La componente tangencial de la aceleración a_{tan} tiene una magnitud igual a la tasa de cambio de la *magnitud* de la velocidad del objeto:

$$a_{tan} = \frac{dv}{dt}. \tag{5–4}$$

La aceleración radial (centrípeta) se origina por el cambio en la *dirección* de la velocidad, y como ya hemos visto, su magnitud es

$$a_R = \frac{v^2}{r}.$$

La aceleración tangencial siempre apunta en una dirección tangente al círculo, y es en el sentido del movimiento (paralelo a $\vec{\mathbf{v}}$, que siempre es tangente al círculo), si la rapidez está creciendo, como se muestra en la figura 5-25b. Si la rapidez disminuye, $\vec{\mathbf{a}}_{tan}$ apunta antiparalela a $\vec{\mathbf{v}}$. En cualquier caso, $\vec{\mathbf{a}}_{tan}$ y $\vec{\mathbf{a}}_R$ son siempre perpendiculares entre sí y *sus direcciones cambian* continuamente conforme el objeto se mueve a lo largo de su trayectoria circular. El vector de aceleración total $\vec{\mathbf{a}}$ es la suma vectorial de estas dos componentes:

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_{tan} + \vec{\mathbf{a}}_R. \tag{5–5}$$

Como $\vec{\mathbf{a}}_R$ y $\vec{\mathbf{a}}_{tan}$ son siempre perpendiculares entre sí, la magnitud de $\vec{\mathbf{a}}$ en cualquier momento es

$$a = \sqrt{a_{tan}^2 + a_R^2}.$$

EJEMPLO 5–16 **Dos componentes de la aceleración.** En el área de pits un automóvil de carreras parte del reposo y acelera a tasa uniforme hasta una rapidez de 35 m/s en 11 s, moviéndose sobre una pista circular cuyo radio es de 500 m. Suponiendo una aceleración tangencial constante, encuentre *a*) la aceleración tangencial, y *b*) la aceleración radial en el instante en que la rapidez es $v = 15$ m/s.

PLANTEAMIENTO La aceleración tangencial se relaciona con el cambio en la rapidez del automóvil y se calcula como $a_{tan} = \Delta v/\Delta t$. La aceleración centrípeta se relaciona con el cambio en la *dirección* del vector velocidad y se calcula usando la expresión $a_R = v^2/r$.

SOLUCIÓN *a*) Durante el intervalo de tiempo de 11 s, suponemos que la aceleración tangencial a_{tan} es constante, cuya magnitud es

$$a_{tan} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(35\,\text{m/s} - 0\,\text{m/s})}{11\,\text{s}} = 3.2\,\text{m/s}^2.$$

b) Cuando $v = 15$ m/s, la aceleración centrípeta es

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \frac{(15\,\text{m/s})^2}{(500\,\text{m})} = 0.45\,\text{m/s}^2.$$

NOTA La aceleración radial se incrementa de manera continua; en tanto que la aceleración tangencial permanece constante.

EJERCICIO I Cuando la rapidez del auto de carreras del ejemplo 5-16 es de 30 m/s, ¿cómo han cambiado *a*) a_{tan} y *b*) a_R?

Estos conceptos pueden usarse para un objeto que se mueva a lo largo de cualquier trayectoria curva, como la que se muestra en la figura 5-26. Podemos tratar cualquier porción de la curva como un arco de circunferencia con "radio de curvatura" r. La velocidad en cualquier punto es siempre tangente a la trayectoria. La aceleración puede escribirse, en general, como una suma vectorial de dos componentes: la componente tangencial $a_{tan} = dv/dt$ y la componente radial (centrípeta) $a_R = v^2/r$.

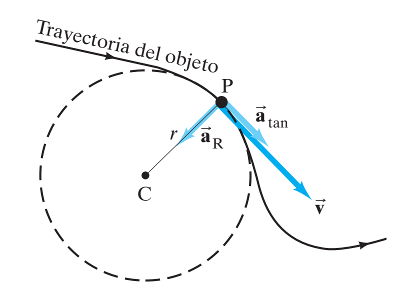


FIGURA 5–26 Un objeto que sigue una trayectoria curva (línea sólida). En el punto P la trayectoria tiene un radio de curvatura r. El objeto tiene velocidad $\vec{\mathbf{v}}$, aceleración tangencial $\vec{\mathbf{a}}_{tan}$ (aumenta su rapidez) y aceleración radial (centrípeta) $\vec{\mathbf{a}}_R$ (magnitud $a_R = v^2/r$) que apunta hacia el centro de la curvatura C.

*5–6 Fuerzas dependientes de la velocidad: Arrastre y velocidad terminal

Cuando un objeto resbala a lo largo de una superficie, la fuerza de fricción que actúa sobre el objeto es prácticamente independiente de qué tan rápido se mueve el objeto. Pero otros tipos de fuerzas resistivas sí dependen de la velocidad del objeto. El ejemplo más importante es el de un objeto que se mueve a través de un líquido o un gas, como el aire. El fluido ofrece resistencia al movimiento del objeto, y esta fuerza de resistencia, o **fuerza de arrastre**, depende de la velocidad del objeto.†

La forma en que la fuerza de arrastre varía con la velocidad en general resulta complicada. Pero para objetos pequeños a muy baja rapidez, puede realizarse una buena aproximación suponiendo que la fuerza de arrastre, F_D, es directamente proporcional a la magnitud de la velocidad v:

$$F_D = -bv. \tag{5–6}$$

El signo menos es necesario porque la fuerza de arrastre se opone al movimiento. Aquí, b es una constante (aproximadamente) que depende de la viscosidad del fluido, así como del tamaño y la forma del objeto. La ecuación 5-6 se aplica bien a objetos pequeños que se mueven a baja rapidez en un líquido viscoso. También funciona para objetos muy pequeños que se mueven en el aire a muy baja rapidez, por ejemplo, las partículas de polvo. Para objetos que se mueven con alta rapidez, como un avión, un paracaidista en caída libre, una pelota de béisbol o un automóvil, la fuerza de resistencia del aire puede aproximarse mejor considerando que es proporcional a v^2:

$$F_D \propto v^2.$$

Sin embargo, para cálculos reales exactos, comúnmente se tienen que usar formas más complicadas e integración numérica. Para objetos que se mueven a través de líquidos, la ecuación 5-6 funciona bien para objetos cotidianos a rapideces normales (por ejemplo, un bote en el agua).

Consideremos un objeto que cae del reposo, a través del aire o de otro fluido, bajo la acción de la gravedad y de una fuerza de resistencia proporcional a v. Las fuerzas que actúan sobre el objeto son la fuerza de gravedad, mg actuando hacia abajo, y la fuerza de arrastre, $-bv$, actuando hacia arriba (figura 5-27a). Como la velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ señala hacia abajo, tomemos la dirección positiva en ese sentido. La fuerza neta sobre el objeto puede entonces escribirse como

$$\Sigma F = mg - bv.$$

De la segunda ley de Newton $\Sigma F = ma$, tenemos

$$mg - bv = m\frac{dv}{dt}, \tag{5–7}$$

donde hemos escrito la aceleración de acuerdo con su definición de la tasa de cambio de velocidad, $a = dv/dt$. En $t = 0$, hacemos $v = 0$ y la aceleración $dv/dt = g$. Pero conforme el objeto cae e incrementa su rapidez, la fuerza de resistencia crece y ello reduce la aceleración, dv/dt (véase la figura 5-27b). La velocidad continúa creciendo pero a una tasa menor. A final de cuentas, la velocidad se vuelve tan grande que la magnitud de la fuerza de resistencia, bv, se aproxima a la magnitud de la fuerza gravitacional, mg; cuando las dos magnitudes son iguales, tenemos

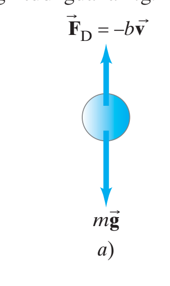
$$mg - bv = 0. \tag{5–8}$$

En este punto $dv/dt = 0$ y el objeto ya no incrementa su rapidez, porque alcanzó su **velocidad terminal** y continúa cayendo a esta velocidad constante hasta que toca el suelo. Esta secuencia de eventos se muestra en la gráfica de la figura 5-27b. El valor de la velocidad terminal v_T se puede obtener con la ecuación 5-8:

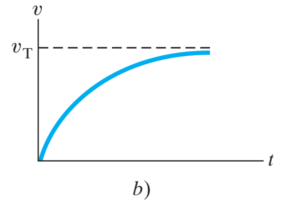
$$v_T = \frac{mg}{b}. \tag{5–9}$$

Si la fuerza de resistencia se supone proporcional a v^2, o a una potencia aún mayor que v, la secuencia de eventos es similar y se alcanzará también una velocidad terminal, aunque ésta no estará dada por la ecuación 5-9.

FIGURA 5–27 *a*) Fuerzas que actúan sobre un objeto que cae. *b*) Gráfica de la velocidad de un objeto que cae debido a la gravedad, cuando la fuerza de arrastre de la resistencia del aire es $F_D = -bv$. Inicialmente, $v = 0$ y $dv/dt = g$, pero con el paso del tiempo dv/dt (que es la pendiente de la curva v versus t) decrece debido a F_D. Finalmente, v tiende a un valor máximo v_T, que es la velocidad terminal que ocurre cuando F_D tiene una magnitud igual a mg.



a)



b)

†En esta sección se desprecia cualquier fuerza de flotabilidad (capítulo 13).

EJEMPLO 5–17 **Fuerza proporcional a la velocidad.** Determine la velocidad en función del tiempo, para un objeto que cae verticalmente desde el reposo, cuando se tiene una fuerza de resistencia linealmente proporcional a v.

PLANTEAMIENTO Se trata de una derivada y empezamos con la ecuación 5-7, que reescribimos como

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v.$$

SOLUCIÓN En esta ecuación hay dos variables, v y t. Agrupamos las variables del mismo tipo a cada lado de la ecuación:

$$\frac{dv}{g - \frac{b}{m}v} = dt \qquad \text{o bien,} \qquad \frac{dv}{v - \frac{mg}{b}} = -\frac{b}{m}dt.$$

Ahora podemos integrar, recordando que $v = 0$ en $t = 0$:

$$\int_0^v \frac{dv}{v - \frac{mg}{b}} = -\frac{b}{m}\int_0^t dt$$

lo cual da

$$\ln\left(v - \frac{mg}{b}\right) - \ln\left(-\frac{mg}{b}\right) = -\frac{b}{m}t$$

o bien,

$$\ln\frac{v - mg/b}{-mg/b} = -\frac{b}{m}t.$$

Aplicamos la función exponencial a ambos lados de la igualdad [advierta que el logaritmo natural y la función exponencial son funciones inversas entre sí: $e^{\ln x} = x$, o $\ln\left(e^x\right) = x$] y obtenemos

$$v - \frac{mg}{b} = -\frac{mg}{b}e^{-\frac{b}{m}t}$$

de manera que

$$v = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right).$$

Esta relación da la velocidad v como función del tiempo y corresponde a la gráfica de la figura 5-27b. Como comprobación, note que en $t = 0$ y $v = 0$:

$$a(t = 0) = \frac{dv}{dt} = \frac{mg}{b}\frac{d}{dt}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) = \frac{mg}{b}\left(\frac{b}{m}\right) = g,$$

como se esperaba (véase también la ecuación 5-7). Para t grande, t, $e^{-\frac{b}{m}t}$ tiende a cero, por lo que v tiende a mg/b, que es la velocidad terminal v_T, como lo vimos antes. Si hacemos $\tau = m/b$, entonces $v = v_T\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$. Por lo que $\tau = m/b$ es el tiempo requerido para que la velocidad sea del 63% de la velocidad terminal (ya que $e^{-1} = 0.37$). La figura 5-27 muestra una gráfica de rapidez v contra tiempo t, donde la velocidad terminal $v_T = mg/b$.

Resumen

Cuando dos objetos se deslizan uno sobre el otro, la fuerza de **fricción** que cada uno ejerce sobre el otro puede escribirse aproximadamente como $F_{fr} = \mu_k F_N$, donde F_N es la **fuerza normal** (la fuerza que cada objeto ejerce sobre el otro perpendicularmente a sus superficies de contacto), y μ_k es el coeficiente de **fricción cinética**. Si los objetos están en reposo entre sí, aun cuando actúen fuerzas, entonces F_{fr} es lo suficientemente grande para mantenerlos en reposo y se satisface la desigualdad $F_{fr} \le \mu_s F_N$, donde μ_s es el coeficiente de **fricción estática**.

Se dice que un objeto que se mueve en una trayectoria circular de radio r con rapidez constante v está en **movimiento circular uniforme**. Tiene una **aceleración radial** a_R que está dirigida radialmente hacia el centro del círculo (también se llama **aceleración centrípeta**) y su magnitud es

$$a_R = \frac{v^2}{r}. \qquad \textbf{(5–1)}$$

La dirección de los vectores velocidad y aceleración $\vec{\mathbf{a}}_R$ cambian continuamente; pero son perpendiculares entre sí en cada momento.

Se necesita una fuerza para mantener un objeto girando uniformemente en un círculo, y la dirección de esta fuerza es hacia el centro del círculo. Esta fuerza puede deberse a la gravedad (como el caso de la Luna), a la tensión en una cuerda, a una componente de la fuerza normal, a otro tipo de fuerza o a una combinación de fuerzas.

[*Cuando la rapidez del movimiento circular no es constante, la aceleración tiene dos componentes: tangencial y radial. La fuerza también tiene componentes radial y tangencial].

[*Una **fuerza de arrastre** actúa sobre un objeto que se mueve a través de un fluido como aire o agua. La fuerza de arrastre F_D a menudo puede aproximarse con $F_D = -bv$ o $F_D \propto v^2$, donde v es la rapidez del objeto con respecto al fluido].

Preguntas

1. Una caja pesada descansa sobre la plataforma de un camión. Cuando el camión acelera, la caja permanece donde está sobre el camión, por lo que también acelera. ¿Qué ocasiona que la caja acelere?
2. A un bloque se le da un empujón que lo desliza hacia arriba por una rampa. Cuando el bloque alcanza el punto más alto, se desliza hacia abajo, pero la magnitud de su aceleración es menor en el descenso que en el ascenso. ¿Por qué?
3. ¿Por qué la distancia de frenado de un camión es mucho más corta que la de un tren que viaja a la misma rapidez?
4. ¿Un coeficiente de fricción puede ser mayor que 1.0?
5. Los esquiadores a campo traviesa prefieren que sus esquíes tengan un coeficiente de fricción estática grande, pero un coeficiente de fricción cinética pequeño. Explique por qué. [*Sugerencia*: Considere el desplazamiento cuesta arriba y cuesta abajo].
6. Cuando usted tiene que frenar muy rápidamente, ¿por qué es más seguro que las ruedas no se bloqueen? Al conducir en caminos resbalosos, ¿por qué es aconsejable aplicar lentamente los frenos?
7. Al intentar detener rápidamente un automóvil sobre pavimento seco, ¿cuál de los siguientes métodos lo detendrá en el menor tiempo? *a*) Oprimir el freno tan fuerte como sea posible, bloqueando las ruedas y *derrapando* hasta que se detenga el vehículo. *b*) Oprimir el freno tan fuerte como sea posible, sin bloquear las ruedas y *rodando* hasta que el automóvil se detenga. Explique.
8. Usted intenta empujar un automóvil averiado y aunque aplica una fuerza horizontal de 400 N al vehículo éste no se mueve ni tampoco usted. ¿Qué fuerza(s) también debe(n) tener una magnitud de 400 N: *a*) la fuerza ejercida por el auto sobre usted; *b*) la fuerza de fricción ejercida por el auto sobre el camino; *c*) la fuerza normal ejercida por el camino sobre usted; *d*) la fuerza de fricción ejercida por el camino sobre usted?
9. No es sencillo caminar por las aceras cubiertas de hielo sin resbalar. Incluso su manera de andar parece diferente que cuando camina sobre pavimento seco. Describa lo que necesita usted hacer de forma diferente sobre una superficie cubierta de hielo y por qué.
10. Un automóvil toma una curva a 50 km/h constantes. Si toma la misma curva a 70 km/h constantes, ¿su aceleración será diferente? Explique.
11. ¿La aceleración de un automóvil será la misma cuando éste toma una curva cerrada a una rapidez constante de 60 km/h que cuando toma una curva abierta a la misma rapidez? Explique.
12. Describa todas las fuerzas que actúan sobre un niño que monta en un caballito del carrusel. ¿Cuál de esas fuerzas proporciona la aceleración centrípeta del niño?
13. Un niño sobre un trineo va deslizándose sobre la cresta de una pequeña colina, como se muestra en la figura 5-28. Su trineo no se despega del suelo, pero siente que la fuerza normal entre su pecho y el trineo disminuye conforme pasa sobre la colina. Explique esta disminución mediante la segunda ley de Newton.

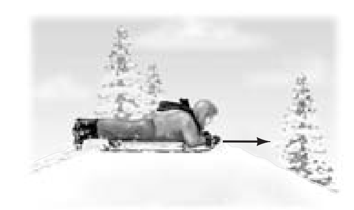


FIGURA 5–28 Pregunta 13.

14. A veces se dice que en una secadora giratoria el agua se elimina de la ropa por la fuerza centrífuga que avienta el agua hacia el exterior. ¿Es esto correcto? Analícelo.
15. Informes técnicos especifican a menudo sólo las rpm para experimentos en centrifugadoras. ¿Por qué esto no es adecuado?
16. Una niña hace girar una pelota unida al extremo de una cuerda alrededor de su cabeza en un plano horizontal. Ella quiere soltarla precisamente en el momento correcto, de manera que la pelota golpee un blanco en el otro lado del patio. ¿Cuándo debería soltar la cuerda?
17. El juego que se indica en la figura se juega con una pelota unida a un poste mediante una cuerda. Cuando se golpea la pelota, ésta gira alrededor del poste como se muestra en la figura 5-29. ¿En qué dirección tiene lugar la aceleración de la pelota y qué causa esa aceleración?

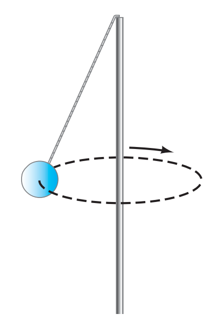


FIGURA 5–29 Problema 17.

18. Los astronautas que pasan largos periodos en el espacio exterior pueden verse afectados seriamente por la ingravidez. Una manera de simular la gravedad es darle forma de cuerpo cilíndrico a la nave espacial y que ésta gire, con los astronautas caminando sobre la parte interior (figura 5-30). Explique cómo simula esto la gravedad. Considere *a*) cómo caen los objetos, *b*) la fuerza que sentimos en los pies y *c*) cualquier otro aspecto de la gravedad que pueda ocurrírsele.

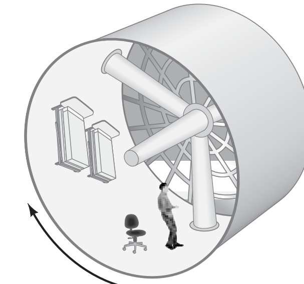


FIGURA 5–30 Pregunta 18.

19. Una cubeta con agua puede girarse en un círculo vertical sin que el agua se derrame incluso en la parte superior del círculo, cuando la cubeta está de cabeza. Explique.
20. Un automóvil mantiene una rapidez v constante conforme recorre la colina y el valle que se muestran en la figura 5-31. Tanto la colina como el valle tienen un radio de curvatura R. ¿En qué punto A, B, o C la fuerza normal que actúa sobre el auto es *a*) mayor o *b*) menor? Explique. *c*) ¿Donde el conductor se sentiría más pesado, y *d*) dónde más ligero? Explique. *e*) ¿Qué tan rápido puede ir el auto en el punto A sin perder contacto con el camino?

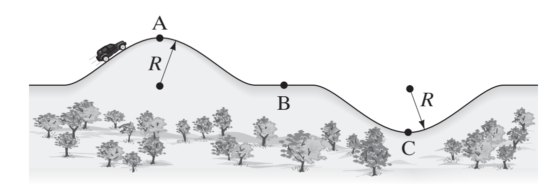


FIGURA 5–31 Pregunta 20.

21. ¿Por qué los ciclistas se inclinan al tomar una curva con gran rapidez?
22. ¿Por qué los aviones se inclinan al dar un giro? ¿Cómo calcularía usted el ángulo de inclinación, dadas la velocidad con respecto al aire y el radio del giro? [*Sugerencia*: Suponga que una fuerza “de sustentación” aerodinámica actúa perpendicularmente a las alas].

* 23. Para una fuerza de arrastre de la forma $F = -bv$, ¿cuáles son las unidades de la constante b?

* 24. Suponga que dos fuerzas actúan sobre un objeto: una fuerza proporcional a v y la otra proporcional a v^2. ¿Cuál fuerza domina a rapidez alta?

Problemas

5–1 Fricción y leyes de Newton

1. (I) Si el coeficiente de fricción cinética entre una caja de 22 kg y el piso es de 0.30, ¿qué fuerza horizontal se requerirá para mover la caja sobre el piso con rapidez constante? ¿Qué fuerza horizontal se necesitará si μ_k es cero?

2. (I) Se requiere una fuerza de 35.0 N para empezar a mover una caja de 6.0 kg sobre un piso horizontal de concreto. *a*) ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática entre la caja y el piso? *b*) Si la fuerza de 35.0 N continúa actuando, la caja acelera a 0.60 m/s^2. ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética?

3. (I) Suponga que usted está de pie en un tren que acelera a 0.20 *g*. ¿Qué coeficiente mínimo de fricción estática debe existir entre sus pies y el piso para que usted no resbale?

4. (I) El coeficiente de fricción estática entre hule duro y el pavimento normal de una calle es aproximadamente de 0.90. ¿Qué tan empinada (ángulo máximo) puede estar una calle para dejar un automóvil estacionado?

5. (I) ¿Cuál es la aceleración máxima que puede experimentar un automóvil si el coeficiente de fricción estática entre los neumáticos y el suelo es de 0.90?

6. (II) (*a*) Una caja descansa sobre un plano inclinado rugoso de 33°. Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la caja mostrando todas las fuerzas externas que actúan sobre ella. *b*) ¿Cómo cambiaría el diagrama si la caja estuviera deslizándose hacia abajo por el plano inclinado? *c*) ¿Cómo cambiaría si la caja estuviera deslizándose hacia arriba por el plano, después de un empujón inicial?

7. (II) Una caja de 25.0 kg se suelta sobre un plano inclinado de 27° y acelera a 0.30 m/s^2. Encuentre la fuerza de fricción que se opone a su movimiento. ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética?

8. (II) Un automóvil desacelera a -3.80 m/s^2 sin derraparse hasta llegar al reposo sobre un camino plano. ¿Cuál sería su desaceleración, si el camino estuviera inclinado a 9.3° y el auto se moviera hacia arriba? Suponga el mismo coeficiente de fricción estática.

9. (II) Un esquiador se desliza hacia abajo por una pendiente a 27° con rapidez constante. ¿Qué puede decir usted acerca del coeficiente de fricción μ_k? Suponga que la rapidez es lo suficientemente baja para poder despreciar la resistencia del aire.

10. (II) Una barra de jabón húmeda se desliza libremente hacia abajo por una rampa de 9.0 m de longitud, inclinada 8.0° con respecto a la horizontal. ¿Cuánto tiempo le tomará llegar al fondo? Suponga que $\mu_k = 0.060$.

11. (II) A una caja se le da un empujón que la hace deslizarse por el suelo. ¿Qué tan lejos se desplazará la caja, si el coeficiente de fricción cinética entre las superficies de contacto es de 0.15 y el empujón le imparte una rapidez inicial de 3.5 m/s?

12. (II) *a*) Demuestre que la distancia de frenado mínima para un automóvil que viaja con rapidez v es igual a $v^2/2\mu_s g$, donde μ_s es el coeficiente de fricción estática entre los neumáticos y el camino, y g es la aceleración debida a la gravedad. *b*) ¿Cuál es esta distancia para un automóvil de 1200 kg que viaja a 95 km/h si $\mu_s = 0.65$? ¿Cuál sería esta distancia si el automóvil estuviera en la Luna (la aceleración de la gravedad en la Luna es de aproximadamente g / 6) y todo lo demás permanece igual?

13. (II) Un automóvil de 1280 kg jala un remolque de 350 kg. El automóvil ejerce una fuerza horizontal de 3.6×10^3 N contra el suelo para acelerar. ¿Qué fuerza ejerce el automóvil sobre el remolque? Suponga un coeficiente de fricción efectivo de 0.15 para el remolque.

14. (II) Los policías de tránsito que examinan el sitio de un choque entre dos automóviles miden huellas de derrape de 72 m para uno de los automóviles, el cual casi se detuvo antes de chocar. El coeficiente de fricción cinética entre el hule y el pavimento es aproximadamente de 0.80. Estime la rapidez inicial de ese automóvil suponiendo que el camino es horizontal.

15. (II) La nieve en techos resbalosos puede convertirse en proyectiles peligrosos al derretirse. Considere un trozo de nieve en el borde de un techo con inclinación de 34°. *a*) ¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de fricción estática necesario para impedir que la nieve resbale? *b*) Conforme la nieve empieza a derretirse, el coeficiente de fricción estática disminuye y la nieve finalmente se desliza. Suponiendo que la distancia desde el trozo hasta el borde del techo es de 6.0 m y que el coeficiente de fricción cinética es 0.20, calcule la rapidez del trozo de nieve cuando éste se desliza hacia afuera del techo. *c*) Si el borde del techo está a 10.0 m por arriba del suelo, ¿cuál será la rapidez de la nieve cuando ésta golpee el suelo?

16. (II) Una caja pequeña se mantiene contra un muro vertical rugoso por alguien que empuja sobre ella con una fuerza dirigida hacia arriba a 28° sobre la horizontal. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre la caja y el muro son de 0.40 y 0.30, respectivamente. La caja se deslizará hacia abajo a menos que la fuerza aplicada tenga una magnitud de 23 N. ¿Cuál es la masa de la caja?

17. (II) Dos cajas, con masas de 65 kg y 125 kg, están en contacto y en reposo sobre una superficie horizontal (figura 5-32). Se ejerce una fuerza de 650 N sobre la caja de 65 kg. Si el coeficiente de fricción cinética es de 0.18, calcule *a*) la aceleración del sistema y *b*) la fuerza que cada caja ejerce sobre la otra. *c*) Resuelva el problema con las cajas invertidas.

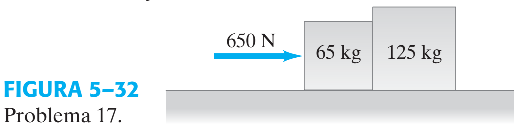


FIGURA 5–32 Problema 17.

18. (II) La caja que se muestra en la figura 5-33 se encuentra sobre un plano inclinado a un ángulo $\theta = 25.0°$ con respecto a la horizontal, con $\mu_k = 0.19$. *a*) Determine la aceleración de la caja cuando ésta se desliza hacia abajo por el plano. *b*) Si la caja inicia su movimiento desde el reposo a 8.15 m desde la base, ¿cuál será la rapidez de la caja cuando alcance el fondo del plano inclinado?

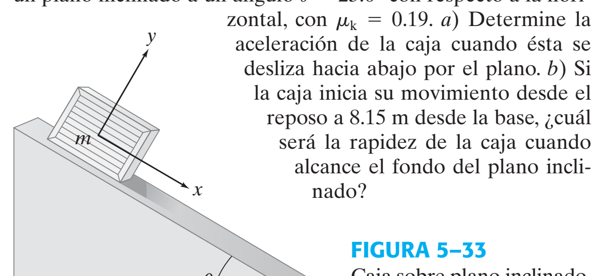


FIGURA 5–33 Caja sobre plano inclinado. Problemas 18 y 19.

19. (II) A una caja se le da una rapidez inicial de 3.0 m/s hacia arriba del plano a 25.0° que se muestra en la figura 5-33. *a*) ¿Cuánto subirá la caja sobre el plano? *b*) ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que regrese a su posición inicial? Suponga $\mu_k = 0.17$.

20. (II) Dos bloques hechos de materiales diferentes están unidos por una cuerda delgada, y se deslizan hacia abajo por una rampa inclinada a un ángulo θ con respecto a la horizontal, como se indica en la figura 5-34 (el bloque B está arriba del bloque A). Las masas de los bloques son m_A y m_B y los coeficientes de fricción son μ_A y μ_B. Si $m_A = m_B = 5.0$ kg, y $\mu_A = 0.20$ y $\mu_B = 0.30$, determine *a*) la aceleración de los bloques y *b*) la tensión en la cuerda, para un ángulo $\theta = 32°$.

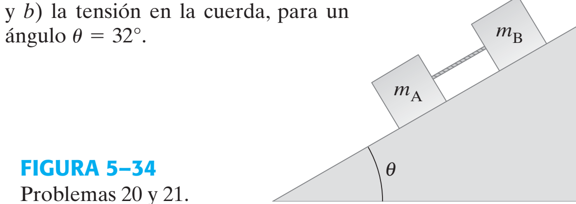


FIGURA 5–34 Problemas 20 y 21.

21. (II) Para dos bloques conectados por una cuerda que se deslizan hacia abajo por la rampa de la figura 5-34 (véase el problema 20), describa el movimiento *a*) si $\mu_A < \mu_B$, y *b*) si $\mu_A > \mu_B$. *c*) Determine una fórmula para la aceleración de cada bloque y la tensión F_T en la cuerda en términos de m_A, m_B y θ; interprete sus resultados a la luz de sus respuestas en *a*) y en *b*).

22. (II) En la plataforma de un camión se lleva una caja pesada. El coeficiente de fricción estática entre la caja y la plataforma del camión es de 0.75. ¿Cuál es la tasa de frenado máxima que puede tener el camión sin que la caja se deslice hacia la cabina del camión?

23. (II) En la figura 5-35 el coeficiente de fricción estática entre la masa m_A y la mesa es de 0.40; en tanto que el coeficiente de fricción cinética es de 0.30. *a*) ¿Qué valor mínimo de m_A impedirá que el sistema empiece a moverse? *b*) ¿Qué valor(es) de m_A mantendrá(n) al sistema moviéndose con rapidez constante?

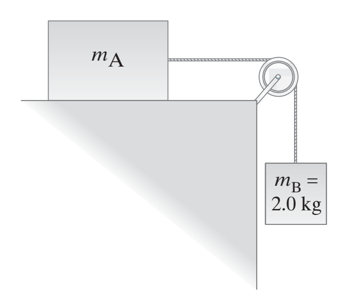


FIGURA 5–35 Problemas 23 y 24.

24. (II) Determine una fórmula para la aceleración del sistema que se muestra en la figura 5-35, en términos de m_A, m_B y la masa de la cuerda, m_C. Defina cualquier otra variable que se necesite.

25. (II) A un pequeño bloque de masa m se le da una rapidez inicial v_0 hacia arriba sobre una rampa inclinada a un ángulo θ con respecto a la horizontal. El bloque recorre una distancia d hacia arriba sobre la rampa y llega al reposo. *a*) Determine una fórmula para el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la rampa. *b*) ¿Qué puede usted decir acerca del valor del coeficiente de fricción estática?

26. (II) Un surfista de nieve de 75 kg tiene una velocidad inicial de 5.0 m/s en la parte superior de un plano inclinado a 28° (figura 5-36). Después de deslizarse hacia abajo 110 m sobre el plano inclinado (cuyo coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.18$), el surfista alcanza una velocidad v. Después el surfista se desliza sobre una superficie horizontal (donde $\mu_k = 0.15$) y llega al reposo después recorrer de una distancia x. Utilice la segunda ley de Newton para encontrar la aceleración de este surfista, mientras recorre tanto el plano inclinado como la superficie horizontal. Luego use la aceleración para determinar x.

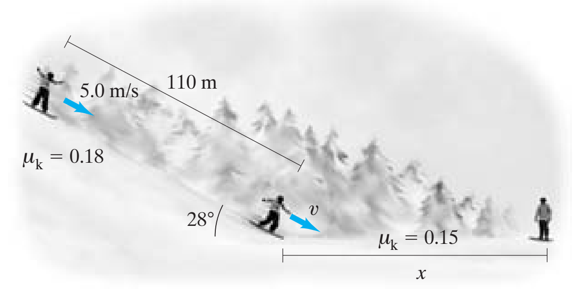


FIGURA 5–36 Problema 26.

27. (II) Un paquete de masa m se suelta verticalmente sobre una banda transportadora horizontal, cuya rapidez es $v = 1.5$ m/s, y el coeficiente de fricción cinética entre el paquete y la banda es $\mu_k = 0.70$. *a*) ¿Durante cuánto tiempo el paquete se deslizará sobre la banda (hasta que el paquete quede en reposo con respecto a la banda)? *b*) ¿Qué distancia recorrerá el paquete en ese tiempo?

28. (II) Dos masas $m_A = 2.0$ kg y $m_B = 5.0$ kg están sobre planos inclinados y se conectan entre sí mediante una cuerda (figura 5-37). El coeficiente de fricción cinética entre cada masa y su plano es $\mu_k = 0.30$. Si m_A se mueve hacia arriba y m_B se mueve hacia abajo, determine su aceleración.

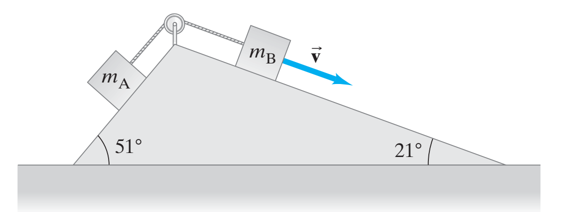


FIGURA 5–37 Problema 28.

29. (II) Una niña se desliza hacia abajo por una rampa inclinada a 34° con respecto a la horizontal, y al llegar al fondo su rapidez es precisamente la mitad de la que sería si la rampa no tuviera fricción. Calcule el coeficiente de fricción cinética entre la rampa y la niña.

30. (II) *a*) Suponga que el coeficiente de fricción cinética entre m_A y el plano inclinado en la figura 5-38 es $\mu_k = 0.15$, y que $m_A = m_B = 2.7$ kg. Conforme m_B se mueve hacia abajo, determine la magnitud de la aceleración de m_A y de m_B, dado que $\theta = 34°$. *b*) ¿Qué valor mínimo de μ_k hará que el sistema no acelere?

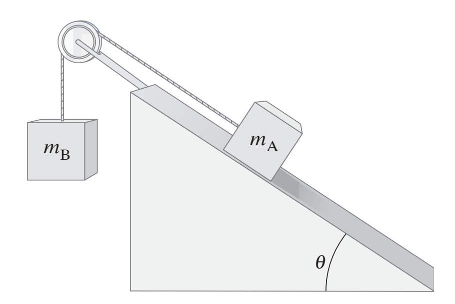


FIGURA 5–38 Problema 30.

31. (III) Un bloque de 3.0 kg está encima de otro bloque de 5.0 kg, que permanece sobre una superficie horizontal. El bloque de 5.0 kg es jalado hacia la derecha con una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ como se muestra en la figura 5-39. El coeficiente de fricción estática entre todas las superficies es 0.60 y el coeficiente de fricción cinética es 0.40. *a*) ¿Cuál es el valor mínimo de F necesario para mover los dos bloques? *b*) Si la fuerza es un 10% mayor que su respuesta para *a*), ¿cuál será la aceleración de cada bloque?

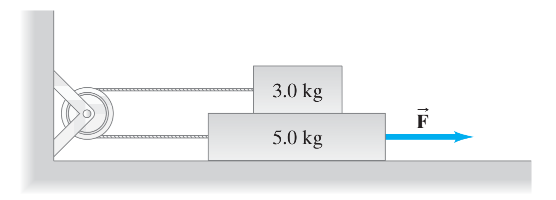


FIGURA 5–39 Problema 31.

32. (III) Un bloque de 4.0 kg se coloca sobre un bloque de 12.0 kg, que acelera a lo largo de una mesa horizontal con $a = 5.2\ \mathrm{m/s^2}$ (figura 5-40). Sea $\mu_k = \mu_s = \mu$. *a*) ¿Qué coeficiente de fricción μ mínimo entre los dos bloques impedirá que el bloque de 4.0 kg se deslice respecto del bloque de 12.0 kg? *b*) Si μ tiene sólo la mitad de ese valor mínimo, ¿cuál será la aceleración del bloque de 4.0 kg con respecto a la mesa, y *c*) con respecto al bloque de 12.0 kg? *d*) ¿Cuál es la fuerza que debe aplicarse al bloque de 12.0 kg en *a*) y en *b*), suponiendo que la mesa no tiene fricción?

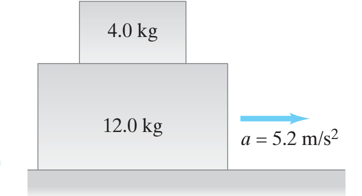


FIGURA 5–40 Problema 32.

33. (III) Un pequeño bloque de masa m descansa sobre el lado rugoso e inclinado de un bloque triangular de masa M que, a su vez, descansa sobre una mesa horizontal sin fricción, como se muestra en la figura 5-41. Si el coeficiente de fricción estática es μ, determine la fuerza horizontal mínima F aplicada a M que ocasionará que el bloque pequeño m empiece a moverse hacia arriba sobre el plano inclinado.

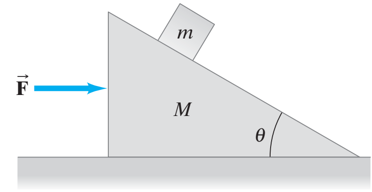


FIGURA 5–41 Problema 33.

5–2 a 5–4 Movimiento circular uniforme

34. (I) ¿Cuál es la rapidez máxima a la cual un automóvil de 1200 kg puede tomar una curva con radio de 80.0 m sobre un camino plano, si el coeficiente de fricción entre los neumáticos y el camino es de 0.65? ¿Este resultado es independiente de la masa del vehículo?

35. (I) Un niño se mueve con una rapidez de 1.30 m/s cuando está a 1.20 m del centro de un carrusel. Calcule *a*) la aceleración centrípeta del niño y *b*) la fuerza horizontal neta ejercida sobre él (masa = 22.5 kg).

36. (I) Un avión que viaja a 1890 km/h (525 m/s) sale de una picada moviéndose en un arco de 4.80 km de radio. ¿Cuál será la aceleración del avión en *g*'s?

37. (II) ¿Es posible hacer girar una cubeta con agua lo suficientemente rápido en un círculo vertical, de manera que el agua no se salga? Si es así, ¿cuál es la rapidez mínima? Defina todas las cantidades necesarias.

38. (II) ¿Qué tan rápido (en rpm) debe girar una centrifugadora para que una partícula, a 8.0 cm del eje de rotación experimente una aceleración de 125,000 *g*?

39. (II) Las curvas de las autopistas tiene señales donde se indica la rapidez permitida. Si tal rapidez se basa en lo que sería seguro en clima lluvioso, estime el radio de curvatura para una curva que marca 50 km/h. Utilice la tabla 5-1.

40. (II) ¿A qué rapidez mínima debe viajar un carro de montaña rusa cuando esté de cabeza en la parte superior de un círculo (figura 5-42), de manera que no caigan los pasajeros? Considere un radio con curvatura de 7.6 m.



FIGURA 5–42 Problema 40.

41. (II) Un automóvil deportivo cruza la parte baja de un valle, cuyo radio de curvatura es de 95 m. En lo más bajo, la fuerza normal sobre el conductor es dos veces su peso. ¿A qué rapidez viajaba el auto?

42. (II) ¿Qué tan grande debe ser el coeficiente de fricción estática entre los neumáticos y el camino, si un automóvil toma una curva horizontal con radio de 85 m a una rapidez de 95 km/h.

43. (II) Suponga que el transbordador espacial está en órbita a 400 km sobre la superficie terrestre y le da la vuelta a la Tierra aproximadamente una vez cada 90 min. Determine la aceleración centrípeta del transbordador espacial en esa órbita. Exprese su respuesta en términos de *g*, la aceleración gravitacional en la superficie terrestre.

44. (II) Una cubeta de 2.00 kg de masa se hace girar en un círculo vertical con radio de 1.10 m. En el punto inferior de su trayectoria, la tensión en la cuerda que sostiene a la cubeta es de 25.0 N. *a*) Encuentre la rapidez de la cubeta. *b*) ¿A qué rapidez mínima debe moverse la cubeta en lo alto del círculo de manera que no se afloje la cuerda?

45. (II) ¿Cuántas revoluciones por minuto necesitaría completar una rueda de la fortuna de 22 m de diámetro, para hacer que los pasajeros experimenten "ingravidez" en el punto más elevado?

46. (II) Utilice el análisis dimensional (sección 1-7) para obtener la expresión para la aceleración centrípeta, $a_R = v^2/r$.

47. (II) Un piloto describe en su aeronave un lazo vertical (figura 5-43). *a*) Si el jet se mueve con una rapidez de 1200 km/h en el punto inferior del lazo, determine el radio mínimo del círculo de modo que la aceleración centrípeta en el punto inferior no supere 6.0 *g*. *b*) Calcule el peso efectivo del piloto de 78 kg (la fuerza con la que el asiento lo empuja) en la parte baja del círculo, y *c*) en lo alto del círculo (suponiendo la misma rapidez).

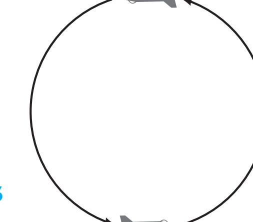


FIGURA 5–43 Problema 47.

48. (II) El proyecto de una estación espacial consiste en un tubo circular que rotará en torno a su centro (como una llanta tubular de bicicleta; figura 5-44). El círculo formado por el tubo tiene un diámetro aproximado de 1.1 km. ¿Cuál debe ser la rapidez de rotación (revoluciones por día), si en la estación debe sentirse un efecto igual al de la gravedad en la superficie terrestre (1.0 *g*)?

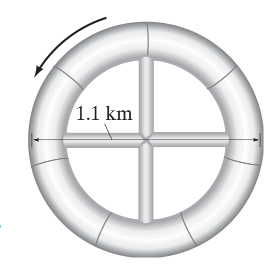


FIGURA 5–44 Problema 48.

49. (II) Sobre una pista de patinaje, dos patinadores de igual masa se toman de las manos y giran en un círculo mutuo una vez cada 2.5 segundos. Si suponemos que sus brazos tienen una longitud de 0.80 m y sus masas individuales son de 60.0 kg, ¿con qué fuerza están jalándose entre sí?

50. (II) Resuelva de nuevo el ejemplo 5-11, pero esta vez sin ignorar el peso de la pelota, que gira unida a una cuerda de 0.600 m de longitud. En particular, encuentre la magnitud de $\vec{\mathbf{F}}_T$, y el ángulo que forma con la horizontal. [*Sugerencia*: Considere la componente horizontal de $\vec{\mathbf{F}}_T$ igual a ma_R; además, como no hay movimiento vertical, ¿qué puede decir usted acerca de la componente vertical de $\vec{\mathbf{F}}_T$?].

51. (II) Se coloca una moneda a 12.0 cm del eje de un plato giratorio (tornamesa) de rapidez variable. Cuando se incrementa lentamente la rapidez del plato, la moneda permanece fija sobre éste, hasta que se alcanza una taza de 35.0 rpm (revoluciones por minuto), en cuyo punto la moneda comienza a deslizarse. ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática entre la moneda y el plato?

52. (II) El diseño de una nueva carretera incluye un tramo recto horizontal y plano, pero éste se inclina repentinamente hacia abajo a 22°. ¿Con qué radio mínimo debe curvarse el tramo de transición, de manera que los vehículos que van a 95 km/h no "vuelen" por el camino (figura 5-45)?



FIGURA 5–45 Problema 52.

53. (II) Un automóvil deportivo de 975 kg (incluyendo al conductor) cruza la cima redondeada de una colina (radio = 88.0 m) a 12.0 m/s. Determine *a*) la fuerza normal ejercida por el camino sobre el auto, *b*) la fuerza normal ejercida por el auto sobre el conductor de 72.0 kg, y *c*) la rapidez del auto para que la fuerza normal sobre el conductor sea cero.

54. (II) Dos bloques con masas m_A y m_B, están conectados entre sí y a un poste central por cuerdas ligeras como se muestra en la figura 5-46. Los bloques giran alrededor del poste con una frecuencia f (revoluciones por segundo) sobre una superficie horizontal sin fricción, a distancias r_A y r_B del poste. Obtenga una expresión algebraica para la tensión en cada segmento de la cuerda (que se supone sin masa).

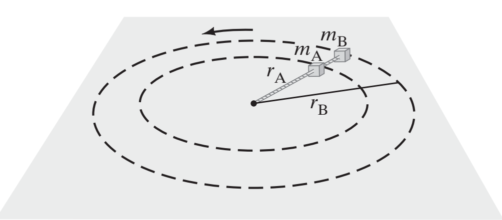


FIGURA 5–46 Problema 54.

55. (II) Tarzán piensa cruzar un acantilado oscilando en un arco colgado de una liana (figura 5-47). Si sus brazos son capaces de ejercer una fuerza de 1350 N sobre la cuerda, ¿cuál será la rapidez máxima que él puede tolerar en el punto más bajo de su balanceo? Su masa es de 78 kg y la liana tiene 5.2 m de longitud.

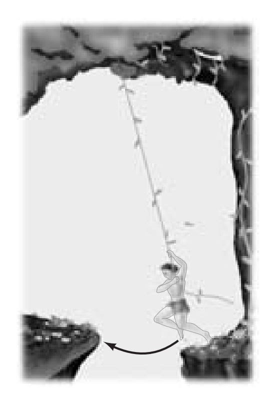


FIGURA 5–47 Problema 55.

56. (II) Un piloto realiza una maniobra evasiva descendiendo verticalmente a 310 m/s. Si puede resistir una aceleración de 9.0 *g* sin desmayarse, ¿a qué altitud debe comenzar a salir del movimiento en picada para evitar estrellarse en el mar?

57. (III) La posición de una partícula que se mueve en el plano *xy* está dada por $\vec{\mathbf{r}} = 2.0 \cos(3.0\,\text{rad/s}\,t)\,\hat{\mathbf{i}} + 2.0 \,\text{sen}\,(3.0\,\text{rad/s}\,t)\,\hat{\mathbf{j}}$, donde r está en metros y t en segundos. *a*) Demuestre que esta ecuación representa un movimiento circular de radio 2.0 m centrado al origen. *b*) Determine los vectores de velocidad y aceleración como funciones del tiempo. *c*) Determine la rapidez y la magnitud de la aceleración. *d*) Demuestre que $a = v^2/r$. *e*) Demuestre que el vector aceleración siempre apunta hacia el centro del círculo.

58. (III) Si a una curva de 85 m de radio se le da una inclinación transversal (peralte) adecuada para vehículos que viajan a 65 km/h, ¿cuál debe ser el coeficiente de fricción estática para que no derrapen los vehículos que viajan a 95 km/h?

59. (III) A una curva de 68 m de radio se le da una inclinación transversal para una rapidez de diseño de 85 km/h. Si el coeficiente de fricción estática es de 0.30 (pavimento húmedo), ¿en qué rango de rapideces puede un automóvil tomar con seguridad la curva? [*Sugerencia*: Considere la dirección de la fuerza de fricción sobre el auto cuando éste va muy lento o muy rápido].

*5–5 Movimiento circular no uniforme

***60.** (II) Una partícula que parte del reposo gira con rapidez uniformemente creciente en sentido horario en un círculo contenido en el plano *xy*. El centro del círculo está en el origen de un sistema coordenado *xy*. En $t = 0$, la partícula está en $x = 0.0$, $y = 2.0$ m. En $t = 2.0$ s, la partícula ha efectuado un cuarto de revolución y está en $x = 2.0$ m, $y = 0.0$. Determine *a*) su rapidez en $t = 2.0$ s, *b*) el vector velocidad promedio, y *c*) el vector aceleración promedio durante este intervalo.

***61.** (II) En el problema 60 suponga que la aceleración tangencial es constante y determine las componentes de la aceleración instantánea en *a*) $t = 0.0$, *b*) $t = 1.0$ s, y *c*) $t = 2.0$ s.

***62.** (II) Un objeto se mueve en un círculo de 22 m de radio a una rapidez dada por la expresión $v = 3.6 + 1.5t^2$, con v en metros por segundo y t en segundos. En $t = 3.0$ s, encuentre *a*) la aceleración tangencial y *b*) la aceleración radial.

***63.** (III) Una partícula gira en un círculo de 3.80 m de radio. En un instante particular su aceleración es de 1.15 m/s^2 en una dirección que forma un ángulo de 38.0° con el sentido de su movimiento. Determine su rapidez *a*) en este momento y *b*) 2.00 s después, suponiendo una aceleración tangencial constante.

***64.** (III) Un objeto de masa m está restringido a moverse en un círculo de radio r. Su aceleración tangencial como función del tiempo está dada por $a_{tan} = b + ct^2$, donde b y c son constantes. Si $v = v_0$ en $t = 0$, determine las componentes tangencial y radial de la fuerza, F_{tan} y F_R, que actúan sobre el objeto en cualquier tiempo $t > 0$.

*5–6 Fuerzas dependientes de la velocidad

***65.** (I) En el ejemplo 5-17, utilice el análisis dimensional (sección 1-7) para determinar si la constante de tiempo $\tau = m/b$ o $\tau = b/m$.

***66.** (II) La velocidad terminal de una gota de lluvia de 3×10^{-5} kg es de aproximadamente 9 m/s. Suponiendo una fuerza de arrastre $F_D = -bv$, determine *a*) el valor de la constante b, y *b*) el tiempo requerido para que una gota, partiendo del reposo, alcance el 63% de su velocidad terminal.

***67.** (II) Un objeto que se mueve verticalmente tiene $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}_0$ en $t = 0$. Determine una fórmula para su velocidad como función del tiempo, suponiendo una fuerza de resistencia $F = -bv$, además de la gravedad para dos casos: *a*) $\vec{\mathbf{v}}_0$ es hacia abajo y *b*) $\vec{\mathbf{v}}_0$ es hacia arriba.

∗**68.** (III) La fuerza de arrastre sobre objetos grandes como automóviles, aviones y paracaidistas en caída libre, al moverse a través del aire, es aproximadamente $F_D = -bv^2$. *a*) Para esta dependencia cuadrática de v, determine una fórmula para la velocidad terminal v_T de un objeto que cae verticalmente. *b*) Un paracaidista de 75 kg tiene una velocidad terminal de aproximadamente 60 m/s; determine el valor de la constante b. *c*) Dibuje una curva como la de la figura 5-27b para este caso de $F_D \propto v^2$. Para la misma velocidad terminal, ¿esta curva se encuentra por arriba o por abajo de la mostrada en la figura 5-27? Explique por qué.

∗**69.** (III) Un ciclista puede descender libremente por una colina inclinada 7.0° con rapidez constante de 9.5 km/h. Si la fuerza de arrastre es proporcional al cuadrado de la rapidez v, de manera que $F_D = -cv^2$, calcule *a*) el valor de la constante c y *b*) la fuerza promedio que debe aplicarse para descender por la colina a 25 km/h. La masa del ciclista más la bicicleta es de 80.0 kg. Desprecie otros tipos de fricción.

∗**70.** (III) Dos fuerzas de arrastre actúan sobre una bicicleta y su conductor: F_{D1} debida a la resistencia al rodamiento, que es esencialmente independiente de la velocidad; y F_{D2} debida a la resistencia del aire, que es proporcional a v^2. Para una bicicleta y un conductor específicos con masa total de 78 kg, $F_{D1} \approx 4.0$ N; y para una rapidez de 2.2 m/s, $F_{D2} \approx 1.0$ N. *a*) Muestre que la fuerza de arrastre total es

$$F_D = 4.0 + 0.21v^2,$$

donde v está en m/s, y F_D está en N y se opone al movimiento. *b*) Determine bajo que ángulo θ de la pendiente, la bicicleta y el conductor pueden viajar libremente hacia abajo con rapidez constante de 8.0 m/s.

∗**71.** (III) Obtenga una fórmula para la posición y aceleración de un objeto que cae como función del tiempo, si el objeto parte del reposo en $t = 0$ y experimenta una fuerza de resistencia $F = -bv$, como en el ejemplo 5-17.

∗**72.** (III) Un bloque de masa m se desliza a lo largo de una superficie horizontal lubricada con un aceite espeso que proporciona una fuerza de arrastre proporcional a la raíz cuadrada de la velocidad:

$$F_D = -bv^{\frac{1}{2}}.$$

Si $v = v_0$ en $t = 0$, determine v y x como funciones del tiempo.

∗**73.** (III) Muestre que la distancia máxima a la que el bloque del problema 72 puede viajar es $2m\, v_0^{3/2}/3b$.

∗**74.** (III) Usted se lanza directamente hacia sobre una alberca. Su masa es de 75 kg y golpea el agua a 5.0 m/s. Suponiendo una fuerza de arrastre de la forma $F_D = -(1.00 \times 10^4 \text{ kg/s})v$, ¿cuánto tiempo le tomará alcanzar el 2% de su rapidez original? (Desprecie cualquier efecto de flotabilidad).

∗**75.** (III) Un bote que viaja con rapidez de 2.4 m/s apaga sus motores en $t = 0$. ¿Qué tan lejos viajará antes de detenerse, si su rapidez después de 3.0 s disminuyó a la mitad de su valor original? Suponga que la fuerza de arrastre del agua sobre el bote es proporcional a v.

Problemas generales

76. Una taza de café sobre el tablero horizontal de un automóvil se desliza hacia adelante cuando el conductor desacelera de 45 km/h al reposo en 3.5 s o menos; sin embargo, no se desliza si desacelera en un tiempo mayor. ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática entre la taza y el tablero? Suponga que el camino y el tablero están horizontales.

77. Un cajón de cubertería de 2.0 kg está atorado dentro de un gabinete. El propietario jala gradualmente cada vez con más fuerza, y cuando la fuerza aplicada alcanza 9.0 N, el cajón se destraba repentinamente y todos los cubiertos caen al suelo. ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática entre el cajón y el gabinete?

78. El carro de una montaña rusa alcanza la parte superior del tramo más empinado con una rapidez de 6.0 km/h. Luego desciende por el carril que tiene 45.0 m de longitud y un ángulo promedio de 45°. ¿Cuál será su rapidez al llegar a la base? Suponga $\mu_k = 0.12$.

79. Una caja de 18.0 kg se suelta sobre un plano inclinado a 37.0° y acelera hacia abajo a 0.220 m/s². Encuentre la fuerza de fricción que retarda su movimiento. ¿Qué tan grande es el coeficiente de fricción?

80. Un disco plano (masa M) gira en un círculo sobre una mesa de hockey sin fricción, y es mantenido en esta órbita por una cuerda ligera que está conectada a una masa colgante (masa m), a través del agujero central, como se muestra en la figura 5-48. Demuestre que la rapidez del disco está dada por $v = \sqrt{mgR/M}$.

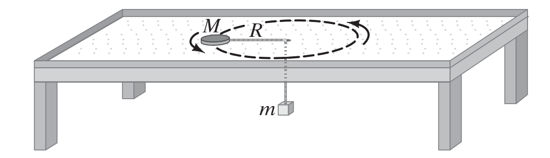


FIGURA 5–48 Problema 80.

81. Un motociclista desciende libremente con el motor apagado a una rapidez uniforme de 20.0 m/s, pero entra a un tramo arenoso donde el coeficiente de fricción cinética es de 0.70. ¿Si el tramo arenoso es de 15 m de longitud, saldrá el motociclista sin tener que encender el motor? Si es así, ¿cuál será su rapidez al salir?

82. En el "paseo en rotor" de un parque de diversiones, la gente gira en una "habitación" con paredes cilíndricas verticales. (Véase la figura 5-49). Si el radio de la habitación es de 5.5 m y la frecuencia de rotación es de 0.50 revoluciones por segundo, ¿cuál será el coeficiente de fricción estática mínimo entre las personas y la pared necesario para que éstas no se deslicen hacia abajo cuando el piso se separa de las paredes? Las personas relatan que en este "paseo" son "oprimidas contra la pared". ¿Existe realmente una fuerza hacia el exterior que los oprima contra la pared? Si es así, ¿cuál es el origen de esta fuerza? Si no, ¿cuál es la descripción correcta de esta situación (además de la náusea)? [*Sugerencia*: Dibuje un diagrama de cuerpo libre de una persona].



FIGURA 5–49 Problema 82.

83. Un dispositivo para adiestrar astronautas y pilotos de combate está diseñado para hacer girar a los aprendices en un círculo horizontal de radio de 11.0 m. Si la fuerza que siente un aprendiz es de 7.45 veces su propio peso, ¿qué tan rápido está girando? Exprese su respuesta tanto en m/s como en rev/s.

84. Un automóvil de 1250 kg circula por una curva de 72 m de radio con una inclinación transversal de 14°. Si el auto viaja a 85 km/h, ¿se requerirá una fuerza de fricción? Si es así, ¿de qué magnitud y en qué dirección?

85. Determine las componentes tangencial y centrípeta de la fuerza neta ejercida por el suelo sobre un automóvil cuando su rapidez es de 27 m/s y ha acelerado hasta esta rapidez desde el reposo en 9.0 s a lo largo de una curva de 450 m de radio. La masa del auto es de 1150 kg.

86. En la figura 5-50 el alpinista de 70.0 kg es soportado en la "chimenea" por las fuerzas de fricción ejercidas sobre los zapatos y la espalda. Los coeficientes de fricción estática entre los zapatos y el muro, y entre su espalda y el muro, son de 0.80 y 0.60, respectivamente. ¿Cuál es la fuerza normal mínima que él debe ejercer? Suponga que los muros son verticales y que las fuerzas de fricción estática están en su valor máximo. Desprecie la ayuda de la cuerda.



FIGURA 5–50
Problema 86.

87. Sobre la superficie de una esfera se coloca una pequeña masa m (figura 5-51). Si el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.70$, ¿a qué ángulo ϕ empezaría a deslizarse la masa?

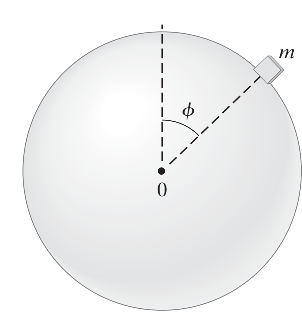


FIGURA 5–51
Problema 87.

88. Un bloque de 28.0 kg está conectado a una cubeta vacía de 2.00 kg por medio de una cuerda que pasa alrededor de una polea sin fricción (figura 5-52). El coeficiente de fricción estática entre la mesa y el bloque es 0.450 y el de fricción cinética es 0.32. Se vierte arena gradualmente a la cubeta, hasta que el sistema empieza a moverse. *a*) Calcule la masa de la arena agregada a la cubeta. *b*) Calcule la aceleración del sistema.

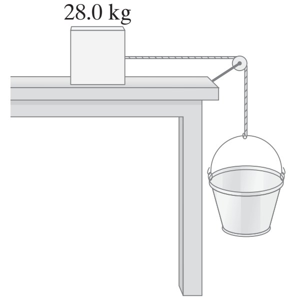


FIGURA 5–52
Problema 88.

89. Un automóvil desciende por un camino resbaloso a una rapidez de 95 km/h. La distancia mínima en la que el vehículo puede detenerse sin derrapar es de 66 m. ¿Cuál será la curva más cerrada que el auto puede tomar en la misma superficie y a la misma rapidez sin derrapar?

90. ¿En su reloj de pulsera cuál es la aceleración experimentada por la punta del segundero de 1.5 cm de largo?

91. Un avión que vuela a 480 km/h necesita invertir el sentido de su movimiento. Para lograrlo, el piloto decide inclinar las alas a un ángulo de 38°. *a*) Encuentre el tiempo necesario para conseguir su objetivo. *b*) ¿Qué fuerza adicional experimentarán los pasajeros durante el giro? [*Sugerencia*: Suponga una fuerza de "sustentación" aerodinámica que actúa perpendicularmente a las alas planas; véase la figura 5-53].

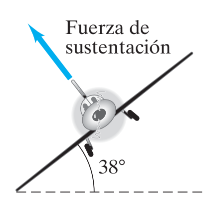


FIGURA 5–53
Problema 91.

92. En una autopista nueva una curva peraltada de radio R está diseñada de manera que un automóvil, que viaje con rapidez v_0, pueda tomar la curva con seguridad sobre una superficie congelada (sin fricción). Si el automóvil viaja muy lentamente, se deslizará hacia el centro del círculo. Si viaja muy rápido, se deslizará alejándose del centro del círculo. Conforme se incrementa el coeficiente de fricción estática, es posible para un automóvil permanecer en el camino, viajando a cualquier rapidez dentro de un rango entre $v_{mín}$ y $v_{máx}$. Obtenga expresiones algebraicas para $v_{mín}$ y $v_{máx}$ como funciones de μ_s, v_0 y R.

93. Una pequeña bola de masa m está restringida a resbalar sin fricción dentro de un aro vertical circular de radio r que gira alrededor de un eje vertical con frecuencia f (figura 5-54). *a*) Determine el ángulo θ donde la bola estará en equilibrio, es decir, donde no tendrá tendencia a subir ni a bajar a lo largo del aro. *b*) Si $f = 2.00$ rev/s y $r = 22.0$ cm, ¿cuánto vale θ? *c*) ¿Puede la bola subir hasta $\theta = 90°$? Explique.

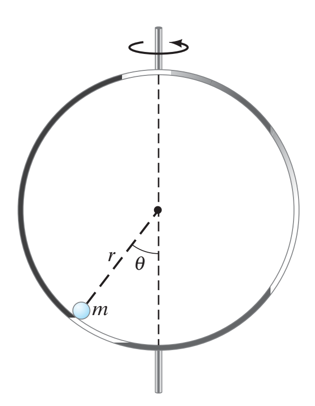


FIGURA 5–54
Problema 93.

94. *La Tierra no es un marco de referencia lo exactamente inercial*. Con frecuencia realizamos mediciones en un marco de referencia fijo en la Tierra, suponiendo que nuestro planeta es un marco inercial. Sin embargo, la Tierra gira, por lo que tal suposición no es siempre válida. Demuestre que esta suposición es inexacta en 3 partes sobre 1000, calculando la aceleración de un objeto en el ecuador de la Tierra debida a la rotación terrestre diaria, y compare este valor con $g = 9.80 \text{ m/s}^2$, que es la aceleración de la fuerza de gravedad.

95. Mientras está de pesca, usted se aburre y comienza a mover una plomada de pesca alrededor de un círculo horizontal debajo de usted en un sedal de 0.45 m. La plomada completa una circunferencia cada 0.50 s. ¿Cuál es el ángulo que forma el sedal con la vertical? [*Sugerencia*: Considere la figura 5-20].

96. Considere un tren que toma una curva de 570 m de radio a una rapidez de 160 km/h (aproximadamente 100 mi/h). *a*) Calcule la fuerza de fricción necesaria sobre un pasajero del tren, cuya masa es de 75 kg, si las vías no están peraltadas y el tren no se inclina. *b*) Calcule la fuerza de fricción sobre el pasajero si el tren se inclina a un ángulo de 8.0° hacia el centro de la curva.

97. Un automóvil empieza a descender sobre una colina de 1 en 4 (que significa que por cada 4 m recorridos a lo largo del camino, el cambio en la elevación es de 1 m). ¿Qué tan rápido irá el vehículo cuando llegue a la parte inferior después de recorrer 55 m? *a*) Ignore la fricción. *b*) Suponga un coeficiente de fricción efectivo de 0.10.

98. Los lados de un cono forman un ángulo ϕ con la vertical. Una pequeña masa m se coloca sobre el interior del cono y éste, con su vértice hacia abajo, se pone a girar con una frecuencia f (revoluciones por segundo) en torno a su eje de simetría. Si el coeficiente de fricción estática es μ_s, ¿en qué posiciones puede colocarse la masa dentro del cono sin deslizarse respecto del cono? (Dé las distancias máxima y mínima, r, desde el eje de giro).

99. Una esquiadora acuática de 72 kg es acelerada por una lancha en un lago plano. El coeficiente de fricción cinética entre los esquíes de la atleta y la superficie del agua es $\mu_k = 0.25$ (figura 5-55). *a*) ¿Cuál es la aceleración de la esquiadora, si la cuerda que la jala detrás del bote le aplica a ella una fuerza de tensión horizontal ($\theta = 0°$) de magnitud $F_T = 240$ N? *b*) ¿Cuál será la aceleración horizontal de la esquiadora si la cuerda que la jala ejerce un fuerza sobre ella de $F_T = 240$ N a un ángulo ascendente $\theta = 12°$? *c*) Explique por qué la aceleración de la esquiadora en el inciso *b*) es mayor que en el inciso *a*).

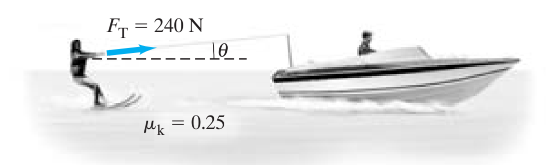


FIGURA 5–55 Problema 99.

100. Una pelota de masa $m = 1.0$ kg atada en el extremo de una cuerda delgada de longitud $r = 0.80$ m gira en un círculo vertical respecto al punto O, como se indica en la figura 5-56. Durante el tiempo que la observamos, las únicas fuerzas que actúan sobre la pelota son la gravedad y la tensión en la cuerda. El movimiento es circular pero no es uniforme debido a la fuerza de la gravedad. La pelota incrementa su rapidez al descender y desacelera al subir por el otro lado del círculo. En el momento en que la cuerda forma un ángulo $\theta = 30°$ por debajo de la horizontal, la rapidez de la pelota es de 6.0 m/s. En este punto, determine la aceleración tangencial, la aceleración radial y la tensión F_T en la cuerda. Considere que θ aumenta hacia abajo, como se indica.

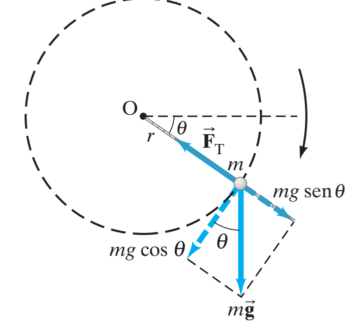


FIGURA 5–56 Problema 100.

101. Un automóvil avanza a rapidez constante por una curva peraltada con un diámetro de 127 m. El movimiento del auto puede describirse en un sistema coordenado con su origen en el centro del círculo. En un instante dado, la aceleración del vehículo en el plano horizontal está dada por

$$\vec{\mathbf{a}} = (-15.7\hat{\mathbf{i}} - 23.2\hat{\mathbf{j}})\ \text{m/s}^2.$$

a) ¿Cuál es la rapidez del auto? *b*) ¿En qué punto (x, y) está el automóvil en ese momento?

* Problemas numéricos/por computadora

* **102.** (III) La fuerza de resistencia del aire (fuerza de arrastre) sobre un cuerpo que cae rápidamente como un paracaidista tiene la forma $F_D = -kv^2$, de manera que la segunda ley de Newton aplicada a tal objeto es

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2,$$

donde tomamos positivo hacia abajo. *a*) Utilice integración numérica [sección 2-9] para estimar (dentro del 2%) la posición, la rapidez y la aceleración, desde $t = 0$ hasta $t = 15.0$ s, para un paracaidista de 75 kg que parte del reposo, suponiendo $k = 0.22$ kg/m. *b*) Demuestre que el paracaidista alcanzará al final una rapidez constante, la *rapidez terminal*, y explique por qué sucede así. *c*) ¿Cuánto tiempo le tomará al paracaidista alcanzar el 99.5% de su rapidez terminal?

* **103.** (III) El coeficiente de fricción cinética μ_k entre dos superficies no es estrictamente independiente de la velocidad del objeto. Una posible expresión para μ_k para madera sobre madera es

$$\mu_k = \frac{0.20}{(1 + 0.0020v^2)^2},$$

donde v está en m/s. Un bloque de madera de 8.0 kg de masa está en reposo sobre un piso de madera, una fuerza horizontal constante de 41 N actúa sobre el bloque. Utilice integración numérica [sección 2-9] para determinar y graficar *a*) la rapidez del bloque y *b*) su posición como función del tiempo de 0 a 5.0 s. *c*) Determine la diferencia porcentual para la rapidez y la posición en 5.0 s, si μ_k es constante e igual a 0.20.

* **104.** (III) Suponga que una fuerza neta $F = -mg - kv^2$ actúa durante el movimiento vertical ascendente de un cohete de 250 kg, empezando en el momento ($t = 0$) cuando se haya consumido el combustible y el cohete tenga una rapidez ascendente de 120 m/s. Sea $k = 0.65$ kg/m. Estime v y y en intervalos de 1.0 s para el movimiento ascendente y determine la altura máxima que alcanzará el cohete. Compare con las condiciones de vuelo libre sin resistencia del aire ($k = 0$).

Respuestas a los ejercicios

A: *c*).

B: F_{Px} resulta insuficiente para mantener la caja moviéndose.

C: No: la aceleración no es constante (en dirección).

D: *a*), es del doble.

E: *d*).

F: *a*).

G: *c*).

H: Sí.

I: *a*) No cambia; *b*) 4 veces más grande.



Los astronautas en la parte superior de esta fotografía trabajan en un transbordador espacial. Mientras orbitan la Tierra (con una rapidez muy grande), experimentan una ingravidez aparente. En el fondo de la fotografía, la Luna también orbita la Tierra con gran rapidez. ¿Qué impide que la Luna y el transbordador espacial (con sus astronautas) se muevan el línea recta alejándose de la Tierra? Es la fuerza de la gravedad. La ley de Newton de la gravitación universal establece que todos los objetos atraen a todos los demás con una fuerza proporcional a sus masas, e inversamente proporcional al cuadrado de las distancias entre sí.



Gravitación y síntesis de Newton

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine qué!

Una estación espacial gira alrededor de la Tierra como un satélite, a 100 km de la superficie terrestre. ¿Cuál es la fuerza neta sobre un astronauta que está en reposo dentro de la estación espacial?

a) Igual que su peso en la Tierra.
b) Un poco menor que su peso en la Tierra.
c) Menor que la mitad de su peso en la Tierra.
d) Cero (experimenta ingravidez).
e) Algo mayor que su peso en la Tierra.

Sir Isaac Newton no sólo propuso las tres grandes leyes del movimiento que son la base para el estudio de la dinámica. También concibió otra ley importante para describir una de las fuerzas fundamentales en la naturaleza, la gravitación, y la aplicó para entender el movimiento de los planetas. Esta nueva ley, publicada en 1687 en su gran libro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (abreviado *Principia*), se conoce como ley de Newton de la gravitación universal, la cual fue la "cereza del pastel" en el análisis newtoniano del mundo físico. De hecho, la mecánica de Newton, con sus tres leyes del movimiento y la ley de la gravitación universal, fue aceptada durante siglos como una base mecánica de la forma en que funciona el Universo.

CONTENIDO

6–1 Ley de Newton de la gravitación universal

Entre sus grandes logros, Sir Isaac Newton examinó el movimiento de los cuerpos celestes: los planetas y la Luna. En particular, se preguntó acerca de la naturaleza de la fuerza que debe actuar para mantener a la Luna en su órbita casi circular alrededor de la Tierra.

Newton también reflexionó acerca del problema de la gravedad. Puesto que los cuerpos que caen aceleran, Newton concluyó que debía ejercerse una fuerza sobre ellos, a la cual llamamos fuerza de gravedad. Siempre que una fuerza se ejerce *sobre* algo, esa fuerza es ejercida *por* algún otro objeto. Pero ¿qué objeto *ejerce* la fuerza de gravedad? Todo objeto sobre la superficie terrestre siente la fuerza de gravedad e, independientemente de dónde se encuentre el objeto, la fuerza está dirigida hacia el centro de la Tierra (figura 6-1). Newton concluyó que debe ser la Tierra misma la que ejerce la fuerza gravitacional sobre los objetos que están en su superficie.

FIGURA 6–1 En cualquier punto sobre la Tierra, ya sea Alaska, Australia o Perú, la fuerza de la gravedad actúa hacia abajo, hacia el centro de la Tierra.

Según la antigua anécdota, Newton notó la caída de una manzana de un árbol. Se dice que tuvo una repentina intuición: si la gravedad actúa en la parte superior de los árboles e incluso en la cima de las montañas, entonces ¡quizá actúe todo el camino hasta la Luna! Con esta idea de que la gravitación terrestre es lo que mantiene a la Luna en su órbita, Newton desarrolló su gran teoría de la gravitación. Pero en aquel entonces se suscitó una controversia. Muchos pensadores se rehusaban a aceptar la noción de una fuerza "que actuara a distancia". Las fuerzas típicas actúan por contacto, es decir, su mano empuja un carrito o jala una caja, un bate golpea una pelota, etcétera. No obstante, dijo Newton, la gravedad actúa sin contacto: la Tierra ejerce una fuerza sobre una manzana que cae y sobre la Luna, aun cuando no haya contacto, y los dos objetos pueden incluso estar muy lejos entre sí.

Newton se propuso determinar la magnitud de la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre la Luna en comparación con la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre objetos en la superficie terrestre, donde la fuerza de la gravedad acelera los objetos a 9.80 m/s^2. La aceleración centrípeta de la Luna se calcula con $a_R = v^2/r$ (véase el ejemplo 5-9) y resulta $a_R = 0.00272\ \text{m/s}^2$. En términos de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra, g, esto equivale a

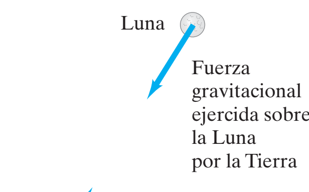
$$a_R = \frac{0.00272\ \text{m/s}^2}{9.80\ \text{m/s}^2}\, g \approx \frac{1}{3600}\, g.$$

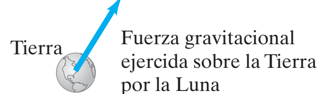
Es decir, la aceleración de la Luna hacia la Tierra es aproximadamente $\frac{1}{3600}$ de la aceleración de los objetos en la superficie terrestre. La Luna está a 384,000 km de la Tierra, lo cual es casi 60 veces el radio de la Tierra o 6380 km. Entonces, la Luna está 60 veces más alejada del centro de la Tierra que los objetos en la superficie terrestre. Pero $60 \times 60 = 60^2 = 3600$. ¡De nuevo el número 3600! Newton concluyó que la fuerza gravitacional F ejercida por la Tierra sobre cualquier objeto decrece con el cuadrado de su distancia r desde el centro de la Tierra:

$$F \propto \frac{1}{r^2}.$$

La Luna está a una distancia de 60 radios terrestres, por lo que siente una fuerza gravitacional de sólo $\frac{1}{60^2} = \frac{1}{3600}$ de la fuerza gravitacional que sentiría si fuera sólo un punto sobre la superficie de la Tierra.

FIGURA 6–2 La fuerza gravitacional que ejerce un objeto sobre un segundo objeto está dirigida hacia el primer objeto, y es de la misma magnitud pero de sentido opuesto que la fuerza ejercida por el segundo objeto sobre el primero.





Newton se dio cuenta de que la fuerza de gravedad sobre un objeto depende no sólo de la distancia, sino también de la masa del objeto. De hecho, es directamente proporcional a su masa, como ya hemos visto. De acuerdo con la tercera ley de Newton, cuando la Tierra ejerce su fuerza gravitacional sobre cualquier cuerpo, por ejemplo, sobre la Luna, ese objeto ejerce una fuerza de la misma magnitud pero de sentido opuesto sobre la Tierra (figura 6-2). Debido a tal simetría, Newton razonó que la magnitud de la fuerza de la gravedad debe ser proporcional a *ambas* masas. Así,

$$F \propto \frac{m_E m_B}{r^2},$$

donde m_E es la masa de la Tierra, m_B es la masa del otro objeto y r es la distancia del centro de la Tierra al centro del otro objeto.

Newton fue más allá en su análisis de la gravedad. En su estudio de las órbitas de los planetas, concluyó que la fuerza requerida para mantener a los diferentes planetas en sus órbitas alrededor del Sol parece disminuir, según el cuadrado inverso de sus distancias desde el Sol. Esto lo condujo a creer que también es la fuerza gravitacional lo que actúa entre el Sol y cada uno de los planetas para mantenerlos en sus órbitas. Y si la gravedad actúa entre tales objetos, ¿por qué no entre todos los objetos? Él propuso entonces su **ley de la gravitación universal**, que puede enunciarse como sigue:

Toda partícula en el Universo atrae a cualquier otra partícula con una fuerza que es proporcional al producto de sus masas, e inversamente proporcional al cuadro de la distancia entre ellas. Esta fuerza actúa a lo largo de la línea que une a las dos partículas.

LEY DE NEWTON DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL

La magnitud de la fuerza gravitacional puede escribirse como

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad \textbf{(6–1)}$$

donde m_1 y m_2 son las masas de las dos partículas, r es la distancia entre ellas, y G es una constante universal que debe medirse experimentalmente y tiene el mismo valor numérico para todos los objetos.

El valor de G debe ser muy pequeño puesto que no estamos conscientes de ninguna fuerza de atracción entre objetos de tamaño ordinario, tal como la que hay entre dos pelotas de béisbol. La fuerza de atracción entre dos objetos ordinarios fue determinada primero por Henry Cavendish en 1798, más de 100 años después de que Newton publicara su ley. Para determinar y medir la increíblemente pequeña fuerza entre dos objetos ordinarios, Cavendish usó un aparato como el que se muestra en la figura 6-3. Cavendish confirmó la hipótesis de Newton de que dos objetos se atraen entre sí, y que la ecuación 6-1 describe exactamente dicha fuerza. Además, como pudo medir F, m_1, m_2 y r con exactitud, fue capaz de determinar también el valor de la constante G, cuyo valor aceptado actualmente es

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}.$$

(Véase la tabla en los forros de este libro para consultar los valores de las constantes con la mayor exactitud conocida).

Estrictamente hablando, la ecuación 6-1 da la magnitud de la fuerza gravitacional que ejerce una particular sobre una segunda partícula situada a una distancia r. Para un objeto extenso (es decir, que no se puede considerar como un punto), debemos tomar en cuenta cómo medir la distancia r. Se pensaría que r es la distancia entre los centros de los objetos. Esto es cierto para dos esferas y a menudo es una buena aproximación para otros objetos. Un cálculo correcto trata cada cuerpo extenso como una colección de partículas pequeñas y la fuerza total es la suma de las fuerzas debidas a todas las partículas. La suma sobre todas esas partículas se obtiene usualmente mejor usando el cálculo integral, que Newton mismo inventó. Cuando cuerpos extensos son pequeños en comparación con la distancia entre sí (como en el caso del sistema Tierra-Sol), las imprecisiones que resultan son pequeñas al considerarlos como partículas puntuales.

Newton fue capaz de demostrar (véase la derivación en el Apéndice D) que la *fuerza gravitacional ejercida sobre una partícula exterior a una esfera, con una distribución de masa esféricamente simétrica, es la misma que si la masa completa de la esfera estuviera concentrada en su centro*. Así, la ecuación 6-1 da la fuerza correcta entre dos esferas uniformes, donde r es la distancia entre sus centros.

EJEMPLO 6–1 ESTIMACIÓN ¿Puede usted atraer gravitacionalmente a otra persona? Una persona de 50 kg y otra de 70 kg están sentadas en una banca, cerca entre sí. Estime la magnitud de la fuerza gravitacional que cada persona ejerce sobre la otra.

PLANTEAMIENTO Se trata de una estimación: Sea la distancia entre los centros de las dos personas de $\frac{1}{2}$ m (aproximadamente tan cerca como podría uno estar).

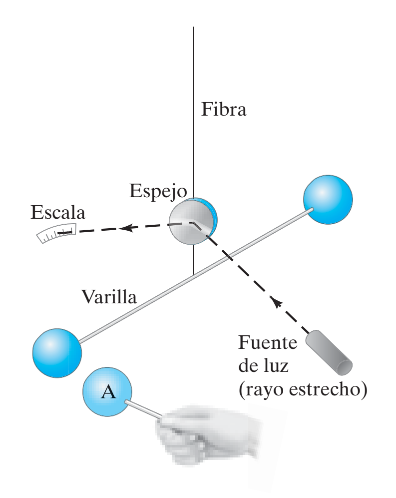
SOLUCIÓN Usamos la ecuación 6-1, que da

$$F = \frac{\left(6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}\right)(50\,\mathrm{kg})(70\,\mathrm{kg})}{(0.5\,\mathrm{m})^2} \approx 10^{-6}\,\mathrm{N},$$

redondeada a un orden de magnitud. Tal fuerza es imperceptiblemente pequeña a menos que se usen instrumentos muy sensibles.

NOTA Como una fracción del peso de las personas, esta fuerza es $(10^{-6}\,\mathrm{N})/(70\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/s^2}) \approx 10^{-9}$.

FIGURA 6–3 Diagrama esquemático del aparato de Cavendish. Dos esferas están unidas a una varilla horizontal ligera, que está suspendida en su centro por una fibra delgada. Cuando una tercera esfera (rotulada con A) se acerca a una de las esferas suspendidas, la fuerza gravitacional ocasiona que esta última se mueva, y ello tuerce ligeramente la fibra. El pequeño movimiento se amplía usando un rayo de luz estrecho dirigido hacia un espejo montado sobre la fibra. El rayo se refleja sobre una escala. La determinación previa de qué tan grande debe ser la fuerza que tuerza la fibra una cantidad dada, permite al experimentador determinar la magnitud de la fuerza gravitacional entre dos objetos.



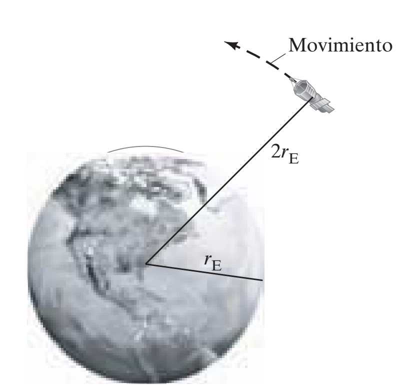


FIGURA 6–4 Ejemplo 6–2.

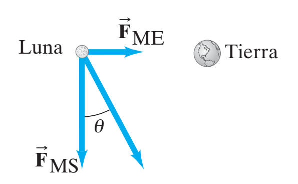
EJEMPLO 6–2 **Nave espacial a $2r_E$.** ¿Cuál es la fuerza de gravedad que actúa sobre una nave espacial de 2000 kg cuando ésta se mueve en una órbita a dos radios terrestres del centro de la Tierra (es decir, a una distancia $r_E = 6380$ km sobre la superficie terrestre; véase la figura 6-4)? La masa de la Tierra es $m_E = 5.98 \times 10^{24}$ kg.

PLANTEAMIENTO Podríamos insertar todos los números en la ecuación 6-1, pero hay un enfoque más sencillo. La nave espacial está al doble de la distancia al centro de la Tierra desde su superficie. Por lo tanto, como la fuerza de gravedad disminuye según el cuadro de la distancia ($\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$), la fuerza de gravedad sobre ella será sólo la cuarta parte de su peso en la superficie terrestre.

SOLUCIÓN En la superficie de la Tierra, $F_G = mg$. A una distancia $2r_E$ del centro de la Tierra, F_G es $\frac{1}{4}$ de:

$$F_G = \tfrac{1}{4}mg = \tfrac{1}{4}(2000\,\text{kg})(9.80\,\text{m/s}^2) = 4900\,\text{N}.$$

FIGURA 6–5 Ejemplo 6-3. Orientación del Sol (S), la Tierra (E) y la Luna (M) en ángulos rectos entre sí (no está a escala).





EJEMPLO 6–3 **Fuerza sobre la Luna.** Encuentre la fuerza neta sobre la Luna ($m_M = 7.35 \times 10^{22}$ kg) debida a la atracción gravitacional tanto de la Tierra ($m_E = 5.98 \times 10^{24}$ kg) como del Sol ($m_S = 1.99 \times 10^{30}$ kg), suponiendo que ambos están en un ángulo recto entre sí (figura 6-5).

PLANTEAMIENTO Las fuerzas sobre nuestro objeto, la Luna, son la fuerza gravitacional ejercida sobre la Luna por la Tierra y F_{ME} y la que ejerce el Sol F_{MS}, como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la figura 6-5. Utilizamos la ley de la gravitación universal para encontrar la magnitud de cada fuerza, y luego sumamos las dos fuerzas como vectores.

SOLUCIÓN La Tierra está a 3.48×10^5 km $= 3.48 \times 10^8$ m de la Luna, por lo que F_{ME} (la fuerza gravitacional sobre la Luna debida a la Tierra) es

$$F_{ME} = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(7.35 \times 10^{22}\,\text{kg})(5.98 \times 10^{24}\,\text{kg})}{(3.84 \times 10^8\,\text{m})^2} = 1.99 \times 10^{20}\,\text{N}.$$

El Sol está a 1.50×10^8 km de la Tierra y la Luna, por lo que F_{MS} (la fuerza gravitacional sobre la Luna debida al Sol) es

$$F_{MS} = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(7.35 \times 10^{22}\,\text{kg})(1.99 \times 10^{30}\,\text{kg})}{(1.50 \times 10^{11}\,\text{m})^2} = 4.34 \times 10^{20}\,\text{N}.$$

Las dos fuerzas actúan en ángulos rectos en el caso que estamos considerando (figura 6-5), por lo que aplicamos el teorema de Pitágoras para encontrar la magnitud de la fuerza total:

$$F = \sqrt{(1.99 \times 10^{20}\,\text{N})^2 + (4.34 \times 10^{20}\,\text{N})^2} = 4.77 \times 10^{20}\,\text{N}.$$

La fuerza actúa a un ángulo θ (figura 6-5) dado por $\theta = \tan^{-1}(1.99/4.34) = 24.6°$.

NOTA Las dos fuerzas F_{ME} y F_{MS} tienen el mismo orden de magnitud (10^{20} N). Esto quizá sorprenda, pero, ¿es razonable? El Sol está mucho más lejos de la Tierra que la Luna (un factor de $10^{11}\,\text{m}/10^8\,\text{m} \approx 10^3$); pero el Sol también es mucho más masivo (un factor de $10^{30}\,\text{kg}/10^{23}\,\text{kg} \approx 10^7$). La masa dividida entre el cuadrado de la distancia ($10^7/10^6$) cae dentro de un orden de magnitud, y hemos ignorado factores de 3 o más. Así que sí es razonable.

⚠ **CUIDADO**

Distinga entre la segunda ley de Newton y la ley de la gravitación universal.

Siempre tenga presente que la ley de la gravitación universal describe una fuerza *particular* (la gravedad); en tanto que la segunda ley de Newton del movimiento ($F_{neta} = ma$) nos indica cómo se acelera un objeto bajo la acción de *cualquier* fuerza neta.

*Cascarones esféricos

Usando el cálculo que él mismo inventó para tal propósito, Newton fue capaz de demostrar que un cascarón delgado esférico uniforme ejerce una fuerza sobre una partícula *externa* a él, como si toda la masa del cuerpo estuviera en su centro; y que ese cascarón delgado uniforme ejerce una fuerza neta igual a *cero* sobre cualquier partícula *dentro* de del cascarón. (La derivación se presenta en el Apéndice D). La Tierra puede modelarse como una serie de cascarones concéntricos que empiezan en su centro, pero cada cascarón uniforme tendría una densidad distinta para tomar en cuenta la densidad variable de la Tierra en varias capas. Suponga, por ejemplo, que la Tierra fue-

ra completamente uniforme; ¿cuál sería la fuerza gravitacional sobre una partícula colocada exactamente a la mitad entre el centro de la Tierra y la superficie de ésta? Sólo la masa *dentro* de este radio $r = \frac{1}{2} r_E$ ejercería una fuerza neta sobre esta partícula. La masa de una esfera es proporcional a su volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, de manera que la masa m dentro de $r = \frac{1}{2} r_E$ es $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ de la masa total de la Tierra. La fuerza gravitacional sobre una partícula en $r = \frac{1}{2} r_E$, que es proporcional a m/r^2 (ecuación 6-1), se reduce a $\left(\frac{1}{8}\right)/\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ de la fuerza gravitacional que experimentaría en la superficie terrestre.

6–2 Forma vectorial de la ley de Newton de la gravitación universal

Podemos escribir la ley de Newton de la gravitación universal en forma vectorial como

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21}, \tag{6–2}$$

donde $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ es la fuerza vectorial sobre la partícula 1 (de masa m_1) ejercida por la partícula 2 (de masa m_2), que está a una distancia r_{21}; $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ es un vector unitario que apunta de la partícula 2 hacia la partícula 1 a lo largo de la línea que las une, de manera que $\hat{\mathbf{r}}_{21} = \vec{\mathbf{r}}_{21}/r_{21}$, donde $\vec{\mathbf{r}}_{21}$ es el vector desplazamiento como se muestra en la figura 6-6. En la ecuación 6-2 el signo menos es necesario porque la fuerza sobre la partícula 1 debida a la partícula 2 apunta hacia m_2, en sentido opuesto a $\hat{\mathbf{r}}_{21}$. El vector desplazamiento $\vec{\mathbf{r}}_{12}$ es un vector de la misma magnitud que $\vec{\mathbf{r}}_{21}$, pero apunta en sentido opuesto, por lo que

$$\vec{\mathbf{r}}_{12} = -\vec{\mathbf{r}}_{21}.$$

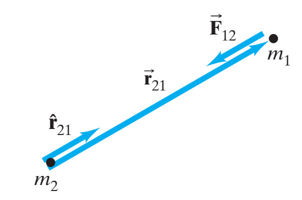
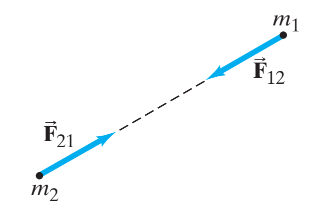


FIGURA 6–6 El vector desplazamiento $\vec{\mathbf{r}}_{21}$ apunta de la partícula de masa m_2 a la partícula de masa m_1. El vector unitario mostrado, $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ tiene la misma dirección que $\vec{\mathbf{r}}_{21}$, pero se define con longitud unitaria.

Por la tercera ley de Newton, la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{21}$ que actúa sobre m_2 ejercida por m_1 debe tener la misma magnitud que $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ pero actuando en sentido opuesto (figura 6-7), de modo que

$$\vec{\mathbf{F}}_{21} = -\vec{\mathbf{F}}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^2}\hat{\mathbf{r}}_{21}$$
$$= -G\frac{m_2 m_1}{r_{12}^2}\hat{\mathbf{r}}_{12}.$$

FIGURA 6–7 Por la tercera ley de Newton, la fuerza gravitacional sobre la partícula 1 ejercida por la partícula 2, $\vec{\mathbf{F}}_{12}$, tiene la misma magnitud y dirección, pero sentido opuesto a la fuerza gravitacional que ejerce la partícula 1 sobre la partícula 2, $\vec{\mathbf{F}}_{21}$; es decir, $\vec{\mathbf{F}}_{21} = -\vec{\mathbf{F}}_{12}$.



La fuerza de gravedad ejercida sobre una partícula por una segunda partícula está siempre dirigida hacia la segunda partícula, como en la figura 6-6. Cuando muchas partículas interactúan entre sí, la fuerza gravitacional total sobre una partícula dada es la suma vectorial de las fuerzas ejercidas por cada una de las otras partículas. Por ejemplo, la fuerza total sobre la partícula 1 es

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = \vec{\mathbf{F}}_{12} + \vec{\mathbf{F}}_{13} + \vec{\mathbf{F}}_{14} + \cdots + \vec{\mathbf{F}}_{1n} = \sum_{i=2}^{n}\vec{\mathbf{F}}_{1i} \tag{6–3}$$

donde $\vec{\mathbf{F}}_{1i}$ es la fuerza sobre la partícula 1 ejercida por la partícula i, y n es el número total de partículas.

Esta notación vectorial puede ser muy útil especialmente cuando se necesitan sumas sobre muchas partículas. Sin embargo, en muchos casos no tenemos que ser tan formales y podemos tratar las direcciones elaborando diagramas cuidadosamente.

6–3 Gravedad cerca de la superficie de la Tierra: Aplicaciones geofísicas

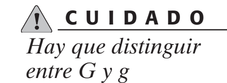
Cuando la ecuación 6-1 se aplica a la fuerza gravitacional entre la Tierra y un objeto en su superficie, m_1 es la masa de la Tierra m_E, m_2 es la masa del objeto m, y r es la distancia del objeto desde el centro de la Tierra, que es el radio de ésta, r_E. La fuerza de gravedad debida a la Tierra es el peso del objeto, que hemos escrito como mg. Entonces,

$$mg = G\frac{m m_E}{r_E^2}.$$

Y podemos despejar g, la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre:

$$g = G\frac{m_E}{r_E^2}. \tag{6–4}$$

Así, la aceleración de la gravedad g, en la superficie de la Tierra está determinada por m_E y r_E. (No confunda G con g; ambas son cantidades muy diferentes, pero están relacionadas por la ecuación 6-4).



Hay que distinguir entre G y g

Hasta que se midió G, no se conocía la masa de la Tierra. Pero una vez medida G, la ecuación 6-4 pudo usarse para calcular la masa de la Tierra y Cavendish fue el primero en hacerlo. Como g = 9.80 m/s^2 y el radio de la Tierra es $r_E = 6.38 \times 10^6$ m, entonces, de la ecuación 6-4, se obtiene

$$m_E = \frac{gr_E^2}{G} = \frac{(9.80\ \text{m/s}^2)(6.38 \times 10^6\ \text{m})^2}{6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2}$$
$$= 5.98 \times 10^{24}\ \text{kg}$$



es la masa de la Tierra.

La ecuación 6-4 puede aplicarse a otros planetas, donde g, m y r se referirían a ese planeta.

EJEMPLO 6–4 **ESTIMACIÓN** **Gravedad sobre el Everest.** Estime el valor efectivo de g sobre la cima del monte Everest, que está a 8850 m (29,035 pies) sobre el nivel del mar (figura 6-8). Es decir, ¿cuál es la aceleración debida a la gravedad de los objetos que caen libremente a esta altitud?

PLANTEAMIENTO La fuerza de gravedad (y la aceleración debida a la gravedad g) depende de la distancia desde el centro de la Tierra, así que habrá un valor g' efectivo en la cima del monte Everest, que será menor que g al nivel del mar. Suponemos que la Tierra es una esfera uniforme (una “estimación” razonable).

SOLUCIÓN Usamos la ecuación 6-4, y sustituimos r_E por r = 6380 km + 8.9 km = 6389 km = 6.389×10^6 m:

$$g = G\frac{m_E}{r^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg})}{(6.389 \times 10^6\ \text{m})^2}$$
$$= 9.77\ \text{m/s}^2,$$

que es una reducción de aproximadamente tres partes en mil (0.3%).

NOTA Se trata de una estimación porque, entre otras cuestiones, despreciamos la masa acumulada bajo la cima de la montaña.

FIGURA 6–8 Ejemplo 6-4. El monte Everest está a 8850 m (29,035 ft) sobre el nivel del mar; en el primer plano se observan el autor y dos guías a 5500 m (18,000 ft).

TABLA 6–1
Aceleración debida a la gravedad en varios lugares sobre la Tierra

Localidad	Elevación (m)	g (m/s^2)
Nueva York	0	9.803
San Francisco	0	9.800
Denver	1650	9.796
Monte Pikes	4300	9.789
Sydney, Australia	0	9.798
Ecuador	0	9.780
Polo Norte (calculado)	0	9.832

Advierta que la ecuación 6-4 no da valores precisos para g en diferentes localidades, porque la Tierra no es una esfera perfecta ya que no sólo tiene montañas y valles, y se ensancha en el ecuador, sino que su masa no está distribuida precisamente de manera uniforme (véase la tabla 6-1). La rotación de la Tierra también afecta el valor de g (véase el ejemplo 6-5 adelante). Sin embargo, para la mayoría de los propósitos prácticos, cuando un objeto está cerca de la superficie de la Tierra, simplemente usaremos g = 9.80 m/s^2 y escribiremos el peso del objeto como mg.

EJERCICIO A Suponga que usted podría duplicar la masa de un planeta pero manteniendo igual su volumen. ¿Cómo cambiaría la aceleración de la gravedad, g, en la superficie?

FÍSICA APLICADA
Geología: Exploración minera y petrolera

El valor de g puede variar localmente sobre la superficie terrestre debido a la presencia de irregularidades y de rocas con densidades diferentes. Tales variaciones en g, conocidas como “anomalías gravitacionales”, son muy pequeñas: del orden de 1 parte en 10^6 o 10^7 en el valor de g; pero pueden medirse (actualmente los “gravímetros” son capaces de detectar variaciones en g de 1 parte en 10^9). Los geofísicos emplean tales mediciones como parte de sus investigaciones sobre la estructura de la corteza terrestre, así como en exploraciones mineras y petroleras. Por ejemplo, los depósitos de minerales tienen a menudo una mayor densidad que el material a su alrededor; debido a la mayor masa en un volumen dado, y g puede tener un valor ligeramente mayor en lo alto de tal depósito que en sus flancos. Los “domos de sal”, bajo los cuales con frecuencia se encuentra petróleo, tienen una densidad menor que la densidad promedio, y la búsqueda de una ligera reducción del valor de g en ciertos sitios han conducido al descubrimiento de petróleo.

EJEMPLO 6–5 **Efecto de la rotación terrestre sobre *g*.** Suponiendo que la Tierra es una esfera perfecta, determine cómo la rotación terrestre afecta el valor de g en el ecuador, comparado con su valor en los polos.

PLANTEAMIENTO La figura 6-9 muestra a una persona de masa m que está parada sobre una báscula en dos lugares de la Tierra. En el Polo Norte hay dos fuerzas que actúan sobre la masa m: la fuerza de gravedad $\vec{\mathbf{F}}_G = m\vec{\mathbf{g}}$, y la fuerza con que la báscula empuja hacia arriba sobre la masa $\vec{\mathbf{w}}$. Llamamos w a esta última fuerza, porque es lo que la báscula registra como el peso del objeto y, según la tercera ley de Newton, es igual a la fuerza con que la masa empuja hacia abajo sobre la báscula. Como la masa no acelera, la segunda ley de Newton nos dice que

$$mg - w = 0,$$

por lo cual $w = mg$. Por lo tanto, el peso w que registra la báscula es igual a mg, lo que no es ninguna sorpresa. En el ecuador sin embargo, *hay* una aceleración porque la Tierra está girando. La misma magnitud de la fuerza de gravedad $F_G = mg$ actúa hacia abajo (representamos con g la aceleración de la gravedad en ausencia de rotación e ignoramos el ligero ensanchamiento del ecuador). La báscula empuja hacia arriba con una fuerza w', que es también la fuerza con que la persona empuja sobre la báscula (tercera ley de Newton) y, por consiguiente, es el peso registrado sobre la báscula. De la segunda ley de Newton tenemos ahora que (véase la figura 6-9)

$$mg - w' = m\frac{v^2}{r_E},$$

dado que la persona de masa m tiene ahora aceleración centrípeta debida a la rotación terrestre; $r_E = 6.38 \times 10^6$ m es el radio de la Tierra y v es la rapidez de m debida a la rotación terrestre diaria.

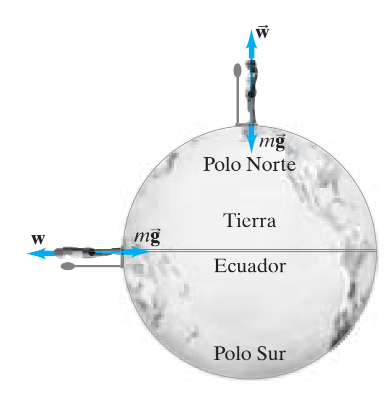


FIGURA 6–9 Ejemplo 6–5.

SOLUCIÓN Primero determinamos la rapidez v de un objeto en reposo sobre el ecuador terrestre, recordando que la Tierra efectúa una rotación (distancia = circunferencia de la Tierra = $2\pi r_E$) en 1 día = (24 h)(60 min/h)(60 s/min) = 8.64×10^4 s:

$$v = \frac{2\pi r_E}{1 \text{ día}} = \frac{(6.283)(6.38 \times 10^6 \text{ m})}{(8.64 \times 10^4 \text{ s})}$$
$$= 4.640 \times 10^2 \text{ m/s}.$$

El peso efectivo es $w' = mg'$, donde g' es el valor efectivo de g y por ende $g' = w'/m$. Despejando w' en la ecuación anterior, tenemos

$$w' = m\left(g - \frac{v^2}{r_E}\right),$$

por lo que

$$g' = \frac{w'}{m} = g - \frac{v^2}{r_E}.$$

Entonces,

$$\Delta g = g - g' = \frac{v^2}{r_E} = \frac{(4.640 \times 10^2 \text{ m/s})^2}{(6.38 \times 10^6 \text{ m})}$$
$$= 0.0337 \text{ m/s}^2,$$

que es aproximadamente $\Delta g \approx 0.003g$, una diferencia de 0.3%.

NOTA En la tabla 6-1 vemos que la diferencia en g en el Polo Norte y en el ecuador es realmente mayor que esto: $(9.832 - 9.780)$ m/s^2 = 0.052 m/s^2; esta discrepancia se debe principalmente al ligero ensanchamiento que la Tierra muestra en el ecuador (21 km) con respecto a los polos.

NOTA El cálculo del valor efectivo de g en latitudes diferentes como los polos o el ecuador, es un problema bidimensional, porque $\vec{\mathbf{F}}_G$ actúa radialmente hacia el centro de la Tierra; mientras que la aceleración centrípeta se dirige perpendicularmente al eje de rotación, paralela al ecuador, y esto implica que una plomada (la dirección efectiva de g) no es precisamente vertical, salvo en el ecuador y en los polos.

La Tierra como marco de referencia inercial

A menudo suponemos que los marcos de referencia fijos sobre la Tierra son marcos de referencia inerciales. En el ejemplo 6-5 nuestro cálculo muestra que dicha suposición puede resultar en errores no mayores que aproximadamente 0.3% en el uso de la segunda ley de Newton, por ejemplo. Analizaremos los efectos de la rotación terrestre y de los marcos de referencia con mayor detalle en el capítulo 11, incluyendo el efecto Coriolis.

6–4 Satélites e "ingravidez"

Movimiento satelital

FÍSICA APLICADA
Satélites terrestres artificiales

Los satélites artificiales que orbitan la Tierra son ahora muy comunes (figura 6-10). Un satélite se pone en órbita acelerándolo con una rapidez tangencial suficientemente alta usando cohetes, como se muestra en la figura 6-11. Si la rapidez es demasiado alta, la nave espacial no quedará confinada por la gravedad de la Tierra y escapará para no volver nunca más. Si la rapidez es muy baja, la nave regresará a la Tierra. Por lo común, los satélites se ponen en órbitas circulares (o casi circulares), porque tales órbitas requieren la menor rapidez de despegue.



FIGURA 6–10 Un satélite, la Estación Espacial Internacional, gira alrededor de la Tierra.

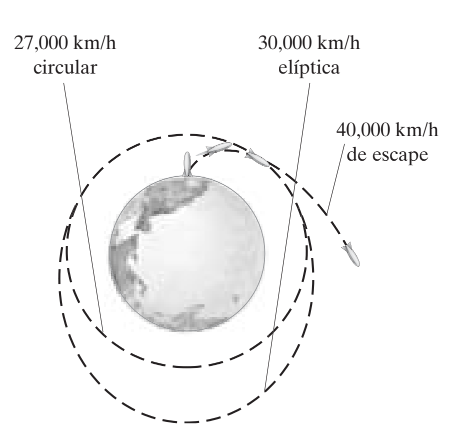
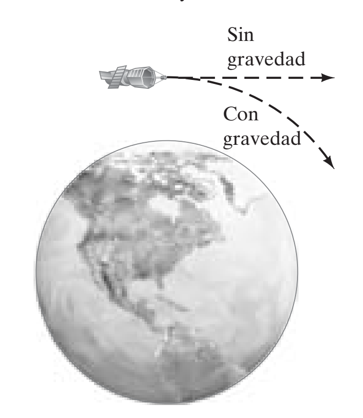


FIGURA 6–11 Satélites artificiales lanzados a diferentes rapideces.

FIGURA 6–12 Un satélite en movimiento "cae" hacia la Tierra saliendo de una trayectoria rectilínea.



A veces nos preguntamos: "¿Qué mantiene a un satélite en órbita?" La respuesta es su alta rapidez. Si un satélite dejara de moverse, por supuesto, caería directamente hacia la Tierra. Pero a la muy alta rapidez que tiene un satélite, saldría disparado rápidamente hacia el espacio (figura 6-12), si no fuera por la fuerza gravitacional de la Tierra que lo mantiene orbitando. De hecho, un satélite *está* cayendo (acelerando hacia la Tierra), pero su alta rapidez tangencial le impide golpear la Tierra.

Para satélites que se mueven en un círculo (por lo menos aproximadamente), la aceleración necesaria es centrípeta y equivale a v^2/r. La fuerza que da esta aceleración a un satélite es la fuerza de la gravedad ejercida por la Tierra, y como un satélite puede estar a una distancia considerable de la Tierra, debemos usar la ley de Newton de la gravitación universal (ecuación 6-1) para calcular la fuerza que actúa sobre él. Cuando aplicamos la segunda ley de Newton, $\Sigma F_R = ma_R$ en la dirección radial, encontramos

$$G\frac{mm_E}{r^2} = m\frac{v^2}{r}, \qquad \textbf{(6–5)}$$

donde m es la masa del satélite. Esta ecuación relaciona la distancia del satélite desde el centro de la Tierra, r, con su rapidez, v, en una órbita circular. Note que sólo una fuerza, la gravedad, está actuando sobre el satélite y que r es la suma del radio r_E de la Tierra más la altura h del satélite sobre la superficie de la Tierra: $r = r_E + h$.

EJEMPLO 6–6 **Satélite geosincrónico.** Un satélite *geosincrónico* es el que se mantiene sobre un mismo punto de la Tierra, lo cual es posible sólo si está en un punto sobre el ecuador. Tales satélites se usan para las transmisiones de radio y televisión, para el pronóstico del clima y como retransmisores de comunicación. Determine *a*) la altura sobre la superficie terrestre a la que debe orbitar dicho satélite y *b*) la rapidez del mismo. *c*) Compárela con la rapidez de un satélite que orbita a 200 km sobre la superficie terrestre.

FÍSICA APLICADA
Satélites geosincrónicos

PLANTEAMIENTO Para permanecer sobre el mismo punto de la Tierra conforme ésta gira, el satélite debe tener un periodo de 24 horas. Aplicamos la segunda ley de Newton, $F = ma$, donde $a = v^2/r$ si suponemos que la órbita es circular.

SOLUCIÓN *a*) La única fuerza sobre el satélite es la gravitación universal debida a la Tierra. (Podemos despreciar la fuerza gravitacional ejercida por el Sol. ¿Por qué?) Aplicamos la ecuación 6-5 suponiendo que el satélite se mueve en un círculo:

$$G\frac{m_{\text{Sat}}m_{\text{E}}}{r^2} = m_{\text{Sat}}\frac{v^2}{r}.$$

Esta ecuación tiene dos incógnitas, r y v. Pero el satélite gira alrededor de la Tierra con el mismo periodo que ésta gira sobre su eje; a saber, una vez cada 24 horas. Por consiguiente, la rapidez del satélite debe ser

$$v = \frac{2\pi r}{T},$$

donde $T = 1$ día $= (24\text{ h})(3600\text{ s/h}) = 86{,}400$ s. Sustituimos este valor en la "ecuación del satélite" anterior y obtenemos (después de cancelar m_{Sat} en ambos lados):

$$G\frac{m_{\text{E}}}{r^2} = \frac{(2\pi r)^2}{rT^2}.$$

Después de cancelar una r podemos despejar r^3:

$$r^3 = \frac{Gm_{\text{E}}T^2}{4\pi^2} = \frac{\left(6.67\times10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2\right)\left(5.98\times10^{24}\,\text{kg}\right)(86{,}400\,\text{s})^2}{4\pi^2}$$
$$= 7.54\times10^{22}\,\text{m}^3.$$

Sacamos raíz cúbica y encontramos

$$r = 4.23\times10^{7}\,\text{m},$$

o bien, 42,300 km desde el centro de la Tierra. Restamos el radio de la Tierra (6380 km) y encontramos que un satélite geosincrónico debe orbitar aproximadamente a 36,000 km (cerca de 6 r_{E}) sobre la superficie terrestre.

b) Despejamos v en la ecuación del satélite 6-5:

$$v = \sqrt{\frac{Gm_{\text{E}}}{r}} = \sqrt{\frac{\left(6.67\times10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2\right)\left(5.98\times10^{24}\,\text{kg}\right)}{\left(4.23\times10^{7}\,\text{m}\right)}} = 3070\,\text{m/s}.$$

Obtenemos el mismo resultado si usamos $v = 2\pi r/T$.

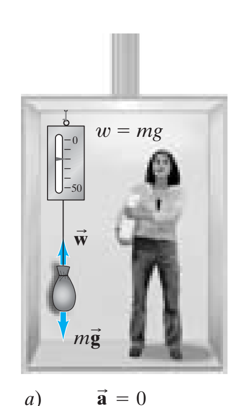
c) La ecuación del inciso *b*) para v muestra que $v \propto \sqrt{1/r}$. Entonces, para $r = r_{\text{E}} + h = 6380\text{ km} + 200\text{ km} = 6580$ km, obtenemos

$$v' = v\sqrt{\frac{r}{r'}} = (3070\,\text{m/s})\sqrt{\frac{(42{,}300\,\text{km})}{(6580\,\text{km})}} = 7780\,\text{m/s}.$$

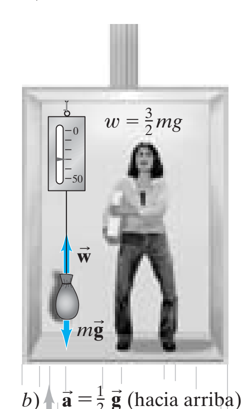
NOTA El centro de la órbita de un satélite siempre se localiza en el centro de la Tierra, de modo que no es posible tener un satélite que esté en órbita sobre un punto fijo de la Tierra si la latitud es distinta de 0°.

EJEMPLO CONCEPTUAL 6–7 **Contacto con un satélite.** Usted es un astronauta en el transbordador espacial que persigue un satélite que tiene que repararse. Usted se encuentra en una órbita circular del mismo radio que la del satélite, pero a 30 km detrás de éste. ¿Cómo haría usted contacto con él?

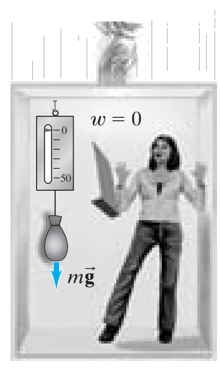
RESPUESTA En el ejemplo 6-6 (o en la ecuación 6-5) vimos que la velocidad es proporcional a $1/\sqrt{r}$. Necesita entonces recorrer una órbita más pequeña y, al mismo tiempo, incrementar su rapidez. Note que usted no puede incrementar su rapidez sin cambiar la órbita. Después de pasar el satélite, usted necesitará desacelerar y elevarse de nuevo.



a) $\vec{\mathbf{a}} = 0$



b) $\vec{\mathbf{a}} = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{g}}$ (hacia arriba)



c) $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{g}}$ (hacia abajo)

FIGURA 6–13 *a*) Un objeto en un elevador en reposo ejerce una fuerza sobre una báscula de resorte igual a su peso. *b*) En un elevador que acelera hacia arriba a $\frac{1}{2}g$, el peso aparente del objeto es $1\frac{1}{2}$ veces mayor que su peso real. *c*) En un elevador en caída libre, el objeto experimenta "ingravidez": la báscula registra cero.

EJERCICIO B Dos satélites giran en torno a la Tierra en órbitas circulares del mismo radio. Un satélite tiene el doble de masa que el otro. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera acerca de la rapidez de esos satélites? *a*) El satélite más pesado se mueve dos veces más rápido que el más ligero. *b*) Los dos satélites tienen la misma rapidez. *c*) El satélite más ligero se mueve dos veces más rápido que el más pesado. *d*) El satélite más pesado se mueve cuatro veces más rápido que el más ligero.

Ingravidez

Se dice que la gente y otros objetos en un satélite que gira alrededor de la Tierra experimentan una ingravidez aparente. Consideremos primero un caso más sencillo: un elevador que desciende. En la figura 6-13a un elevador está en reposo con una bolsa que pende de una báscula de resorte. La lectura de la báscula indica la fuerza hacia abajo ejercida sobre ella por la bolsa. Esta fuerza, ejercida *sobre* la báscula, es igual y opuesta a la fuerza ejercida *por* la báscula hacia arriba sobre la bolsa y llamamos w a su magnitud. Dos fuerzas actúan sobre la bolsa: la fuerza gravitacional hacia abajo y la fuerza ascendente ejercida por la báscula, que es igual a w. Como la bolsa no está acelerando ($a = 0$), cuando aplicamos $\Sigma F = ma$ a la bolsa de la figura 6-13 obtenemos

$$w - mg = 0,$$

donde mg es el peso de la bolsa. Entonces, $w = mg$, y como la báscula indica la fuerza w ejercida sobre ella por la bolsa, registra una fuerza igual al peso de la bolsa, tal como lo esperábamos.

Ahora el elevador tiene una aceleración a. Al aplicar la segunda ley de Newton, $\Sigma F = ma$, a la bolsa, vista desde un marco de referencia inercial (el elevador mismo no es un marco inercial) tenemos

$$w - mg = ma.$$

Despejando w, tenemos

$$w = mg + ma. \qquad [a \text{ es } + \text{ hacia arriba}]$$

Elegimos el sentido hacia arriba como positivo. Entonces, si la aceleración a es hacia arriba, a es positiva; y la báscula, que mide w, leerá un valor mayor que mg. Llamamos w al *peso aparente* de la bolsa, que en este caso sería mayor que su peso real (mg). Si el elevador acelera hacia abajo, a será negativa y w, el peso aparente, será menor que mg. El sentido de la velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ no importa. Sólo el sentido de la aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ influye en la lectura de la báscula.

Suponga, por ejemplo, que la aceleración del elevador es $\frac{1}{2}g$ hacia arriba, de manera que encontramos

$$w = mg + m\left(\tfrac{1}{2}g\right) = \tfrac{3}{2}mg.$$

Esto es, la báscula registra $1\frac{1}{2}$ veces el peso real de la bolsa (figura 6-13b). El peso aparente de la bolsa es $1\frac{1}{2}$ veces su peso real. Lo mismo es cierto de la persona: su peso aparente (igual a la fuerza normal ejercida sobre ella por el piso del elevador) es $1\frac{1}{2}$ veces su peso real. Podemos decir que ella está experimentando$1\frac{1}{2}g$, tal como los astronautas experimentan varias g durante el lanzamiento de un cohete.

En cambio, si la aceleración del elevador es $a = -\frac{1}{2}g$ (hacia abajo), entonces $w = mg - \frac{1}{2}mg = \frac{1}{2}mg$. Es decir, la báscula registra la mitad del peso real. Si el elevador está en *caída libre* (por ejemplo, si se rompe el cable), entonces $a = -g$ y $w = mg - mg = 0$. La báscula registra cero. Véase la figura 6-13c. Parecería que la bolsa no tiene peso. Si la persona en el elevador que acelera a $-g$, por ejemplo, deja caer un lápiz, éste no caería al piso. De hecho, el lápiz caería con aceleración g. Pero lo mismo sucede con el elevador y con la persona. El lápiz flotaría enfrente de la persona. Este fenómeno se denomina *ingravidez aparente* porque, en el marco de referencia de la persona, los objetos no caen o parecen no tener peso, aunque la gravedad en realidad no desaparece, más bien sigue actuando sobre el objeto y su peso es aún mg. La persona y los demás objetos parecen no tener peso sólo porque el elevador está acelerando en caída libre, y no hay fuerza de contacto sobre la persona que la haga sentir el peso.

La “ingravidez” experimentada por la gente en un satélite en órbita cerca a la Tierra (figura 6-14) es la misma ingravidez aparente experimentada en un elevador en caída libre. Parecerá extraño al principio creer que un satélite cae libremente. Sin embargo, un satélite en órbita cae hacia la Tierra, como se mostró en la figura 6-12. La fuerza de la gravedad ocasiona que “caiga” fuera de su trayectoria natural en línea recta. La aceleración del satélite debe ser la aceleración debida a la gravedad en ese punto, ya que la única fuerza que actúa sobre él es la gravedad. (Usamos esto para obtener la ecuación 6-5.) Entonces, si bien la fuerza de gravedad actúa sobre los objetos dentro del satélite, los objetos experimentan una ingravidez aparente porque éstos, y el satélite, aceleran juntos como en una caída libre.



FIGURA 6–14 Este astronauta se mueve afuera de la Estación Espacial Internacional y debe sentir mucha libertad porque experimenta ingravidez aparente.

EJERCICIO C Regrese a la Pregunta de inicio de capítulo de la página 139 y respóndala de nuevo. Intente explicar por qué usted quizá la haya contestado diferente la primera vez.

La figura 6-15 muestra algunos ejemplos de “caída libre”, o ingravidez aparente, experimentada por gente en la Tierra durante breves momentos.

Una situación completamente diferente ocurre cuando una nave espacial está en el espacio lejos de la Tierra, la Luna, u otros cuerpos que atraen. La fuerza de gravedad debida a la Tierra y otros cuerpos celestes será entonces muy pequeña debido a las distancias involucradas, y las personas en dicha nave espacial experimentarían ingravidez real.

EJERCICIO D ¿Los astronautas en una nave en el espacio exterior podrían fácilmente jugar a atrapar una bola de bolos ($m = 7$ kg)?

FIGURA 6–15 Experiencias de “ingravidez” en la tierra.



a)



b)



c)

6–5 Leyes de Kepler y síntesis de Newton

Más de medio siglo antes de que Newton propusiera sus tres leyes del movimiento y su ley de la gravitación universal, el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630) había dado una descripción detallada del movimiento de los planetas con respecto al Sol. El trabajo de Kepler fue resultado en parte de los muchos años que pasó examinando los datos recopilados por Tycho Brahe (1546-1601) sobre la posición de los planetas en sus movimientos a través del firmamento.

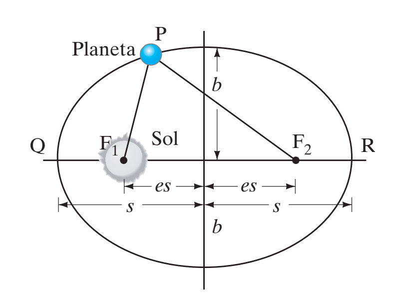
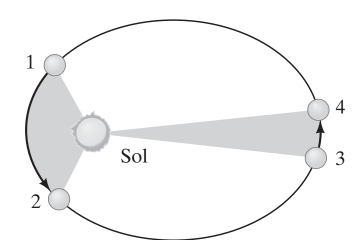


FIGURA 6–16 *Primera ley de Kepler*. Una elipse es una curva cerrada tal que la suma de las distancias desde cualquier punto P sobre la curva a dos puntos fijos (llamados focos F_1 y F_2) permanece constante. Es decir, la suma de las distancias $F_1P + F_2P$ es la misma para todos los puntos sobre la curva. Un círculo es un caso especial de una elipse, en la cual los dos focos coinciden en el centro del círculo. El semieje mayor es s (es decir, el eje largo mide $2s$) y el semieje menor es b, como se muestra. La *excentricidad* e se define como el cociente de la distancia del centro a cualquier foco, dividida entre el semieje mayor a. De manera que "es" es la distancia del centro a cualquier foco, como se muestra. La Tierra y la mayoría de los otros planetas tienen órbitas casi circulares. Para la Tierra, $e = 0.017$.

FIGURA 6–17 *Segunda ley de Kepler*. Las dos regiones sombreadas tienen áreas iguales. El planeta se mueve del punto 1 al punto 2 en el mismo tiempo que le toma moverse del punto 3 al punto 4. Los planetas se mueven más rápidamente en la parte de sus órbitas donde están más cerca del Sol. Escala exagerada.



Entre los escritos de Kepler había tres hallazgos empíricos que ahora se conocen como **leyes de Kepler del movimiento de los planetas** y que se resumen a continuación, con una explicación adicional en las figuras 6-16 y 6-17.

Primera ley de Kepler: La trayectoria de cada planeta alrededor del Sol es una elipse con el Sol en uno de los focos (figura 6-16).

Segunda ley de Kepler: Cada planeta se mueve de manera que una línea imaginaria trazada desde el Sol al planeta barre áreas iguales en periodos iguales (figura 6-17).

Tercera ley de Kepler. La razón de los cuadrados de los periodos de dos planetas cualesquiera girando alrededor del Sol es igual a la razón de los cubos de sus semiejes mayores. [El semieje mayor es la mitad del eje largo (mayor) de la órbita, como se muestra en la figura 6-16, y representa la distancia promedio del planeta al Sol].† Es decir, si T_1 y T_2 representan los periodos (el tiempo necesario para completar una revolución alrededor del Sol) de dos planetas cualesquiera, y s_1 y s_2 representan sus semiejes mayores, entonces

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^3.$$

Podemos escribir esto como

$$\frac{s_1^3}{T_1^2} = \frac{s_2^3}{T_2^2},$$

lo cual significa que s^3/T^2 debería ser igual para cualquier planeta. En la tabla 6-2 se presentan datos actualizados; véase la última columna.

TABLA 6–2 Datos planetarios aplicados a la tercera ley de Kepler

Planeta	Distancia promedio desde el Sol, s (10^6 km)	Periodo, T (años terrestres)	s^3/T^2 $\left(10^{24}\ \frac{\text{km}^3}{\text{años}^2}\right)$
Mercurio	57.9	0.241	3.34
Venus	108.2	0.615	3.35
Tierra	149.6	1.0	3.35
Marte	227.9	1.88	3.35
Júpiter	778.3	11.86	3.35
Saturno	1427	29.5	3.34
Urano	2870	84.0	3.35
Neptuno	4497	165	3.34
Plutón	5900	248	3.34

Kepler desarrolló sus leyes gracias a un cuidadoso análisis de datos experimentales. Cincuenta años después, Newton fue capaz de demostrar que las leyes de Kepler podían derivarse matemáticamente de la ley de la gravitación universal y de las leyes del movimiento. También demostró que para cualquier forma razonable de la ley de la fuerza gravitacional, sólo una que dependa del cuadrado inverso de la distancia es totalmente consistente con las leyes de Kepler. Newton usó después las leyes de Kepler como evidencia en favor de su ley de la gravitación universal, ecuación 6-1.

Obtendremos la segunda ley de Kepler más adelante, en el capítulo 11. Aquí obtendremos la tercera ley de Kepler y lo haremos para el caso especial de una órbita circular, en donde el semieje mayor es el radio r del círculo. (La mayoría de las órbitas planetarias son casi círculos.) Primero escribimos la segunda ley de Newton del movimiento $\Sigma F = ma$. Para F usamos la ley de la gravitación universal (ecuación 6-1) para la fuerza entre el Sol y un planeta dado de masa m_1, y para a la aceleración centrípeta, usamos v^2/r: Suponemos que la masa del Sol, M_S , es mucho mayor que la masa de los planetas, por lo que despreciamos los efectos de los planetas entre sí. Por lo tanto,

$$\Sigma F = ma$$

$$G\frac{m_1 M_S}{r_1^2} = m_1\frac{v_1^2}{r_1}.$$

†El semieje mayor es igual a la distancia promedio del planeta desde el Sol, en el sentido de que es igual a la mitad de la suma de las distancias más cercana y más lejana del planeta al Sol (puntos Q y R en la figura 6-16). La mayoría de las órbitas planetarias son cercanas a un círculo, y para un círculo el semieje mayor es el radio del círculo.

Aquí m_1 es la masa de un planeta específico, r_1 su distancia desde el Sol, y de v_1 su rapidez promedio en órbita; M_S es la masa del Sol, dado que es la atracción gravitacional del Sol lo que mantiene a cada planeta en su órbita. El periodo T_1 del planeta es el tiempo que requiere para completar una órbita, esto es, una distancia igual a $2\pi r_1$, la circunferencia de un círculo, por lo que

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1}.$$

Sustituimos esta fórmula para v_1 en la ecuación anterior:

$$G\frac{m_1 M_S}{r_1^2} = m_1 \frac{4\pi^2 r_1}{T_1^2}.$$

Reordenando obtenemos

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}. \qquad \textbf{(6–6)}$$

Obtuvimos este resultado para el planeta 1 (digamos, Marte). La misma derivación se aplicaría a un segundo planeta que gire alrededor del Sol (digamos, Saturno):

$$\frac{T_2^2}{r_2^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S},$$

donde T_2 y r_2 son el periodo y el radio de la órbita del segundo planeta, respectivamente. Como los lados derecho de las dos ecuaciones anteriores son iguales, tenemos que $T_1^2/r_1^3 = T_2^2/r_2^3$ o, reordenando,

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3, \qquad \textbf{(6–7)}$$

que es la tercera ley de Kepler. Las ecuaciones 6-6 y 6-7 son válidas también para órbitas elípticas si reemplazamos *r* por el semieje mayor *s*.

Las derivaciones de las ecuaciones 6-6 y 6-7 (tercera ley de Kepler) compararon dos planetas que giran alrededor del Sol. No obstante, son generales y pueden aplicarse a otros sistemas. Por ejemplo, podríamos aplicar la ecuación 6-6 a nuestra Luna que gira alrededor de la Tierra (entonces, M_S sería reemplazada por M_E, la masa de la Tierra). O podríamos aplicar la ecuación 6-7 para comparar dos lunas que giran alrededor de Júpiter. Sin embargo, la tercera ley de Kepler, ecuación 6-7, se aplica sólo a objetos que giran alrededor del mismo centro de atracción. No use la ecuación 6-7 para comparar, digamos, la órbita de la Luna alrededor de la Tierra con la órbita de Marte alrededor del Sol, porque sus órbitas no tienen el mismo centro de atracción.


CUIDADO
Compare sólo órbitas de objetos que giren alrededor del mismo centro

En los siguientes ejemplos suponemos que las órbitas son círculos, aunque esto no es del todo cierto en general.

EJEMPLO 6–8 **¿Dónde está Marte?** El periodo de Marte (su "año") fue determinado primero por Kepler como 687 días terrestres aproximadamente, que equivalen a (687 d/365 d) = 1.88 años terrestres. Determine la distancia promedio de Marte al Sol usando la Tierra como referencia.

PLANTEAMIENTO Tenemos el cociente entre los periodos de Marte y la Tierra. Podemos calcular la distancia desde Marte al Sol con la tercera ley de Kepler, dada la distancia de la Tierra al Sol que es igual a 1.50×10^{11} m (véase la tabla 6-2 y también la tabla en los forros de este libro).

SOLUCIÓN Sea la distancia de Marte al Sol r_{MS} y la distancia de la Tierra al Sol $r_{ES} = 1.50 \times 10^{11}$ m. A partir de la tercera ley de Kepler (ecuación 6-7) tenemos:

$$\frac{r_{MS}}{r_{ES}} = \left(\frac{T_M}{T_E}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1.88 \text{ años}}{1 \text{ año}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.52.$$

Marte está entonces a 1.52 veces la distancia de la Tierra al Sol, es decir, a 2.28×10^{11} m.

FÍSICA APLICADA
Determinación de la masa del Sol

EJEMPLO 6–9 Determinación de la masa del Sol. Calcule la masa del Sol dada la distancia de la Tierra al Sol, $r_{ES} = 1.5 \times 10^{11}$ m.

PLANTEAMIENTO La ecuación 6-6 relaciona la masa del Sol M_S con el periodo y la distancia de cualquier planeta al Sol. Tomaremos en consideración la Tierra.

SOLUCIÓN El periodo de la Tierra es $T_E = 1$ año $= \left(365\frac{1}{4}\,\mathrm{d}\right)(24\,\mathrm{h/d})(3600\,\mathrm{s/h}) = 3.16 \times 10^7$ s. Despejamos M_S de la ecuación 6-6:

$$M_S = \frac{4\pi^2 r_{ES}^3}{GT_E^2} = \frac{4\pi^2\left(1.5 \times 10^{11}\,\mathrm{m}\right)^3}{\left(6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2}\right)\left(3.16 \times 10^7\,\mathrm{s}\right)^2} = 2.0 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}.$$

EJERCICIO E Suponga que hay un planeta en órbita circular exactamente a media distancia entre las órbitas de Marte y Júpiter.¿Cuál sería el periodo en años terrestres? Utilice la tabla 6-2.

Las mediciones precisas de las órbitas de los planetas indicaron que éstos no siguen exactamente las leyes de Kepler. Por ejemplo, se observaron ligeras desviaciones respecto de órbitas perfectamente elípticas. Newton estaba conciente de que esto se debía a que cualquier planeta sería atraído gravitacionalmente no sólo por el Sol, sino también (en mucho menor grado) por los demás planetas. Tales desviaciones, o **perturbaciones**, en la órbita de Saturno fueron la clave que ayudó a Newton a formular la ley de la gravitación universal, según la cual todos los objetos se atraen gravitacionalmente. La observación de otras perturbaciones condujo después al descubrimiento de Neptuno y Plutón. Por ejemplo, las desviaciones en la órbita de Urano no podían explicarse sólo por las perturbaciones debidas a los otros planetas conocidos. Cálculos cuidadosos efectuados en el siglo XIX indicaron que estas desviaciones podrían explicarse si existiera otro planeta en las afueras de nuestro Sistema Solar. La posición de este planeta se predijo a partir de las desviaciones en la órbita de Urano y los telescopios enfocados a esa región del firmamento lo encontraron rápidamente; al nuevo planeta se le dio el nombre de Neptuno. Las perturbaciones similares, pero mucho más pequeñas, de la órbita de Neptuno condujeron al descubrimiento de Plutón en 1930.

FÍSICA APLICADA
Perturbaciones y descubrimiento de planetas

FÍSICA APLICADA
Planetas alrededor de otras estrellas

Desde mediados de la década de 1990, se infirió la existencia de planetas que giran alrededor de estrellas distantes (figura 6-18) debido a las “oscilaciones” regulares de estas estrella, a causa de la atracción gravitacional que ejerce el planeta que gira en torno a ellas. Ahora se conocen muchos de esos planetas “extrasolares”.

El desarrollo por Newton de la ley de la gravitación universal y de las tres leyes del movimiento fue una hazaña intelectual extraordinaria: con dichas leyes, Newton fue capaz de describir el movimiento de los objetos sobre la Tierra y en el firmamento. Se vio que los movimientos de los cuerpos celestes y de los objetos sobre la Tierra siguen las mismas leyes (algo no reconocido previamente). Por tal razón, y también porque Newton integró en su sistema los resultados de científicos anteriores, en ocasiones hablamos de la **síntesis de Newton**.

Las leyes formuladas por Newton son **leyes causales**. **Causalidad** significa que un suceso puede generar otro. Por ejemplo, cuando una roca golpea el vidrio de una ventana, inferimos que la roca *causó* que el vidrio se rompiera. Esta idea de “causa y efecto” relaciona las leyes de Newton: se observa que la aceleración de un objeto *es causada* por la fuerza neta que actúa sobre él.

Como un resultado de las teorías de Newton, el Universo fue considerado por muchos científicos y filósofos como una gran máquina, cuyas partes se mueven de manera *predeterminada*. Sin embargo, esta concepción *determinística* tuvo varias modificaciones por parte de los científicos en el siglo XX (capítulo 38).

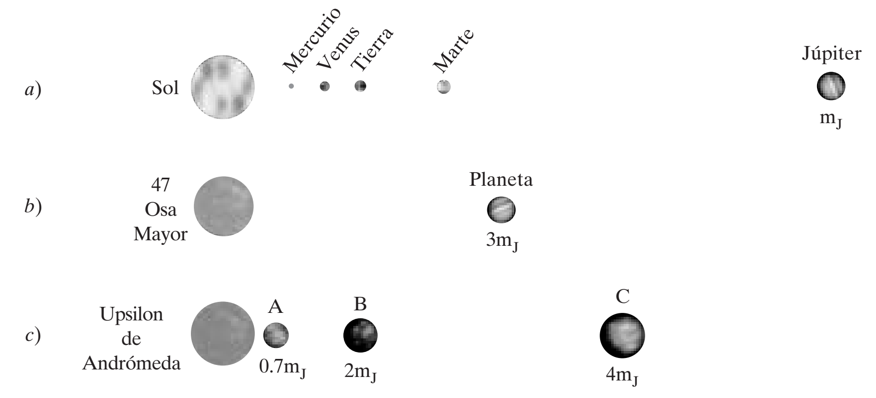


FIGURA 6–18 *a*) Nuestro sistema solar, comparado con planetas recientemente descubiertos que orbitan *b*) la estrella 47 de la Osa Mayor, y *c*) la estrella Upsilon de Andrómeda con por lo menos tres planetas. m_J es la masa de Júpiter. (Los tamaños no están a escala).

EJEMPLO 6–10 **Punto de Lagrange.** El matemático Joseph-Louis Lagrange descubrió cinco puntos especiales en las inmediaciones de la órbita de la Tierra en torno al Sol, donde un satélite pequeño (de masa m) puede orbitar el Sol con el mismo periodo T que la Tierra (= 1 año). Uno de estos "puntos de Lagrange", llamado L1, está entre la Tierra (masa M_E) y el Sol (masa M_S), en la línea que los conecta (figura 6-19). Es decir, la Tierra y el satélite siempre están separados por una distancia d. Si el radio orbital de la Tierra es R_{ES}, entonces el radio orbital del satélite es $(R_{ES} - d)$. Calcule d.

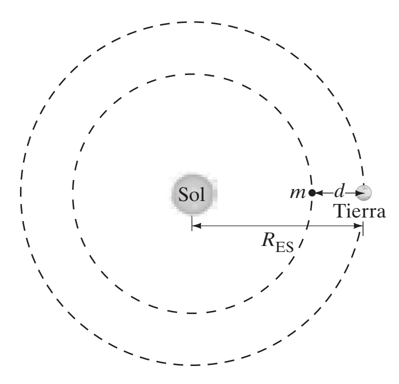


FIGURA 6–19 Cálculo de la posición del punto de Lagrange L1 para un satélite que puede permanecer a lo largo de la línea recta entre el Sol y la Tierra, a una distancia d de la Tierra. Es decir, una masa m en L1 tiene el mismo periodo alrededor del Sol que la Tierra. (No está a escala).

PLANTEAMIENTO Usamos la ley de Newton de la gravitación universal y la igualamos a la masa por la aceleración centrípeta. Pero, ¿cómo podría un objeto con una órbita menor que la Tierra tener el mismo periodo que ésta? La tercera ley de Kepler claramente nos indica que una órbita menor alrededor del Sol corresponde también a un periodo menor. No obstante, esa ley depende sólo de la atracción gravitacional del Sol. Nuestra masa m es jalada tanto por el Sol como por la Tierra.

SOLUCIÓN Como se supone que el satélite tiene masa despreciable en comparación con las masas de la Tierra y del Sol, con una aproximación excelente, la órbita de la Tierra está determinada únicamente por el Sol. Aplicando la segunda ley de Newton a la Tierra,

$$\frac{GM_E M_S}{R_{ES}^2} = M_E \frac{v^2}{R_{ES}} = \frac{M_E}{R_{ES}} \frac{(2\pi R_{ES})^2}{T^2}$$

o bien,

$$\frac{GM_S}{R_{ES}^2} = \frac{4\pi^2 R_{ES}}{T^2}. \qquad \textbf{(i)}$$

Después aplicamos la segunda ley de Newton al satélite m (que tiene el mismo periodo T que la Tierra), incluyendo el jalón tanto del Sol como de la Tierra [véase la forma simplificada, ecuación (i)]

$$\frac{GM_S}{(R_{ES} - d)^2} - \frac{GM_E}{d^2} = \frac{4\pi^2 (R_{ES} - d)}{T^2},$$

que reescribimos como

$$\frac{GM_S}{R_{ES}^2}\left(1 - \frac{d}{R_{ES}}\right)^{-2} - \frac{GM_E}{d^2} = \frac{4\pi^2 R_{ES}}{T^2}\left(1 - \frac{d}{R_{ES}}\right).$$

Ahora usamos el desarrollo binomial $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, si $x \ll 1$. Haciendo $x = d/R_{ES}$ y suponiendo $d << R_{ES}$, tenemos

$$\frac{GM_S}{R_{ES}^2}\left(1 + 2\frac{d}{R_{ES}}\right) - \frac{GM_E}{d^2} = \frac{4\pi^2 R_{ES}}{T^2}\left(1 - \frac{d}{R_{ES}}\right). \qquad \textbf{(ii)}$$

Al sustituir GM_S/R_{ES}^2 de la ecuación (i) en la ecuación (ii), encontramos

$$\frac{GM_S}{R_{ES}^2}\left(1 + 2\frac{d}{R_{ES}}\right) - \frac{GM_E}{d^2} = \frac{GM_S}{R_{ES}^2}\left(1 - \frac{d}{R_{ES}}\right).$$

Simplificando,

$$\frac{GM_S}{R_{ES}^2}\left(3\frac{d}{R_{ES}}\right) = \frac{GM_E}{d^2}.$$

Despejamos d para encontrar

$$d = \left(\frac{M_E}{3\,M_S}\right)^{\frac{1}{3}} R_{ES}.$$

Sustituyendo valores, tenemos

$$d = 1.0 \times 10^{-2} R_{ES} = 1.5 \times 10^6\ \text{km}.$$

NOTA Como $d/R_{ES} = 10^{-2}$, justificamos el uso del desarrollo binomial.

NOTA Colocar un satélite en L1 tiene dos ventajas: la vista que tiene el satélite del Sol nunca estará eclipsada por la Tierra, y el satélite siempre estará lo suficientemente cercano a la Tierra como para transmitir datos fácilmente. El punto L1 del sistema Tierra-Sol es la ubicación actual del satélite Observatorio Solar y Helioesférico (SOHO), figura 6-20.

FIGURA 6–20 Representación artística del satélite Observatorio Solar y Helioesférico (SOHO) en órbita.



*6–6 Campo gravitacional

La mayoría de las fuerzas que encontramos en la vida diaria son fuerzas de contacto; usted empuja o jala una podadora de césped, una raqueta de tenis ejerce una fuerza sobre una pelota cuando ambas entran en contacto, o una roca ejerce una fuerza sobre una ventana cuando ambas hacen contacto. Pero la fuerza gravitacional actúa a distancia: se tiene una fuerza aun cuando los dos objetos no estén en contacto. La Tierra, por ejemplo, ejerce una fuerza sobre una manzana que cae. También ejerce una fuerza sobre la Luna, a 384,000 km de distancia. El Sol ejerce una fuerza gravitacional sobre la Tierra. La idea de una fuerza *que actúa a distancia* fue difícil de aceptar por los primeros pensadores. El mismo Newton no se sentía a gusto con este concepto cuando publicó su ley de la gravitación universal.

Otro punto de vista que ayuda con estas dificultades conceptuales es el concepto de **campo**, desarrollado en el siglo XIX por Michael Faraday (1791-1867), como ayuda para entender las fuerzas electromagnéticas que también actúan a distancia. Tiempo después se aplicó a la gravitación. De acuerdo con el concepto de campo, un **campo gravitacional** rodea a todo objeto que tenga masa y este campo permea todo el espacio. Un segundo objeto en una posición específica cerca del primero experimenta una fuerza debida al campo gravitacional que existe ahí. Como se considera que el campo gravitacional en la posición de la segunda masa actúa directamente sobre esta masa, ello nos aproxima un poco más a la idea de una fuerza de contacto.

Cuantitativamente, podemos definir el **campo gravitacional** como la fuerza de gravedad por unidad de masa en cualquier punto del espacio. Si queremos medir el campo gravitacional en cualquier punto, colocamos una pequeña masa m de "prueba" en ese punto y medimos la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ ejercida sobre ella (asegurándonos de que sólo están actuando fuerzas gravitacionales). El campo gravitacional $\vec{\mathbf{g}}$, en ese punto se define entonces como

$$\vec{\mathbf{g}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{m}. \qquad \text{[campo gravitacional]} \quad \textbf{(6–8)}$$

Las unidades de $\vec{\mathbf{g}}$ son N/kg.

De la ecuación 6-8 vemos que el campo gravitacional que experimenta un objeto tiene una magnitud igual a la aceleración debida a la gravedad en ese punto. (Sin embargo, cuando hablamos de aceleración empleamos unidades m/s^2, lo cual es equivalente a N/kg, ya que $1\ N = 1\ kg \cdot m/s^2$).

Si el campo gravitacional se debe a un solo objeto esféricamente simétrico (o pequeño) de masa M, como cuando m está cerca de la superficie terrestre, entonces el campo gravitacional a una distancia r desde M tiene la magnitud

$$g = \frac{1}{m} G \frac{mM}{r^2} = G \frac{M}{r^2}.$$

En notación vectorial escribimos

$$\vec{\mathbf{g}} = -\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \qquad \text{[debido a una sola masa } M\text{]}$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario que apunta radialmente hacia afuera de la masa M, y el signo menos nos recuerda que el campo apunta hacia la masa M (véase las ecuaciones 6-1, 6-2 y 6-4). Si varios cuerpos diferentes contribuyen significativamente con el campo gravitacional, entonces escribimos el campo gravitacional $\vec{\mathbf{g}}$ como la suma vectorial de todas estas contribuciones. En el espacio interplanetario, por ejemplo, $\vec{\mathbf{g}}$ en cualquier punto del espacio es la suma vectorial de los términos debida a la Tierra, al Sol, a la Luna y a otros cuerpos que contribuyen. El campo gravitacional $\vec{\mathbf{g}}$ en cualquier punto del espacio no depende del valor de nuestra masa de prueba m, colocada en ese punto; $\vec{\mathbf{g}}$ depende sólo de las masas (y las posiciones) de los cuerpos que generan el campo ahí.

6–7 Tipos de fuerzas en la naturaleza

Ya hemos visto que la ley de la gravitación universal de Newton, ecuación 6-1, describe cómo un tipo específico de fuerza, la gravedad, depende de la distancia entre los objetos implicados, y de sus masas. Por otro lado, la segunda ley de Newton, $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$, nos indica cómo un objeto acelera debido a *cualquier* tipo de fuerza. Pero, ¿cuáles son los tipos de fuerzas que ocurren en la naturaleza, además de la gravedad?

En el siglo XX, los físicos reconocieron cuatro diferentes fuerzas fundamentales en la naturaleza: 1) la fuerza gravitacional; 2) la fuerza electromagnética (veremos después que las fuerzas eléctrica y magnética están íntimamente relacionadas); 3) la fuerza nuclear fuerte, y 4) la fuerza nuclear débil. En este capítulo analizaremos la fuerza gravitacional en detalle. En los capítulos 21 a 31 estudiaremos a profundidad la naturaleza de la fuerza electromagnética. Las fuerzas nucleares fuerte y débil operan a nivel del núcleo atómico y, aunque se manifiestan en fenómenos tales como la radioactividad y la energía nuclear, son menos evidentes en nuestra vida cotidiana.

Los físicos han trabajado en teorías unificadoras de las cuatro fuerzas, es decir, han considerado que algunas o todas esas fuerzas son manifestaciones diferentes de la misma fuerza básica. Hasta ahora, las fuerzas electromagnética y nuclear débil se han unido teóricamente para formar la teoría *electrodébil*, en la que las fuerzas electromagnética y nuclear débil se consideran como dos manifestaciones diferentes de una sola *fuerza electrodébil*. Los intentos por unificar las fuerzas restantes, como en las *teorías de gran unificación* (GUT), son temas candentes en la investigación actual.

Pero, ¿dónde quedan las fuerzas comunes dentro de este esquema? Actualmente se considera que las fuerzas ordinarias —diferentes de la gravedad, tales como empujones, jalones y otras fuerzas de contacto como la fuerza normal y la de fricción— se deben a la fuerza electromagnética que actúa a nivel atómico. Por ejemplo, la fuerza que sus dedos ejercen sobre un lápiz es el resultado de la repulsión eléctrica entre los electrones exteriores de los átomos de sus dedos y los del lápiz.

*6–8 El principio de equivalencia, la curvatura del espacio y los agujeros negros

Hemos tratado con dos aspectos de la masa. En el capítulo 4, definimos masa como una medida de la inercia de un cuerpo. La segunda ley de Newton relaciona la fuerza que actúa sobre un cuerpo con su aceleración y con su **masa inercial**, que es como la conocemos. Podríamos decir que la masa inercial representa una resistencia a cualquier fuerza. En este capítulo hemos tratado con la masa como una propiedad relacionada con la fuerza gravitacional, es decir, la masa como una cantidad que determina la intensidad de la fuerza gravitacional entre dos cuerpos. A ésta la llamamos **masa gravitacional**.

No es evidente que la masa inercial de un cuerpo debiera ser igual a su masa gravitacional. (La fuerza de gravedad podría haber dependido de una propiedad completamente diferente de un cuerpo, así como la fuerza eléctrica depende de una propiedad llamada carga eléctrica.) Los experimentos de Newton y de Cavendish indicaron que esos dos tipos de masa son iguales para un cuerpo, y los experimentos modernos lo confirman con una precisión de aproximadamente 1 parte en 10^{12}.

Albert Einstein (1879-1955) llamó **principio de equivalencia** a esta equivalencia entre las masas gravitacional e inercial, y lo usó como base para su *teoría general de la relatividad* (c. 1916). Es posible enunciar el principio de equivalencia de otra manera: no hay ningún experimento que pueda efectuar un observador para distinguir si una aceleración surge debido una fuerza gravitacional o si surge debido a que el marco de referencia del observador esté acelerando. Si, por ejemplo, usted estuviera en el espacio y una manzana cayera al piso de su nave espacial, supondría que una fuerza gravitacional actúa sobre la manzana. Pero también sería posible que la manzana cayera debido a que su nave espacial estuviera acelerando hacia arriba (con respecto a un sistema inercial). Los efectos serían indistinguibles de acuerdo con el principio de equivalencia, ya que las masas inercial y gravitacional de la manzana, que determinan cómo "reacciona" un cuerpo ante influencias externas, no son distinguibles entre sí.

FIGURA 6–21 *a*) El rayo de luz viaja en línea recta a través de un elevador que no acelera. *b*) El rayo de luz se curva (dibujado muy exagerado) en un elevador que acelera hacia arriba.

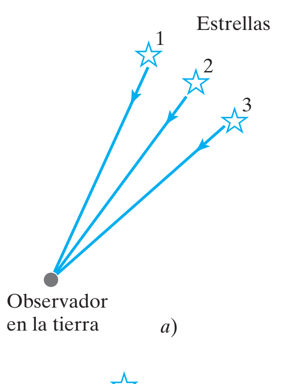


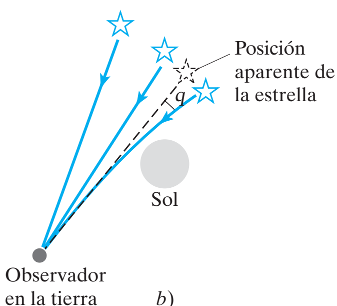


El principio de equivalencia sirve para demostrar que la luz debe deflexionarse debido a la fuerza gravitacional de un objeto masivo. Consideremos un experimento idealizado, en un elevador en el espacio libre donde prácticamente no actúa la gravedad. Si se tiene un agujero a un lado en el elevador y un rayo de luz entra por él, el rayo viaja directamente a través del elevador dejando un punto luminoso en el lado opuesto, si el elevador está en reposo (figura 6-21a). Si el elevador está acelerando hacia arriba como en la figura 6-12b, el rayo de luz aún viaja en línea recta al ser observado en el marco de referencia original en reposo. Sin embargo, en el elevador que acelera hacia arriba, se observa que el rayo se curva hacia abajo. ¿Por qué? La razón es que durante el tiempo en que la luz viaja de un lado al otro del elevador, éste se mueve hacia arriba con rapidez creciente.

De acuerdo con el principio de equivalencia, un marco de referencia que acelera hacia arriba es equivalente a un campo gravitacional dirigido hacia abajo. Por consiguiente, podemos considerar que la trayectoria curva de la luz en la figura 6-21b se debe al efecto de un campo gravitacional. Entonces esperaríamos que la gravedad ejerza una fuerza sobre un rayo de luz y lo curve ¡desviándolo de su trayectoria rectilínea!

FIGURA 6–22 *a*) Tres estrellas en el firmamento. *b*) Si la luz de una de dichas estrellas pasa muy cerca del Sol, cuya gravedad curva el rayo de luz, la estrella se verá más arriba de lo que realmente está.



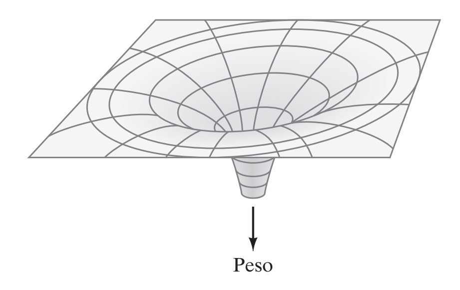


La teoría general de la relatividad de Einstein predice que la luz debería verse afectada por la gravedad. Él calculó que la luz de una estrella distante sería desviada 1.75″ de arco (pequeño pero detectable) al pasar cerca del Sol, como se muestra en la figura 6-22. Tal deflexión se midió y confirmó en 1919 durante un eclipse solar. (El eclipse redujo la luminosidad del Sol de modo que en ese momento eran visibles las estrellas en línea con su borde).

El hecho de que un rayo de luz puede seguir una trayectoria curva sugiere que el *espacio mismo está curvado* y que es la masa gravitacional lo que causa la curvatura, la cual aumenta cerca de objetos muy masivos. Para visualizar esta curvatura del espacio, pensemos que el espacio es como una lámina de hule delgada: si se cuelga de ella una masa pesada, la curvará como se observa en la figura 6-23. El peso corresponde a una masa enorme que ocasiona que el ¡el espacio mismo! se curve.

La curvatura extrema del espacio-tiempo que se presenta en la figura 6-23 podría ser causada por un **agujero negro**, que es una estrella que se vuelve tan densa y masiva con gravedad tan intensa que incluso la luz no lograría escapar de ella. La luz es jalada hacia dentro por la fuerza de la gravedad. Como ninguna luz puede escapar de esa estrella masiva, no la podemos ver, es decir, sería negra. Un objeto podría pasar cerca de ella y ser deflexionado por su campo gravitacional; pero si el objeto se acercara demasiado, sería tragado por la estrella sin poder nunca escapar. De ahí el nombre para estos agujeros negros. Se tiene buena evidencia experimental sobre su existencia. Una posibilidad es que haya un agujero negro gigantesco en el centro de nuestra galaxia y tal vez también en el centro de otras galaxias.

FIGURA 6–23 Analogía de la hoja de hule para el espacio (técnicamente espacio-tiempo) curvada por la materia.



Resumen

La **ley de Newton de la gravitación universal** establece que toda partícula en el Universo atrae a cualquier otra partícula con una fuerza proporcional al producto de sus masas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad \textbf{(6–1)}$$

La dirección de esta fuerza es a lo largo de la línea que une las dos partículas, y siempre es de atracción. Esta fuerza gravitacional es lo que mantiene a la Luna girando alrededor de la Tierra y a los planetas girando alrededor del Sol.

La fuerza gravitacional total sobre cualquier cuerpo es la suma vectorial de las fuerzas ejercidas por todos los demás objetos; con frecuencia, pueden despreciarse los efectos de todos excepto uno o dos cuerpos.

Los satélites que giran alrededor de la Tierra se ven afectados por la gravedad, pero "permanecen arriba" debido a su gran rapidez tangencial.

Las tres leyes de Newton del movimiento más su ley de la gravitación universal constituyen una teoría de amplio alcance acerca del Universo. Con ellas, el movimiento de objetos en la Tierra y en el firmamento puede describirse con exactitud. Además, proporcionan una base teórica para las **leyes de Kepler** sobre el movimiento planetario.

[*De acuerdo con el concepto de **campo**, un **campo gravitacional** rodea a todo objeto que tenga masa y permea todo el espacio. El campo gravitacional en cualquier punto del espacio es la suma vectorial de los campos debido a todos los objetos masivos y se define como

$$\vec{\mathbf{g}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{m} \qquad \textbf{(6–8)}$$

donde $\vec{\mathbf{F}}$ es la fuerza que actúa sobre una masa "de prueba" pequeña m colocada en ese punto.

Las cuatro fuerzas fundamentales en la naturaleza son: 1) la fuerza gravitacional, 2) la fuerza electromagnética, 3) la fuerza nuclear fuerte, y (4) la fuerza nuclear débil, Las primeras dos fuerzas fundamentales son responsables de casi todas las fuerzas "cotidianas".

Preguntas

1. ¿Una manzana ejerce una fuerza gravitacional sobre la Tierra? Si es así, ¿qué tan grande sería dicha fuerza? Considere una manzana *a*) unida a un árbol y *b*) cayendo.

2. La atracción gravitacional del Sol sobre la Tierra es mucho mayor que la de la Luna. Sin embargo, la atracción de la Luna es responsable principalmente de las mareas. Explique. [*Sugerencia*: Considere la diferencia en atracción gravitacional producida por un lado de la Tierra y por el otro].

3. ¿Pesará más un objeto en el ecuador o en los polos? ¿Cuáles dos efectos entran en acción? ¿Se oponen éstos entre sí?

4. ¿Por qué una nave espacial requiere más combustible para viajar de la Tierra a la Luna, que para regresar desde la Luna a la Tierra?

5. La fuerza gravitacional sobre la Luna debido a la Tierra es sólo aproximadamente la mitad de la fuerza sobre la Luna debida al Sol (véase el ejemplo 6-3). ¿Por qué la Luna no es arrancada de la Tierra?

6. ¿Cómo determinaron los científicos de la época de Newton la distancia de la Tierra a la Luna, a pesar de que no conocían los viajes espaciales ni la rapidez de la luz? [*Sugerencia*: Razone por qué dos ojos son útiles en la percepción de la profundidad].

7. Si fuera posible taladrar un agujero que pasara por todo el diámetro de la Tierra, entonces sería posible dejar caer una pelota en el agujero. Cuando la pelota estuviera justo en el centro de la Tierra, ¿cuál sería la fuerza gravitacional total ejercida sobre ésta por la Tierra?

8. ¿Por qué no es posible poner un satélite en órbita geosincrónica arriba del Polo Norte?

9. ¿Qué jala gravitacionalmente más fuerte, la Tierra sobre la Luna o la Luna sobre la Tierra? ¿Cuál acelera más?

10. ¿Requeriría menos rapidez lanzar un satélite *a*) hacia el este o *b*) hacia el oeste? Considere la dirección de rotación de la Tierra.

11. Una antena se afloja y se desprende de un satélite que está en órbita circular alrededor de la Tierra. Describa el movimiento subsiguiente de la antena. Si ésta cae sobre la Tierra, describa dónde; si no, describa cómo se podría hacer para que cayera sobre la Tierra.

12. Describa cómo podrían usarse mediciones cuidadosas de la variación en g en las cercanías de un depósito de mineral, para estimar la cantidad de mineral presente.

13. El Sol está directamente abajo de nosotros a media noche, casi en línea con el centro de la Tierra. Debido a la fuerza gravitacional del Sol sobre nosotros, ¿pesamos más a media noche que a medio día?

14. ¿Cuándo será máximo su peso aparente, al medirse con una báscula en un elevador en movimiento: cuando el elevador *a*) acelera hacia abajo, *b*) cuando acelera hacia arriba, *c*) cuando está en caída libre, o *d*) cuando se mueve hacia arriba con rapidez constante? ¿En cuál caso será mínimo su peso aparente? ¿Cuándo sería el mismo peso que cuando está usted fuera del elevador?

15. Si la masa de la Tierra fuera el doble de lo que es, ¿en qué manera sería diferente la órbita de la Luna?

16. El nacimiento del río Mississippi está más cercana al centro de la Tierra que su desembocadura en Louisiana (ya que la Tierra está más ensanchada en el ecuador que en los polos). Explique cómo el Mississippi puede fluir "cuesta arriba".

17. La gente pregunta a veces: "¿Qué es lo que mantiene a un satélite en órbita alrededor de la Tierra?" ¿Qué respondería usted?

18. Explique cómo un corredor experimenta "caída libre" o "ingravidez aparente" entre pasos consecutivos.

19. Si usted se encontrara en un satélite que orbita la Tierra, ¿cómo le haría para caminar, beber o poner unas tijeras sobre una mesa?

20. ¿La aceleración centrípeta de Marte en su órbita alrededor del Sol es mayor o menor que la aceleración centrípeta de la Tierra?

21. La masa del planeta Plutón no se conocía hasta que se descubrió que tenía una luna. Explique cómo esto permitió estimar la masa de Plutón.

22. La Tierra se mueve más rápido en su órbita alrededor del Sol en enero que en julio. ¿La Tierra está más cerca del Sol en enero o en julio? Explique. [*Nota*: Esto no tiene mucho que ver con el factor que produce las estaciones; el factor principal de las estaciones es la inclinación del eje terrestre con respecto al plano de su órbita anual].

23. Las leyes de Kepler nos indican que un planeta se mueve más rápido cuando está más cercano al Sol que cuando está más alejado de éste. ¿Qué provoca tal cambio en la rapidez del planeta?

* **24.** ¿Su cuerpo siente directamente un campo gravitacional? (Compárelo con lo que sentiría usted en una caída libre).

* **25.** Analice las diferencias conceptuales entre $\vec{\mathbf{g}}$ como aceleración debida a la gravedad y $\vec{\mathbf{g}}$ como campo gravitacional.

Problemas

6–1 a 6-3 Ley de la gravitación universal

1. (I) Calcule la fuerza de gravedad sobre una nave espacial a 2.00 radios terrestres sobre la superficie de la Tierra, si su masa es de 1480 kg.
2. (I) Calcule la aceleración debida a la gravedad en la superficie de la Luna. El radio de la Luna es de 1.74×10^6 m y su masa es de 7.35×10^{22} kg.
3. (I) Un planeta hipotético tiene un radio 2.3 veces el de la Tierra, pero tiene la misma masa que ésta. ¿Cuál sería la aceleración debida a la gravedad cerca de la superficie del planeta hipotético?
4. (I) Un planeta hipotético tiene una masa 1.80 veces la de la Tierra, pero el mismo radio que ésta. ¿Qué valor tendría g cerca de la superficie del planeta hipotético?
5. (I) Si usted duplicara la masa y triplicara el radio de un planeta, ¿por qué factor cambiaría g en su superficie?
6. (II) Calcule el valor efectivo de la aceleración de la gravedad, g, en *a*) 6400 m y *b*) 6400 km, por arriba de la superficie terrestre.
7. (II) Usted le explica a sus amigos el porqué los astronautas no sienten peso al orbitar en el transbordador espacial, y responden que ellos pensaban que se debía sólo a que la gravedad era mucho más débil a esa altitud. Convénzalos de que no es así, calculando cuánto más débil es la gravedad a 300 km sobre la superficie terrestre.
8. (II) Cada algunos cientos de años, la mayoría de los planetas se alinean del mismo lado del Sol. Calcule la fuerza total sobre la Tierra debida a Venus, Júpiter y Saturno, suponiendo que los cuatro planetas están en línea (figura 6-24). Las masas son $M_V = 0.815\ M_E$, $M_J = 318\ M_E$, $M_{Sat} = 95.1\ M_E$; y las distancias medias de los cuatro planetas al Sol son 108, 150, 778 y 1430 millones de kilómetros. ¿Qué fracción es esta fuerza de la fuerza que ejerce solamente el Sol sobre la Tierra?

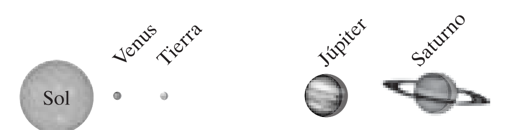


FIGURA 6–24 Problema 8 (no está a escala).

9. (II) Cuatro esferas de 8.5 kg están localizadas en las esquinas de un cuadrado de 0.80 m de lado. Calcule la magnitud y el sentido de la fuerza gravitacional ejercida sobre una esfera debida a las otras tres.
10. (II) Dos objetos se atraen gravitacionalmente entre sí con una fuerza de 2.5×10^{-10} N cuando están separados 0.25 m. Su masa total es de 4.0 kg. Encuentre sus masas individuales.
11. (II) Cuatro masas están colocadas como se muestra en la figura 6-25. Determine las componentes x y y de la fuerza gravitacional sobre la masa localizada en el origen (m). Escriba la fuerza en notación vectorial ($\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$).

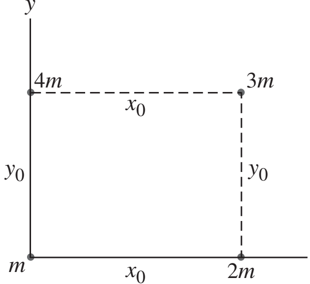


FIGURA 6–25 Problema 11.

12. (II) Estime la aceleración debida a la gravedad en la superficie de Europa (una de las lunas de Júpiter), dado que su masa es 4.9×10^{22} kg y suponga que tiene la misma densidad que la Tierra.
13. (II) Suponga que la masa de la Tierra se duplica, pero su densidad se mantiene constante al igual que su forma esférica. ¿Cómo cambiaría el peso de los objetos en la superficie terrestre?
14. (II) Dado que la aceleración de la gravedad en la superficie de Marte es 0.38 la de la Tierra y que el radio de Marte es de 3400 km, determine la masa de Marte.
15. (II) ¿A qué distancia de la Tierra una nave espacial que viaja directamente de la Tierra a la Luna experimentará cero fuerza neta, debido a que ahí la Tierra y la Luna ejercen fuerzas iguales y opuestas?
16. (II) Determine la masa del Sol usando el valor conocido para el periodo de la Tierra y su distancia desde el Sol. [*Sugerencia*: La fuerza sobre la Tierra debida al Sol se relaciona con la aceleración centrípeta anual de la Tierra]. Compare su respuesta con la obtenida usando las leyes de Kepler, ejemplo 6-9].
17. (II) Dos masas puntuales idénticas, cada una con masa M, siempre están separadas por una distancia de $2R$. Una tercera masa m está entonces colocada a una distancia x a lo largo de la bisectriz perpendicular de las dos masas originales, como se muestra en la figura 6-26. Demuestre que la fuerza gravitacional sobre la tercera masa está dirigida hacia adentro a lo largo de la bisectriz perpendicular y que tiene una magnitud de

$$F = \frac{2GMmx}{\left(x^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

FIGURA 6–26 Problema 17.

18. (II) Una masa M tiene forma de anillo con radio r. Se coloca una masa pequeña m a una distancia x a lo largo del eje del anillo, como se muestra en la figura 6-27. Demuestre que la fuerza gravitacional sobre la masa m debida al anillo está dirigida hacia adentro del eje del anillo y tiene una magnitud de

$$F = \frac{GMmx}{\left(x^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

[*Sugerencia*: Piense que el anillo está formado por muchas masas puntuales pequeñas dM; calcule las fuerzas debidas a cada dM y utilice la simetría].

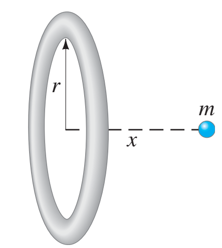


FIGURA 6–27 Problema 18.

19. (III) *a*) Use el desarrollo binomial

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \pm \cdots$$

para demostrar que el valor de g se altera por aproximadamente

$$\Delta g \approx -2g\frac{\Delta r}{r_E}$$

a una altura Δr sobre la superficie terrestre, donde r_E es el radio de la Tierra, siempre que $\Delta r << r_E$. *b*) ¿Cuál es el significado del signo menos en esta relación? *c*) Use este resultado para calcular el valor efectivo de g a 125 km por arriba de la superficie terrestre. Compárelo con el valor dado por la ecuación 6-1.
20. (III) El centro de un yacimiento esférico de petróleo de 1.00 km de diámetro está a 1.00 km por debajo de la superficie terrestre. Estime en qué porcentaje g directamente arriba del yacimiento diferiría del valor esperado de g para una Tierra uniforme? Suponga que la densidad del petróleo es 8.0×10^2 kg/m^3.

21. (III) Determine la magnitud y el sentido del valor efectivo de $\vec{\mathbf{g}}$ a una latitud de 45° sobre la Tierra. Suponga que nuestro planeta es una esfera en rotación.

* **22.** (III) Se puede demostrar (Apéndice D) que para una esfera uniforme la fuerza de gravedad en un punto dentro de la esfera depende sólo de la masa encerrada por una esfera concéntrica que pasa por ese punto. Se cancela la fuerza neta de la gravedad debida a los puntos que están afuera del radio del punto. ¿Qué tan lejos tendría que taladrar en la Tierra para alcanzar un punto donde su peso se redujera en 5.0%? Aproxime la Tierra como una esfera uniforme.

6–4 Satélites e ingravidez

23. (I) El transbordador espacial suelta un satélite en una órbita circular a 680 km por arriba de la Tierra. ¿Qué tan rápido debe estar moviéndose el transbordador (con respecto a la Tierra) cuando suelta el satélite?

24. (I) Calcule la rapidez de un satélite que se mueve en una órbita circular estable alrededor de la Tierra a una altitud de 5800 km.

25. (II) Usted sabe que su masa es de 65 kg, pero cuando se sube a una báscula en un elevador, ésta indica que su masa es de 76 kg. ¿Cuál es la aceleración del elevador y en que dirección?

26. (II) Un simio de 13.0 kg se cuelga de una cuerda suspendida del techo de un elevador. La cuerda puede resistir una tensión de 185 N y se rompe cuando el elevador acelera. ¿Cuál fue la aceleración mínima del elevador (magnitud y sentido)?

27. (II) Calcule el periodo de un satélite en órbita alrededor de la Luna, a 120 km por arriba de la superficie lunar. Desprecie los efectos de la Tierra. El radio de la Luna es de 1740 km.

28. (II) Dos satélites orbitan la Tierra a altitudes de 5000 km y 15,000 km. ¿Qué satélite gira más rápido y en qué factor?

29. (II) ¿Qué lectura dará una báscula de resorte para el peso de una mujer de 53 kg en un elevador que se mueve *a*) hacia arriba con rapidez constante de 5.0 m/s, *b*) hacia abajo con rapidez constante de 5.0 m/s, *c*) hacia arriba con aceleración de 0.33 *g*, *d*) hacia abajo con aceleración de 0.33 *g*, y *e*) en caída libre?

30. (II) Determine el tiempo que le toma a un satélite orbitar la Tierra en una trayectoria circular "cercana a la Tierra". Una órbita "cercana a la Tierra" es la que está a una altitud muy pequeña comparada con el radio terrestre. [*Sugerencia*: Usted puede considerar la aceleración de la gravedad como esencialmente igual a la que se tiene en la superficie]. ¿Su resultado depende de la masa del satélite?

31. (II) ¿Cuál es el peso aparente de un astronauta de 75 kg a 2500 km del centro de la Luna terrestre en un vehículo espacial que *a*) se mueve a velocidad constante, y *b*) que acelera hacia la Luna a 2.3 m/s^2? Indique la dirección y sentido del vector en cada caso.

32. (II) Una rueda de la fortuna de 22.0 m de diámetro gira una vez cada 12.5 segundos (véase la figura 5-19). ¿Cuál es la razón del peso aparente de una persona con su peso real *a*) en la cima y *b*) en la parte inferior del recorrido?

33. (II) Dos estrellas de igual masa mantienen una distancia constante entre sí de 8.0×10^{11} m y giran alrededor de un punto a la mitad de esta distancia a razón de una revolución cada 12.6 años. *a*) ¿Por qué no se estrellan una contra la otra debido a la fuerza gravitacional entre sí? *b*) ¿Cuál debe ser la masa de cada estrella?

34. (III) *a*) Demuestre que si un satélite órbita muy cerca de la superficie de un planeta con periodo T, la densidad (= masa por volumen unitario) del planeta es $\rho = m/V = 3\pi/GT^2$. *b*) Estime la densidad de la Tierra, dado que un satélite cerca de su superficie órbita con un periodo de aproximadamente 85 minutos. Considere la Tierra como una esfera uniforme.

35. (III) Tres cuerpos con masas idénticas M forman los vértices de un triángulo equilátero de lado ℓ y giran en órbitas circulares con respecto al centro del triángulo. Se mantienen en su posición gracias a su gravitación mutua. ¿Cuál será la rapidez de cada uno?

36. (III) Un plano inclinado, fijo al interior de un elevador, forma un ángulo de 32° con el piso. Una masa m se desliza sobre el plano sin fricción. ¿Cuál es su aceleración relativa al plano si el elevador *a*) acelera hacia arriba a 0.50 *g*, *b*) acelera hacia abajo a 0.50 *g*, *c*) cae libremente, y *d*) se mueve hacia arriba con rapidez constante?

6–5 Leyes de Kepler

37. (I) Use las leyes de Kepler y el periodo de la Luna (27.4 días) para determinar el periodo de un satélite artificial en órbita muy cercana a la superficie terrestre.

38. (I) Determine la masa de la Tierra a partir del periodo y la distancia conocidos de la Luna.

39. (I) Neptuno está a una distancia promedio de 4.5×10^9 km del Sol. Estime la duración del año de Neptuno usando el hecho de que la Tierra está en promedio a 1.50×10^8 km del Sol.

40. (II) El planeta A y el planeta B están en órbitas circulares alrededor de una estrella distante. El planeta A está 9.0 veces más lejos de la estrella que el planeta B. ¿Cuál es la razón de sus rapideces v_A/v_B?

41. (II) Nuestro Sol gira alrededor del centro de la Galaxia ($m_G \approx 4 \times 10^{41}$ kg) a una distancia de aproximadamente 3×10^4 años-luz [1 año-luz = $(3.00 \times 10^8$ m/s$)\cdot(3.16 \times 10^7$ s/año$)\cdot(1.00$ año$)$]. ¿Cuál es el periodo del movimiento orbital del Sol alrededor del centro de la Galaxia?

42. (II) La tabla 6-3 da la distancia media, el periodo y la masa de las cuatro lunas más grandes de Júpiter (descubiertas por Galileo en 1609). *a*) Determine la masa de Júpiter usando los datos para Io. *b*) Calcule la masa de Júpiter usando los datos para cada una de las otras tres lunas. ¿Los resultados son consistentes?

TABLA 6–3 Principales lunas de Júpiter (problemas 42, 43 y 47)

Luna	Masa (kg)	Periodo (días terrestres)	Distancia media desde Júpiter (km)
Io	8.9×10^{22}	1.77	422×10^3
Europa	4.9×10^{22}	3.55	671×10^3
Ganímedes	15×10^{22}	7.16	1070×10^3
Calisto	11×10^{22}	16.7	1883×10^3

43. (II) Determine la distancia media de Júpiter a cada una de sus lunas usando la tercera ley de Kepler. Utilice la distancia de Io y los periodos dados en la tabla 6-3. Compare sus resultados con los valores de la tabla.

44. (II) El cinturón de asteroides entre Marte y Júpiter consiste en numerosos fragmentos (que algunos científicos creen que formaban parte de un planeta que alguna vez orbitó alrededor del Sol pero que fue destruido). *a*) Si el radio orbital medio del cinturón de asteroides (donde habría estado el planeta) está aproximadamente 3 veces más lejos del Sol que la Tierra, ¿qué tiempo le tomaba a dicho planeta hipotético orbitar el Sol? *b*) ¿Podemos usar estos datos para deducir la masa de tal planeta?

45. (III) El cometa Hale-Bopp tiene un periodo de 2400 años. *a*) ¿Cuál es su distancia media al Sol? *b*) En su acercamiento más próximo, el cometa está aproximadamente a 1 AU del Sol (1 AU = distancia de la Tierra al Sol). ¿Cuál es su alejamiento máximo? *c*) ¿Cuál es la razón de su rapidez en el punto más cercano con su rapidez en el punto más alejado de la órbita?

46. (III) *a*) Use la segunda ley de Kepler para demostrar que la razón de las rapideces de un planeta en sus puntos más cercano y más alejado al Sol es igual a la razón inversa de las distancias cercana y lejana: $v_N/v_F = d_F/d_N$. *b*) Dado que la distancia de la Tierra al Sol varía entre 1.47 a 1.52×10^{11} m, determine las velocidades mínima y máxima de la Tierra en su órbita alrededor del Sol.

47. (III) Los periodos orbitales T y las distancias orbitales medias r para las cuatro lunas más grandes de Júpiter se muestran en la tabla 6-3, de la página anterior. *a*) Empezando con la tercera ley de Kepler en la forma

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{Gm_J}\right)r^3,$$

donde m_J es la masa de Júpiter, muestre que esta relación implica que la gráfica de $\log(T)$ contra $\log(r)$ corresponde a una línea recta. Explique lo que la tercera ley de Kepler predice acerca de la pendiente y la ordenada al origen de esta gráfica de línea recta. *b*) Usando los datos de las cuatro lunas de Júpiter, grafique $\log(T)$ contra $\log(r)$ y demuestre que se obtiene una línea recta. Determine la pendiente de esta gráfica y compárela con el valor que usted esperaría si los datos fueran consistentes con la tercera ley de Kepler. Determine la ordenada al origen de la gráfica y úsela para calcular la masa de Júpiter.

* 6–6 Campo gravitacional

*** 48.** (II) ¿Cuál es la magnitud y el sentido del campo gravitacional a media distancia entre la Tierra y la Luna? Desprecie los efectos del Sol.

*** 49.** (II) *a*) ¿Cuál es el campo gravitacional en la superficie de la Tierra debido al Sol? *b*) ¿Afecta esto el peso de usted en forma considerable?

*** 50.** (III) Dos partículas idénticas, cada una de masa m, están situadas sobre el eje x en $x = +x_0$ y $x = -x_0$. *a*) Determine una fórmula para el campo gravitacional debido a estas dos partículas para puntos sobre el eje y; es decir, escriba $\vec{\mathbf{g}}$ como función de y, m, x_0, etcétera. *b*) ¿En qué punto(s) sobre el eje y la magnitud de $\vec{\mathbf{g}}$ es un máximo y cuál es su valor ahí? [*Sugerencia*: Derive $d\vec{\mathbf{g}}/dy$].

Problemas generales

51. ¿A qué distancia de la superficie terrestre, la aceleración de la gravedad será de la mitad de lo que es en la superficie?

52. En la superficie de cierto planeta, la aceleración gravitacional g tiene una magnitud de 12.0 m/s^2. Una esfera de bronce de 13.0 kg es transportada a ese planeta. ¿Cuáles son *a*) la masa de la esfera de bronce sobre la Tierra y sobre el planeta, y *b*) el peso de la esfera de bronce sobre la Tierra y sobre el planeta?

53. Una estrella enana blanca típica, que antes fue una estrella promedio como nuestro Sol, pero que está ahora en las últimas etapas de su evolución, tiene el tamaño de nuestra Luna aunque con la masa de nuestro Sol. *a*) Estime la gravedad en la superficie de esta estrella. *b*) ¿Cuánto pesaría una persona de 65 kg en esa estrella? *c*) ¿Cuál sería la rapidez de una pelota de béisbol que se suelta desde una altura de 1.0 al golpear la superficie?

54. ¿Cuál es la distancia del centro de la Tierra a un punto fuera de ésta donde la aceleración gravitacional debida a la Tierra sea de $\frac{1}{10}$ de su valor en la superficie terrestre?

55. Los anillos de Saturno están compuestos por trozos de hielo que orbitan al planeta. El radio interno de los anillos es de 73,000 km; en tanto que el radio exterior es de 170,000 km. Encuentre el periodo de un trozo de hielo que orbita en el radio interior y el periodo de un trozo en el radio exterior. Compare sus números con el periodo de rotación medio de Saturno de 10 horas y 39 minutos. La masa de Saturno es de 5.7×10^{26} kg.

56. Durante una misión *Apolo* de aterrizaje lunar, el módulo de mando continuó orbitando la Luna a una altitud de aproximadamente 100 km. ¿Cuánto tiempo le tomó al módulo dar una vuelta alrededor de la Luna?

57. El cometa Halley órbita al Sol aproximadamente una vez cada 76 años. Se acerca mucho a la superficie solar en el punto más próximo de su órbita (figura 6-28). ¿A qué distancia estará el cometa del Sol en su punto más alejado? ¿El cometa se encuentra aún dentro del Sistema Solar? ¿Cuál es la órbita planetaria más cercana a él en dicha posición?

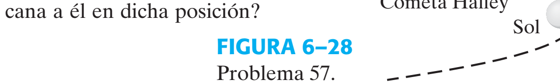


FIGURA 6–28 Problema 57.

58. El Sistema de Posicionamiento Global Navstar (GPS) utiliza un grupo de 24 satélites en órbita alrededor de la Tierra. Mediante la "triangulación" y las señales transmitidas por esos satélites, la posición de un receptor sobre la Tierra puede determinarse con una precisión de unos cuantos centímetros. Las órbitas de los satélites están distribuidas uniformemente alrededor de la Tierra, con cuatro satélites en cada una de seis órbitas, permitiendo "posiciones fijas" de navegación continua. Los satélites orbitan a una altitud aproximada de 11,000 millas náuticas [1 milla náutica = 1.852 km = 6076 pies]. *a*) Determine la rapidez de cada satélite. *b*) Determine el periodo de cada satélite.

59. Júpiter es aproximadamente 320 veces más masivo que la Tierra. Se afirma entonces que una persona sería aplastada por la fuerza de la gravedad de Júpiter, ya que la gente no puede resistir más de unas cuantas g. Calcule el número de g que una persona experimentaría en el ecuador de ese planeta. Use los siguientes datos astronómicos para Júpiter: masa = 1.9×10^{27} kg, radio ecuatorial = 7.1×10^4 km, periodo de rotación = 9 h 55 min. Tome en cuenta la aceleración centrípeta.

60. El Sol gira alrededor del centro de la Vía Láctea (nuestra galaxia) (figura 6-29) a una distancia aproximada de 30,000 años-luz del centro (1 año-luz = 9.5×10^{15} m). Si le toma aproximadamente 200 millones de años efectuar una rotación, estime la masa de nuestra galaxia. Suponga que la distribución de masa de nuestra galaxia está concentrada principalmente en una esfera central uniforme. Si todas las estrellas tuvieran aproximadamente la masa de nuestro Sol (2×10^{30} kg), ¿cuántas estrellas habría en nuestra galaxia?

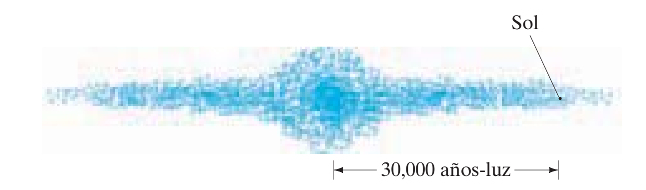


FIGURA 6–29 Vista lateral de nuestra galaxia. Problema 60.

61. Los astrónomos han observado una estrella que por lo demás sería normal, llamada S2, que orbita de cerca un cuerpo extremadamente masivo pero pequeño en el centro de la Vía Láctea, llamado SgrA. S2 se mueve en una órbita elíptica alrededor de SgrA con un periodo de 15.2 años y una excentricidad $e = 0.87$ (figura 6-16). En 2002 S2 alcanzó su aproximación más cercana a SgrA, una distancia de sólo 123 AU (1 AU = 1.50×10^{11} m es la distancia promedio de la Tierra al Sol). Determine la masa M de SgrA, el cuerpo compacto masivo (que se cree que es un agujero negro supermasivo) en el centro de nuestra galaxia. Calcule M en kg y en términos de la masa de nuestro Sol.

62. Un satélite con masa de 5500 kg orbita la Tierra y tiene un periodo de 6200 s. Determine *a*) el radio de su órbita circular, *b*) la magnitud de la fuerza gravitacional de la Tierra sobre el satélite y *c*) la altitud del satélite.

63. Demuestre que la razón de cambio de su peso es

$$-2G\frac{m_E m}{r^3}v$$

si usted viaja alejándose directamente de la Tierra con rapidez constante v. Su masa es m y r es su distancia al centro de la Tierra en cualquier momento.

64. Los astrónomos que usan el telescopio espacial Hubble dedujeron la presencia de un núcleo extremadamente masivo en la distante galaxia M87, tan denso que podría tratarse de un agujero negro (del cual ninguna luz escapa). Ellos midieron la rapidez (780 km/s) de las nubes de gas que orbitan el núcleo a una distancia de 60 años-luz (5.7×10^{17} m) de éste. Deduzca la masa del núcleo y compárela con la masa de nuestro Sol.

65. Suponga que toda la masa de la Tierra estuviera compactada en una pequeña pelota esférica. ¿Qué radio debería tener la esfera para que la aceleración debida a la gravedad en la nueva superficie terrestre fuera igual a la aceleración debida a la gravedad en la superficie del Sol?

66. Una plomada (una masa m que cuelga de un cordel) es desviada de la vertical en un ángulo θ por la presencia de una montaña masiva cercana (figura 6-30). *a*) Obtenga una fórmula aproximada para θ en términos de la masa de la montaña m_M, la distancia a su centro D_M, y el radio y la masa de la Tierra. *b*) Haga una estimación burda de la masa del monte Everest, suponiendo que tiene la forma de un cono de 4000 m de altura y una base de 4000 m de diámetro. Suponga que su masa por unidad de volumen es de 3000 kg por m^3. *c*) Estime el ángulo θ de la plomada, si ésta se encuentra a 5 km del centro del Everest.

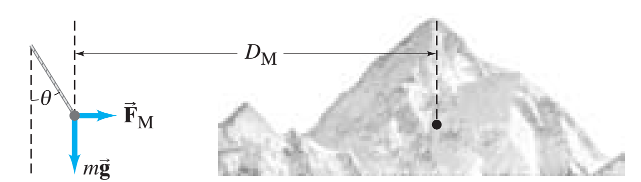


FIGURA 6–30 Problema 66.

67. Un geólogo que busca petróleo encuentra que la gravedad en cierta localidad es 2 partes en 10^7 más pequeña que el valor promedio. Suponga que la localidad contiene petróleo localizado a 2000 m bajo la corteza terrestre. Estime el tamaño del depósito, suponiendo que es esférico. Considere que la densidad (masa por unidad de volumen) de la roca es de 3000 kg/m^3 y la del petróleo es de 800 kg/m^3.

68. Usted es un astronauta en el transbordador espacial que persigue un satélite que necesita reparaciones. Usted se encuentra en una órbita circular del mismo radio que el satélite (400 km por arriba de la Tierra), pero 25 km detrás de él. *a*) ¿Cuánto tiempo le tomará alcanzar al satélite, si usted reduce su radio orbital en 1.0 km? *b*) ¿Cuánto debe usted reducir su radio orbital para alcanzarlo en 7.0 horas?

69. Un cuento de ciencia ficción describe un "planeta" artificial en forma de una banda que rodea por completo un sol (figura 6-31). Sus habitantes viven en la superficie interior (donde siempre es mediodía). Imagine que ese sol es exactamente como el nuestro, que la distancia a la banda es la misma que del Sol a la Tierra (por lo que el clima es templado), y que la banda gira lo suficientemente rápido para producir una gravedad aparente de 1 g como en la Tierra. ¿Cuál sería el periodo de revolución de la banda, o el año de este planeta, en días terrestres?

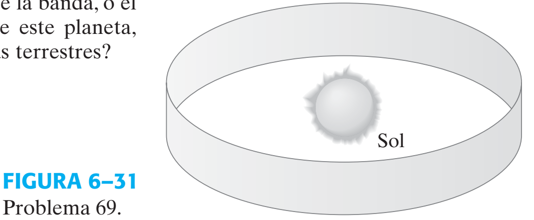


FIGURA 6–31 Problema 69.

70. ¿Qué tan largo sería un día si la Tierra rotara tan rápido que los objetos en el ecuador aparentemente no tuvieran peso?

71. Un asteroide de masa m está en una órbita circular de radio r alrededor del Sol con una rapidez v. Tiene un impacto con otro asteroide de masa M y es lanzado a una nueva órbita circular con una rapidez de 1.5 v. ¿Cuál es el radio de la nueva órbita en términos de r?

72. Newton tenía la lista con los datos de la tabla 6-4 más los tamaños relativos de tales cuerpos: en términos del radio del Sol R, los radios de Júpiter y de la Tierra eran de 0.0997 R y 0.0109 R. Newton utilizó esta información para determinar que la densidad promedio ρ (= masa/volumen) de Júpiter es ligeramente menor que la del Sol; mientras que la densidad promedio de la Tierra es cuatro veces la del Sol. Así, sin salir de su propio planeta Newton fue capaz de predecir que la composición del Sol y de Júpiter es bastante diferente de la terrestre. Realice los cálculos que hizo Newton y determine los valores de las razones r_J/r_{Sol} y r_E/r_{Sol} (los valores modernos de estas razones son 0.93 y 3.91, respectivamente).

TABLA 6–4 Problema 72

	Radio orbital, R (en AU = 1.50×10^{11} m)	Periodo orbital, T (en días terrestres)
Venus alrededor del Sol	0.724	224.70
Calisto alrededor de Júpiter	0.01253	16.69
Luna alrededor de la Tierra	0.003069	27.32

73. Un satélite gira alrededor de un planeta esférico de masa desconocida en una órbita circular cuyo radio es de 2.0×10^7 m. La magnitud de la fuerza gravitacional ejercida sobre el satélite por el planeta es de 120 N. *a*) ¿Cuál sería la magnitud de la fuerza gravitacional ejercida sobre el satélite por el planeta si el radio de la órbita se incrementara a 3.0×10^7 m? *b*) Si el satélite da una vuelta completa al planeta cada 2.0 h en la órbita mayor, ¿cuál será la masa del planeta?

74. Una esfera uniforme tiene masa M y radio r. Se hace una cavidad esférica (sin masa) de radio $r/2$ dentro de dicha esfera, como se muestra en la figura 6-32 (la superficie de la cavidad pasa a través del centro de la esfera y apenas toca la superficie exterior de la esfera). Los centros de la esfera original y de la cavidad quedan en línea recta, la cual define el eje x. ¿Con qué fuerza gravitacional la esfera hueca atraerá un punto de masa m que está sobre el eje x a una distancia d del centro de la esfera? [*Sugerencia*: Reste el efecto de la esfera "chica" (la cavidad) del efecto de la esfera completa mayor].

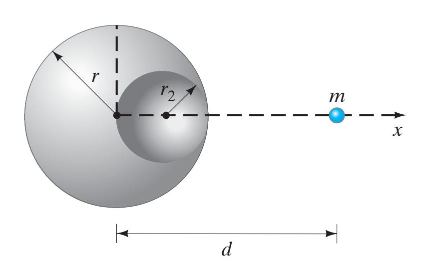


FIGURA 6–32 Problema 74.

75. En diferentes lugares de la Tierra, la fuerza gravitacional debida al Sol y a la Luna depende de la distancia del punto en la Tierra al Sol o a la Luna, y es esta variación lo que causa las **mareas**. Utilice los valores que aparecen en los forros de este libro para la distancia Tierra-Luna, R_{EM}, la distancia Tierra-Sol R_{ES}, la masa de la Luna M_M, la masa del Sol M_S y el radio de la Tierra R_E. *a*) Considere primero dos trozos pequeños de la Tierra, cada uno con masa m, uno en el lado de la Tierra más cercano a la Luna, y el otro en el lado más alejado de la Luna. Demuestre que la razón de las fuerzas gravitacionales de la Luna sobre esas dos masas es

$$\left(\frac{F_{cercana}}{F_{lejana}}\right)_M = 1.0687.$$

b) Luego considere dos trozos pequeños de la Tierra, cada uno con masa m, uno en el punto de la tierra más cercano al Sol, y el otro en el punto más alejado del Sol. Demuestre que la razón de las fuerzas gravitacionales del Sol sobre estas dos masas es

$$\left(\frac{F_{cercana}}{F_{lejana}}\right)_S = 1.000171.$$

c) Demuestre que la razón de la fuerza gravitacional promedio del Sol sobre la Tierra, comparada con la de la Luna, es

$$\left(\frac{F_S}{F_M}\right)_{prom} = 178.$$

Advierta que la fuerza más pequeña de la Luna varía mucho más a través del diámetro terrestre que la fuerza más grande del Sol. *d*) Estime la "diferencia en la fuerza" resultante (la causa de las mareas)

$$\Delta F = F_{cercana} - F_{lejana} = F_{lejana}\left(\frac{F_{cercana}}{F_{lejana}} - 1\right) \approx F_{avg}\left(\frac{F_{cercana}}{F_{lejana}} - 1\right)$$

para la Luna y para el Sol. Demuestre que el cociente de la diferencia de fuerzas que causan las mareas debida a la luna respecto de la diferencia de fuerzas debida al sol es

$$\frac{\Delta F_M}{\Delta F_S} \approx 2.3.$$

De manera que la influencia de la Luna sobre la producción de las mareas es más de dos veces mayor que la influencia del Sol.

76. Una partícula es soltada a una altura r_E (radio de la Tierra) por arriba de la superficie terrestre. Determine su velocidad cuando golpee la Tierra. Desprecie la resistencia del aire. [*Sugerencia*: Use la segunda ley de Newton, la ley de la gravitación universal, la regla de la cadena e integre].

* **77.** Estime el valor de la constante gravitacional G en la ley de Newton de la gravitación universal usando los siguientes datos: la aceleración debida a la gravedad en la superficie terrestre es de aproximadamente 10 m/s^2; la Tierra tiene una circunferencia aproximada de 40×10^6 m; las piedras encontradas en la superficie terrestre por lo general tienen densidades de aproximadamente 3000 kg/m^3 y se supone que esta densidad se mantiene constante (aun cuando usted piense que no es verdad).

78. Entre las órbitas de Marte y Júpiter, se mueven varios miles de pequeños objetos llamados asteroides en trayectorias casi circulares alrededor del Sol. Considere un asteroide de forma esférica con radio r y densidad de 2700 kg/m^3. *a*) Usted mismo se encuentra en la superficie de dicho asteroide y lanza una pelota de béisbol con una rapidez de 22 m/s (aproximadamente 50 mi/h). Si la pelota de béisbol viaja alrededor del asteroide en una órbita circular, ¿cuál sería el radio máximo del asteroide para el cual usted sería capaz de completar esta hazaña? *b*) Después de que usted lanza la pelota, gira sobre sus talones y queda de frente en el sentido opuesto y atrapa la pelota. ¿Cuánto tiempo T transcurriría entre el lanzamiento y la atrapada?

* Problemas numéricos/por computadora

* **79.** (II) La siguiente tabla muestra los datos de las distancias medias de los planetas (excepto Plutón) al Sol en nuestro Sistema Solar, y sus periodos de revolución alrededor del Sol.

Planeta	Distancia media (AU)	Periodo (años)
Mercurio	0.387	0.241
Venus	0.723	0.615
Tierra	1.000	1.000
Marte	1.524	1.881
Júpiter	5.203	11.88
Saturno	9.539	29.46
Urano	19.18	84.01
Neptuno	30.06	164.8

a) Grafique el cuadrado de los periodos como una función del cubo de las distancias promedio, y encuentre la recta de mejor ajuste. *b*) Si el periodo de Plutón es de 247.7 años, estime la distancia media de Plutón desde el Sol a partir del mejor ajuste lineal.

Respuestas a los ejercicios

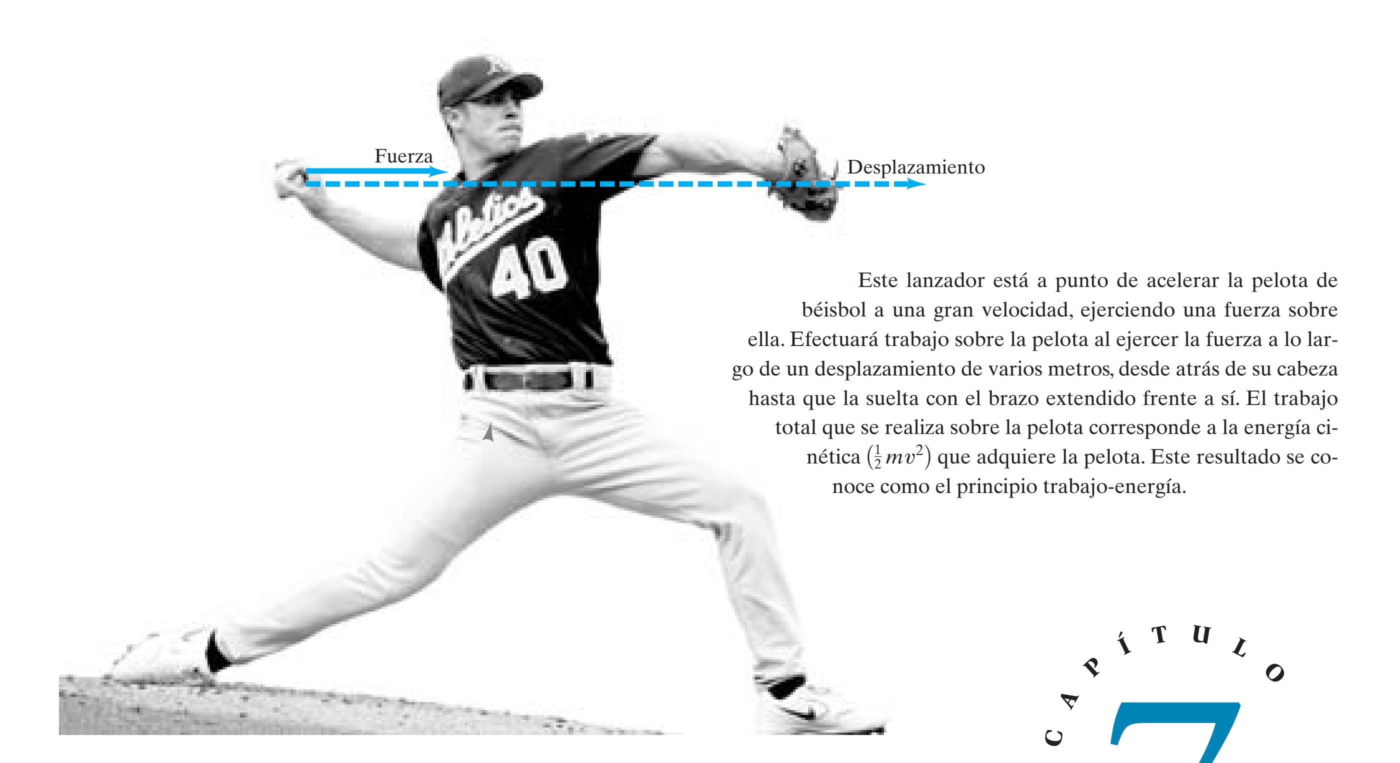
A: Se duplicaría g.

B: *b*).

C: *b*).

D: No; aun cuando experimentaran ingravidez, la bola masiva requeriría una fuerza grande para lanzarla y para desacelerarla al atraparla (masa inercial, segunda ley de Newton).

E: 6.17 años.



Este lanzador está a punto de acelerar la pelota de béisbol a una gran velocidad, ejerciendo una fuerza sobre ella. Efectuará trabajo sobre la pelota al ejercer la fuerza a lo largo de un desplazamiento de varios metros, desde atrás de su cabeza hasta que la suelta con el brazo extendido frente a sí. El trabajo total que se realiza sobre la pelota corresponde a la energía cinética $\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$ que adquiere la pelota. Este resultado se conoce como el principio trabajo-energía.

CAPÍTULO 7

Trabajo y energía

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine qué!

Usted empuja muy fuerte un escritorio pesado e intenta moverlo. Usted efectúa trabajo sobre el escritorio:

a) Ya sea que lo mueva o no, siempre y cuando usted ejerza una fuerza.
b) Sólo si el escritorio se mueve.
c) Sólo si el escritorio no se mueve.
d) Nunca; el escritorio hace trabajo sobre usted.
e) Ninguna de las anteriores.

Hasta ahora hemos estudiado el movimiento traslacional de un objeto en términos de las tres leyes de Newton del movimiento. En este análisis, la *fuerza* ha jugado un papel fundamental como la cantidad que determina el movimiento. En este capítulo y en los dos siguientes, veremos un análisis alternativo del movimiento traslacional de un objeto en términos de las cantidades *energía* y *cantidad de movimiento* (*momentum*). La importancia de tales cantidades es que se *conservan*. En circunstancias bastante generales permanecen constantes. El hecho de que existan cantidades que se conservan no sólo nos ofrece una noción más profunda de la naturaleza del mundo, sino también otra manera de enfocar la resolución de problemas prácticos.

Las leyes de conservación de la energía y la cantidad de movimiento son especialmente valiosas al tratar con sistemas de muchos objetos, donde una consideración detallada de las fuerzas implícitas sería difícil o imposible. Estas leyes son aplicables a una amplia gama de fenómenos, incluyendo los mundos atómico y subatómico, donde no son aplicables las leyes de Newton.

Este capítulo se dedica al concepto muy importante de *energía* y al concepto íntimamente asociado de *trabajo*. Estas dos cantidades son escalares, y por consiguiente, no tienen una dirección asociada a ellas, lo cual las hace más fácil de tratar que a las cantidades vectoriales como la aceleración y la fuerza.

CONTENIDO

FIGURA 7–1 Una persona jala una caja a lo largo del piso. El trabajo hecho por la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ es $W = Fd\cos\theta$, donde $\vec{\mathbf{d}}$ es el desplazamiento.

7–1 Trabajo realizado por una fuerza constante

La palabra *trabajo* tiene diversos significados en el lenguaje cotidiano. En física, sin embargo, al trabajo se le da un significado muy específico para describir lo que se logra cuando una fuerza actúa sobre un objeto, y éste se mueve a lo largo de cierta distancia. Por ahora consideraremos sólo el movimiento traslacional y, a menos que se indique otra cuestión, los objetos se supondrán *rígidos*, sin ningún movimiento interno y pueden tratarse como partículas. Entonces, el **trabajo** realizado sobre un objeto por una fuerza constante (en magnitud y dirección) se define como *el producto de la magnitud del desplazamiento del objeto multiplicado por la componente de la fuerza paralela al desplazamiento*. En forma de ecuación, podemos escribir

$$W = F_{\parallel} d,$$

donde $F_{\parallel}$ es la componente de la fuerza constante $\vec{\mathbf{F}}$ paralela al desplazamiento $\vec{\mathbf{d}}$. Podemos también escribir

$$W = Fd\cos\theta, \qquad \textbf{(7–1)}$$

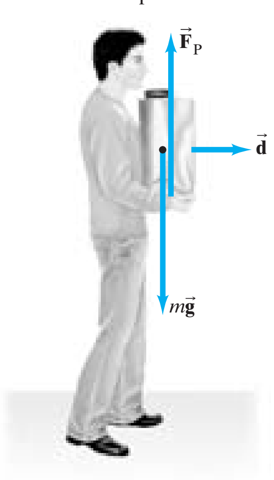
donde F es la magnitud de la fuerza constante, d es la magnitud del desplazamiento del objeto y θ es el ángulo entre los vectores fuerza y desplazamiento cola con cola. El factor $\cos\theta$ aparece en la ecuación 7-1 porque $F\cos\theta$ $(= F_{\parallel})$ es la componente de $\vec{\mathbf{F}}$ paralela a $\vec{\mathbf{d}}$. El trabajo es una cantidad escalar, ya que sólo tiene magnitud, aunque puede ser positivo o negativo.

Consideremos primero el caso en que el movimiento y la fuerza tienen la misma dirección y sentido, por lo que $\theta = 0$ y $\cos\theta = 1$; entonces, $W = Fd$. Por ejemplo, si usted empuja un carrito de supermercado cargado una distancia de 50 m, ejerciendo una fuerza horizontal de 30 N sobre el carrito, usted efectúa 30 N × 50 m = 1500 N·m de trabajo sobre él.

Como muestra este ejemplo, en unidades SI el trabajo se mide en newton-metro (N·m). A esta unidad se le da el nombre especial de **joule** (J): 1 J = 1 N·m.

[En el sistema cgs, la unidad de trabajo se llama *erg* y se define como 1 erg = 1 dina·cm. En unidades inglesas, el trabajo se mide en pie-libra. Es fácil demostrar que 1 J = 10^7 erg = 0.7376 ft·lb].

FIGURA 7–2 En este caso, la persona no efectúa trabajo sobre la bolsa de comestibles, ya que $\vec{\mathbf{F}}_P$ es perpendicular al desplazamiento $\vec{\mathbf{d}}$.



Una fuerza puede ser ejercida sobre un objeto y, sin embargo, no efectuar trabajo. Por ejemplo, si sostiene en las manos una pesada bolsa de comestibles en reposo, usted no efectúa trabajo sobre ella. Usted ejerce una fuerza, pero el desplazamiento de la bolsa es cero, por lo que el trabajo efectuado por usted sobre la bolsa es $W = 0$. Se necesita tanto fuerza como desplazamiento para realizar trabajo. Tampoco realiza trabajo sobre la bolsa de comestibles si la carga al caminar horizontalmente a lo largo del piso a velocidad constante, como se muestra en la figura 7-2. No se requiere ninguna fuerza horizontal para mover la bolsa a velocidad constante. No obstante, la persona de la figura 7-2 ejerce una fuerza hacia arriba $\vec{\mathbf{F}}_P$ sobre el paquete igual a su peso. Pero esta fuerza hacia arriba es perpendicular al movimiento horizontal de la bolsa y, por lo tanto, no efectúa trabajo. A esta conclusión se llega a partir de nuestra definición de traba-

jo, ecuación 7-1: $W = 0$, porque $\theta = 90°$ y $\cos 90° = 0$. Entonces, cuando una fuerza específica es perpendicular al desplazamiento, la fuerza no realiza ningún trabajo. Cuando usted empieza a caminar o se detiene, hay una aceleración horizontal y usted ejerce brevemente una fuerza horizontal que sí realiza trabajo sobre la bolsa.

Cuando tratamos con trabajo, así como con una fuerza, es necesario especificar si hablamos del trabajo efectuado *por* un objeto específico o *sobre* un objeto específico. También es importante puntualizar si el trabajo realizado se debe a una fuerza particular (y a cuál), o al trabajo total (neto) efectuado por la *fuerza neta* sobre el objeto.

CUIDADO
Especifique si el trabajo es efectuado sobre *un objeto o* por *un objeto*

EJEMPLO 7–1 **Trabajo efectuado sobre un cajón.** Una persona jala un cajón de 50 kg, 40 m a lo largo de un piso horizontal con una fuerza constante $F_P = 100$ N, que actúa a un ángulo de 37° como se muestra en la figura 7-3. El piso es liso y no ejerce ninguna fuerza de fricción. Determine *a*) el trabajo efectuado por cada una de las fuerzas que actúan sobre el cajón, y *b*) el trabajo neto efectuado sobre el cajón.

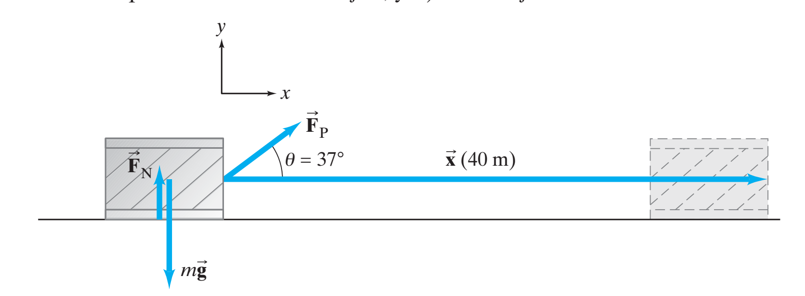


FIGURA 7–3 Ejemplo 7-1. Un cajón de 50 kg se jala a lo largo del piso liso.

PLANTEAMIENTO Elegimos nuestro sistema coordenado de manera que $\vec{x}$ sea el vector que representa el desplazamiento de 40 m (es decir, a lo largo del eje x). Hay tres fuerzas que actúan sobre el cajón, como se muestra en la figura 7-3: la fuerza ejercida por la persona, $\vec{F}_P$; la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra, $m\vec{g}$; y la fuerza normal $\vec{F}_N$ ejercida hacia arriba por el piso. La fuerza neta sobre el cajón es la suma vectorial de estas tres fuerzas.

SOLUCIÓN *a*) El trabajo efectuado por las fuerzas gravitacional y normal es cero, ya que éstas fuerzas son perpendiculares al desplazamiento $\vec{x}$ ($\theta = 90°$ en la ecuación 7-1):

$$W_G = mgx\cos 90° = 0$$
$$W_N = F_N x\cos 90° = 0.$$

El trabajo efectuado por $\vec{F}_P$ es

$$W_P = F_P x\cos\theta = (100\,\text{N})(40\,\text{m})\cos 37° = 3200\,\text{J}.$$

b) El trabajo neto puede calcularse de dos maneras equivalentes:
(1) El trabajo neto efectuado sobre un objeto es la suma algebraica del trabajo hecho por cada una de las fuerzas que actúan sobre el objeto, ya que el trabajo es un escalar:

$$\begin{aligned} W_{\text{net}} &= W_G + W_N + W_P \\ &= 0 + 0 + 3200\,\text{J} = 3200\,\text{J}. \end{aligned}$$

(2) El trabajo neto también puede calcularse determinando primero la fuerza neta que actúa sobre el objeto y tomando luego su componente a lo largo del desplazamiento: $(F_{\text{net}})_x = F_P\cos\theta$. El trabajo neto es entonces

$$\begin{aligned} W_{\text{net}} &= (F_{\text{net}})_x x = (F_P\cos\theta)x \\ &= (100\,\text{N})(\cos 37°)(40\,\text{m}) = 3200\,\text{J}. \end{aligned}$$

En la dirección vertical (y) no hay desplazamiento y, por lo tanto, tampoco se realiza trabajo.

EJERCICIO A Un fuerza $\vec{F}_P$ que forma un ángulo θ con la horizontal, como en las figuras 7-1 o 7-3, arrastra un cajón una distancia d por el suelo. Si la magnitud de $\vec{F}_P$ se mantiene constante, pero aumenta el ángulo θ, el trabajo efectuado por $\vec{F}_P$ *a*) permanece igual; *b*) aumenta; *c*) disminuye; *d*) primero aumenta, pero luego disminuye.

EJERCICIO B Regrese a la Pregunta de inicio de capítulo de la página 163 y respóndala de nuevo. Intente explicar por qué usted quizá la haya contestado diferente la primera vez.

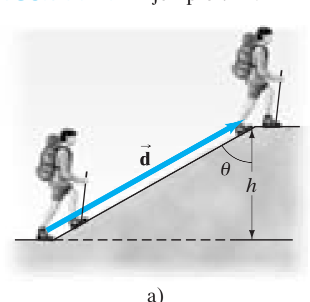
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Trabajo

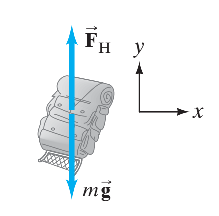
1. **Dibuje un diagrama de cuerpo libre** que muestre todas las fuerzas que actúan sobre el objeto que usted eligió estudiar.
2. **Escoja** un **sistema coordenado** *xy*. Si el objeto está en movimiento, sería conveniente elegir uno de los ejes coordenados paralelo a una de las fuerzas, o paralelo a la dirección del movimiento. [Así, para un objeto sobre un plano inclinado, usted podría elegir un eje coordenado paralelo al plano inclinado].
3. **Aplique las leyes de Newton** para determinar cualquier fuerza desconocida.
4. Encuentre el **trabajo efectuado *por* cada fuerza específica** que actúa *sobre* el objeto usando $W = Fd\cos\theta$ para una fuerza constante. Advierta que el trabajo efectuado por una fuerza es negativo cuando la fuerza aplicada se opone al desplazamiento.
5. Para encontrar el **trabajo neto** efectuado sobre el objeto, *a*) encuentre el trabajo hecho por cada fuerza y sume algebraicamente los resultados, o *b*) encuentre la fuerza neta sobre el objeto F_{net} y luego úsela para encontrar el trabajo neto efectuado, que para una fuerza constante es:

$$W_{\text{net}} = F_{\text{net}}\, d\cos\theta.$$

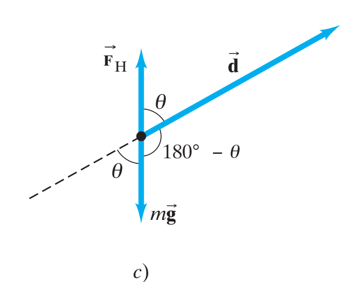
FIGURA 7–4 Ejemplo 7–2.



a)



b)



c)



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

El trabajo hecho por la gravedad depende de la altura de la colina y no del ángulo del plano inclinado

EJEMPLO 7–2 Trabajo efectuado sobre una mochila. *a*) Determine el trabajo que un alpinista debe efectuar sobre una mochila de 15.0 kg al subirla por una colina de altura $h = 10.0$ m, como se muestra en la figura 7-4a. Determine también *b*) el trabajo efectuado por la gravedad sobre la mochila y *c*) el trabajo neto efectuado sobre la mochila. Por sencillez, suponga que el movimiento es suave y a velocidad constante (es decir, la aceleración es despreciable).

PLANTEAMIENTO Seguimos explícitamente los pasos del recuadro de Estrategia de resolución de problemas.

SOLUCIÓN

1. **Dibuje un diagrama de cuerpo libre**. Las fuerzas sobre la mochila se muestran en la figura 7-4b: la fuerza de gravedad, $m\vec{\mathbf{g}}$, que actúa hacia abajo; y $\vec{\mathbf{F}}_{\text{H}}$, la fuerza que el alpinista ejerce hacia arriba para soportar la mochila. Como suponemos que la aceleración es cero, las fuerzas horizontales son despreciables.
2. **Elija un sistema coordenado.** Nos interesa el movimiento vertical de la mochila, así que elegimos la coordenada *y* como positiva verticalmente hacia arriba.
3. **Aplique las leyes de Newton**. La segunda ley de Newton aplicada en el sentido vertical a la mochila da

$$\Sigma F_y = ma_y$$
$$F_{\text{H}} - mg = 0$$

ya que $a_y = 0$. Por consiguiente,

$$F_{\text{H}} = mg = (15.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2) = 147\text{ N}.$$

4. **Encuentre el trabajo efectuado por cada fuerza específica**. *a*) Para calcular el trabajo realizado por el alpinista sobre la mochila, escribimos la ecuación 7-1 como

$$W_{\text{H}} = F_{\text{H}}(d\cos\theta),$$

y de la figura 7-4a notamos que $d\cos\theta = h$. Por lo que el trabajo efectuado por el alpinista es

$$W_{\text{H}} = F_{\text{H}}(d\cos\theta) = F_{\text{H}}h = mgh$$
$$= (147\text{ N})(10.0\text{ m}) = 1470\text{ J}.$$

Note que el trabajo efectuado depende sólo del cambio en elevación y no del ángulo θ de la colina. El alpinista haría el mismo trabajo al levantar la mochila verticalmente la misma altura *h*.

b) El trabajo efectuado por la gravedad sobre la mochila es (de la ecuación 7-1 y la figura 7-4c):

$$W_{\text{G}} = F_{\text{G}}\, d\cos(180° - \theta).$$

Como $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$, tenemos

$$W_{\text{G}} = F_{\text{G}}\, d(-\cos\theta) = mg(-d\cos\theta)$$
$$= -mgh$$
$$= -(15.0\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(10.0\text{ m}) = -1470\text{ J}.$$

NOTA El trabajo efectuado por la gravedad (que aquí es negativo) tampoco depende del ángulo del plano inclinado, sino sólo depende de la altura *h* vertical de éste. Ello se debe a que la gravedad actúa sólo en la dirección vertical, por lo que únicamente la componente vertical del desplazamiento contribuye con el trabajo efectuado.

5. **Determine el trabajo neto realizado.** *c*) El trabajo *neto* efectuado sobre la mochila es $W_{\text{net}} = 0$, ya que la fuerza neta sobre ella es cero (se supone que no acelera en forma considerable). Podemos también determinar el trabajo neto realizado sumando el trabajo efectuado por cada fuerza.

$$W_{\text{net}} = W_{\text{G}} + W_{\text{H}} = -1470\text{ J} + 1470\text{ J} = 0.$$

NOTA Aunque el trabajo *neto* efectuado por todas las fuerzas sobre la mochila es cero, el alpinista *sí efectúa* un trabajo sobre la mochila igual a 1470 J.

EJEMPLO CONCEPTUAL 7–3 **¿La Tierra realiza trabajo sobre la Luna?** La Luna gira alrededor de la Tierra en una órbita casi circular, con rapidez tangencial aproximadamente constante, y es mantenida en órbita debido a la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra. ¿La gravedad efectúa *a*) trabajo positivo, *b*) trabajo negativo, o *c*) ningún trabajo sobre la Luna?

RESPUESTA La fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_G$ sobre la Luna (figura 7-5) actúa hacia la Tierra y constituye la fuerza centrípeta sobre la Luna, dirigida de la Luna hacia la Tierra a lo largo del radio de la órbita de la Luna. El desplazamiento de la Luna en cualquier momento es tangente a la circunferencia, en la dirección de su velocidad, perpendicular al radio y por lo tanto perpendicular a la fuerza de la gravedad. Por lo tanto, el ángulo θ entre la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_G$ y el desplazamiento instantáneo de la Luna es de 90°, y por lo tanto el trabajo efectuado por la fuerza de gravedad es cero (cos 90° = 0). Ésta es la razón por la cual la Luna, así como los satélites artificiales, puede permanecer en órbita sin consumir combustible, ya que no es necesario realizar trabajo en contra de la fuerza de la gravedad.

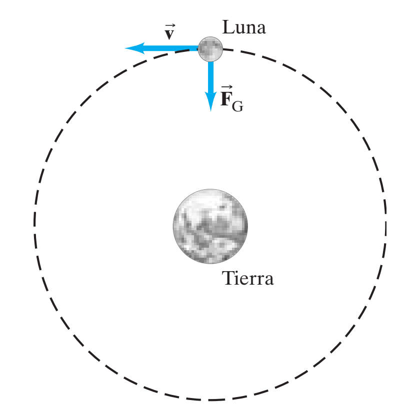


FIGURA 7–5 Ejemplo 7–3.

7–2 Producto escalar de dos vectores

Aunque el trabajo es un escalar, implica el producto de dos cantidades, fuerza y desplazamiento, cada una de las cuales es un vector. Estudiaremos ahora la multiplicación de vectores, que usaremos a lo largo de todo el libro, y la aplicaremos para calcular el trabajo realizado por una fuerza.

Como los vectores tienen magnitud, dirección y sentido no pueden multiplicarse de la misma manera que los escalares. Debemos *definir* qué significa la operación de multiplicación entre vectores. Entre las diversas formas posibles de definir cómo multiplicar vectores, hay tres que nos serán de utilidad en el estudio de la física: 1) multiplicación de un vector por un escalar, que ya vimos en la sección 3-3; 2) multiplicación de un vector por un segundo vector para producir un escalar; 3) multiplicación de un vector por un segundo vector para producir otro vector. El tercer tipo, llamado *producto vectorial*, lo estudiaremos más adelante en la sección 11-2.

Veremos ahora el segundo tipo, llamado *producto escalar*, o *producto punto* (porque se usa un punto para indicar la multiplicación). Si tenemos dos vectores, $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, su **producto escalar** (o **producto punto**) se define como

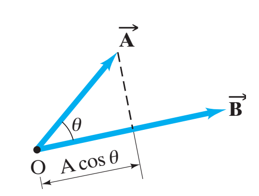
$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB\cos\theta, \qquad \textbf{(7–2)}$$

donde A y B son las magnitudes de los vectores y θ es el ángulo (< 180°) entre ellos cola con cola (figura 7-6). Como A, B y cos θ son escalares, entonces también lo será el producto escalar $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ (que se lee “A punto B”).

Esta definición, ecuación 7-2, se ajusta perfectamente con nuestra definición del trabajo realizado por una fuerza constante, ecuación 7-1. Es decir, podemos escribir el trabajo efectuado por una fuerza constante como el producto escalar de una fuerza y un desplazamiento:

$$W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}} = Fd\cos\theta. \qquad \textbf{(7–3)}$$

FIGURA 7–6 El producto escalar, o producto punto, de dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ es $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB\cos\theta$. El producto escalar se puede interpretar como la magnitud de un vector (B en este caso) multiplicada por la proyección del otro vector, $A\cos\theta$, sobre $\vec{\mathbf{B}}$.



De hecho, la definición del producto escalar, ecuación 7-2, se elige así porque muchas cantidades físicas importantes, como el trabajo (y otras que encontraremos después), pueden describirse como el producto escalar de dos vectores.

Una definición equivalente del producto escalar es como el producto de la magnitud de un vector (digamos B) por la componente (o proyección) del otro vector, a lo largo de la dirección del primero (A cos θ). Véase la figura 7-6.

Puesto que A, B y cos θ son escalares, no importa en qué orden se multipliquen. Por consiguiente, el producto escalar es **conmutativo**:

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}}. \qquad \text{[propiedad conmutativa]}$$

También es sencillo demostrar que es **distributivo** (véase el problema 33 para la prueba):

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{C}}. \qquad \text{[propiedad distributiva]}$$

Escribamos nuestros vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ en términos de sus componentes rectangulares usando vectores unitarios (sección 3-5, ecuación 3-5) como

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$
$$\vec{\mathbf{B}} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}.$$

Tomaremos el producto escalar, $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$, de estos dos vectores, recordando que los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$, son perpendiculares entre sí:

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1$$
$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 0.$$

De manera que el producto escalar es igual a

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \left(A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}\right)\cdot\left(B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}\right)$$
$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \qquad \textbf{(7–4)}$$

La ecuación 7-4 es de gran utilidad.

Si $\vec{\mathbf{A}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$, la ecuación 7-2 nos indica que $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB\cos 90° = 0$. Pero si tenemos que $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$, puede ocurrir de tres formas diferentes: $\vec{\mathbf{A}} = 0$, $\vec{\mathbf{B}} = 0$, o $\vec{\mathbf{A}} \perp \vec{\mathbf{B}}$.



FIGURA 7–7 Ejemplo 7-4. El trabajo realizado por una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_P$ que actúa formando un ángulo θ respecto del suelo es $W = \vec{\mathbf{F}}_P \cdot \vec{\mathbf{d}}$.

EJEMPLO 7–4 **Uso del producto punto.** La fuerza que se ilustra en la figura 7-7 tiene magnitud $F_P = 20$ N y forma un ángulo de 30° con el suelo. Calcule el trabajo realizado por esta fuerza usando la ecuación 7-4 cuando el carro se jala 100 m a lo largo del suelo.

PLANTEAMIENTO Elegimos el eje x horizontal hacia la derecha y el eje y vertical hacia arriba, y escribimos $\vec{\mathbf{F}}_P$ y $\vec{\mathbf{d}}$ en términos de vectores unitarios.

SOLUCIÓN

$$\vec{\mathbf{F}}_P = F_x\hat{\mathbf{i}} + F_y\hat{\mathbf{j}} = \left(F_P\cos 30°\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(F_P\,\text{sen}\,30°\right)\hat{\mathbf{j}} = (17\,\text{N})\,\hat{\mathbf{i}} + (10\,\text{N})\,\hat{\mathbf{j}},$$

mientras que $\vec{\mathbf{d}} = (100\,\text{m})\,\hat{\mathbf{i}}$. Entonces, usando la ecuación 7-4,

$$W = \vec{\mathbf{F}}_P\cdot\vec{\mathbf{d}} = (17\,\text{N})(100\,\text{m}) + (10\,\text{N})(0) + (0)(0) = 1700\,\text{J}.$$

Note que al elegir el eje x a lo largo de $\vec{\mathbf{d}}$ simplificamos el cálculo porque entonces $\vec{\mathbf{d}}$ tiene sólo una componente.

7–3 Trabajo efectuado por una fuerza variable

Si la fuerza que actúa sobre un objeto es constante, el trabajo realizado por dicha fuerza puede calcularse usando la ecuación 7-1. Sin embargo, en muchos casos la fuerza varía en magnitud o dirección durante un proceso. Por ejemplo, cuando un cohete se aleja de la Tierra, se realiza trabajo para vencer la fuerza de la gravedad, que varía según el cuadrado inverso de la distancia desde el centro de la Tierra. Otros ejemplos son la fuerza ejercida por un resorte, que crece con la magnitud del alargamiento o compresión del resorte, o el trabajo realizado por una fuerza variable que se ejerce al jalar una caja o un carro hacia arriba por una pendiente irregular.

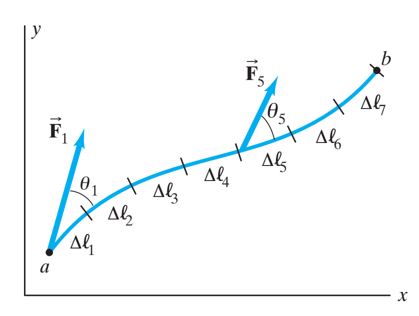


FIGURA 7–8 Una partícula, sobre la que actúa un fuerza variable $\vec{\mathbf{F}}$, se mueve a lo largo de la trayectoria que se muestra del punto *a* al punto *b*.

La figura 7-8 muestra la trayectoria de un objeto en el plano *xy* al moverse del punto a al punto b. La trayectoria se dividió en intervalos cortos, cada uno de longitud $\Delta\ell_1, \Delta\ell_2, \ldots, \Delta\ell_7$. Una fuerza dada $\vec{\mathbf{F}}$ actúa en cada punto sobre la trayectoria y está indicada sólo en dos puntos como $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_5$. Durante cada intervalo pequeño $\Delta\ell$, la fuerza es aproximadamente constante. Para el primer intervalo, la fuerza realiza un trabajo ΔW de valor aproximado (véase la ecuación 7-1):

$$\Delta W \approx F_1 \cos\theta_1 \Delta\ell_1 .$$

En el segundo intervalo, el trabajo realizado es aproximadamente $F_2 \cos\theta_2 \Delta\ell_2$, etcétera. El trabajo total hecho cuando la partícula recorre la distancia total $\ell = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 + \ldots + \Delta\ell_7$ es la suma de todos estos términos:

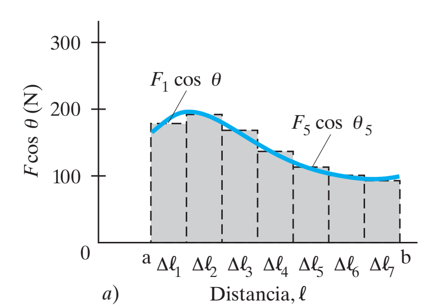
$$W \approx \sum_{i=1}^{7} F_i \cos\theta_i \Delta\ell_i . \qquad \textbf{(7–5)}$$

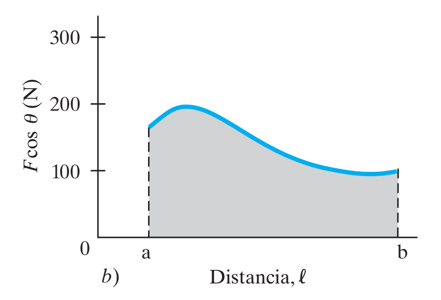
Podemos examinar esto gráficamente trazando $F\cos\theta$ versus la distancia ℓ a lo largo de la trayectoria, como se muestra en la figura 7-9a. La distancia ℓ se subdividió en los mismos siete intervalos (véase las líneas punteadas verticales). El valor de $F\cos\theta$ en el centro de cada intervalo se indica con las líneas punteadas *horizontales*. Cada uno de los rectángulos sombreados tiene una área $(F_i \cos\theta)(\Delta\ell_i)$, que es un buen estimado del trabajo realizado durante ese intervalo. La estimación del trabajo efectuado a lo largo de toda la trayectoria (ecuación 7- 5) es, entonces, igual a la suma de las áreas de todos los rectángulos. Si subdividimos la distancia en un número de intervalos mayor, de manera que cada $\Delta\ell_i$ sea más pequeña, la estimación del trabajo hecho será más exacta (la suposición de que F es constante en cada intervalo es más precisa). Si hacemos que cada $\Delta\ell_i$ tienda a cero (y por ende, el número de intervalos tienda a infinito), obtenemos un resultado exacto para el trabajo realizado:

$$W = \lim_{\Delta\ell_i \to 0} \Sigma F_i \cos\theta_i \Delta\ell_i = \int_a^b F\cos\theta\, d\ell. \qquad \textbf{(7–6)}$$

Este límite cuando $\Delta\ell_i \to 0$ es la *integral* de ($F\cos\theta\, d\ell$) del punto a al punto b. El símbolo para la integral, $\int$, es una *S* alargada que indica una suma infinita; y $\Delta\ell$ se reemplazó por $d\ell$, lo que significa una distancia infinitesimal. [También analizamos esto en la sección 2-9, que es opcional].

FIGURA 7–9 El trabajo realizado por una fuerza *F* es *a*) aproximadamente igual a la suma de las áreas de los rectángulos, *b*) exactamente igual al área bajo la curva de $F\cos\theta$ versus ℓ.





En el límite cuando $\Delta\ell$ tiende a cero, el área total de los rectángulos (figura 7-9a) tiende al área entre la curva ($F\cos\theta$) y el eje ℓ desde el punto a hasta el punto b, que se muestra sombreada en la figura 7-9b. Es decir, *el trabajo realizado por una fuerza variable al mover un objeto entre dos puntos es igual al área bajo la curva* ($F\cos\theta$) *versus* (ℓ) *entre esos dos puntos*.

En el límite cuando $\Delta\ell$ tiende a cero, la distancia infinitesimal $d\ell$ es igual a la magnitud del vector desplazamiento infinitesimal $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$. La dirección del vector $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ es a lo largo de la tangente a la trayectoria en ese punto, por lo que θ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{F}}$ y $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ en ese punto. Podemos entonces reescribir la ecuación 7-6, usando la notación del producto punto:

$$W = \int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}. \qquad \textbf{(7–7)}$$

Ésta es la *definición general de trabajo*. En esta ecuación, a y b representan dos puntos en el espacio, (x_a, y_a, z_a) y (x_b, y_b, z_b). La integral en la ecuación 7-7 se llama *integral de línea*, ya que es la integral de $F\cos\theta$ a lo largo de la línea que representa la trayectoria del objeto entre los puntos a y b. (La ecuación 7-1 para una fuerza constante es un caso particular de la ecuación 7-7).

En coordenadas rectangulares, cualquier fuerza se puede escribir como

$$\vec{\mathbf{F}} = F_x\hat{\mathbf{i}} + F_y\hat{\mathbf{j}} + F_z\hat{\mathbf{k}}$$

y el desplazamiento $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ es

$$d\vec{\boldsymbol{\ell}} = dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}} + dz\hat{\mathbf{k}}.$$

El trabajo efectuado puede entonces escribirse como

$$W = \int_{x_a}^{x_b} F_x\,dx + \int_{y_a}^{y_b} F_y\,dy + \int_{z_a}^{z_b} F_z\,dz.$$

Para usar la ecuación 7-6 o la 7-7 para calcular el trabajo, hay varias opciones: 1) Si $F\cos\theta$ se conoce como función de la posición, se puede dibujar una gráfica como la de la figura 7-9b y determinar el área gráficamente el área bajo la curva. 2) Otra posibilidad consiste en usar integración numérica, tal vez con ayuda de una computadora o una calculadora. 3) Una tercera posibilidad es usar los métodos analíticos del cálculo integral cuando sea factible. Para hacerlo así, tenemos que escribir $\vec{\mathbf{F}}$ como función de la posición, $F(x, y, z)$, y conocer la trayectoria. Veamos algunos ejemplos específicos.

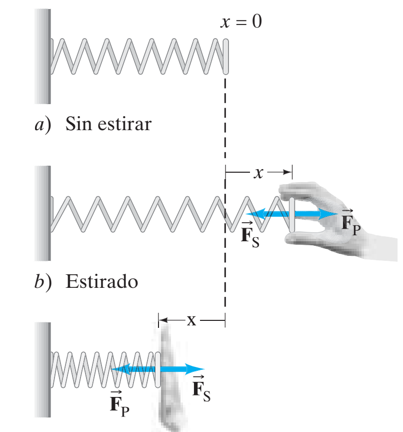
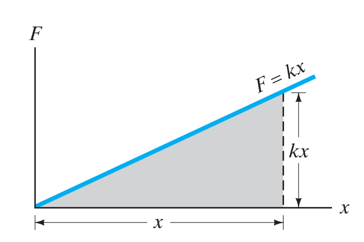


FIGURA 7–10 *a*) Resorte en posición normal (sin estirar). *b*) El resorte es estirado por una persona que ejerce una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_P$ hacia la derecha (sentido positivo). El resorte jala de regreso con una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_S$ donde $F_S = -kx$. *c*) La persona comprime el resorte ($x < 0$), y éste empuja de regreso con una fuerza $F_S = -kx$, donde $F_S > 0$ porque $x < 0$.

FIGURA 7–11 El trabajo hecho al estirar un resorte una distancia x es igual al área triangular bajo la curva $F = kx$. El área de un triángulo es $\frac{1}{2}\times$ base $\times$ altura, por lo que $W = \frac{1}{2}(x)(kx) = \frac{1}{2}kx^2$.



Trabajo efectuado por la fuerza de un resorte

Determinemos el trabajo necesario para estirar o comprimir un resorte en espiral, como el mostrado en la figura 7-10. Para que una persona mantenga un resorte estirado o comprimido una cantidad x desde su longitud natural (sin estirar) se requiere una fuerza F_P que es directamente proporcional a la deformación x. Es decir,

$$F_P = kx,$$

donde k es una constante llamada *constante del resorte* (o *constante de rigidez del resorte*), y es una medida de la rigidez de un resorte particular. El resorte mismo ejerce una fuerza sobre la mano en el sentido opuesto (figura 7-10b o c):

$$F_S = -kx. \qquad \textbf{(7–8)}$$

Esta fuerza se llama a veces "fuerza restauradora" porque el resorte ejerce su fuerza en sentido opuesto al desplazamiento (por ello, el signo menos), actuando así para regresarlo a su longitud natural. La ecuación 7-8 se conoce como la **ecuación de resorte** y también como la **ley de Hooke**, y es exacta para resortes siempre que x no sea demasiado grande comparada con la longitud natural (véase la sección 12-4) y no ocurra ninguna deformación permanente.

Calculemos el trabajo que realiza una persona al estirar (o comprimir) un resorte a partir de su longitud natural (no estirada), $x_a = 0$, hasta una longitud adicional, $x_b = x$. Suponemos que el estiramiento se hace lentamente, de manera que la aceleración es esencialmente cero. La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_P$ es ejercida paralelamente al eje del resorte, a lo largo del eje x, por lo que $\vec{\mathbf{F}}_P$ y $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ son paralelos. Por consiguiente, como en este caso $d\vec{\boldsymbol{\ell}} = dx\hat{\mathbf{i}}$, el trabajo hecho por la persona es[†]

$$W_P = \int_{x_a=0}^{x_b=x} \left[F_P(x)\hat{\mathbf{i}}\right]\cdot\left[dx\hat{\mathbf{i}}\right] = \int_0^x F_P(x)\,dx = \int_0^x kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx^2\Big|_0^x = \tfrac{1}{2}kx^2.$$

(Como se hace a menudo, hemos usado x para representar tanto la variable de integración como el valor particular de x al final del intervalo $x_a = 0$ a $x_b = x$). Vemos entonces que el trabajo necesario es proporcional al cuadrado de la distancia estirada (o comprimida) x.

Este mismo resultado se obtiene calculando el área bajo la gráfica de F versus x (en este caso, con $\cos\theta = 1$), como se muestra en la figura 7-11. Como el área es un triángulo de altura kx con base x, el trabajo que realiza una persona, al estirar o comprimir un resorte una cantidad x, es

$$W = \tfrac{1}{2}(x)(kx) = \tfrac{1}{2}kx^2,$$

que es el mismo resultado que antes. Como $W \propto x^2$, requiere la misma cantidad de trabajo estirar o comprimir un resorte la misma cantidad x.

[†]Véase la tabla de integrales en el Apéndice B.

EJEMPLO 7–5 **Trabajo efectuado sobre un resorte.** *a*) Una persona jala el resorte de la figura 7-10, alargándolo 3.0 cm, lo cual requiere una fuerza máxima de 75 N. ¿Cuánto trabajo realiza la persona? *b*) Si en cambio, la persona comprime el resorte 3.0 cm, ¿cuánto trabajo realiza ahora?

PLANTEAMIENTO La relación $F = kx$ se cumple en cada punto, incluyendo $x_{\text{máx}}$. Por lo tanto, $F_{\text{máx}}$ ocurre en $x = x_{\text{máx}}$.

SOLUCIÓN *a*) Primero tenemos que calcular la constante k del resorte:

$$k = \frac{F_{\text{máx}}}{x_{\text{máx}}} = \frac{75\text{ N}}{0.030\text{ m}} = 2.5 \times 10^3\text{ N/m}.$$

El trabajo efectuado por la persona sobre el resorte es

$$W = \tfrac{1}{2}kx^2_{\text{máx}} = \tfrac{1}{2}(2.5 \times 10^3\text{ N/m})(0.030\text{ m})^2 = 1.1\text{ J}.$$

b) La fuerza que la persona ejerce es aún $F_P = kx$, aunque ahora tanto x como F_P son negativas (x es positiva hacia la derecha). El trabajo realizado es

$$W_P = \int_{x=0}^{x=-0.030\text{ m}} F_P(x)\,dx = \int_0^{x=-0.030\text{ m}} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx^2\Big|_0^{-0.030\text{ m}}$$

$$= \tfrac{1}{2}(2.5 \times 10^3\text{ N/m})(-0.030\text{ m})^2 = 1.1\text{ J},$$

que es el mismo trabajo que para estirarlo.

NOTA No podemos usar $W = Fd$ (ecuación 7-1) para un resorte porque la fuerza no es constante.

Ley de una fuerza más compleja: El brazo de un robot

EJEMPLO 7–6 **Fuerza en función de *x*.** En un sistema automático de vigilancia, un brazo de robot que controla la posición de una cámara de video (figura 7-12) es manipulado por un motor que ejerce una fuerza sobre el brazo. La fuerza está dada por

$$F(x) = F_0\left(1 + \frac{1}{6}\frac{x^2}{x_0^2}\right),$$

donde $F_0 = 2.0$ N, $x_0 = 0.0070$ m, y x es la posición del extremo del brazo. Si éste se mueve de $x_1 = 0.010$ m a $x_2 = 0.050$ m, ¿cuánto trabajo realizó el motor?

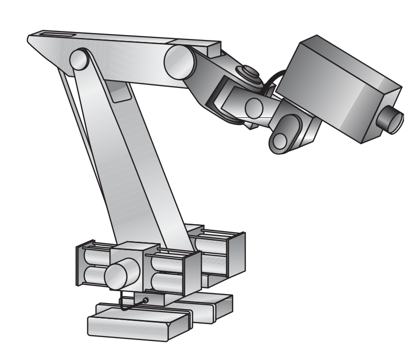
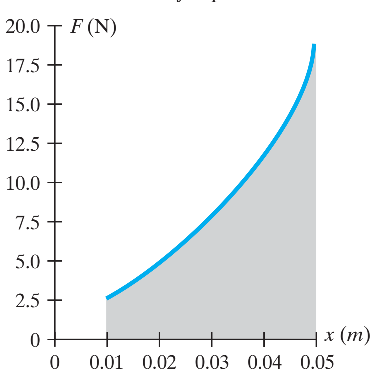


FIGURA 7–12 El brazo del robot controla una cámara de video.

PLANTEAMIENTO La fuerza aplicada por el motor no es una función lineal de x. Podemos determinar la integral $\int F(x)dx$, o el área bajo la curva $F(x)$ (que se muestra en la figura 7-13).

FIGURA 7–13 Ejemplo 7-6.



SOLUCIÓN Integramos para hallar el trabajo realizado por el motor:

$$W_M = F_0\int_{x_1}^{x_2}\left(1 + \frac{x^2}{6x_0^2}\right)dx = F_0\int_{x_1}^{x_2}dx + \frac{F_0}{6x_0^2}\int_{x_1}^{x_2}x^2\,dx$$

$$= F_0\left(x + \frac{1}{6x_0^2}\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}.$$

Insertamos los valores dados y obtenemos

$$W_M = 2.0\text{ N}\left[(0.050\text{ m} - 0.010\text{ m}) + \frac{(0.050\text{ m})^3 - (0.010\text{ m})^3}{(3)(6)(0.0070\text{ m})^2}\right] = 0.36\text{ J}.$$

7–4 Energía cinética y el principio del trabajo y la energía

La *energía* es uno de los conceptos más importantes de la ciencia. Sin embargo, no podemos dar una definición general simple de la energía en unas cuantas palabras. No obstante, cada tipo específico de energía puede definirse fácilmente. En este capítulo definimos la energía cinética traslacional; en el siguiente capítulo nos ocuparemos de la energía potencial. En capítulos posteriores definiremos otros tipos de energía, como la relacionada con el calor (capítulos 19 y 20). El aspecto fundamental de todos los tipos de energía es que la suma de todos los tipos, la *energía total*, es la misma antes y después de que ocurra cualquier proceso: es decir, la energía es una cantidad que se conserva.

Para los propósitos de este capítulo, definimos la energía en la manera usual como "la capacidad de realizar trabajo". Esta simple definición no es muy precisa, ni es realmente válida para todos los tipos de energía.† Sin embargo, funciona para la energía mecánica que estudiamos en este capítulo y en el siguiente. Definimos y analizamos ahora uno de los tipos básicos de energía: la energía cinética.

Un objeto en movimiento puede efectuar trabajo sobre otro objeto al que golpea. Una bala de cañón disparada efectúa trabajo sobre una pared de ladrillos al derribarla; un martillo que se mueve realiza trabajo sobre un clavo al insertarlo en la madera. En cualquier caso, un objeto en movimiento ejerce una fuerza sobre un segundo objeto que sufre un desplazamiento. Un objeto en movimiento tiene la capacidad de efectuar trabajo y se dice entonces que tiene energía. La energía de movimiento se llama **energía cinética**, palabra derivada del griego *kinetikos* que significa "movimiento".

Para obtener una definición cuantitativa para la energía cinética, consideremos un simple objeto rígido de masa m (tratado como una partícula), que se mueve en línea recta con una rapidez inicial v_1. Para acelerarlo uniformemente hasta una rapidez v_2, se ejerce una fuerza neta constante F_{net} sobre el objeto, paralela a su movimiento a lo largo de un desplazamiento d, figura 7-14. Entonces el trabajo neto efectuado sobre el objeto es $W_{net} = F_{net}\,d$. Aplicamos la segunda ley de Newton, $F_{net} = ma$ y usamos la ecuación 2-12c $\left(v_2^2 = v_1^2 + 2ad\right)$, que reescribimos ahora como

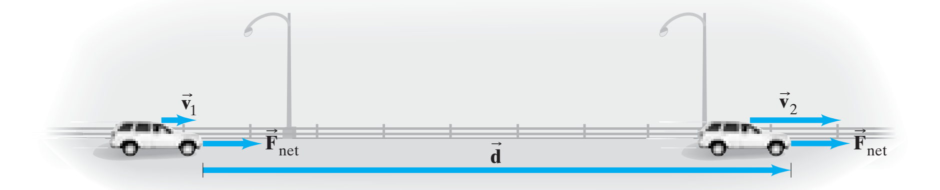


FIGURA 7–14 Una fuerza neta constante F_{net} acelera un automóvil desde una rapidez v_1 hasta una rapidez v_2 a lo largo de un desplazamiento d. El trabajo efectuado es $W_{net} = F_{net}d$.

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2d},$$

donde v_1 es la rapidez inicial y v_2 es la rapidez final. Sustituimos esto en $F_{net} = ma$ y determinamos el trabajo realizado:

$$W_{net} = F_{net}\,d = mad = m\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2d}\right)d = m\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}\right)$$

o bien,

$$W_{net} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2. \qquad \textbf{(7–9)}$$

Definimos la cantidad $\frac{1}{2}mv^2$ como la **energía cinética traslacional** K del objeto:

Definición de energía cinética

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2. \qquad \textbf{(7–10)}$$

(Llamamos a esta energía cinética "traslacional" para distinguirla de la energía cinética rotacional, que veremos en el capítulo 10). La ecuación 7-9, expresada aquí para el movimiento unidimensional con una fuerza constante, es válida en general para el movimiento traslacional de un objeto en tres dimensiones e incluso si la fuerza varía, como lo demostraremos al final de esta sección.

†La energía asociada con el calor a menudo no está disponible para efectuar trabajo, como veremos en el capítulo 20.

Podemos reescribir la ecuación 7-9 como:

$$W_{\text{net}} = K_2 - K_1$$

o bien,

$$W_{\text{net}} = \Delta K = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2. \quad \textbf{(7–11)}$$

PRINCIPIO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA CINÉTICA

La ecuación 7-11 (o ecuación 7-9) es un resultado útil que se conoce como el **principio del trabajo y la energía**, que puede enunciarse como:

El trabajo neto efectuado sobre un objeto es igual al cambio en su energía cinética.

PRINCIPIO DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA CINÉTICA

Advierta que usamos la segunda ley de Newton, $F_{\text{net}} = ma$, donde F_{net} es la fuerza *neta* o la suma de todas las fuerzas que actúan sobre el objeto. De manera que el principio del trabajo y la energía es válido sólo si W es el *trabajo neto* realizado sobre el objeto, es decir, el trabajo efectuado por todas las fuerzas que actúan sobre el objeto.

CUIDADO

El principio del trabajo y la energía es válido sólo para trabajo neto

El principio del trabajo y la energía es una reformulación muy útil de las leyes de Newton y nos indica que si se realiza un trabajo neto (positivo) W sobre un objeto, la energía cinética de éste se incrementa en una cantidad W. El principio también es válido en la situación inversa: si el trabajo neto W realizado sobre un objeto es negativo, entonces la energía cinética de éste disminuye en una cantidad W. Es decir, una fuerza neta ejercida sobre un objeto opuesta a la dirección de su movimiento reduce su rapidez y su energía cinética. Un ejemplo es un martillo en movimiento (figura 7-15) que golpea un clavo. La fuerza neta sobre el martillo ($-\vec{\mathbf{F}}$ en la figura 7-15, donde $\vec{\mathbf{F}}$ se supone constante por sencillez) actúa hacia la izquierda; mientras que el desplazamiento $\vec{\mathbf{d}}$ del martillo es hacia la derecha. Así, el trabajo neto hecho sobre el martillo $W_h = (F)(d)(\cos 180°) = -Fd$, es negativo y por lo tanto disminuye la energía cinética del martillo (usualmente hasta cero).

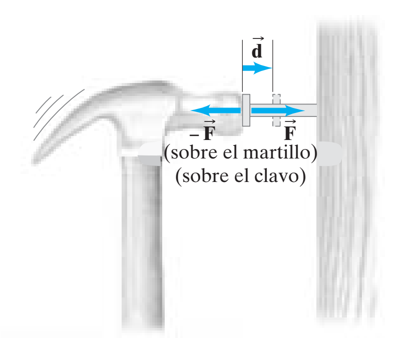


FIGURA 7–15 Un martillo en movimiento golpea un clavo y llega al reposo. El martillo ejerce una fuerza F sobre el clavo; éste ejerce una fuerza $-F$ sobre el martillo (tercera ley de Newton). El trabajo hecho sobre el clavo (nail) por el martillo es positivo ($W_n = Fd > 0$). El trabajo realizado sobre el martillo (hammer) por el clavo es negativo ($W_h = -Fd$).

La figura 7-15 también ilustra cómo la energía puede considerarse como la capacidad de efectuar un trabajo. El martillo, al desacelerar, efectúa trabajo positivo sobre el clavo: $W_n = (+F)(+d)(\cos 0°) = Fd$ y es positivo. La disminución de la energía cinética del martillo ($= Fd$ por la ecuación 7-11) es igual al trabajo que éste puede realizar sobre otro objeto, en este caso el clavo.

La energía cinética traslacional $\left(= \tfrac{1}{2}mv^2\right)$ es directamente proporcional a la masa del objeto, y es proporcional al *cuadrado* de la rapidez. Entonces, si se duplica la masa, también se duplicará la energía cinética. No obstante, si se duplica la rapidez, el objeto tendrá cuatro veces más energía cinética y, por lo tanto, será capaz de efectuar cuatro veces más trabajo.

Debido a la conexión directa entre trabajo y energía cinética, la energía se mide en las mismas unidades que el trabajo: joules en unidades SI. [Las unidades de energía son ergs en el sistema cgs, y pies-libras en el sistema inglés]. Al igual que el trabajo, la energía cinética es una cantidad escalar. La energía cinética de un conjunto de objetos es la suma de las energías cinéticas de los objetos individuales.

El principio del trabajo y la energía puede aplicarse a una partícula, y también a un objeto que puede aproximarse como una partícula, como un objeto rígido cuyos movimientos internos no son considerables. Como veremos en los siguientes ejemplos, este principio es muy útil en situaciones sencillas. El principio del trabajo y la energía no es tan poderoso ni tan incluyente como la ley de conservación de la energía que veremos en el siguiente capítulo y no debería considerarse como un enunciado de conservación de energía.

EJEMPLO 7–7 Energía cinética y trabajo efectuado sobre una pelota de béisbol. Una pelota de béisbol de 145 g se lanza con una rapidez de 25 m/s. *a*) ¿Cuál es su energía cinética? *b*) ¿Cuál fue el trabajo neto realizado sobre la pelota para alcanzar esta rapidez, partiendo del reposo?

PLANTEAMIENTO *a*) Usamos $K = \tfrac{1}{2}mv^2$, y el principio del trabajo y la energía, ecuación 7-11.

SOLUCIÓN *a*) La energía cinética de la pelota después del lanzamiento es

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(0.145\ \text{kg})(25\ \text{m/s})^2 = 45\ \text{J}.$$

b) Puesto que la energía cinética inicial fue cero, el trabajo neto realizado es igual a la energía cinética final: 45 J.

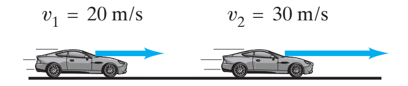


FIGURA 7–16 Ejemplo 7-8.

EJEMPLO 7–8 ESTIMACIÓN Trabajo sobre un automóvil para incrementar su energía cinética. ¿Cuánto trabajo neto se debe realizar para acelerar un automóvil de 1000 kg de 20 m/s a 30 m/s (figura 7-16)?

PLANTEAMIENTO Un automóvil es un sistema complejo. El motor hace girar las ruedas y los neumáticos de éstas presionan contra el suelo, el cual también presiona contra los neumáticos (véase el ejemplo 4-4). Por el momento, no nos interesan tales complicaciones. Más bien, podemos obtener un resultado útil empleando el principio del trabajo y la energía, pero sólo si consideramos el automóvil como una partícula o un objeto rígido simple.

SOLUCIÓN El trabajo neto necesario es igual al incremento en la energía cinética:

$$W = K_2 - K_1 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(1000\text{ kg})(30\text{ m/s})^2 - \tfrac{1}{2}(1000\text{ kg})(20\text{ m/s})^2 = 2.5 \times 10^5\text{ J}.$$

EJERCICIO C *a*) Adivine: ¿El trabajo necesario para acelerar el automóvil del ejemplo 7-8 desde el reposo hasta 20 m/s es mayor, menor o igual que el trabajo que ya se calculó para acelerarlo de 20 m/s a 30 m/s? *b*) Realice el cálculo.

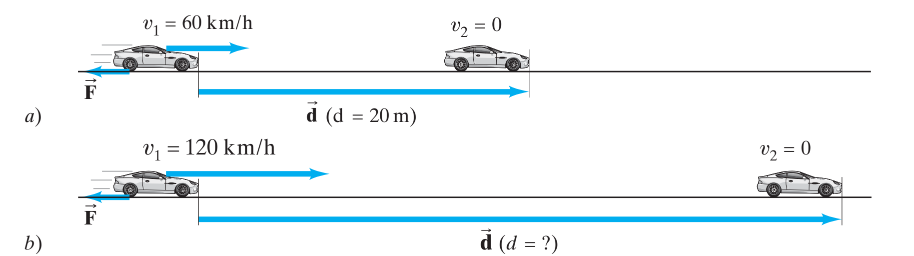


FIGURA 7–17 Ejemplo 7-9.

EJEMPLO CONCEPTUAL 7–9 Trabajo para detener un automóvil. Un automóvil que viaja a 60 km/h puede frenar y detenerse en una distancia $d = 20$ m (figura 7-17a). Si el auto viaja con el doble de rapidez, es decir, a 120 km/h, ¿cuál será la distancia de frenado (figura 7-17b)? Suponga que la fuerza de frenado máxima es aproximadamente independiente de su rapidez.

RESPUESTA De nuevo tratamos el automóvil como si fuera una partícula. Como la fuerza neta F para detenerlo es aproximadamente constante, el trabajo necesario para detenerlo, Fd, es proporcional a la distancia recorrida. Aplicamos el principio del trabajo y la energía, notando que $\vec{\mathbf{F}}$ y $\vec{\mathbf{d}}$ tienen sentidos opuestos y que la rapidez final del automóvil es cero:

$$W_{\text{net}} = Fd\cos 180° = -Fd.$$

De manera que

$$-Fd = \Delta K = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2$$
$$= 0 - \tfrac{1}{2}mv_1^2.$$

Entonces, como la fuerza y la masa son constantes, observamos que la distancia de frenado d se incrementa con el cuadrado de la rapidez:

$$d \propto v^2.$$

Si se duplica la rapidez inicial del automóvil, la distancia de frenado es $(2)^2 = 4$ veces mayor: 80 metros.

FÍSICA APLICADA

La distancia de frenado de un automóvil es proporcional al cuadrado de su rapidez inicial

EJERCICIO D ¿La energía cinética puede ser negativa?

EJERCICIO E *a*) Si se duplica la energía cinética de una flecha, ¿en qué factor se incrementará su rapidez? *b*) Si se duplica su rapidez, ¿en qué factor se incrementará su energía cinética?

EJEMPLO 7–10 **Un resorte comprimido.** Un resorte horizontal tiene una constante $k = 360$ N/m. *a*) ¿Cuánto trabajo se requiere para comprimirlo a partir de su longitud natural ($x = 0$) hasta $x = 11.0$ cm? *b*) Si se coloca un bloque de 1.85 kg contra el resorte y éste se suelta, ¿cuál será la rapidez del bloque cuando éste se separe del resorte en $x = 0$? Desprecie la fricción. *c*) Resuelva el inciso *b*) suponiendo que el bloque se mueve sobre una mesa como en la figura 7-18 y que algún tipo de fuerza de arrastre constante $F_D = 7.0$ N actúa para desacelerarlo, como la fricción (o tal vez su dedo).

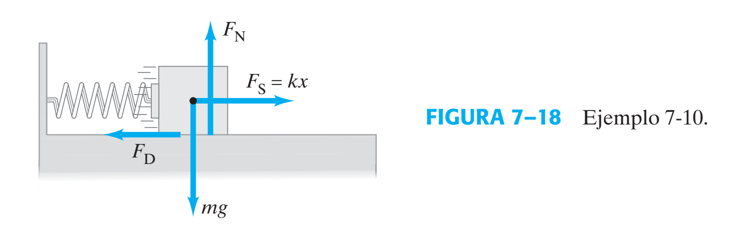


FIGURA 7–18 Ejemplo 7-10.

PLANTEAMIENTO Utilizamos nuestro resultado de la sección 7-3 de que el trabajo neto, W, necesario para estirar o comprimir un resorte una distancia x es $W = \frac{1}{2}kx^2$. En *b*) y *c*) usamos el principio trabajo-energía.

SOLUCIÓN *a*) El trabajo requerido para comprimir el resorte una distancia $x = 0.110$ m es

$$W = \tfrac{1}{2}(360\,\mathrm{N/m})(0.110\,\mathrm{m})^2 = 2.18\,\mathrm{J},$$

donde convertimos todas las unidades al SI.

b) Al regresar a su longitud no comprimida, el resorte efectúa 2.18 J de trabajo sobre el bloque [mismo cálculo que en el inciso *a*), sólo que al revés]. De acuerdo con el principio del trabajo y la energía, el bloque adquiere energía cinética de 2.18 J. Como $K = \frac{1}{2}mv^2$, la rapidez del bloque debe ser

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$$
$$= \sqrt{\frac{2(2.18\,\mathrm{J})}{1.85\,\mathrm{kg}}} = 1.54\,\mathrm{m/s}.$$

(*c*) Hay dos fuerzas sobre el bloque: la ejercida por el resorte y la ejercida por la fuerza de arrastre, $\vec{\mathbf{F}}_D$. El trabajo efectuado por una fuerza como la fricción es complicado. Para empezar, se produce calor (o mejor dicho, "energía térmica"): intente frotar sus manos fuertemente entre sí. No obstante, el producto $\vec{\mathbf{F}}_D \cdot \vec{\mathbf{d}}$ para la fuerza de arrastre, aun cuando implique fricción, puede utilizarse en el principio del trabajo y la energía para obtener el resultado correcto considerando al objeto como una partícula. El resorte efectúa 2.18 J de trabajo sobre el bloque. El trabajo hecho por la fuerza de fricción o de arrastre sobre el bloque, en la dirección x negativa, es

$$W_D = -F_D x = -(7.0\,\mathrm{N})(0.110\,\mathrm{m}) = -0.77\,\mathrm{J}.$$

Este trabajo es negativo porque la fuerza de fricción es en sentido opuesto al desplazamiento x. El trabajo neto efectuado sobre el bloque es $W_{net} = 2.18\,\mathrm{J} - 0.77\,\mathrm{J} = 1.41$ J. Del principio del trabajo y la energía, la ecuación 7-11 (con $v_2 = v$ y $v_1 = 0$), tenemos

$$v = \sqrt{\frac{2W_{net}}{m}}$$
$$= \sqrt{\frac{2(1.41\,\mathrm{J})}{1.85\,\mathrm{kg}}} = 1.23\,\mathrm{m/s}$$

para la rapidez del bloque en el momento en que se separa del resorte ($x = 0$).

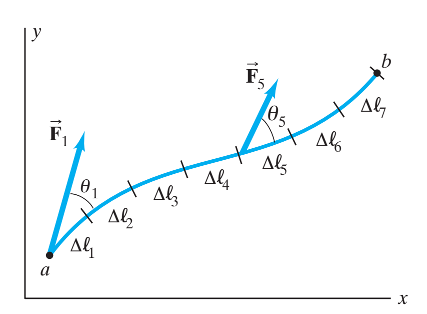


FIGURA 7–8 (repetida) Una partícula sobre la que actúa una fuerza variable $\vec{\mathbf{F}}$, se mueve a lo largo de la trayectoria que se muestra del punto a al punto b.

Deducción general del principio del trabajo y la energía

Dedujimos el principio del trabajo y la energía, ecuación 7-11, para el movimiento unidimensional con una fuerza constante. Tal principio es válido incluso si la fuerza es variable y el movimiento es en dos o tres dimensiones, como veremos a continuación. Suponga que la fuerza neta $\vec{\mathbf{F}}_{net}$ sobre una partícula varía tanto en magnitud como en dirección, y que la trayectoria de la partícula es una curva, como se ilustra en la figura 7-8. La fuerza neta podría considerarse como una función de ℓ, la distancia a lo largo de la curva. El trabajo neto efectuado es (ecuación 7-6):

$$W_{net} = \int \vec{\mathbf{F}}_{net} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \int F_{net} \cos\theta \, d\ell = \int F_{\parallel} \, d\ell,$$

donde $F_{\parallel}$ representa la componente de la fuerza neta que es paralela a la curva en cualquier punto. Por la segunda ley de Newton, tenemos

$$F_{\parallel} = ma_{\parallel} = m\frac{dv}{dt},$$

donde $a_{\parallel}$, la componente de a paralela a la curva en cualquier punto, es igual a la tasa de cambio de la rapidez, dv/dt. Podemos pensar en v como una función de ℓ, y usando la regla de la cadena para las derivadas, tenemos que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\ell}\frac{d\ell}{dt} = \frac{dv}{d\ell}v,$$

puesto que $d\ell/dt$ es la rapidez v. Por consiguiente (si 1 y 2 representan las cantidades inicial y final, respectivamente):

$$W_{net} = \int_1^2 F_{\parallel}\, d\ell = \int_1^2 m\frac{dv}{dt}\, d\ell = \int_1^2 mv\frac{dv}{d\ell}\, d\ell = \int_1^2 mv\, dv,$$

que se integra a

$$W_{net} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 = \Delta K.$$

Esto, de nuevo, es el principio del trabajo y la energía, que ahora obtuvimos para el movimiento en tres dimensiones con una fuerza neta variable, usando las definiciones de trabajo y energía cinética además de la segunda ley de Newton.

Observe que en esta deducción sólo la componente de $\vec{\mathbf{F}}_{net}$ paralela al movimiento, $F_{\parallel}$, contribuye al trabajo. De hecho, una fuerza (o la componente de una fuerza) que actúa perpendicularmente al vector velocidad no realiza trabajo. Una fuerza así sólo cambia la dirección de la velocidad, pero no afecta la magnitud de esta última. Un ejemplo de ello es el movimiento circular uniforme, en el que un objeto que se mueve con rapidez constante a lo largo de una trayectoria circular siente una fuerza ("centrípeta") que actúa sobre él hacia el centro del círculo. Esta fuerza no realiza trabajo sobre el objeto, porque (como vimos en el ejemplo 7-3) siempre es perpendicular al desplazamiento $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ del objeto.

Resumen

Se efectúa trabajo sobre un objeto por una fuerza cuando el objeto se mueve a lo largo de una distancia d. El **trabajo** W realizado por una fuerza constante $\vec{\mathbf{F}}$ sobre un objeto, cuya posición cambia por un desplazamiento $\vec{\mathbf{d}}$ está dado por

$$W = Fd\cos\theta = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{d}}, \qquad \textbf{(7–1, 7–3)}$$

donde θ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{F}}$ y $\vec{\mathbf{d}}$.

La última expresión se llama producto escalar de $\vec{\mathbf{F}}$ y $\vec{\mathbf{d}}$. En general, el **producto escalar** de cualesquiera dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se define como

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB\cos\theta \qquad \textbf{(7–2)}$$

donde θ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$. En coordenadas rectangulares podemos también escribir

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \qquad \textbf{(7–4)}$$

El trabajo W hecho por una fuerza variable $\vec{\mathbf{F}}$ sobre un objeto que se mueve de un punto inicial a hacia un punto final b es

$$W = \int_a^b \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \int_a^b F\cos\theta\, d\ell, \qquad \textbf{(7–7)}$$

donde $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ representa un desplazamiento infinitesimal a lo largo de la trayectoria del objeto y θ es el ángulo entre $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$ en cada punto de la trayectoria del objeto.

La **energía cinética** traslacional K de un objeto de masa m que se mueve con rapidez v se define como

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2. \qquad \textbf{(7–10)}$$

El **principio del trabajo y la energía** establece que el trabajo neto efectuado sobre un objeto por la fuerza neta resultante es igual al cambio de energía cinética del objeto:

$$W_{net} = \Delta K = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2. \qquad \textbf{(7–11)}$$

Preguntas

1. ¿De qué maneras coincide la palabra "trabajo" como se usa en el lenguaje cotidiano, con la forma en que se define en física? ¿De qué maneras es diferente? Mencione ejemplos en ambos casos.
2. Una mujer que nada aguas arriba no se mueve con respecto a la orilla. ¿Efectúa ella un trabajo? Si deja de nadar y solamente flota, ¿se efectúa un trabajo sobre ella?
3. ¿La fuerza centrípeta puede efectuar trabajo sobre un objeto? Explique.
4. ¿Por qué cansa tanto empujar fuerte contra una pared sólida aun cuando no se realice trabajo?
5. ¿El producto escalar de dos vectores depende del sistema coordenado elegido?
6. ¿Puede un producto punto ser negativo? Si es así, ¿en qué condiciones?
7. Si $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{C}}$, ¿es necesariamente cierto que $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}$?
8. ¿El producto punto de dos vectores tiene tanto dirección y sentido así como magnitud?
9. ¿La fuerza normal sobre un objeto puede efectuar trabajo? Explique.
10. Usted tiene dos resortes idénticos excepto que el resorte 1 es más rígido que el resorte 2 ($k_1 > k_2$). ¿Sobre qué resorte se efectúa más trabajo: *a*) si ambos se estiran usando la misma fuerza; *b*) si ambos se estiran la misma distancia?
11. Si se triplica la rapidez de una partícula, ¿por qué factor se incrementará su energía cinética?
12. En el ejemplo 7-10 se estableció que el bloque se separa del resorte comprimido cuando éste alcanza su longitud de equilibrio ($x = 0$). Explique por qué la separación no ocurrió antes (o después) de este punto.
13. Se disparan dos balas simultáneamente con la misma energía cinética. Si una bala tiene el doble de masa que la otra, ¿cuál tendrá mayor rapidez y por qué factor? ¿Cuál bala puede efectuar más trabajo?
14. ¿El trabajo neto efectuado sobre una partícula depende del marco de referencia elegido? ¿Cómo afecta esto el principio del trabajo y la energía?
15. Una mano ejerce una fuerza horizontal constante sobre un bloque que puede deslizarse libremente sobre una superficie sin fricción (figura 7-19). El bloque parte del reposo en el punto A y cuando viaja una distancia d hasta el punto B, tiene una rapidez v_B. Cuando el bloque viaja otra distancia d al punto C, ¿su rapidez será mayor, menor o igual que $2v_B$? Explique su razonamiento.

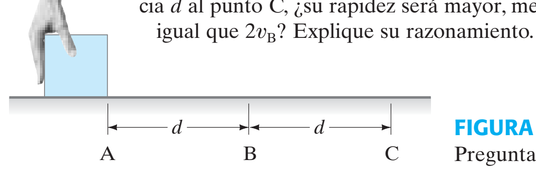


FIGURA 7–19 Pregunta 15.

Problemas

7–1 Trabajo, fuerza constante

1. (I) ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza gravitacional cuando un martinete (pilón) de 280 kg cae 2.80 m?
2. (I) ¿Cuánto subirá una roca de 1.85 kg al ser lanzada en línea recta hacia arriba por alguien que realiza 80.0 J de trabajo sobre ella? Desprecie la resistencia del aire.
3. (I) Un bombero de 75.0 kg sube un tramo de escalera de 20.0 m de altura. ¿Cuánto trabajo se requiere?
4. (I) Un martillo con masa de 2.0 kg se deja caer sobre un clavo desde una altura de 0.50 m. ¿Cuál es la cantidad máxima de trabajo que podría efectuar el martillo sobre el clavo? ¿Por qué la gente no simplemente lo "deja caer", sino que agrega su propia fuerza al martillo conforme éste cae?
5. (II) Estime el trabajo efectuado por usted al podar un jardín de 10 m por 20 m con una podadora de 50 cm de ancho. Suponga que empuja con una fuerza de aproximadamente 15 N.
6. (II) Una palanca como la de la figura 7-20 sirve para levantar objetos, que de otra manera no seríamos capaces de levantar. Demuestre que la razón entre la fuerza de salida F_O y la fuerza de entrada F_I está relacionada con las longitudes ℓ_I y ℓ_O desde el pivote por la relación $F_O/F_I = \ell_I/\ell_O$. Desprecie la fricción y la masa de la palanca, y suponga que el trabajo de salida es igual al trabajo de entrada.

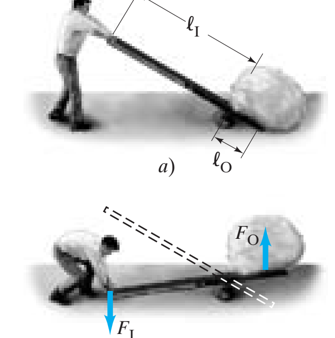


FIGURA 7–20 Una palanca. Problema 6.

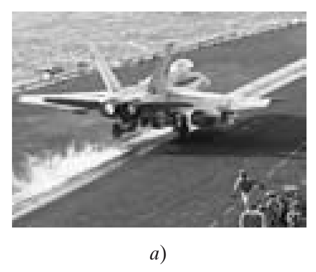
7. (II) ¿Cuál es el trabajo mínimo necesario para empujar un automóvil de 950 kg, 310 m hacia arriba a lo largo de una pendiente inclinada 9.0° sobre la horizontal? Desprecie la fricción.
8. (II) Ocho libros, cada uno de 4.0 cm de espesor y masa de 1.8 kg, se encuentran en posición horizontal sobre una mesa. ¿Cuánto trabajo se requiere para apilarlos uno sobre otro?
9. (II) Una caja con masa de 6.0 kg se acelera desde el reposo mediante una fuerza a lo largo de un piso a una tasa de 2.0 m/s^2 durante 7.0 s. Determine en trabajo neto efectuado sobre la caja.
10. (II) *a*) ¿Cuál es la fuerza requerida para dar a un helicóptero de masa M una aceleración de 0.10 g hacia arriba? *b*) ¿Cuál es el trabajo realizado por esta fuerza cuando el helicóptero se mueve una distancia h hacia arriba?
11. (II) Un piano de 380 kg resbala 3.9 m sobre un plano inclinado 27° y un hombre le impide acelerar empujando hacia arriba *paralelamente al plano* (figura 7-21). Calcule: *a*) la fuerza ejercida por el hombre, *b*) el trabajo realizado por el hombre sobre el piano, *c*) el trabajo efectuado por la fuerza de gravedad, y *d*) el trabajo neto hecho sobre el piano. Desprecie la fricción.



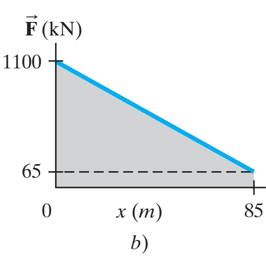
FIGURA 7–21 Problema 11.

12. (II) Una góndola puede llevar a 20 esquiadores, con una masa total de hasta 2250 kg. La góndola sube con rapidez constante desde la base de una montaña a 2150 m, hasta la cima a 3345 m. *a*) ¿Cuánto trabajo realiza el motor al mover toda la góndola hacia arriba de la montaña? *b*) ¿Cuánto trabajo efectúa la fuerza de gravedad sobre la góndola? *c*) Si el motor es capaz de generar 10% más trabajo que el que se encontró en el inciso *a*), ¿cuál será la aceleración de la góndola?

13. (II) Un avión a chorro de 17,000 kg despega desde un portaviones con ayuda de una catapulta (figura 7-22a). Los gases expulsados por los motores del avión ejercen una fuerza constante de 130 kN sobre el avión; la fuerza ejercida sobre el avión por la catapulta se grafica en la figura 7-22b. Determine: *a*) el trabajo efectuado sobre el avión por los gases expelidos por los motores durante el despegue, y *b*) el trabajo realizado sobre el avión por la catapulta durante el despegue.



a)



b)

FIGURA 7–22 Problema 13.

14. (II) Un cajón de 2200 N descansa sobre el piso. ¿Cuánto trabajo se requerirá para moverlo con rapidez constante, *a*) 4.0 m a lo largo del piso contra una fuerza de arrastre de 230 N, y *b*) 4.0 m verticalmente?

15. (II) Un carrito de supermercado con masa de 16 kg es empujado con rapidez constante hacia arriba, a través de una rampa inclinada 12°, por una fuerza F_P que actúa a su vez con un ángulo de 17° hacia debajo de la horizontal. Encuentre el trabajo realizado por cada una de las fuerzas $(m\vec{\mathbf{g}}, \vec{\mathbf{F}}_N, \vec{\mathbf{F}}_P)$ sobre el carrito considerando que la rampa tiene una longitud de 15 m.

7–2 Producto escalar

16. (I) ¿Cuál es el producto punto de $\vec{\mathbf{A}} = 2.0x^2\hat{\mathbf{i}} - 4.0x\hat{\mathbf{j}} + 5.0\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = 11.0\hat{\mathbf{i}} + 2.5x\hat{\mathbf{j}}$?

17. (I) Para cualquier vector $\vec{\mathbf{V}} = V_x\hat{\mathbf{i}} + V_y\hat{\mathbf{j}} + V_z\hat{\mathbf{k}}$ y demuestre que

$$V_x = \hat{\mathbf{i}} \cdot \vec{\mathbf{V}}, \qquad V_y = \hat{\mathbf{j}} \cdot \vec{\mathbf{V}}, \qquad V_z = \hat{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{V}}.$$

18. (I) Calcule el ángulo entre los vectores:

$$\vec{\mathbf{A}} = 6.8\hat{\mathbf{i}} - 3.4\hat{\mathbf{j}} - 6.2\hat{\mathbf{k}} \quad \text{y} \quad \vec{\mathbf{B}} = 8.2\hat{\mathbf{i}} + 2.3\hat{\mathbf{j}} - 7.0\hat{\mathbf{k}}.$$

19. (I) Demuestre que $\vec{\mathbf{A}} \cdot (-\vec{\mathbf{B}}) = -\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$.

20. (I) El vector $\vec{\mathbf{V}}_1$ apunta a lo largo del eje z y tiene magnitud $V_1 = 75$. El vector $\vec{\mathbf{V}}_2$ se encuentra en el plano xz, tiene magnitud $V_2 = 58$ y forma un ángulo de −48° con el eje x (apunta hacia abajo del eje x). ¿Cuál es el producto escalar $\vec{\mathbf{V}}_1 \cdot \vec{\mathbf{V}}_2$?

21. (II) Dado el vector $\vec{\mathbf{A}} = 3.0\hat{\mathbf{i}} + 1.5\hat{\mathbf{j}}$, calcule un vector $\vec{\mathbf{B}}$ que sea perpendicular a $\vec{\mathbf{A}}$.

22. (II) Una fuerza constante $\vec{\mathbf{F}} = (2.0\hat{\mathbf{i}} + 4.0\hat{\mathbf{j}})$ N actúa sobre un objeto conforme éste se mueve a lo largo de una trayectoria rectilínea. Si el desplazamiento del objeto es $\vec{\mathbf{d}} = (1.0\hat{\mathbf{i}} + 5.0\hat{\mathbf{j}})$ m, calcule el trabajo efectuado por $\vec{\mathbf{F}}$ usando estas formas alternas de escribir el producto punto: *a*) $W = Fd\cos\theta$; *b*) $W = F_x d_x + F_y d_y$.

23. (II) Si $\vec{\mathbf{A}} = 9.0\hat{\mathbf{i}} - 8.5\hat{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{B}} = -8.0\hat{\mathbf{i}} + 7.1\hat{\mathbf{j}} + 4.2\hat{\mathbf{k}}$, y $\vec{\mathbf{C}} = 6.8\hat{\mathbf{i}} - 9.2\hat{\mathbf{j}}$, determine *a*) $\vec{\mathbf{A}} \cdot (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}})$; (*b*) $(\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{C}}) \cdot \vec{\mathbf{B}}$; (*c*) $(\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}}) \cdot \vec{\mathbf{C}}$.

24. (II) Demuestre que $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$, partiendo de la ecuación 7-2 y usando la propiedad distributiva (p. 167, probada en el problema 33).

25. (II) Dados los vectores $\vec{\mathbf{A}} = -4.8\hat{\mathbf{i}} + 6.8\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = 9.6\hat{\mathbf{i}} + 6.7\hat{\mathbf{j}}$, determine el vector $\vec{\mathbf{C}}$ que se encuentra en el plano xy y es perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$ y cuyo producto punto con $\vec{\mathbf{A}}$ es 20.0.

26. (II) Demuestre que si dos vectores no paralelos tienen la misma magnitud, entonces su suma debe ser perpendicular a su diferencia.

27. (II) Sea $\vec{\mathbf{V}} = 20.0\hat{\mathbf{i}} + 22.0\hat{\mathbf{j}} - 14.0\hat{\mathbf{k}}$. ¿Qué ángulo forma este vector con los ejes x, y y z?

28. (II) Use el producto escalar para demostrar la *ley de los cosenos* para un triángulo:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta,$$

donde a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo y θ es el ángulo opuesto al lado c.

29. (II) Los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ están en el plano xy y su producto escalar es de 20.0 unidades. Si $\vec{\mathbf{A}}$ forma un ángulo de 27.4° con el eje x y tiene magnitud $A = 12.0$ unidades, y $\vec{\mathbf{B}}$ tiene magnitud $B = 24.0$ unidades, ¿qué puede usted decir sobre la dirección y sentido de $\vec{\mathbf{B}}$?

30. (II) $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ son dos vectores en el plano xy que forman ángulos α y β con el eje x, respectivamente. Evalúe el producto escalar de $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ y deduzca la siguiente identidad trigonométrica: $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.

31. (II) Suponiendo que $\vec{\mathbf{A}} = 1.0\hat{\mathbf{i}} + 1.0\hat{\mathbf{j}} - 2.0\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = -1.0\hat{\mathbf{i}} + 1.0\hat{\mathbf{j}} + 2.0\hat{\mathbf{k}}$, *a*) ¿cuál será el ángulo entre esos dos vectores? *b*) Explique el significado del signo en el inciso *a*).

32. (II) Encuentre un vector de longitud unitaria en el plano xy que sea perpendicular a $3.0\hat{\mathbf{i}} + 4.0\hat{\mathbf{j}}$.

33. (III) Demuestre que el producto escalar de dos vectores es distributivo: $\vec{\mathbf{A}} \cdot (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{C}}$. [*Sugerencia*: Use un diagrama que muestre los tres vectores en un plano e indique los productos punto sobre el diagrama.]

7–3 Trabajo efectuado por una fuerza variable

34. (I) Al pedalear una bicicleta hacia arriba por una colina, un ciclista ejerce una fuerza hacia abajo de 450 N durante cada pedalada. Si el diámetro del círculo descrito por cada pedal es de 36 cm, calcule cuánto trabajo se efectúa en cada pedalada.

35. (II) Un resorte tiene una constante $k = 65$ N/m. Dibuje una gráfica como la de la figura 7-11 y úsela para determinar el trabajo necesario para estirar el resorte desde $x = 3.0$ cm hasta $x = 6.5$ cm, donde $x = 0$ se refiere a la longitud del resorte sin estirar.

36. (II) Si la colina en el ejemplo 7-2 (figura 7-4) no tuviera una pendiente uniforme, sino una curva irregular como en la figura 7-23, demuestre que se obtendría el mismo resultado que en el ejemplo 7-2: es decir, que el trabajo efectuado por la fuerza de gravedad depende sólo de la altura de la colina y no de su forma ni del camino seguido.

h

FIGURA 7–23 Problema 36.

37. (II) La fuerza neta ejercida sobre una partícula actúa en el sentido x positivo. Su magnitud crece linealmente desde cero en $x = 0$ hasta 380 N en $x = 3.0$ m. La fuerza permanece constante a 380 N desde $x = 3.0$ m hasta $x = 7.0$ m y luego disminuye linealmente a cero en $x = 12.0$ m. Determine el trabajo realizado al mover la partícula desde $x = 0$ hasta $x = 12.0$ m, determinando gráficamente el área bajo la gráfica F_x versus x.

38. (II) Si se requieren 5.0 J de trabajo para estirar 2.0 cm un resorte específico desde su longitud de equilibrio, ¿cuánto más trabajo se requerirá para estirarlo otros 4.0 cm?

39. (II) En la figura 7-9 suponga que el eje de la distancia es el eje x y que a = 10.0 m y b = 30.0 m. Estime el trabajo hecho por esta fuerza al mover un objeto de 3.50 kg desde a hasta b.

40. (II) La fuerza sobre una partícula que actúa a lo largo del eje x varía como se muestra en la figura 7-24. Determine el trabajo realizado por esta fuerza al mover la partícula a lo largo del eje x: *a*) desde $x = 0.0$ hasta $x = 10.0$ m; *b*) desde $x = 0.0$ hasta $x = 15.0$ m.

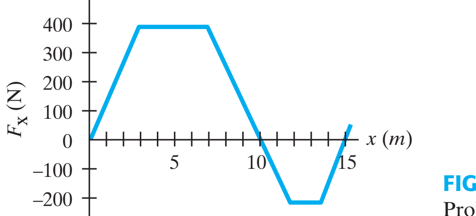


FIGURA 7–24
Problema 40.

41. (II) Un niño jala un carrito sobre la acera. A lo largo de 9.0 m el carrito permanece sobre la acera y el niño jala con una fuerza horizontal de 22 N. Luego una de las ruedas del carrito sale hacia el césped y el niño tiene que jalar con una fuerza de 38 N a un ángulo de 12° con respecto a la acera durante los siguientes 5.0 m. Por último, el carrito retorna a la acera, por lo que el niño recorre los 13.0 m restantes del trayecto aplicando una fuerza de 22 N. ¿Cuánto trabajo total realizó el niño sobre el carrito?

42. (II) La resistencia de un material de empaque a un objeto agudo que lo penetra es una fuerza proporcional a la cuarta potencia de la profundidad de penetración x, es decir, $\vec{\mathbf{F}} = kx^4\hat{\mathbf{i}}$. Calcule el trabajo efectuado al penetrar el objeto agudo una distancia d dentro del material.

43. (II) La fuerza necesaria para mantener comprimido un resorte dado una cantidad x desde su longitud natural está dada por $F = kx + ax^3 + bx^4$. ¿Cuánto trabajo debe efectuarse para comprimirlo una cantidad X, a partir de $x = 0$?

44. (II) En la parte superior del obstáculo del salto con pértiga (garrocha), un atleta puede realmente efectuar trabajo empujando la pértiga antes de soltarla. Suponga que la fuerza de empuje que la pértiga ejerce de vuelta sobre el atleta está dada por $F(x) = (1.5 \times 10^2\,\text{N/m})x - (1.9 \times 10^2\,\text{N/m}^2)x^2$ y que actúa durante una distancia de 0.20 m. ¿Cuánto trabajo se efectúa sobre el atleta?

45. (II) Considere una fuerza $F_1 = A/\sqrt{x}$ que actúa sobre un objeto durante su viaje a lo largo del eje x desde $x = 0.0$ hasta $x = 1.0$ m, donde $A = 2.0\ \text{N}\cdot\text{m}^{1/2}$. Demuestre que durante ese trayecto, aun cuando F_1 sea infinita en $x = 0.0$, el trabajo efectuado sobre el objeto por esta fuerza es finito.

46. (II) Suponga que la fuerza que actúa sobre un objeto está dada por $\vec{\mathbf{F}} = ax\hat{\mathbf{i}} + by\hat{\mathbf{j}}$, donde las constantes $a = 3.0\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ y $b = 4.0\ \text{N}\cdot\text{m}^{-1}$. Determine el trabajo efectuado sobre el objeto por esta fuerza conforme se mueve en línea recta desde el origen hasta $\vec{\mathbf{r}} = (10.0\hat{\mathbf{i}} + 20.0\hat{\mathbf{j}})$ m.

47. (II) Un objeto, se mueve a lo largo de una circunferencia de radio R, y actúa sobre él una fuerza de magnitud constante F. La fuerza se dirige siempre a un ángulo de 30° con respecto a la tangente al círculo, como se muestra en la figura 7-25. Determine el trabajo efectuado por esta fuerza cuando el objeto se mueve a lo largo de medio círculo desde A hasta B.

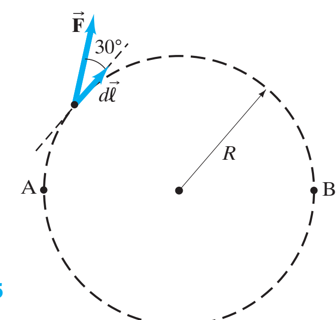


FIGURA 7–25
Problema 47.

48. (III) Un vehículo espacial de 2800 kg, inicialmente en reposo, cae verticalmente desde una altura de 3300 km por arriba de la superficie terrestre. Determine cuánto trabajo realiza la fuerza de gravedad al llevar el vehículo a la superficie terrestre.

49. (III) Una cadena de acero de 3.0 m de longitud está estirada sobre una mesa horizontal de manera que 2.0 m de la cadena permanecen sobre la mesa y 1.0 m cuelga verticalmente, figura 7-26. En estas condiciones, la fuerza sobre el segmento colgante es suficiente para jalar toda la cadena sobre el borde. Una vez que la cadena se mueve, la fricción cinética es tan pequeña que puede ser despreciada. ¿Cuánto trabajo es efectuado sobre la cadena por la fuerza de gravedad cuando la cadena cae desde el punto en que 2.0 m permanecen sobre la mesa hasta el punto en que toda la cadena ha dejado la mesa? (Suponga que la cadena tiene un peso específico lineal de 18 N/m).

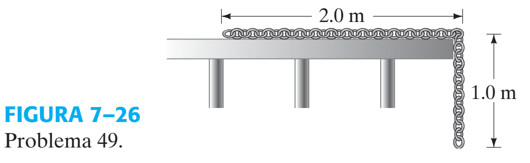


FIGURA 7–26
Problema 49.

7–4 Energía cinética y el principio del trabajo y la energía

50. (I) A temperatura ambiente, una molécula de oxígeno, con masa de 5.31×10^{-26} kg tiene una energía cinética de aproximadamente 6.21×10^{-21} J. ¿Qué tan rápido se está moviendo?

51. (I) *a*) Si se triplica la energía cinética de una partícula, ¿en qué factor se incrementa su rapidez? *b*) Si la rapidez de una partícula disminuye a la mitad, ¿en qué factor cambia su energía cinética?

52. (I) ¿Cuánto trabajo se requiere para detener un electrón ($m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg) que se mueve con una rapidez inicial de 1.40×10^6 m/s?

53. (I) ¿Cuánto trabajo debe efectuarse para detener un vehículo de 1300 kg que viaja a 95 km/h?

54. (II) *Siperdman* utiliza su telaraña para salvar un tren que está fuera de control, figura 7-27. Su telaraña se estira unas cuantas cuadras antes de que el tren de 10^4 kg llegue al reposo. Suponiendo que la telaraña actúa como un resorte, estime la constante del resorte.



FIGURA 7–27
Problema 54.

55. (II) Una pelota de béisbol ($m = 145$ g) que viaja a 32 m/s mueve el guante de un jardinero 25 cm hacia atrás cuando recibe la pelota. ¿Cuál es la fuerza promedio ejercida por la pelota sobre el guante?

56. (II) Una flecha de 85 g es disparada desde un arco cuya cuerda ejerce una fuerza promedio de 105 N sobre la flecha a lo largo de una distancia de 75 cm. ¿Cuál es la rapidez de la flecha al salir del arco?

57. (II) Una masa m está unida a un resorte que se mantiene estirado una distancia x mediante una fuerza F (figura 7-28) y luego se suelta. El resorte se comprime, jalando la masa. Suponiendo que no hay fricción, determine la rapidez de la masa m cuando el resorte regresa: *a*) a su longitud normal ($x = 0$); *b*) a la mitad de su extensión original ($x/2$).

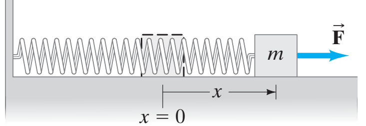


FIGURA 7–28
Problema 57.

58. (II) Si la rapidez de un automóvil se incrementa 50%, ¿en qué factor se incrementará su distancia mínima de frenado, suponiendo que todo lo demás permanece igual? Desprecie el tiempo de reacción del conductor.

59. (II) Un vehículo de 1200 kg que viaja sobre una superficie horizontal tiene rapidez $v = 66$ km/h cuando golpea un resorte enrollado horizontalmente y es llevado al reposo en una distancia de 2.2 m. ¿Cuál es la constante del resorte?

60. (II) Un automóvil tiene el doble de masa que un segundo automóvil, pero sólo la mitad de energía cinética. Cuando ambos vehículos incrementan su rapidez en 7.0 m/s, tienen entonces la misma energía cinética. ¿Cuáles eran las rapideces originales de los dos automóviles?

61. (II) Un objeto de 4.5 kg que se mueve en dos dimensiones inicialmente tiene una velocidad $\vec{\mathbf{v}}_1 = (10.0\hat{\mathbf{i}} + 20.0\hat{\mathbf{j}})$ m/s. Luego, una fuerza neta $\vec{\mathbf{F}}$ actúa sobre el objeto durante 2.0 s, después de lo cual la velocidad del objeto es $\vec{\mathbf{v}}_2 = (15.0\hat{\mathbf{i}} + 30.0\hat{\mathbf{j}})$ m/s. Determine el trabajo realizado por $\vec{\mathbf{F}}$ sobre el objeto.

62. (II) Una carga de 265 kg es levantada verticalmente 23.0 m por un solo cable con aceleración $a = 0.150\, g$. Determine *a*) la tensión en el cable; *b*) el trabajo neto efectuado sobre la carga; *c*) el trabajo realizado por el cable sobre la carga; *d*) el trabajo efectuado por la gravedad sobre la carga; *e*) la rapidez final de la carga suponiendo que ésta parte del reposo.

63. (II) *a*) ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza horizontal $F_P = 150$ N sobre el bloque de 18 kg de la figura 7-29, cuando la fuerza empuja el bloque 5.0 m hacia arriba por el plano sin fricción inclinado 32°? *b*) ¿Cuánto trabajo es efectuado por la fuerza de la gravedad sobre el bloque durante este desplazamiento? *c*) ¿Cuánto trabajo es realizado por la fuerza normal? *d*) Suponiendo que el bloque parte del reposo, ¿cuál es la rapidez del bloque después de este desplazamiento? [*Sugerencia*: El principio del trabajo y la energía se refiere al trabajo *neto* realizado].

$F_P =$ 150 N
18 kg
32°

FIGURA 7–29
Problemas 63 y 64.

64. (II) Resuelva el problema 63 suponiendo un coeficiente de fricción $\mu_k = 0.10$.

65. (II) En la escena de un accidente sobre un camino horizontal, los investigadores midieron que las marcas de derrape de un automóvil tenían 98 m de longitud. Era un día lluvioso y se estimó que el coeficiente de fricción era de 0.38. Use estos datos para determinar la rapidez del automóvil cuando el conductor pisó (y bloqueó) los frenos. (¿Por qué la masa del automóvil no afecta el resultado?)

66. (II) Un cajón de 46.0 kg es jalado a lo largo del piso, partiendo del reposo, con una fuerza horizontal constante de 225 N. Los primeros 11.0 m del piso no tienen fricción y en los siguientes 10.0 m, el coeficiente de fricción es de 0.20. ¿Cuál es la rapidez final del cajón después de ser jalado esos 21.0 m?

67. (II) Un tren se mueve por las vías con rapidez constante v_1 en relación con el suelo. En el tren una persona sostiene una pelota de masa m y la lanza hacia el frente del tren con una rapidez v_2 con respecto al tren. Calcule el cambio en la energía cinética de la pelota *a*) en el marco de referencia de la Tierra, y *b*) en el marco de referencia del tren. *c*) Con respecto a cada marco de referencia, ¿cuánto trabajo fue efectuado sobre la pelota? *d*) Explique porqué los resultados del inciso *b*) no son los mismos para los dos marcos; después de todo, se trata de la misma pelota.

68. (III) Usualmente despreciamos la masa de un resorte si ésta es pequeña comparada con la masa unida al resorte. Pero en algunas aplicaciones, la masa del resorte debe tomarse en cuenta. Considere un resorte de longitud no estirada ℓ y masa M_s que está uniformemente distribuida a lo largo de la longitud del resorte. Una masa m está unida al extremo del resorte. El otro extremo del resorte está fijo y se permite que la masa m vibre horizontalmente sin fricción (figura 7-30). Cada punto sobre el resorte se mueve con una velocidad proporcional a la distancia de ese punto al extremo fijo. Por ejemplo, si la masa sobre el extremo se mueve con rapidez v_0, el punto medio del resorte se mueve con rapidez $v_0/2$. Demuestre que la energía cinética de la masa más la energía cinética del resorte cuando la masa se mueve con velocidad v es

$$K = \tfrac{1}{2} M v^2$$

donde $M = m + \frac{1}{3} M_S$ es la "masa efectiva" del sistema. [*Sugerencia:* Sea D la longitud total del resorte estirado. Entonces, la velocidad de una masa dm de un resorte de longitud dx ubicado en la posición x es $v(x) = v_0(x/D)$. Note también que $dm = dx(M_S/D)$].

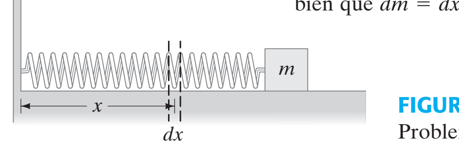


FIGURA 7–30
Problema 68.

69. (III) El cable de un elevador se rompe cuando el elevador de 925 kg está 22.5 m arriba de la parte superior de un gran resorte ($k = 8.00 \times 10^4$ N/m) en el fondo del hueco. Calcule *a*) el trabajo efectuado por la gravedad sobre el elevador antes de que éste toque el resorte; *b*) la rapidez del elevador justo antes de tocar el resorte; *c*) la compresión máxima que sufre el resorte (advierta que aquí tanto el resorte como la gravedad realizan trabajo).

Problemas generales

70. *a*) Una langosta de 3.0 g alcanza una rapidez de 3.0 m/s al saltar. ¿Cuál será su energía cinética a esta rapidez? *b*) Si la langosta transforma energía con el 35% de eficiencia, ¿cuánta energía se requerirá para el salto?

71. En cierta biblioteca el primer anaquel está a 12.0 cm arriba del suelo, y los restantes cuatro anaqueles están cada uno separados 33.0 cm arriba del anaquel previo. Si un libro promedio tiene una masa de 1.40 kg con una altura de 22.0 cm, y un anaquel promedio contiene 28 libros (de pie), ¿cuánto trabajo se requiere para llenar este librero vacío, suponiendo que inicialmente todos los libros se encuentran en posición plana sobre el piso?

72. Un meteorito de 75 kg se entierra 5.0 m en lodo suave. La fuerza entre el meteorito y el lodo está dada por $F(x) = (640\ \text{N/m}^3)x^3$, donde x es la profundidad en el lodo. ¿Cuál era la rapidez del meteorito cuando impactó inicialmente el lodo?

73. Un bloque de 6.10 kg es empujado 9.25 m hacia arriba sobre una rampa inclinada 37.0°, usando una fuerza horizontal de 75.0 N. Si la rapidez inicial del bloque es de 3.25 m/s hacia arriba del plano, calcule *a*) la energía cinética inicial del bloque; *b*) el trabajo realizado por la fuerza de 75.0 N sobre el bloque; *c*) el trabajo realizado por la fuerza de gravedad; *d*) el trabajo efectuado por la fuerza normal; *e*) la energía cinética final del bloque.

74. El arreglo de los átomos del zinc es un ejemplo de una estructura "hexagonal compacta". Tres de los vecinos más cercanos se encuentran en las siguientes coordenadas (x, y, z), dadas en nanómetros (10^{-9} m): el átomo 1 está en (0, 0, 0); el átomo 2 está en (0.230, 0.133, 0); el átomo 3 está en (0.077, 0.133, 0.247). Encuentre el ángulo entre dos vectores: uno que conecta el átomo 1 con el átomo 2 y otro que conecta el átomo 1 con el átomo 3.

75. Dos fuerzas, $\vec{\mathbf{F}}_1 = (1.50\hat{\mathbf{i}} - 0.80\hat{\mathbf{j}} + 0.70\hat{\mathbf{k}})$ N y $\vec{\mathbf{F}}_2 = (-0.70\hat{\mathbf{i}} + 1.20\hat{\mathbf{j}})$ N, son aplicadas a un objeto en movimiento con masa de 0.20 kg. El vector desplazamiento producido por las dos fuerzas es $\vec{\mathbf{d}} = (8.0\hat{\mathbf{i}} + 6.0\hat{\mathbf{j}} + 5.0\hat{\mathbf{k}})$ m. ¿Cuál es el trabajo efectuado por las dos fuerzas?

76. Los cañones de las armas de 16 pulgadas (diámetro del cañón = 16 in = 41 cm) del acorazado *U.S.S. Massachusetts* en la Segunda Guerra Mundial tenían 15 m de longitud. Los obuses que disparaban tenían una masa de 1250 kg y eran disparados con fuerza explosiva suficiente para darles una velocidad inicial de 750 m/s. Use el principio del trabajo y la energía para determinar la fuerza explosiva (suponga que era constante) que debía aplicarse al obús dentro del barril del cañón. Exprese su respuesta en newtons y también en libras.

77. Una fuerza variable está dada por $F = Ae^{-kx}$, donde x es la posición; A y k son constantes con unidades de N y m^{-1}, respectivamente. ¿Cuál es el trabajo realizado por esta fuerza cuando x cambia de 0.10 m a infinito?

78. La fuerza requerida para comprimir un resorte horizontal imperfecto una cantidad x está dada por $F = 150x + 12x^3$, donde x está en metros y F en newtons. Si el resorte se comprime 2.0 m, ¿qué rapidez le impartirá a una bola de 3.0 kg apoyada contra él y que luego es liberada?

79. Una fuerza $\vec{\mathbf{F}} = (10.0\hat{\mathbf{i}} + 9.0\hat{\mathbf{j}} + 12.0\hat{\mathbf{k}})$ kN actúa sobre un objeto pequeño con 95 g de masa. Si el desplazamiento del objeto es $\vec{\mathbf{d}} = (5.0\hat{\mathbf{i}} + 4.0\hat{\mathbf{j}})$ m, encuentre el trabajo realizado por la fuerza. ¿Cuál es el ángulo entre $\vec{\mathbf{F}}$ y $\vec{\mathbf{d}}$?

80. En el juego de *paintball* los jugadores utilizan armas propulsadas con gas presurizado, para disparar al equipo contrario cápsulas de gel de 33 g llenas con pintura. Las reglas del juego señalan que uno de estos proyectiles no puede salir disparado del cañón del arma con una rapidez mayor que 85 m/s. Modele el disparo suponiendo que el gas presurizado aplica una fuerza constante F a una cápsula de 33 g a lo largo de la longitud del cañón de 32 cm. Determine F *a*) utilizando el principio del trabajo y la energía, y *b*) usando la segunda ley de Newton y las ecuaciones cinemáticas (ecuaciones 2-12).

81. Una pelota de softbol con masa de 0.25 kg se lanza horizontalmente a 110 km/h. Cuando llega a "home", su rapidez ha disminuido en un 10%. Despreciando la gravedad, estime la fuerza promedio de la resistencia del aire durante un lanzamiento, si la distancia entre "home" y el lanzador es de 15 m aproximadamente.

82. Un piloto cayó 370 m después de saltar de un avión, sin que se abriera el paracaídas. Cayó en un banco de nieve, creando un cráter de 1.1 m de profundidad, aunque sobrevivió sólo con heridas leves. Suponiendo que la masa del piloto era de 88 kg y que su velocidad terminal fue de 45 m/s, estime: *a*) el trabajo hecho por la nieve para llevarlo al reposo; *b*) la fuerza promedio ejercida sobre él por la nieve al detenerlo; y *c*) el trabajo efectuado sobre él por la resistencia del aire al caer. Modélelo como una partícula.

83. Los automóviles actuales tienen "parachoques de 5 mi/h (8 km/h)" diseñados para comprimirse y rebotar elásticamente sin ningún daño físico a rapideces menores a 8 km/h. Si el material de los parachoques se deforma permanentemente después de una compresión de 1.5 cm, pero permanecen como un resorte elástico hasta ese punto, ¿cuál debe ser la constante efectiva de resorte del material del parachoques, suponiendo que el automóvil tiene una masa de 1050 kg y que se prueba chocándolo contra una pared sólida?

84. ¿Cuál debería ser la constante del resorte k de un resorte diseñado para llevar un vehículo de 1300 kg al reposo desde una rapidez de 90 km/h, de manera que los ocupantes experimenten una aceleración máxima de 5.0 g?

85. Suponga que un ciclista de peso mg puede ejercer una fuerza sobre los pedales igual a 0.90 mg en promedio. Si los pedales giran en un círculo de 18 cm de radio, las ruedas tienen un radio de 34 cm, y las ruedas dentadas delantera y trasera, sobre las que corre la cadena, tienen 42 y 19 dientes, respectivamente (figura 7-31), determine la inclinación máxima de la colina que el ciclista puede ascender con rapidez constante. Suponga que la masa de la bicicleta es de 12 kg y la del ciclista es de 65 kg. Desprecie la fricción. Suponga que la fuerza promedio del ciclista es siempre: *a*) hacia abajo; *b*) tangencial al movimiento del pedal.

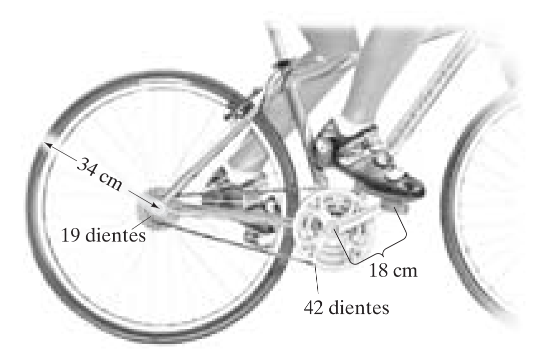


FIGURA 7–31 Problema 85.

86. Un péndulo simple consiste en un objeto pequeño de masa m suspendido de una cuerda de longitud ℓ (figura 7-32) de masa despreciable. Una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ se aplica en la dirección horizontal (por lo que $\vec{\mathbf{F}} = F\hat{\mathbf{i}}$), que mueve la masa m muy lentamente de manera que la aceleración es esencialmente cero. (Advierta que la magnitud de $\vec{\mathbf{F}}$ tendrá que variar con el ángulo θ que la cuerda forma con la vertical en cualquier momento). *a*) Determine el trabajo hecho por esta fuerza $\vec{\mathbf{F}}$, para mover el péndulo de $\theta = 0$ a $\theta = \theta_0$. *b*) Determine el trabajo realizado por la fuerza gravitacional sobre la masa m, $\vec{\mathbf{F}}_G = m\vec{\mathbf{g}}$, y el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_T$ que ejerce la cuerda sobre la masa m.

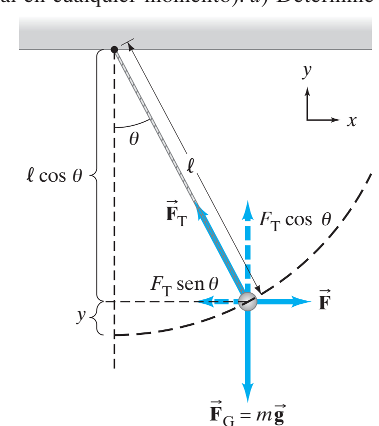


FIGURA 7–32 Problema 86.

87. El pasajero de un automóvil se abrocha el cinturón de seguridad y lleva a su niño de 18 kg sentado en el regazo. Utilice el principio del trabajo y la energía para responder las siguientes preguntas. *a*) Mientras viaja a 25 m/s, el conductor tiene que hacer un frenado de emergencia en una distancia de 45 m. Suponiendo una desaceleración constante, ¿cuánta fuerza necesitarán ejercer los brazos del padre sobre el niño durante este periodo de desaceleración? ¿Dicha fuerza es alcanzable por un padre promedio? *b*) Suponga ahora que el automóvil (v = 25 m/s) tiene un accidente y que se detiene en una distancia de 12 m. Suponiendo que la desaceleración es constante, ¿cuánta fuerza necesitará ejercer el padre sobre el niño? ¿Esta fuerza es alcanzable por un padre promedio?

88. Conforme un objeto se mueve a lo largo del eje x desde $x = 0.0$ m hasta $x = 20.0$ m actúa sobre él una fuerza dada por $F = (100 - (x - 10)^2)$ N. Determine el trabajo realizado por la fuerza sobre el objeto: *a*) bosquejando primero la gráfica de F versus x, y calculando el área bajo esta curva; y *b*) evaluando la integral $\int_{x=0.0\,\mathrm{m}}^{x=20\,\mathrm{m}} F\,dx$.

89. Un ciclista parte del reposo y desciende sin pedalear por una pendiente a 4.0°. La masa del ciclista más la bicicleta es de 85 kg. Después de que el ciclista ha recorrido 250 m, *a*) ¿cuál fue el trabajo neto efectuado por la gravedad sobre el ciclista? *b*) ¿Qué tan rápido va el ciclista? Desprecie la resistencia del aire.

90. Para prevenir la caída de los escaladores de riscos se utilizan cuerdas elásticas. Suponga que un extremo de la cuerda con longitud sin estirar ℓ se sujeta a un risco, y un escalador de masa m se sujeta al otro extremo. Cuando el escalador está a una altura ℓ por arriba del punto de sujeción, se resbala y cae bajo la influencia de la gravedad una distancia 2ℓ, después de lo cual la cuerda se tensa y se estira una distancia x cuando detiene al escalador (véase la figura 7-33). Suponga que una cuerda estirable se comporta como un resorte, cuya constante de resorte es k. *a*) Aplique el principio del trabajo y la energía y demuestre que

$$x = \frac{mg}{k}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{4k\ell}{mg}}\right].$$

(*b*) Suponiendo que $m = 85$ kg, $\ell = 8.0$ m y $k = 850$ N/m, determine x/ℓ (el estiramiento fraccional de la cuerda) y kx/mg (la fuerza que la cuerda ejerce sobre el escalador comparada con su propio peso) en el momento en que se detiene la caída del escalador.

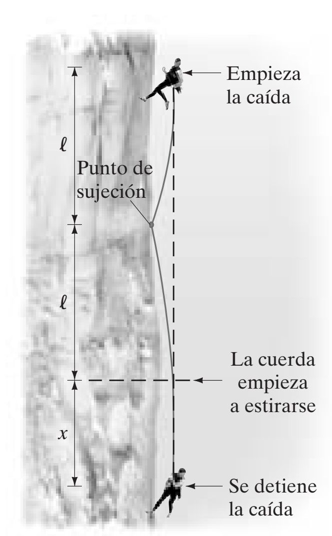


FIGURA 7–33 Problema 90.

91. Una masa pequeña m cuelga en reposo de una cuerda vertical de longitud ℓ que está fija al techo. Después una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ empuja sobre la masa, de manera perpendicular a la cuerda tensada en cualquier momento, hasta que la cuerda forma una ángulo $\theta = \theta_0$ con la vertical y la masa sube una distancia vertical h (figura 7-34). Suponga que la magnitud F de la fuerza se ajusta de manera que la masa se mueva con rapidez constante a lo largo de su trayectoria curva. Demuestre que el trabajo efectuado por $\vec{\mathbf{F}}$ durante este proceso es igual a mgh, que a su vez es equivalente al trabajo que se requiere para subir lentamente la masa m una altura h. [*Sugerencia*: Cuando el ángulo se incremente $d\theta$ en radianes, la masa se mueve a lo largo de un arco con longitud $ds = \ell d\theta$].

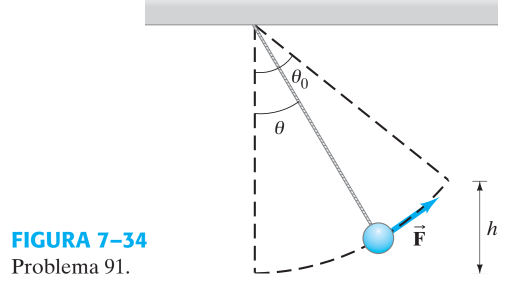


FIGURA 7–34 Problema 91.

*Problemas numéricos/por computadora

*__92.__ (II) La fuerza neta a lo largo de la trayectoria lineal de una partícula con masa de 480 g se midió a intervalos de 10.0 cm, empezando en $x = 0.0$, como 26.0, 28.5, 28.8, 29.6, 32.8, 40.1, 46.6, 42.2, 48.8, 52.6, 55.8, 60.2, 60.6, 58.2, 53.7, 50.3, 45.6, 45.2, 43.2, 38.9, 35.1, 30.8, 27.2, 21.0, 22.2 y 18.6, todo en newtons. Determine el trabajo total realizado sobre la partícula durante este rango completo.

*__93.__ (II) Cuando diferentes masas se suspenden de un resorte, éste se estira cantidades distintas, como se muestra en la siguiente tabla. Las masas se dan en valores con ± 1.0 gramo de error.

Masa (g)	0	50	100	150	200	250	300	350	400
Estiramiento (cm)	0	5.0	9.8	14.8	19.4	24.5	29.6	34.1	39.2

a) Grafique la fuerza aplicada (en newtons) versus el estiramiento (en metros) del resorte, y determine la recta de mejor ajuste. *b*) Determine la constante del resorte (N/m) estimando la pendiente de la recta del mejor ajuste. *c*) Si el resorte se estira 20.0 cm, estime la fuerza que actúa sobre el resorte utilizando el ajuste anterior.

Respuestas a los ejercicios

A: *c*).

B: *b*).

C: *b*) 2.0×10^5 J (es decir, menos).

D: No, porque la rapidez v sería la raíz cuadrada de un número negativo, lo cual no es real.

E: *a*) $\sqrt{2}$, *b*) 4.

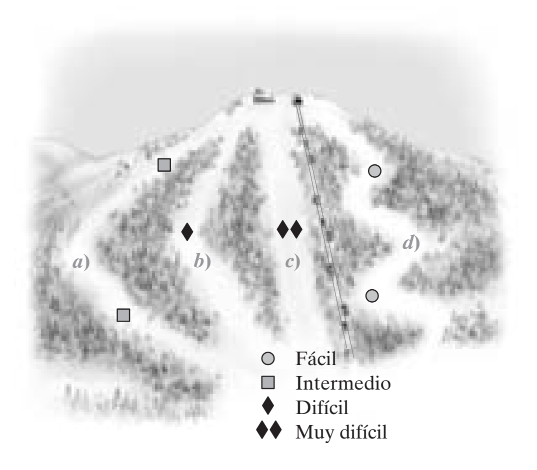
Un saltador con pértiga (garrocha) adquiere energía cinética al correr hacia la barra alta. Cuando apoya la pértiga y pone su peso sobre ella, su energía cinética se transforma: primero en energía potencial elástica de la pértiga arqueada y luego en energía potencial gravitacional al elevarse su cuerpo. Cuando cruza la barra, la pértiga está recta y ha cedido toda su energía potencial elástica, transformada en energía potencial gravitacional, al atleta. Casi toda la energía cinética de éste desaparece transformándose también en energía potencial gravitacional de su cuerpo a la gran altura de la barra (récord mundial de más de 6 m), que es exactamente lo que busca. En estas y todas las demás transformaciones de energía que continuamente tienen lugar en el mundo, la energía total siempre se conserva. De hecho, la conservación de la energía es una de las grandes leyes de la física, y se aplica en una amplia gama de áreas.

CAPÍTULO 8

Conservación de la energía

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!

Un esquiador parte de la cima de una colina. ¿En qué trayectoria cambia más su energía gravitacional: ***a***), ***b***), ***c***) o ***d***); o en todas ***e***) es la misma? ¿En qué trayectoria su rapidez en la parte inferior sería mayor, si se supone que el suelo está congelado y no hay fricción? Reconociendo que siempre hay algo de fricción, responda de nuevo las dos preguntas anteriores. Liste ahora sus cuatro respuestas.



CONTENIDO

Este capítulo continúa el análisis de los conceptos de trabajo y energía que se inició en el capítulo 7, e introduce asimismo tipos de energía adicionales, en particular la energía potencial. Ahora veremos por qué es tan importante el concepto de energía. En última instancia, la razón es que la energía se conserva, es decir, la energía total *siempre* permanece constante en cualquier proceso. Si una cantidad se define como permanentemente constante, de acuerdo con nuestros mejores experimentos, ello indica algo extraordinario acerca de la naturaleza. De hecho, la ley de la conservación de la energía es uno de los grandes principios unificadores de la ciencia.

La ley de la conservación de la energía nos brinda también otra herramienta u otro enfoque para resolver problemas. Hay muchas situaciones en las cuales un análisis basado en las leyes de Newton sería difícil o imposible, ya que quizá las fuerzas no se conozcan o no estén accesibles para una medición. Sin embargo, tales situaciones a menudo pueden tratarse con la ley de la conservación de la energía.

En este capítulo trataremos principalmente los objetos como si fuesen partículas u objetos rígidos, que experimentan sólo movimientos de traslación, sin movimientos interno o rotatorio.

8–1 Fuerzas conservativas y fuerzas no conservativas

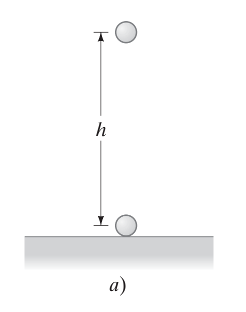
Es importante que clasifiquemos las fuerzas en dos tipos: conservativas y no conservativas. Por definición, llamamos a una fuerza **fuerza conservativa** si

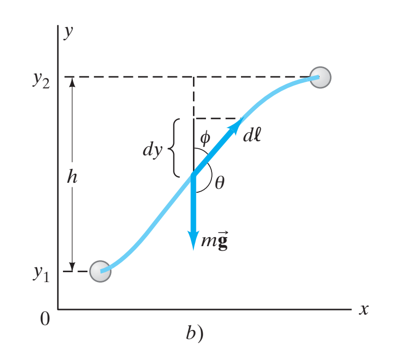
> **el trabajo hecho por la fuerza sobre un objeto que se mueve de un punto a otro depende sólo de las posiciones inicial y final del objeto, y es independiente de la trayectoria particular tomada.**

Una fuerza conservativa puede ser una función *sólo de posición*, y quizá no dependa de otras variables como el tiempo o la velocidad.

Podemos mostrar fácilmente que la fuerza de gravedad es una fuerza conservativa. La fuerza gravitacional sobre un objeto de masa m cerca de la superficie terrestre es $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{g}}$, donde $\vec{\mathbf{g}}$ es una constante. El trabajo hecho por esta fuerza gravitacional sobre un objeto que cae una distancia vertical h es $W_G = Fd = mgh$ (véase la figura 8-1a). Ahora suponga que en vez de moverse verticalmente hacia abajo o hacia arriba, un objeto sigue alguna trayectoria arbitraria en el plano xy, como se muestra en la figura 8-1b. El objeto parte de una altura vertical y_1 y alcanza una altura y_2, donde $y_2 - y_1 = h$. Para calcular el trabajo efectuado por la gravedad, W_G, usamos la ecuación 7-7:

FIGURA 8–1 Objeto de masa m: *a*) cae verticalmente una altura h; *b*) se eleva a lo largo de una trayectoria bidimensional arbitraria.





$$W_G = \int_1^2 \vec{\mathbf{F}}_G \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$$

$$= \int_1^2 mg \cos\theta \, d\ell.$$

Hacemos ahora $\phi = 180° - \theta$, el ángulo entre $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ y su componente vertical dy, como se muestra en la figura 8-1b. Entonces, como $\cos\theta = -\cos\phi$ y $dy = d\ell \cos\phi$, tenemos

$$W_G = -\int_{y_1}^{y_2} mg \, dy$$

$$= -mg(y_2 - y_1). \qquad \textbf{(8–1)}$$

Como $(y_2 - y_1)$ es la altura vertical h, vemos que el trabajo efectuado depende sólo de la altura vertical y ¡*no* de la trayectoria particular tomada! Por consiguiente, por definición, la gravedad es una fuerza conservativa.

Advierta que en el caso que se muestra en la figura 8-1b, $y_2 > y_1$ y, por lo tanto, el trabajo efectuado por la gravedad es negativo. Si por otra parte $y_2 < y_1$, entonces el objeto está cayendo y W_G es positivo.

Podemos dar la definición de una fuerza conservativa en otra manera completamente equivalente:

una fuerza es conservativa si el trabajo neto realizado por la fuerza sobre un objeto que se mueve alrededor de cualquier trayectoria cerrada es cero.

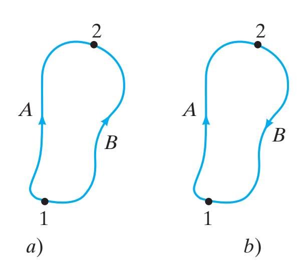


FIGURA 8–2 *a*) Un objeto pequeño se mueve entre los puntos 1 y 2 a lo largo de dos trayectorias diferentes, A y B. *b*) El objeto hace un viaje redondo, por la trayectoria A del punto 1 al punto 2, y por la trayectoria B de regreso al punto 1.

Para ver por qué ésta es equivalente a la definición anterior, considere un pequeño objeto que se mueve del punto 1 al punto 2, a lo largo de dos trayectorias marcadas con A y B en la figura 8-2a. Si suponemos que una fuerza conservativa actúa sobre el objeto, el trabajo realizado por esta fuerza es el mismo si el objeto toma la trayectoria A o la trayectoria B, de acuerdo con nuestra primera definición. A este trabajo para pasar del punto 1 al punto 2 lo llamamos W. Considere ahora el viaje redondo de la figura 8-2b. El objeto se mueve de 1 a 2 por la trayectoria A y nuestra fuerza efectúa un trabajo W. Nuestro objeto regresa luego al punto 1 por la trayectoria B. ¿Cuánto trabajo se efectúa durante el regreso? Al pasar de 1 a 2 por la trayectoria B el trabajo hecho es W, que por definición es igual a $\int_1^2 \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$. En el viaje de regreso de 2 a 1, la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ en cada punto es la misma, pero $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ está dirigida precisamente en el sentido opuesto. En consecuencia $\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ tiene un signo opuesto en cada punto, de manera que el trabajo total efectuado durante el viaje de retorno de 2 a 1 debe ser $-W$. Por lo tanto, el trabajo total realizado al ir de 1 a 2 y de regreso a 1 es $W + (-W) = 0$, lo cual prueba la equivalencia de las dos definiciones anteriores para una fuerza conservativa.

La segunda definición de una fuerza conservativa aclara un aspecto importante de tal fuerza: *el trabajo efectuado por una fuerza conservativa es recuperable* en el sentido de que si trabajo positivo es realizado *por* un objeto (sobre algún otro) en una parte de una trayectoria cerrada, una cantidad equivalente de trabajo negativo será efectuada por el objeto durante su retorno.

Como vimos, la fuerza de gravedad es conservativa, y es fácil demostrar que la fuerza elástica ($F = -kx$) es también conservativa.

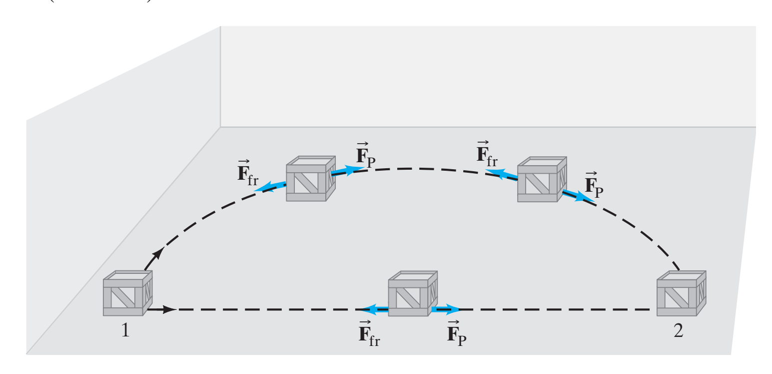


FIGURA 8–3 Un cajón es empujado a rapidez constante por un piso rugoso de la posición 1 a la posición 2 a lo largo de dos trayectorias, una recta y otra curva. La fuerza de empuje $\vec{\mathbf{F}}_P$ actúa siempre en la dirección del movimiento. (La fuerza de fricción se opone al movimiento). Por consiguiente, para una fuerza de empuje de magnitud constante, el trabajo efectuado por ésta es $W = F_P d$, de manera que si d es mayor (como para la trayectoria curva), entonces W también será mayor. El trabajo realizado no sólo depende de los puntos 1 y 2: depende también de la trayectoria seguida.

Muchas fuerzas como la fricción, o el empuje o el jalón ejercidos por una persona, son **fuerza no conservativas** porque el trabajo que realizan depende de la trayectoria. Por ejemplo, si usted empuja una caja a través de un piso desde un punto a otro, el trabajo que realiza depende de si la trayectoria seguida es recta o curva. Como se observa en la figura 8-3, si una caja se empuja desde el punto 1 hasta el punto 2 a lo largo de una trayectoria semicircular más larga, en vez de empujarla siguiendo una trayectoria recta, usted realiza más trabajo para vencer la fricción. Esto se debe a la mayor distancia y, a diferencia de la fuerza gravitacional, a que la fuerza de empuje $\vec{\mathbf{F}}_P$ siempre está en la dirección del movimiento. De manera que el trabajo realizado por la persona en la figura 8-3 no depende *sólo* de los puntos 1 y 2, pues depende también de la trayectoria seguida. La fuerza de fricción cinética, que también se muestra en la figura 8-3, siempre se opone al movimiento y, además, es una fuerza no conservativa (más adelante en este capítulo veremos cómo estudiarla; sección 8-6) . La tabla 8-1 lista unas cuantas fuerzas conservativas y no conservativas.

TABLA 8–1 Fuerzas conservativas y fuerzas no conservativas

Fuerzas conservativas	Fuerzas no conservativas
Gravitacional	Fricción
Elástica	Resistencia del aire
Eléctrica	Tensión sobre una cuerda
	Motor o propulsión de un cohete
	Empujón o jalón de una persona

8–2 Energía potencial

En el capítulo 7 estudiamos la energía asociada con un objeto en movimiento, que es su energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$. Veremos ahora la **energía potencial**, es decir, la energía asociada con fuerzas que dependen de la posición o configuración de un objeto en relación con su entorno. Es posible definir varios tipos de energía potencial y cada tipo está asociado con una fuerza conservativa específica.

El resorte enrollado de un juguete es un ejemplo de energía potencial. El resorte adquirió energía potencial porque se efectuó trabajo *sobre* él por la persona que enrolló el juguete. Al desenrollarse el resorte, éste ejerce una fuerza y efectúa trabajo al hacer que el juguete se mueva.

Energía potencial gravitacional

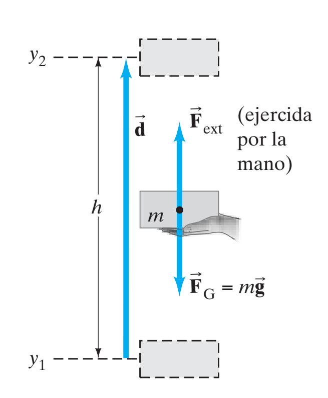


FIGURA 8–4 Una persona ejerce una fuerza hacia arriba $F_{ext} = mg$ para levantar un ladrillo de y_1 a y_2.

El ejemplo más común de energía potencial tal vez sea la *energía potencial gravitacional*. Un ladrillo pesado sostenido en lo alto tiene energía potencial debido a su posición relativa a la Tierra. Así, tiene la capacidad de efectuar trabajo, ya que si se le suelta, caerá al suelo debido a la fuerza gravitacional y puede efectuar trabajo sobre una estaca al clavarla en el suelo. Determinemos la forma de la energía potencial gravitacional de un objeto cerca de la superficie terrestre. Para levantar verticalmente un objeto de masa m, es necesario ejercer sobre él una fuerza hacia arriba por lo menos igual a su peso mg, digamos, por la mano de una persona. Para levantarlo sin aceleración hasta una altura h, de la posición y_1 a la y_2 en la figura 8-4 (el sentido hacia arriba se eligió como positivo), una persona debe efectuar un trabajo igual al producto de la fuerza "externa" que ejerce, $F_{ext} = mg$ hacia arriba, por la distancia vertical h. Es decir,

$$W_{ext} = \vec{\mathbf{F}}_{ext} \cdot \vec{\mathbf{d}} = mgh\cos 0° = mgh = mg(y_2 - y_1)$$

donde ambas $\vec{\mathbf{F}}_{ext}$ y $\vec{\mathbf{d}}$ apuntan hacia arriba. La gravedad también actúa sobre el objeto al moverse éste de y_1 a y_2, y efectúa trabajo sobre el objeto igual a

$$W_G = \vec{\mathbf{F}}_G \cdot \vec{\mathbf{d}} = mgh\cos 180° = -mgh = -mg(y_2 - y_1),$$

donde $\theta = 180°$, ya que $\vec{\mathbf{F}}_G$ y $\vec{\mathbf{d}}$ apuntan en sentidos opuestos. Como $\vec{\mathbf{F}}_G$ es hacia abajo y $\vec{\mathbf{d}}$ es hacia arriba, W_G es negativo. Si el objeto sigue una trayectoria arbitraria, como en la figura 8-1b, el trabajo efectuado por la gravedad depende aún sólo del cambio en la altura vertical (ecuación 8-1): $W_G = -mg(y_2 - y_1) = -mgh$.

De manera que si permitimos que el objeto caiga libremente partiendo del reposo, bajo la acción de la gravedad, adquiere una velocidad dada por $v^2 = 2gh$ (ecuación 2-12c) después de caer desde una altura h. Tiene entonces energía cinética $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(2gh) = mgh$. Si luego golpea una estaca, el objeto puede realizar trabajo sobre ella igual a mgh.

En resumen, para elevar un objeto de masa m hasta una altura *h, se requiere* una cantidad de trabajo igual a mgh. Una vez a la altura h, el objeto tiene la *capacidad* de efectuar una cantidad de trabajo igual a mgh. Podemos entonces afirmar que el trabajo realizado al levantar el objeto ha sido almacenado como energía potencial gravitacional.

De hecho, podemos definir el *cambio en energía potencial gravitacional U* cuando un objeto se mueve de una altura y_1 a una altura y_2, como igual al trabajo hecho por la fuerza externa neta necesaria para lograr esto sin aceleración:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = W_{ext} = mg(y_2 - y_1).$$

En forma equivalente podemos definir el cambio en energía potencial gravitacional como igual al negativo del trabajo hecho por la gravedad misma en el proceso:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -W_G = mg(y_2 - y_1). \qquad \textbf{(8–2)}$$

La ecuación 8-2 define el cambio en la energía potencial gravitacional, cuando un objeto de masa m se mueve entre dos puntos cerca de la superficie terrestre.[†] La energía potencial gravitacional U en cualquier punto a una altura vertical y arriba de algún punto de referencia (el origen del sistema coordenado) puede definirse como

$$U_{grav} = mgy. \qquad \text{[sólo gravedad]} \quad \textbf{(8–3)}$$

Note que la energía potencial está asociada con la fuerza de la gravedad entre la Tierra y la masa m. Por consiguiente, U representa la energía potencial gravitacional, no únicamente de la masa m sola, sino del sistema masa-Tierra.

[†]La sección 8-8 trata con la dependencia de $1/r^2$ la ley de Newton de la gravitación universal.

La energía potencial gravitacional depende de la *altura vertical* del objeto *sobre algún nivel de referencia*: $U = mgy$. En algunas situaciones, es posible que usted se pregunte desde qué punto hay que medir la altura y. La energía potencial gravitacional de un libro que se mantiene elevado sobre una mesa, por ejemplo, depende de si medimos y desde lo alto de la mesa, desde el suelo o desde algún otro punto de referencia. Lo que es físicamente importante en cualquier situación es el *cambio* en la energía potencial, ΔU, porque esto es lo que está relacionado con el trabajo efectuado; y ΔU es lo que se puede medir. Por ende elegimos medir y desde cualquier punto de referencia que sea conveniente; sin embargo, debemos elegir el punto de referencia al principio y ser consistentes a lo largo de todo el cálculo. El *cambio* en la energía potencial entre dos puntos cualesquiera no depende de esta elección.


CUIDADO

El cambio de energía potencial es lo que es físicamente significativo

La energía potencial pertenece a un sistema y no sólo a un objeto. La energía potencial está asociada con una fuerza, y una fuerza sobre un objeto es siempre ejercida por algún otro objeto. Así, la energía potencial es una propiedad del sistema en su conjunto. Para un objeto elevado a una altura y sobre la superficie terrestre, el cambio en la energía potencial gravitacional es mgy. Aquí el sistema es el objeto más la Tierra, y las propiedades de ambos están relacionadas: objeto (m) y Tierra (g). En general, un *sistema* es uno o más objetos que elegimos estudiar. La elección de lo que conforma el sistema es siempre nuestra, y a menudo intentamos elegir un sistema sencillo. Más adelante, cuando tratemos con la energía potencial de un objeto en contacto con un resorte, nuestro sistema será el objeto y el resorte.


CUIDADO

La energía potencial pertenece a un sistema, no a un objeto específico

EJERCICIO A Regrese a la Pregunta de inicio de capítulo de la página 183, e intente responderla de nuevo. Trate de explicar por qué quizás usted la respondió de manera diferente la primera vez.

EJEMPLO 8–1 Cambios de la energía potencial en una montaña rusa. Un carro de 1000 kg de una montaña rusa se mueve del punto 1, figura 8-5, al punto 2 y luego al punto 3. *a*) ¿Cuál es la energía potencial gravitacional en 2 y en 3 con respecto al punto 1? Considere $y = 0$ para el punto 1. *b*) ¿Cuál es el cambio en la energía potencial cuando el carro pasa de 2 a 3? *c*) Resuelva nuevamente los incisos *a*) y *b*) pero ahora tome el punto de referencia ($y = 0$) en el punto 3.

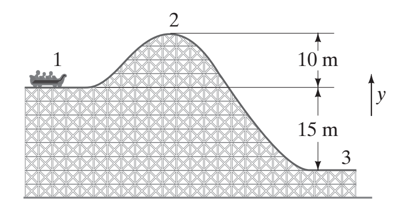


FIGURA 8–5 Ejemplo 8-1.

PLANTEAMIENTO Lo que nos interesa es la energía potencial del sistema carro-Tierra y consideramos hacia arriba la dirección y positiva. Utilizamos la definición de energía potencial gravitacional para calcular la energía potencial.

SOLUCIÓN *a*) Medimos las alturas desde el punto 1 ($y_1 = 0$), lo cual significa que inicialmente la energía potencial gravitacional es cero. En el punto 2, donde $y_2 = 10$ m,

$$U_2 = mgy_2 = (1000\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2)(10\,\text{m}) = 9.8 \times 10^4\,\text{J}.$$

En el punto 3, $y_3 = -15$ m, ya que el punto 3 está debajo del punto 1. Por lo tanto,

$$U_3 = mgy_3 = (1000\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2)(-15\,\text{m}) = -1.5 \times 10^5\,\text{J}.$$

b) Al pasar del punto 2 al 3, el cambio de energía potencial ($U_{\text{final}} - U_{\text{inicial}}$) es

$$U_3 - U_2 = \left(-1.5 \times 10^5\,\text{J}\right) - \left(9.8 \times 10^4\,\text{J}\right) = -2.5 \times 10^5\,\text{J}.$$

La energía potencial gravitacional disminuye en 2.5×10^5 J.

c) Ahora hacemos $y_3 = 0$. Entonces, $y_1 = +15$ m en el punto 1, por lo que la energía potencial inicialmente (en el punto 1) es

$$U_1 = (1000\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2)(15\,\text{m}) = 1.5 \times 10^5\,\text{J}.$$

En el punto 2, $y_2 = 25$ m, de manera que la energía potencial es

$$U_2 = 2.5 \times 10^5\,\text{J}.$$

En el punto 3, $y_3 = 0$, por lo que la energía potencial es cero. El cambio en energía potencial al pasar del punto 2 al 3 es

$$U_3 - U_2 = 0 - 2.5 \times 10^5\,\text{J} = -2.5 \times 10^5\,\text{J},$$

que es el mismo que en el inciso *b*).

NOTA El trabajo realizado por la gravedad depende sólo de la altura, de manera que los cambios en la energía potencial gravitacional no dependen de la trayectoria seguida.

EJERCICIO B ¿En cuánto cambia la energía potencial cuando un carro de 1200 kg sube a la parte superior de una colina de 300 m de altura? *a*) 3.6×10^5 J; *b*) 3.5×10^6 J; *c*) 4 J; *d*) 40 J; *e*) 39.2 J.

Energía potencial en general

Definimos el cambio en energía potencial gravitacional (ecuación 8-2) como igual al negativo del trabajo efectuado por la gravedad, cuando el objeto se mueve de la altura y_1 a la y_2, que ahora escribimos como

$$\Delta U = -W_{\mathrm{G}} = -\int_1^2 \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{G}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}.$$

Hay otros tipos de energía potencial además de la gravitacional. En general, definimos el *cambio en energía potencial asociada con una fuerza conservativa particular* $\vec{\mathbf{F}}$ *como el negativo del trabajo realizado por esa fuerza*:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_1^2 \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = -W. \qquad \textbf{(8–4)}$$



CUIDADO

La energía potencial puede definirse sólo para fuerzas conservativas

Sin embargo, no podemos usar esta definición el definir una energía potencial para todas las fuerzas posibles. Sólo tiene sentido para fuerzas conservativas como la gravedad, para la cual la integral depende sólo de los puntos extremos y no de la trayectoria seguida. No se aplica a fuerzas no conservativas como la fricción, porque la integral en la ecuación 8-4 *no* tendría un valor único dependiente de los puntos extremos 1 y 2. Así, el concepto de energía potencial no puede definirse ni tiene sentido para una fuerza no conservativa.

Energía potencial elástica

Consideraremos ahora la energía potencial asociada con materiales elásticos. Esto incluye una gran variedad de aplicaciones prácticas.

Considere un resorte en espiral sencillo como el de la figura 8-6, cuya masa es tan pequeña que podemos despreciarla. Cuando el resorte se comprime y luego se suelta, puede efectuar trabajo sobre una pelota (masa m). Así, el sistema resorte-pelota tiene energía potencial cuando se comprime (o se estira). Al igual que otros materiales elásticos, un resorte es descrito por la ley de Hooke (véase la sección 7-3) siempre que el desplazamiento x no sea muy grande. Tomemos nuestro sistema coordenado de manera que el extremo del resorte no comprimido esté en $x = 0$ (figura 8-6a) y que x sea positiva hacia la derecha. Para mantener el resorte comprimido (o estirado) una distancia x desde su longitud natural (sin estirar), se requiere que la mano de una persona ejerza una fuerza $F_{\mathrm{P}} = kx$ sobre el resorte (figura 8-6b), donde k es la constante de rigidez del resorte. El resorte empuja en sentido contrario con una fuerza (tercera ley de Newton),

$$F_{\mathrm{S}} = -kx,$$

figura 8-6c. El signo negativo aparece porque la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{S}}$ está dirigida en sentido contrario al desplazamiento x. De la ecuación 8-4, el cambio en energía potencial cuando el resorte se comprime o se estira entre $x_1 = 0$ (su posición no comprimida) y $x_2 = x$ (donde x puede ser + o −) es

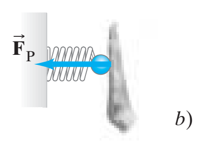
$$\Delta U = U(x) - U(0) = -\int_1^2 \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{S}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = -\int_0^x (-kx)\, dx = \tfrac{1}{2}kx^2.$$

Aquí, $U(x)$ significa la energía potencial en x, y $U(0)$ significa U en $x = 0$. Es usualmente conveniente elegir la energía potencial en $x = 0$ igual a cero: $U(0) = 0$, de manera que la energía potencial de un resorte comprimido o estirado una cantidad x desde el equilibrio es

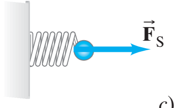
$$U_{\mathrm{el}}(x) = \tfrac{1}{2}kx^2. \qquad \text{[elástica]} \quad \textbf{(8–5)}$$

FIGURA 8–6 *a*) Un resorte *b*) puede almacenar energía (energía potencial elástica) cuando está comprimido, y *c*) y *d*) puede usarse para efectuar trabajo al ser liberado.

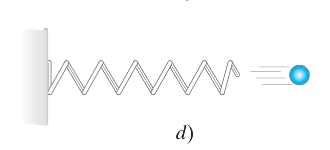
y
x
x = 0
a)



b)



c)



d)

Energía potencial relacionada con fuerza (1 – D)

En el caso unidimensional, donde una fuerza conservativa puede escribirse como una función, digamos, de x, la energía potencial puede escribirse como una integral indefinida

$$U(x) = -\int F(x)\, dx + C, \qquad \textbf{(8–6)}$$

donde la constante C representa el valor de U en $x = 0$; en ocasiones podemos entonces elegir $C = 0$. La ecuación 8-6 nos dice cómo obtener $U(x)$ si se da $F(x)$. Si, por el

contrario, se nos da $U(x)$, podemos obtener $F(x)$ invirtiendo la ecuación anterior: es decir, tomamos la derivada de ambos lados, recordando que la integración y la diferenciación son operaciones inversas:

$$\frac{d}{dx}\int F(x)\,dx = F(x).$$

Por lo tanto,

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}. \qquad \textbf{(8–7)}$$

EJEMPLO 8–2 **Determine *F* a partir de *U*.** Suponga que $U(x) = -ax/(b^2 + x^2)$, donde a y b son constantes. ¿Cómo se expresa F en función de x?

PLANTEAMIENTO Como $U(x)$ depende sólo de x, éste es un problema unidimensional.

SOLUCIÓN La ecuación 8-7 da

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left[-\frac{ax}{b^2 + x^2}\right] = \frac{a}{b^2 + x^2} - \frac{ax}{\left(b^2 + x^2\right)^2}2x = \frac{a\left(b^2 - x^2\right)}{\left(b^2 + x^2\right)^2}.$$

* Energía potencial en tres dimensiones

En tres dimensiones, podemos escribir la relación entre $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z)$ y U como:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

o bien,

$$\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = -\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial U}{\partial x} - \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial U}{\partial y} - \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Aquí, $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ y $\partial/\partial z$ se llaman derivadas parciales; por ejemplo, $\partial/\partial x$ significa que aunque U puede ser una función de x, y y z, escrito $U(x, y, z)$, tomamos la derivada sólo con respecto a x manteniendo constantes las otras variables.

8–3 Energía mecánica y su conservación

Consideremos un sistema conservativo (que significa que sólo las fuerzas conservativas efectúan trabajo) donde la energía se transforma de cinética a potencial, o viceversa. De nuevo, debemos considerar un sistema porque la energía potencial no existe para un objeto aislado. Nuestro sistema podría ser una masa m que oscila en el extremo de un resorte o se mueve en el campo gravitacional terrestre.

De acuerdo con el principio trabajo-energía (ecuación 7-11), el trabajo neto W_{net} efectuado sobre un objeto es igual a su cambio en energía cinética:

$$W_{net} = \Delta K.$$

(Si más de un objeto de nuestro sistema tiene trabajo hecho sobre sí, entonces W_{net} y ΔK pueden representar la suma para todos los objetos.) Como suponemos un sistema conservativo, podemos escribir el trabajo neto realizado sobre un(os) objeto(s) en términos del cambio en la energía potencial total (ecuación 8-4) entre los puntos 1 y 2:

$$\Delta U_{total} = -\int_1^2 \vec{\mathbf{F}}_{net}\cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = -W_{net}. \qquad \textbf{(8–8)}$$

Combinamos las dos ecuaciones previas, haciendo U igual a la energía potencial total:

$$\Delta K + \Delta U = 0 \qquad \text{[sólo fuerzas conservativas]} \qquad \textbf{(8–9a)}$$

o bien,

$$\left(K_2 - K_1\right) + \left(U_2 - U_1\right) = 0. \qquad \text{[sólo fuerzas conservativas]} \qquad \textbf{(8–9b)}$$

Definimos ahora una cantidad E, llamada **energía mecánica total** de nuestro sistema, como la suma de la energía cinética más la energía potencial del sistema en cualquier momento

$$E = K + U.$$

Podemos ahora reescribir la ecuación 8-9b como

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1 \qquad \text{[sólo fuerzas conservativas]} \quad \textbf{(8–10a)}$$

o bien,

$$E_2 = E_1 = \text{constante.} \qquad \text{[sólo fuerzas conservativas]} \quad \textbf{(8–10b)}$$

Las ecuaciones 8-10 expresan un útil y profundo principio respecto a la energía mecánica total, es decir, que se trata de una **cantidad que se conserva**; en tanto que ninguna fuerza no conservativa efectúe trabajo, de manera que la cantidad $E = K + U$ en algún tiempo inicial 1 es igual a $K + U$ en cualquier tiempo 2 posterior.

Dicho de otra manera, considere la ecuación 8-9a, la cual nos indica que $\Delta U = -\Delta K$; es decir, si se incrementa la energía cinética K, entonces la energía potencial U debe disminuir una cantidad equivalente como compensación. Entonces, el total $K + U$ permanece constante. Esto se llama el **principio de conservación de la energía mecánica** para fuerzas conservativas:

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Si sólo fuerzas conservativas están efectuando trabajo, la energía mecánica total de un sistema ni aumenta ni disminuye en cualquier proceso. Permanece constante, es decir, se conserva.

Ahora vemos la razón para el término "fuerza conservativa", ya que para tales fuerzas se conserva la energía mecánica.

Si sólo un objeto de un sistema† tiene energía cinética significativa, entonces las ecuaciones 8-10 toman la siguiente forma:

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + U = \text{constante.} \qquad \text{[sólo fuerzas conservativas]} \quad \textbf{(8–11a)}$$

Si v_1 y U_1 representan la velocidad y la energía potencial en un instante, y v_2 y U_2 las representan en un segundo instante, entonces podemos reescribir esto como

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + U_1 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 + U_2. \qquad \text{[sistema conservativo]} \quad \textbf{(8–11b)}$$

De esta ecuación observamos de nuevo que no importa dónde se elija el cero para la energía potencial: sumar una constante a U simplemente agrega una constante a ambos lados de la ecuación anterior, y ellas se cancelan. Una constante no afecta la fuerza obtenida con la ecuación 8-7, $F = -dU/dx$, ya que la derivada de una constante es cero. Sólo con cambios en la energía potencial.

8–4 Resolución de problemas usando la conservación de la energía mecánica

Un ejemplo sencillo de la conservación de la energía mecánica (ignorando la resistencia del aire) es una piedra que se deja caer desde una altura h, bajo la acción de la gravedad, como se muestra en la figura 8-7. Si la piedra parte del reposo, tiene inicialmente sólo energía potencial. Al caer, disminuye su energía potencial mgy (porque y disminuye); sin embargo, su energía cinética aumenta como compensación, de manera que la suma de las dos energías permanece constante. En cualquier punto a lo largo de su trayectoria, la energía mecánica total está dada por

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgy$$

donde y es la altura de la piedra por arriba del suelo en un instante dado y v es su rapidez en ese punto. Si el subíndice 1 representa la piedra en un punto a lo largo de su trayectoria (por ejemplo, el punto inicial), y el subíndice 2 la representa en algún otro punto, escribimos entonces

energía mecánica total en el punto 1 = energía mecánica total en el punto 2

o (véase también la ecuación 8-11b)

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2. \qquad \text{[sólo gravedad]} \quad \textbf{(8–12)}$$

Justo antes de que la piedra toque el suelo, donde elegimos $y = 0$, toda la energía potencial inicial se habrá transformado en energía cinética.

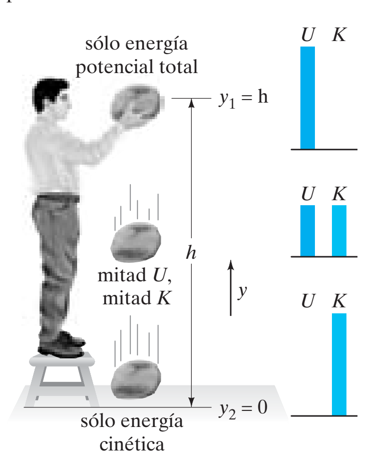


FIGURA 8–7 La energía potencial de la piedra cambia a energía cinética al caer. Observe que las gráficas de barras representan energía potencial U y energía cinética K para las tres posiciones diferentes.

†Para un objeto que se mueve bajo la influencia de la gravedad terrestre, por lo general puede despreciarse la energía cinética de la Tierra. Por ejemplo, para una masa que oscila en el extremo de un resorte, la masa de éste y, por consiguiente, su energía cinética pueden a menudo ignorarse.

EJEMPLO 8–3 **Caída de una piedra.** Si la altura original de la piedra en la figura 8-7 es $y_1 = h = 3.0$ m, calcule la rapidez de la piedra cuando ha caído a 1.0 m por arriba del suelo.

PLANTEAMIENTO Aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica (ecuación 8-12) suponiendo que sobre la roca sólo actúa la gravedad. Elegimos el suelo como nuestro nivel de referencia ($y = 0$).

SOLUCIÓN En el momento de liberación (punto 1) la piedra se encuentra en la posición $y_1 = 3.0$ m y está en reposo: $v_1 = 0$. Queremos encontrar v_2 cuando la piedra está en la posición $y_2 = 1.0$ m. La ecuación 8-12 da

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2.$$

Las m se cancelan y se establece que $v_1 = 0$; despejando v_2 encontramos

$$v_2 = \sqrt{2g(y_1 - y_2)} = \sqrt{2(9.8\,\text{m/s}^2)[(3.0\,\text{m}) - (1.0\,\text{m})]} = 6.3\,\text{m/s}.$$

La rapidez de la piedra cuando está a 1.0 m sobre el suelo es de 6.3 m/s hacia abajo.

NOTA La velocidad de la piedra es independiente de su masa.

EJERCICIO C En el ejemplo 8-3 ¿cuál es la rapidez de la roca justo antes de que golpee el suelo? *a*) 6.5 m/s; *b*) 7.0 m/s; *c*) 7.7 m/s; *d*) 8.3 m/s; *e*) 9.8 m/s.

La ecuación 8-12 puede aplicarse a cualquier objeto en movimiento sin fricción bajo la acción de la gravedad. Por ejemplo, la figura 8-8 muestra un carro de una montaña rusa que parte del reposo en la cima de una colina y se desplaza libremente sin fricción hasta el fondo, y luego hacia arriba de la colina al otro lado. De hecho, hay otra fuerza además de la gravedad actuando sobre el carro: la fuerza normal ejercida por la vía. Pero esta fuerza “restrictiva” actúa perpendicularmente a la dirección del movimiento en cada punto, por lo que no efectúa ningún trabajo. Ignoramos el movimiento rotacional de las ruedas del carro y tratamos a éste como una partícula sometida a traslación simple. Inicialmente, el carro tiene sólo energía potencial. Al moverse libremente hacia abajo por la colina, pierde energía potencial y gana energía cinética; sin embargo, la suma de las dos permanece constante. En el fondo de la colina, adquiere su energía cinética máxima y al subir por el otro lado la energía cinética cambia de nuevo a energía potencial. Cuando el carro alcanza otra vez el reposo, toda su energía será potencial. Dado que la energía potencial es proporcional a la altura vertical, la conservación de la energía nos dice que (en ausencia de fricción) el carro alcanza el reposo a una altura igual a su altura original. Si las dos colinas tienen la misma altura, el carro alcanzará justamente la cima de la segunda colina al detenerse. Si la segunda colina es más baja que la primera, no toda la energía cinética del carro se transformará en energía potencial y el carro puede continuar sobre la cima y bajar por el otro lado. Si la segunda colina es más alta, el carro sólo alcanzará una altura sobre ella igual a su altura original sobre la primera colina. Esto es cierto (en ausencia de fricción) sin importar qué tan empinada esté la colina, ya que la energía potencial depende sólo de la altura vertical.

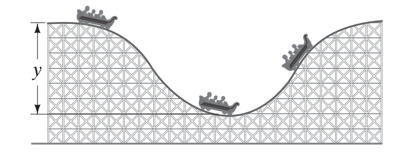


FIGURA 8–8 Un carro de montaña rusa que se mueve sin fricción ilustra la conservación de la energía mecánica.

EJEMPLO 8–4 **Rapidez en la montaña rusa usando la conservación de la energía.** Suponiendo que la altura de la colina en la figura 8-8 es de 40 m y que los carros parten del reposo en la cima, calcule *a*) la rapidez de un carro en el fondo de la colina, y *b*) a qué altura tendrá el carro la mitad de esta rapidez. Tome $y = 0$ en el fondo de la colina.

PLANTEAMIENTO Elegimos que el punto 1 quede donde el carro parte desde el reposo ($v_1 = 0$) en lo alto de la colina ($y_1 = 40$ m). El punto 2 se localiza en el fondo de la colina, que elegimos como nuestro nivel de referencia, de manera que $y_2 = 0$. Utilizaremos la conservación de la energía mecánica.

SOLUCIÓN *a*) Usamos la ecuación 8-12 con $v_1 = 0$ y $y_2 = 0$. Entonces,

$$mgy_1 = \tfrac{1}{2}mv_2^2$$

o, bien

$$v_2 = \sqrt{2gy_1} = \sqrt{2(9.8\,\text{m/s}^2)(40\,\text{m})} = 28\,\text{m/s}.$$

b) Usamos de nuevo la conservación de la energía,

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2,$$

pero ahora $v_2 = \frac{1}{2}(28\,\text{m/s}) = 14\,\text{m/s}$, $v_1 = 0$, y y_2 es la incógnita. Entonces,

$$y_2 = y_1 - \frac{v_2^2}{2g} = 30\,\text{m}.$$

Es decir, el carro tiene una rapidez de 14 m/s cuando esté en *vertical* a 30 m sobre el punto más bajo, tanto cuando desciende la colina izquierda como cuando asciende la colina derecha.

La matemática del ejemplo 8-4 es casi la misma que la del ejemplo 8-3. No obstante, hay una diferencia importante entre ellos. En el ejemplo 8-3 el movimiento es sólo vertical y podría haberse resuelto usando fuerza, aceleración y ecuaciones cinemáticas (ecuaciones 2-12). Pero con la montaña rusa, donde el movimiento no es vertical, no podríamos haber usado las ecuaciones 2-12 porque a no es constante sobre las vías curveadas; la conservación de la energía nos dio rápidamente la respuesta.

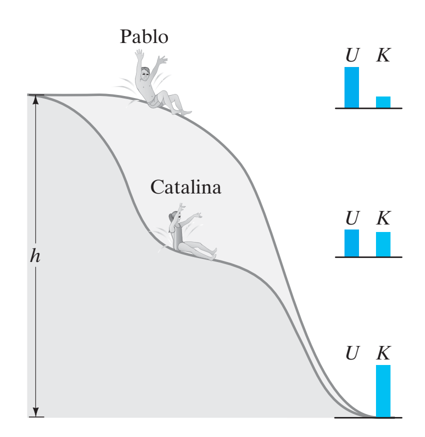


FIGURA 8–9 Ejemplo 8-5.

EJEMPLO CONCEPTUAL 8–5 **Rapideces sobre dos resbaladillas de agua.** Dos resbaladillas de agua sobre una alberca tienen formas diferentes, aunque ambas comienzan a la misma altura h (figura 8-9). Dos personas, Pablo y Catalina, parten del reposo al mismo tiempo en diferentes resbaladillas. *a*) ¿Quién, Pablo o Catalina, llegará con mayor rapidez al fondo? *b*) ¿Quién llegará primero al fondo? Ignore la fricción y suponga que ambas resbaladillas tienen la misma longitud de trayectoria.

RESPUESTA *a*) La energía potencial inicial mgh de cada persona se transforma en energía cinética, por lo que la velocidad v en el fondo se obtiene de $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$. La masa se cancela y, por lo tanto, la rapidez será la misma, independientemente de la masa de la persona. Como ambos descienden desde la misma altura vertical, llegarán al fondo con la misma rapidez. *b*) Note que Catalina está siempre consistentemente a una menor elevación que Pablo durante todo el trayecto, lo cual significa que ella ha convertido su energía potencial en energía cinética antes que Pablo. En consecuencia, ella viaja más rápido que Pablo durante todo el trayecto, y como la distancia es la misma, Catalina llega primero al fondo.

EJERCICIO D Dos pelotas se sueltan desde la misa altura sobre el suelo. La pelota A desciende en caída libre por el aire; mientras que la pelota B se desliza hasta el suelo sobre una pista curva sin fricción. ¿Cómo se compara la rapidez de las pelotas cuando llegan al suelo?



Utilice energía, ¿o las leyes de Newton?

Es posible que en ocasiones usted se pregunte si un problema debe abordarse a partir del trabajo o la energía, o más bien es conveniente utilizar las leyes de Newton. Como un lineamiento general, puede decirse que si las fuerzas involucradas son constantes, cualquier enfoque tendrá éxito. Si las fuerzas no son constantes y/o la trayectoria no es simple, la energía es el enfoque más seguro.



Deportes

Hay muchos ejemplos interesantes de conservación de la energía en los deportes, como el salto con pértiga que se ilustra en la figura 8-10. A menudo tenemos que hacer aproximaciones; no obstante, a grandes rasgos la secuencia de los eventos para el salto con pértiga es como sigue. La energía cinética inicial del atleta corriendo se transforma en energía potencial elástica de la pértiga flexionada y, cuando el atleta deja el piso, se transforma en energía potencial gravitacional. Cuando el atleta llega a la parte superior y la pértiga se vuelve a enderezar, toda la energía se transforma en energía potencial gravitacional (si ignoramos la pequeña rapidez horizontal baja del atleta sobre la barra). La pértiga no da ninguna energía, pero actúa como un dispositivo para *almacenarla* y ayuda así en la transformación de energía cinética en energía potencial gravitacional, que es el resultado neto. La energía requerida para pasar sobre la barra depende de qué tan alto debe elevarse el centro de masa (CM) del atleta. Flexionando el cuerpo, los saltadores con pértiga mantienen su CM tan bajo que pueden pasar en realidad ligeramente por debajo de la barra (figura 8-11), permitiéndoles cruzar sobre una barra más alta de lo que sería posible de otra manera. (El centro de masa se estudia en el capítulo 9).

FIGURA 8–10 Transformación de energía durante un salto con pértiga.



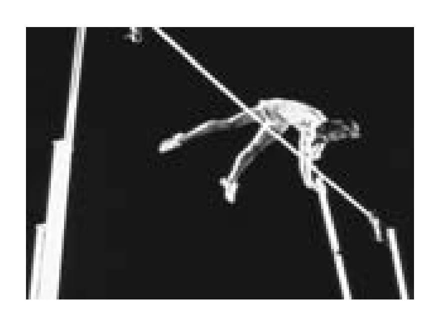


FIGURA 8–11 Flexionando el cuerpo, un saltador con pértiga puede mantener su centro de masa tan bajo que puede pasar aun por debajo de la barra. Cambiando su energía cinética (al correr) en energía potencial gravitacional (= mgy) de esta forma, los saltadores con pértiga podrían librar una barra más alta, que si el cambio en energía potencial ocurriera sin tener que flexionar cuidadosamente el cuerpo.

EJEMPLO 8–6 ESTIMACIÓN **Salto con pértiga.** Estime la energía cinética y la rapidez requeridas para que un saltador con pértiga de 70 kg libre justamente la barra horizontal colocada a 5.0 m de altura. Suponga que el centro de masa del atleta está inicialmente a 0.90 m desde el suelo y que alcanza su altura máxima al nivel de la barra misma.

PLANTEAMIENTO Igualamos la energía total justo antes de que el atleta coloque el extremo de la pértiga sobre el suelo (y la pértiga empiece a flexionarse y a almacenar energía potencial), con la energía total del atleta al pasar sobre la barra (ignoramos la pequeña cantidad de energía cinética en este punto). Elegimos la posición inicial del centro de masa del atleta como $y_1 = 0$; entonces, su cuerpo debe elevarse a una altura $y_2 = 5.0\text{ m} - 0.9\text{ m} = 4.1\text{ m}$.

SOLUCIÓN Usamos la ecuación 8-12,

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + 0 = 0 + mgy_2$$

por lo que

$$K_1 = \tfrac{1}{2}mv_1^2 = mgy_2 = (70\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)(4.1\text{ m}) = 2.8 \times 10^3\text{ J}.$$

La rapidez es

$$v_1 = \sqrt{\frac{2K_1}{m}} = \sqrt{\frac{2(2800\text{ J})}{70\text{ kg}}} = 8.9\text{ m/s} \approx 9\text{ m/s}.$$

NOTA Ésta es una aproximación porque hemos ignorado cuestiones como la rapidez del saltador al cruzar sobre la barra, la energía mecánica transformada cuando la pértiga se apoya sobre el suelo y el trabajo efectuado por el atleta sobre la pértiga. Todo ello incrementaría la necesidad de energía cinética inicial.

Como otro ejemplo de la conservación de la energía mecánica, consideremos una masa m conectada a un resorte horizontal (figura 8-6), cuya masa puede ignorarse y cuya constante de rigidez del resorte es k. La masa m tiene rapidez v en cualquier momento y la energía potencial del sistema (objeto más resorte) es $\frac{1}{2}kx^2$, donde x es el desplazamiento del resorte medido desde su longitud sin estirar. Si no se consideran la fricción ni ninguna otra fuerza, la conservación de la energía mecánica nos indica que

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + \tfrac{1}{2}kx_1^2 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 + \tfrac{1}{2}kx_2^2, \quad \text{[sólo energía potencial elástica]} \quad \textbf{(8–13)}$$

donde los subíndices 1 y 2 se refieren a la velocidad y al desplazamiento en dos puntos diferentes.

EJEMPLO 8–7 **Arma de juguete.** Un dardo de 0.100 kg de masa es oprimido contra el resorte de una arma de dardos de juguete, como se muestra en la figura 8-12a. El resorte (con constante de rigidez $k = 250$ N/m y masa despreciable) se comprime 6.0 cm y luego se libera. Si el dardo se separa del resorte cuando éste alcanza su longitud normal ($x = 0$), ¿qué velocidad adquiere el dardo?

PLANTEAMIENTO Inicialmente el dardo está en reposo (punto 1), por lo que $K_1 = 0$. Ignoramos la fricción y utilizamos el principio de conservación de la energía mecánica; la única energía potencial es elástica.

SOLUCIÓN Usamos la ecuación 8-13 cuyo punto 1 corresponde a la compresión máxima del resorte, por lo que $v_1 = 0$ (el dardo aún no se libera) y $x_1 = -0.060$ m. El punto 2 lo asociamos al instante en que el dardo sale volando en el extremo del resorte (figura 8-12b), por lo que $x_2 = 0$ y queremos encontrar v_2. La ecuación 8-13 puede escribirse como

$$0 + \tfrac{1}{2}kx_1^2 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 + 0.$$

Así,

$$v_2^2 = \frac{kx_1^2}{m}$$

y

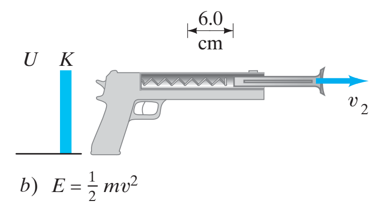
$$v_2 = \sqrt{\frac{(250\text{ N/m})(-0.060\text{ m})^2}{(0.100\text{ kg})}} = 3.0\text{ m/s}.$$

NOTA En la dirección horizontal, la única fuerza sobre el dardo (ignorando la fricción) era la fuerza ejercida por el resorte. Verticalmente, la gravedad fue equilibrada por la fuerza normal ejercida sobre el dardo por el cañón del arma. Al salir del cañón, el dardo seguirá una trayectoria de proyectil bajo la acción de la gravedad.

FIGURA 8–12 Ejemplo 8-7. *a*) Un dardo se oprime contra un resorte, comprimiendo éste 6.0 cm. Después el dardo se libera y en *b*) se separa del resorte a velocidad (v_2).

U K $v_1 = 0$

a) $E = \frac{1}{2}kx^2$



b) $E = \frac{1}{2}mv^2$

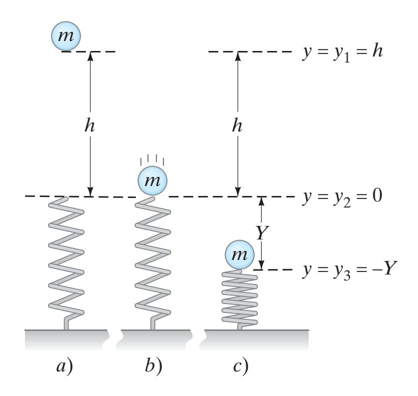


FIGURA 8–13 Ejemplo 8-8.

EJEMPLO 8–8 Dos clases de energía potencial. Una pelota de masa $m = 2.60$ kg, que parte del reposo, cae una distancia vertical $h = 55.0$ cm antes de golpear un resorte vertical en espiral, al cual comprime una cantidad $Y = 15.0$ cm (figura 8-13). Determine la constante de rigidez del resorte. Suponga que éste tiene una masa despreciable e ignore la resistencia del aire. Mida todas las distancias desde el punto en que la pelota toca por primera vez al resorte sin comprimir ($y = 0$ en este punto).

PLANTEAMIENTO Las fuerzas que actúan sobre la pelota son el jalón gravitacional de la Tierra y la fuerza elástica ejercida por el resorte. Ambas fuerzas son conservativas, de manera que se puede usar la conservación de la energía mecánica, incluyendo ambos tipos de energía potencial. Sin embargo, hay que tener cuidado: la gravedad actúa durante la caída (figura 8-13); en tanto que la fuerza elástica no actúa sino hasta que la pelota haya tocado el resorte (figura 8-13b). Se elige y con dirección positiva hacia arriba y $y = 0$ en el extremo del resorte en su estado normal (sin comprimir).

SOLUCIÓN Dividimos esta solución en dos partes. (Más adelante se presenta una solución alternativa). *Parte 1*: Consideremos primero los cambios de energía de la pelota cuando cae desde una altura $y_1 = h = 0.55$ m, figura 8-13a, a $y_2 = 0$, justo cuando toca al resorte, figura 8-13b. Nuestro sistema es la pelota, sobre la que actúan la gravedad y el resorte (que hasta este momento no hace nada), por lo que

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2$$
$$0 + mgh = \tfrac{1}{2}mv_2^2 + 0.$$

Despejamos $v_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.80\ \text{m/s}^2)(0.550\ \text{m})} = 3.283\ \text{m/s} \approx 3.28\ \text{m/s}$. que es la rapidez de la pelota justo cuando toca la parte superior del resorte (figura 8-13b). *Parte 2*: Cuando la pelota comprime el resorte, figuras 8-13b a c, hay dos fuerzas conservativas sobre la pelota: la gravedad y la fuerza del resorte. De manera que nuestra ecuación de conservación de la energía es

$$E_2\ (\text{la pelota toca el resorte}) = E_3\ (\text{resorte comprimido})$$
$$\tfrac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 + \tfrac{1}{2}ky_2^2 = \tfrac{1}{2}mv_3^2 + mgy_3 + \tfrac{1}{2}ky_3^2.$$

Sustituimos $y_2 = 0$, $v_2 = 3.283\ \text{m/s}$, $v_3 = 0$ (la pelota llega al reposo por un instante) y como $y_3 = -Y = -0.150$ m, obtenemos

$$\tfrac{1}{2}mv_2^2 + 0 + 0 = 0 - mgY + \tfrac{1}{2}k(-Y)^2.$$

Conocemos m, v_2 y Y; podemos entonces despejar k:

$$k = \frac{2}{Y^2}\left[\tfrac{1}{2}mv_2^2 + mgY\right] = \frac{m}{Y^2}\left[v_2^2 + 2gY\right]$$
$$= \frac{(2.60\ \text{kg})}{(0.150\ \text{m})^2}\left[(3.283\ \text{m/s})^2 + 2(9.80\ \text{m/s}^2)(0.150\ \text{m})\right] = 1590\ \text{N/m}.$$


RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Solución alternativa

Solución alternativa En vez de dividir la solución en dos partes, podemos obtenerla en un solo paso. Después de todo, tenemos que elegir qué dos puntos usar a la izquierda y a la derecha de la ecuación de la energía. Escribamos la ecuación de la energía para los puntos 1 y 3 en la figura 8-13. El punto 1 es el punto inicial justo antes de que la pelota empiece a caer (figura 8-13a), por lo que $v_1 = 0$ y $y_1 = h = 0.550$ m. El punto 3 corresponde a la posición en que el resorte está totalmente comprimido (figura 8-13c), por lo que $v_3 = 0$, $y_3 = -Y = -0.150$ m. Las fuerzas sobre la pelota en este proceso son la gravedad y (por lo menos parte del tiempo) la del resorte. La conservación de la energía nos indica que

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 + \tfrac{1}{2}k(0)^2 = \tfrac{1}{2}mv_3^2 + mgy_3 + \tfrac{1}{2}ky_3^2$$
$$0 + mgh + 0 = 0 - mgY + \tfrac{1}{2}kY^2$$

donde hemos hecho $y = 0$ para el resorte en el punto 1 porque no está actuando y no está comprimido ni estirado. Despejamos k:

$$k = \frac{2mg(h + y)}{Y^2} = \frac{2(2.60\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)(0.550\ \text{m} + 0.150\ \text{m})}{(0.150\ \text{m})^2} = 1590\ \text{N/m}$$

al igual que con el primer método de solución.

EJEMPLO 8–9 **Péndulo oscilatorio.** El péndulo simple de la figura 8-14 consiste de una pequeña lenteja de masa m suspendida de una cuerda sin masa de longitud ℓ. La lenteja se suelta (sin empujar) en $t = 0$, donde la cuerda forma un ángulo $\theta = \theta_0$ con la vertical. *a*) Describa el movimiento de la lenteja en términos de la energía cinética y la energía potencial. Luego, determine la rapidez de la lenteja: *b*) como función de la posición θ al oscilar, y *c*) en el punto más bajo de la oscilación. *d*) Encuentre la tensión en la cuerda, $\vec{\mathbf{F}}_T$. Ignore la fricción y la resistencia del aire.

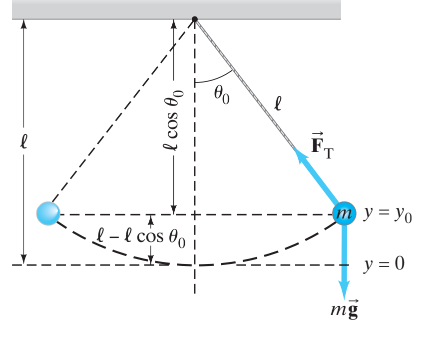


FIGURA 8–14 Ejemplo 8-9: un péndulo simple; y se mide como positiva hacia arriba.

PLANTEAMIENTO Usamos la ley de la conservación de la energía mecánica (únicamente la fuerza conservativa de la gravedad efectúa trabajo), excepto en *d*) donde usamos la segunda ley de Newton.

SOLUCIÓN *a*) En el momento en que se suelta, la lenteja está en reposo, por lo que su energía cinética $K = 0$. Cuando la lenteja cae, pierde energía potencial y gana energía cinética. En su punto más bajo, su energía cinética es un máximo y la energía potencial es un mínimo. La lenteja continúa su oscilación hasta que alcanza una altura y ángulo (θ_0) iguales en el lado opuesto, donde la energía potencial es un máximo y $K = 0$. Continúa el movimiento oscilatorio conforme $U \longrightarrow K \longrightarrow U$, etcétera; pero nunca puede subir más alto que $\theta = \pm\,\theta_0$ (conservación de la energía mecánica).

b) La cuerda se supone sin masa, por lo que sólo tenemos que considerar la energía cinética de la lenteja y la energía potencial gravitacional. La lenteja tiene dos fuerzas que actúan sobre ella en cualquier momento: la gravedad mg y la fuerza que la cuerda ejerce sobre ella $\vec{\mathbf{F}}_T$. Ésta última (una fuerza restrictiva) siempre actúa perpendicularmente al movimiento, por lo que no efectúa trabajo. Tenemos que escribir la energía potencial sólo en términos de la gravedad. La energía mecánica del sistema es

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgy,$$

donde y es la altura vertical de la lenteja en cualquier momento. Tomamos $y = 0$ en el punto más bajo de la oscilación de la lenteja. Por consiguiente, en $t = 0$,

$$y = y_0 = \ell - \ell\cos\theta_0 = \ell(1 - \cos\theta_0)$$

como se observa en el diagrama. En el momento en que se suelta

$$E = mgy_0,$$

puesto que $v = v_0 = 0$. En cualquier otro punto a lo largo de la oscilación

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + mgy = mgy_0.$$

Despejamos v:

$$v = \sqrt{2g(y_0 - y)}.$$

En términos del ángulo θ de la cuerda, escribimos

$$(y_0 - y) = (\ell - \ell\cos\theta_0) - (\ell - \ell\cos\theta) = \ell(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

ya que

$$v = \sqrt{2g\ell(\cos\theta - \cos\theta_0)}.$$

c) En el punto más bajo, como $y = 0$,

$$v = \sqrt{2gy_0}$$

o bien,

$$v = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\theta_0)}.$$

d) La tensión en la cuerda es la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_T$ que la cuerda ejerce sobre la lenteja. Como hemos visto, esta fuerza no efectúa trabajo; sin embargo, calculamos la fuerza simplemente usando la segunda ley de Newton $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ y notamos que en cualquier punto la aceleración de la lenteja en la dirección radial hacia el interior es v^2/ℓ, ya que la lenteja está restringida a moverse en el arco de un círculo de radio ℓ. En la dirección radial, $\vec{\mathbf{F}}_T$ actúa hacia adentro, y una componente de la gravedad igual a $mg\cos\theta$ actúa hacia afuera. Por consiguiente,

$$m\frac{v^2}{\ell} = F_T - mg\cos\theta.$$

Despejamos F_T y usamos el resultado del inciso *b*) para v^2:

$$F_T = m\left(\frac{v^2}{\ell} + g\cos\theta\right) = 2mg(\cos\theta - \cos\theta_0) + mg\cos\theta$$
$$= (3\cos\theta - 2\cos\theta_0)mg.$$

8–5 La ley de la conservación de la energía

Tomaremos ahora en cuenta las fuerzas no conservativas como la fricción, ya que son importantes en situaciones reales. Por ejemplo, considere de nuevo el carro de la montaña rusa de la figura 8-8, pero esta vez incluyamos la fricción. En este caso, el carro no alcanzará la misma altura en la segunda colina que en la primera debido a la fricción.

En este y en otros procesos naturales, la energía mecánica (suma de las energías cinética y potencial) no permanece constante sino que decrece. Como las fuerzas de fricción reducen la energía mecánica (pero *no* la energía total), se llaman **fuerzas disipativas**. Históricamente, la presencia de las fuerzas disipativas impidió la formulación de una ley de la conservación de la energía completa hasta bien entrado el siglo XIX. No fue sino hasta entonces que el calor, que siempre se produce en presencia de la fricción (frote sus manos entre sí), se interpretó como una forma de energía. Los estudios cuantitativos realizados en el siglo XIX (capítulo 19) demostraron que si el calor se considera como una transferencia de energía (llamada a veces **energía térmica**), entonces se conserva la energía total en cualquier proceso. Por ejemplo, si el carro de la montaña rusa en la figura 8-8 está sometido a fuerzas de fricción, entonces la energía inicial total del carro será igual a la energía cinética del carro más la energía potencial en cualquier punto subsecuente a lo largo de su trayectoria, más la cantidad de energía térmica producida en el proceso. Por ejemplo, un bloque que se desliza libremente sobre una mesa, llega al reposo a causa de la fricción. Toda su energía cinética inicial se transforma en energía térmica. El bloque y la mesa se calientan un poco como resultado de este proceso: ambos absorben algo de energía térmica. Otro ejemplo de la transformación de la energía cinética en energía térmica se observa al golpear vigorosamente un clavo varias veces con un martillo y al tocar luego el clavo con un dedo.

FIGURA 8–15 Al quemarse el combustible (una reacción química) se libera energía para hervir agua en esta locomotora. El vapor producido se expande contra un pistón que efectúa trabajo al mover las ruedas.



De acuerdo con la teoría atómica, la energía térmica representa energía cinética de moléculas que se mueven rápidamente. En el capítulo 18 veremos que una elevación de temperatura corresponde a un incremento en la energía cinética promedio de las moléculas. Como la energía térmica representa la energía de átomos y moléculas que constituyen un objeto, a menudo se le llama **energía interna**. Desde el punto de vista atómico, la energía interna puede incluir no sólo la energía cinética de las moléculas, sino también la energía potencial (generalmente de naturaleza eléctrica) debido a las posiciones relativas de los átomos dentro de las moléculas. A un nivel macroscópico, la energía interna corresponde a fuerzas no conservativas como la fricción. Al nivel atómico, sin embargo, la energía es parcialmente cinética y potencial, y las fuerzas correspondientes son conservativas. Por ejemplo, la energía almacenada en los alimentos, o en un combustible como la gasolina, puede considerarse como energía potencial almacenada en virtud de las posiciones relativas de los átomos dentro de una molécula, debido a fuerzas eléctricas entre los átomos (que se conocen como enlaces químicos). Para que esta energía efectúe trabajo, debe ser liberada, usualmente por medio de una reacción química (figura 8-15). Esto es como el caso de un resorte comprimido que al liberarse puede efectuar trabajo.

Para establecer la ley más general de la conservación de la energía, fue necesario que los físicos del siglo XIX reconocieran las energías eléctrica, química y otras formas en adición al calor y exploraran si éstas se ajustarían una ley de conservación. Para cada tipo de fuerza, conservativa o no conservativa, siempre ha sido posible definir un tipo de energía que corresponda al trabajo realizado por esa fuerza. Se ha encontrado experimentalmente que la energía total E siempre permanece constante. Es decir, el cambio en la energía total, cinética más potencial más todas las otras formas de energía, es igual a cero:

LEY DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

$$\Delta K + \Delta U + [\text{cambio en todas las otras formas de energía}] = 0. \qquad \textbf{(8–14)}$$

Éste es uno de los principios más importantes de la física. Se llama **ley de la conservación de la energía** y puede enunciarse como sigue:

LEY DE LA CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

La energía total no aumenta ni disminuye en ningún proceso. La energía puede transformarse de una forma a otra, y transferirse de un objeto a otro; pero la cantidad total permanecerá constante.

Para sistemas mecánicos conservativos, esta ley se puede derivar de las leyes de Newton (sección 8-3) y es entonces equivalente a ellas. En su generalidad plena, sin embargo, la validez de la ley de la conservación de la energía reside en la observación experimental.

Y aun cuando se haya encontrado que las leyes de Newton fallan en el mundo submicroscópico del átomo, la ley de la conservación de la energía es válida ahí y en cualquier situación experimental probada hasta ahora.

8–6 Conservación de la energía con fuerzas disipativas: Resolución de problemas

En la sección 8-4 vimos varios ejemplos de la ley de la conservación de la energía para sistemas conservativos. Consideraremos ahora en detalle algunos ejemplos que contienen fuerzas no conservativas.

Por ejemplo, suponga que el carro de la montaña rusa que rueda sobre las colinas de la figura 8-8 está sometido a fuerzas de fricción. Al pasar de un punto 1 a un segundo punto 2, la energía disipada por la fuerza de fricción $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{fr}}$ que actúa sobre el carro (considerado como partícula) es $\int_1^2 \vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{fr}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$. Si $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{fr}}$ es constante en magnitud, la energía disipada es simplemente $F_{\mathrm{fr}}\ell$, donde ℓ es la distancia real a lo largo de la trayectoria recorrida por el objeto del punto 1 al punto 2. Así, escribimos nuestra ecuación de conservación de la energía, ecuación 8-14, como

$$\Delta K + \Delta U + F_{\mathrm{fr}}\ell = 0,$$

o bien,

$$\tfrac{1}{2}m\left(v_2^2 - v_1^2\right) + mg\left(y_2 - y_1\right) + F_{\mathrm{fr}}\ell = 0.$$

Podemos reescribir esta última ecuación, al comparar la energía inicial E_1 con la energía final E_2:

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 + F_{\mathrm{fr}}\ell. \qquad \begin{bmatrix}\text{actúan gravedad}\\ \text{y fricción}\end{bmatrix} \qquad \textbf{(8–15)}$$

Es decir,

$$E_1 = E_2$$

$$\text{energía inicial} = \text{energía final (incluida la energía térmica).}$$

A la izquierda tenemos la energía mecánica del sistema inicialmente, que es igual a la energía mecánica en cualquier punto subsecuente a lo largo de la trayectoria más la cantidad de energía térmica (o interna) producida en el proceso.

Otras fuerzas no conservativas pueden tratarse de la misma forma. Si usted no está seguro del signo del último término $\left(\int \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}\right)$ a la derecha, utilice su intuición: es la energía mecánica que aumenta o se reduce en el proceso.

Trabajo-energía versus conservación de energía

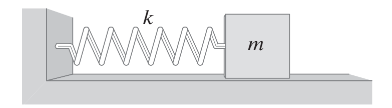
La ley de la conservación de la energía es más general y más poderosa que el principio trabajo-energía. De hecho, el principio trabajo-energía *no* debería considerarse un enunciado de la conservación de la energía. Sin embargo, es útil para algunos problemas mecánicos; y si usted lo usa, o utiliza la más poderosa conservación de la energía, dependerá de su *elección del sistema* en estudio. Si usted elige como sistema una partícula o un objeto rígido, sobre el cual actúen en verdad fuerzas externas, entonces usted puede usar el principio trabajo-energía: el trabajo efectuado por las fuerzas externas sobre su objeto es igual al cambio en su energía cinética.

Por otra parte, si se elige un sistema sobre el cual no realicen trabajo fuerzas externas, entonces es conveniente aplicar directamente la ley de la conservación de la energía a dicho sistema.

Considere, por ejemplo, un resorte conectado a un bloque sobre una mesa sin fricción (figura 8-16). Si se elige el bloque como su sistema, entonces el trabajo realizado sobre el bloque por el resorte es igual al cambio en energía cinética del bloque: el principio trabajo-energía. (La conservación de la energía no se aplica a este sistema, pues la energía del bloque cambia.) Si en vez de ello, elige el bloque más el resorte como su sistema, ninguna fuerza externa realiza trabajo (pues el resorte es parte del sistema elegido). A este sistema se le puede aplicar la conservación de la energía: si usted comprime el resorte y luego lo suelta, el resorte todavía ejerce una fuerza sobre el bloque; sin embargo, el movimiento subsiguiente se puede analizar en términos de la energía cinética $\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)$ más la energía potencial $\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right)$, cuyo total permanece constante.

FIGURA 8–16 Un resorte conectado a un bloque sobre una mesa sin fricción. Si elige su sistema como el bloque más el resorte, entonces, se conserva

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$



La resolución de problemas no es un proceso que pueda hacerse siguiendo simplemente un conjunto de reglas. El siguiente recuadro de Estrategias para la resolución de problemas, al igual que todos los otros, *no* es una prescripción, sino un resumen para ayudarle a iniciarse en la resolución de problemas relacionados con la energía.

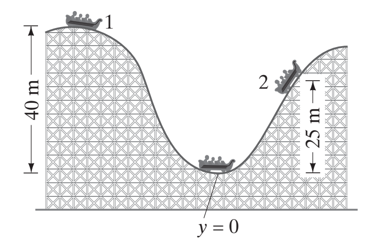
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Conservación de la energía

1. **Elabore un dibujo** de la situación física.
2. Determine **el sistema** para el cual aplicará la conservación de la energía: el objeto y los objetos, y las fuerzas que actúan.
3. Pregúntese qué cantidad busca y **elija las posiciones inicial** (punto 1) **y final** (punto 2).
4. Si el objeto bajo investigación cambia su altura durante el problema, entonces **elija un marco de referencia** con un nivel $y = 0$ conveniente para la energía potencial gravitacional. El punto más bajo en el problema a menudo es una buena opción.

   Si intervienen resortes, elija que la posición del resorte sin estirar sea x (o y) $= 0$.
5. **¿Se conserva la energía mecánica?** Si ninguna fuerza de fricción u otras fuerzas no conservativas actúan, entonces aplique la conservación de la energía mecánica:
$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2.$$
6. **Aplique la conservación de la energía**. Si la fricción (u otras fuerzas no conservativas) están presentes, entonces se requerirá un término adicional de la forma $\int \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ Para una fuerza de fricción constante que actúa a lo largo de una distancia ℓ
$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 + F_{fr}\ell.$$
Para otras fuerzas no conservativas utilice su intuición para el signo de $\int \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$: ¿Se incrementa o disminuye la energía mecánica total en el proceso?
7. Use las ecuaciones que usted desarrolló para **despejar** la incógnita.

FIGURA 8–17 Ejemplo 8-10. A causa de la fricción, un carro de montaña rusa no alcanza la altura original sobre la segunda colina. (No está a escala).



EJEMPLO 8–10 ESTIMACIÓN Fricción en el carro de una montaña rusa. El carro de montaña rusa del ejemplo 8-4 alcanza una altura vertical de sólo 25 m en la segunda colina antes de detenerse momentáneamente (figura 8-17). Recorrió una distancia total de 400 m. Estime la energía térmica producida y la fuerza de fricción promedio (que se supone casi constante) sobre el carro, cuya masa es de 1000 kg.

PLANTEAMIENTO Se sigue explícitamente el recuadro de estrategias para la resolución de problemas.

SOLUCIÓN

1. **Elabore un dibujo**. Observe la figura 8-17.
2. **El sistema**. El sistema es el carro de montaña rusa y la Tierra (que ejerce fuerza gravitacional). Las fuerzas que actúan sobre el carro son la gravedad y la fricción. (La fuerza normal también actúa sobre él, pero no realiza trabajo, así que no afecta la energía).
3. **Elija las posiciones inicial y final.** Se considera como punto 1 el instante cuando el carro comenzó a avanzar (en lo alto de la primera colina) y como punto 2 el instante en que se detiene 25 m arriba sobre la segunda colina.
4. **Elija el marco de referencia**. Se elige el punto más bajo en el movimiento como $y = 0$ para la energía potencial gravitacional.
5. **¿Se conserva la energía mecánica?** No, está presente la fricción.
6. **Aplique la conservación de la energía.** Hay fricción que actúa sobre el carro, así que usamos la conservación de la energía en la forma de la ecuación 8-15, con $v_1 = 0$, $y_1 = 40$ m, $v_2 = 0$, $y_2 = 25$ m y $\ell = 400$ m. Por lo tanto,
$$0 + (1000\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2)(40\,\text{m}) = 0 + (1000\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2)(25\,\text{m}) + F_{fr}\ell.$$
7. **Despeje.** Despejamos $F_{fr}\ell$ de la ecuación anterior, que es la energía disipada como energía térmica: $F_{fr}\ell = (1000\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2)(40\,\text{m} - 25\,\text{m}) = 147{,}000\,\text{J}$. La fuerza de fricción promedio era $F_{fr} = (1.47 \times 10^5\,\text{J})/400\,\text{m} = 370\,\text{N}$. [Este resultado es sólo un promedio aproximado: En varios puntos la fuerza de fricción depende de la fuerza normal, que varía de acuerdo con la pendiente].

EJEMPLO 8–11 **Fricción con un resorte.** Un bloque de masa m, que se desliza a lo largo de una superficie rugosa horizontal, viaja con una rapidez v_0 cuando golpea de frente un resorte sin masa (véase la figura 8-18) y lo comprime una distancia máxima X. Si el resorte tiene una constante de rigidez k, determine el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie.

PLANTEAMIENTO En el momento de la colisión, el bloque tiene $K = \frac{1}{2}mv_0^2$ y se supone que el resorte no está comprimido, por lo que $U = 0$. Inicialmente la energía mecánica del sistema es $\frac{1}{2}mv_0^2$. En el tiempo en que el resorte alcanza su compresión máxima, $K = 0$ y $U = \frac{1}{2}kX^2$. Mientras tanto, la fuerza de fricción $(= \mu_k F_N = \mu_k mg)$ transforma la energía $F_{fr}X = \mu_k mgX$ en energía térmica.

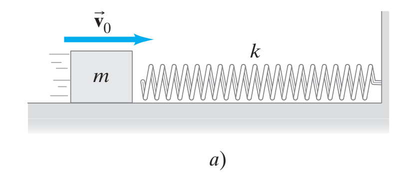
SOLUCIÓN De la conservación de la energía podemos escribir

$$\text{energía (inicial)} = \text{energía (final)}$$

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 = \tfrac{1}{2}kX^2 + \mu_k mgX.$$

Despejamos μ_k y encontramos

$$\mu_k = \frac{v_0^2}{2gX} - \frac{kX}{2mg}.$$



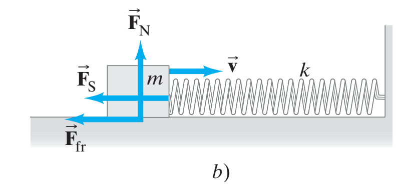


FIGURA 8–18 Ejemplo 8-11.

8–7 Energía potencial gravitacional y velocidad de escape

En este capítulo, hasta ahora hemos tratado con la energía potencial gravitacional suponiendo que la fuerza de gravedad es constante, $\vec{F} = m\vec{g}$. Ésta es una hipótesis exacta para objetos ordinarios que están cerca de la superficie terrestre. Sin embargo, al tratar con la gravedad más generalmente, para puntos lejanos a la superficie de la Tierra, debemos considerar que la fuerza gravitacional ejercida por nuestro planeta sobre una partícula de masa m disminuye, inversamente con el cuadrado de la distancia r desde el centro de la Tierra. La relación precisa está dada por la ley de Newton de la gravitación universal (secciones 6-1 y 6-2):

$$\vec{F} = -G\frac{mM_E}{r^2}\hat{r} \qquad [r > r_E]$$

donde M_E es la masa de la Tierra y $\hat{r}$ es un vector unitario (en la posición de m) dirigido radialmente alejándose del centro de la Tierra. El signo menos indica que la fuerza sobre m está dirigida hacia el centro de la Tierra, en sentido opuesto a $\hat{r}$. Esta ecuación puede también usarse para describir la fuerza de gravitación sobre una masa m en la vecindad de otros cuerpos celestes, como la Luna, los planetas o el Sol, en cuyo caso M_E debe reemplazarse con la masa de ese cuerpo.

Suponga que un objeto de masa m se mueve de una posición a otra, a lo largo de una trayectoria arbitraria (figura 8-19), de manera que su distancia desde el centro de la Tierra cambie de r_1 a r_2. El trabajo realizado por la fuerza gravitacional es

$$W = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = -GmM_E\int_1^2 \frac{\hat{r}\cdot d\vec{\ell}}{r^2},$$

donde $d\vec{\ell}$ representa un desplazamiento infinitesimal. Como $\hat{r}\cdot d\vec{\ell} = dr$ es la componente de $d\vec{\ell}$ a lo largo de $\hat{r}$ (véase la figura 8-19), entonces

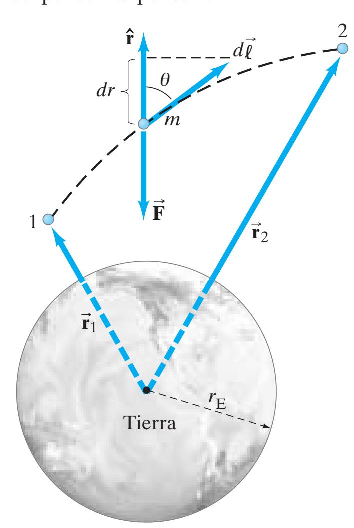
$$W = -GmM_E\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = GmM_E\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

o bien,

$$W = \frac{GmM_E}{r_2} - \frac{GmM_E}{r_1}.$$

Como el valor de la integral depende sólo de la posición de los puntos extremos (r_1 y r_2) y no de la trayectoria tomada, la fuerza gravitacional es una fuerza conservativa. Por lo

FIGURA 8–19 Trayectoria arbitraria de una partícula de masa m al moverse del punto 1 al punto 2.



tanto, usamos el concepto de energía potencial para la fuerza gravitacional. Como el cambio de la energía potencial está siempre definido (sección 8-2) como el negativo del trabajo efectuado por la fuerza, tenemos

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\frac{GmM_E}{r_2} + \frac{GmM_E}{r_1}. \quad \textbf{(8–16)}$$

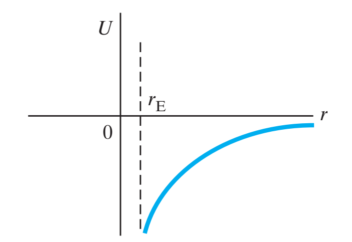


FIGURA 8–20 Energía potencial gravitacional graficada en función de r, la distancia desde el centro de la Tierra. Válida sólo para puntos $r > r_E$ el radio terrestre.

De la ecuación 8-16, la energía potencial a cualquier distancia r desde el centro de la Tierra puede escribirse como:

$$U(r) = -\frac{GmM_E}{r} + C,$$

donde C es una constante. Es común elegir $C = 0$, por lo que

$$U(r) = -\frac{GmM_E}{r}. \qquad \begin{bmatrix}\text{gravedad}\\ (r > r_E)\end{bmatrix} \quad \textbf{(8–17)}$$

Con esta selección de C, $U = 0$ en $r = \infty$. Conforme un objeto se aproxima a la Tierra, su energía potencial disminuye y es siempre negativa (figura 8-20).

La ecuación 8-16 se reduce a la ecuación 8-2, $\Delta U = mg(y_2 - y_1)$, para objetos cerca de la superficie terrestre (véase el problema 48).

Para una partícula de masa m, que siente sólo la fuerza de la gravedad terrestre, se conserva la energía total puesto que la gravedad es una fuerza conservativa. Por lo tanto, podemos escribir

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{mM_E}{r_1} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mM_E}{r_2} = \text{constante} \qquad \begin{bmatrix}\text{sólo}\\ \text{gravedad}\end{bmatrix} \quad \textbf{(8–18)}$$

EJEMPLO 8–12 Paquete que se deja caer desde un cohete a alta velocidad. Una caja de película vacía se deja caer desde un cohete que se aleja de la Tierra con una rapidez de 1800 m/s, cuando está a 1600 km sobre la superficie terrestre. El paquete llega finalmente a la Tierra. Estime su rapidez justo antes del impacto. Ignore la resistencia del aire.

PLANTEAMIENTO Usamos la conservación de la energía. El paquete tiene inicialmente una rapidez relativa a la Tierra igual a la rapidez del cohete del que cae.

SOLUCIÓN En este caso, la conservación de la energía se expresa en la ecuación 8-18 como

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{mM_E}{r_1} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{mM_E}{r_2}$$

donde $v_1 = 1.80 \times 10^3$ m/s, $r_1 = (1.60 \times 10^6\ \text{m}) + (6.38 \times 10^6\ \text{m}) = 7.98 \times 10^6$ m, y $r_2 = 6.38 \times 10^6$ m (el radio de la Tierra). Despejamos v_2:

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{v_1^2 - 2GM_E\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \\ &= \sqrt{\begin{aligned}&(1.80 \times 10^3\ \text{m/s})^2 - 2(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(5.98 \times 10^{24}\ \text{kg}) \\ &\qquad \times \left(\frac{1}{7.98 \times 10^6\ \text{m}} - \frac{1}{6.38 \times 10^6\ \text{m}}\right)\end{aligned}} \\ &= 5320\ \text{m/s}. \end{aligned}$$

NOTA En realidad, la rapidez será algo menor que este valor debido a la resistencia del aire. A propósito, advierta que la dirección de la velocidad nunca entró en el problema y esto es una de las ventajas del método de la energía. El cohete podría haber estado alejándose o acercándose a la Tierra, o según otro ángulo, y el resultado habría sido el mismo.

Velocidad de escape

Cuando un cuerpo se lanza al aire desde la Tierra, regresará a ésta, a menos que su rapidez sea muy alta. Si la rapidez *es* muy alta, sin embargo, continuará viajando en el espacio y nunca regresará a la Tierra (a menos que estén presentes otras fuerzas o sufra colisiones). La velocidad inicial mínima necesaria para impedir que un objeto regrese a la Tierra se llama **velocidad de escape** desde la Tierra, v_{esc}. Para determinar v_{esc} desde la superficie terrestre (ignorando la resistencia del aire), usamos la ecuación 8-18 con $v_1 = v_{esc}$ y $r_1 = r_E = 6.38 \times 10^6$ m, el radio de la Tierra. Como queremos la rapidez mínima de escape, necesitamos que el objeto alcance $r_2 = \infty$ con rapidez nula, $v_2 = 0$. Aplicando la ecuación 8-18 tenemos

$$\tfrac{1}{2}mv_{esc}^2 - G\frac{mM_E}{r_E} = 0 + 0$$

o bien,

$$v_{esc} = \sqrt{2GM_E/r_E} = 1.12 \times 10^4 \text{ m/s} \qquad \textbf{(8–19)}$$

o 11.2 km/s. Es importante notar que aunque una masa puede escapar de la Tierra (o del Sistema Solar) para nunca regresar, la fuerza sobre ella debido al campo gravitacional terrestre nunca es en realidad cero para un valor finito de *r*.

EJEMPLO 8–13 **Escape de la Tierra o de la Luna.** *a*) Compare las velocidades de escape de un cohete desde la Tierra y desde la Luna. *b*) Compare las energías requeridas para lanzar los cohetes. Para la Luna, $M_M = 7.35 \times 10^{22}$ kg y $r_M = 1.74 \times 10^6$ m; y para la Tierra, $M_E = 5.98 \times 10^{24}$ kg y $r_E = 6.38 \times 10^6$ m.

PLANTEAMIENTO Utilizamos la ecuación 8-19 reemplazando M_E y r_E con M_M y r_M para calcular v_{esc} desde la Luna.

SOLUCIÓN *a*) Usando la ecuación 8-19, la razón de las velocidades de escape es

$$\frac{v_{esc}(\text{Tierra})}{v_{esc}(\text{Luna})} = \sqrt{\frac{M_E}{M_M}\frac{r_M}{r_E}} = 4.7.$$

Para escapar de la Tierra se requiere una rapidez 4.7 veces la requerida para escapar de la Luna.

b) El combustible que debe quemarse da energía proporcional a v^2 $\left(K = \tfrac{1}{2}mv^2\right)$; entonces, para lanzar un cohete que escape de la Tierra se requiere $(4.7)^2 = 22$ veces más energía que la necesaria para escapar de la Luna.

8–8 Potencia

La **potencia** se define como la *tasa con que se efectúa trabajo*. La *potencia promedio*, $\overline{P}$, es igual al trabajo *W* efectuado dividido entre el tiempo *t* que toma realizarlo:

$$\overline{P} = \frac{W}{t}. \qquad \textbf{(8–20a)}$$

Puesto que el trabajo realizado en un proceso implica la transformación de energía de un tipo (u objeto) en otro, la potencia también se define como la *tasa a la que se transforma la energía*:

$$\overline{P} = \frac{W}{t} = \frac{\text{energía transformada}}{\text{tiempo}}.$$

La *potencia instantánea*, *P*, es

$$P = \frac{dW}{dt}. \qquad \textbf{(8–20b)}$$

El trabajo efectuado en un proceso es igual a la energía transferida de un objeto a otro. Por ejemplo, cuando la energía potencial almacenada en el resorte de la figura 8-6c se transforma en energía cinética de la pelota, el resorte efectúa trabajo sobre ésta. Asimismo, cuando usted lanza una pelota o empuja un carrito de supermercado, *siempre que se efectúe trabajo, la energía se transfiere de un cuerpo a otro*. Por consiguiente, afirmamos también que la potencia es la *tasa a la que se transforma la energía*:

$$P = \frac{dE}{dt}. \qquad \textbf{(8–20c)}$$

La potencia de un caballo se refiere a cuánto trabajo puede efectuar éste por unidad de tiempo. La clasificación por potencia de un motor se refiere a cuánta energía química o eléctrica puede transformarse en energía mecánica por unidad de tiempo. En unidades SI, la potencia se mide en joules por segundo, y esta unidad recibe un nombre especial: **watt** (*W*), 1 W = 1 J/s. Estamos más familiarizados con el watt en aparatos eléctricos: la tasa a la que una bombilla eléctrica o un calentador cambian energía eléctrica en energía luminosa o térmica. No obstante, el watt se usa también para otros tipos de transformación de energía. En el sistema inglés, la unidad de potencia es el pie-libra por segundo (ft•lb/s). Con frecuencia para fines prácticos se utiliza una unidad mayor, el **caballo de potencia**. Un caballo de potencia† (hp) se define como 550 ft•lb/s, que es igual a 746 watts. Por lo común, la potencia de un motor se especifica en hp o en $\left(1\,\text{kW} \approx 1\frac{1}{3}\,\text{hp}\right)$.

Para entender la distinción entre energía y potencia, considere el siguiente ejemplo. Una persona está limitada en el trabajo que puede efectuar, no sólo por la energía total requerida, sino también por la rapidez con que se transforma dicha energía; es decir, por la potencia. Un individuo, por ejemplo, es capaz de caminar una distancia larga o subir muchos pisos de escaleras, antes de que tenga que detenerse porque haya invertido mucha energía en ello. Por otro lado, una persona que corre muy rápido por las escaleras puede sentirse exhausta después de subir sólo un piso o dos. Está limitada en este caso por la potencia, es decir, la tasa con la que su cuerpo puede transformar energía química en energía mecánica.



FIGURA 8–21 Ejemplo 8-14.

EJEMPLO 8–14 **Potencia para subir una escalera.** Una persona de 60 kg corre hacia arriba por una escalera en 4.0 s (figura 8-21). La altura vertical de la escalera es de 4.5 m. *a*) Estime la potencia desarrollada por el atleta en watts y en caballos de potencia. *b*) ¿Cuánta energía requirió esto?

PLANTEAMIENTO El trabajo efectuado por el atleta es contra la gravedad y es igual a $W = mgy$. Para encontrar su potencia de salida divida W entre el tiempo que le tomó.

SOLUCIÓN *a*) La potencia promedio de salida fue

$$\overline{P} = \frac{W}{t} = \frac{mgy}{t} = \frac{(60\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2)(4.5\,\text{m})}{4.0\,\text{s}} = 660\,\text{W}.$$

Como hay 746 W en 1 hp, el atleta efectúa trabajo a una tasa de un poco menos de 1 hp. Un ser humano no puede efectuar trabajo a esta tasa durante mucho tiempo.

b) La energía requerida es $E = \overline{P}t = (660\,\text{J/s})(4.0\,\text{s}) = 2600\,\text{J}$. Esto resulta igual a $W = mgy$.

NOTA La persona tuvo que transformar más energía que estos 2600 J. La energía total transformada por una persona o una máquina incluye siempre alguna energía térmica (recuerde cómo aumenta su temperatura al subir corriendo una escalera).

FÍSICA APLICADA

Potencia requerida por un automóvil

Los automóviles efectúan trabajo para vencer la fuerza de fricción (y la resistencia del aire), para subir por colinas y para acelerar. Un automóvil está limitado por la tasa a la que puede efectuar trabajo y por ello los motores se clasifican de acuerdo con sus caballos de potencia. Un automóvil requiere potencia fundamentalmente cuando está subiendo una colina y cuando debe acelerar. En el siguiente ejemplo, calcularemos cuánta potencia se requiere en tales situaciones para un automóvil de tamaño razonable. Aun cuando un automóvil viaje sobre un camino horizontal con rapidez constante, necesita alguna potencia para efectuar trabajo que venza las fuerzas retardadoras de la fricción interna y de la resistencia del aire. Dichas fuerzas dependen de las condiciones y de la rapidez del vehículo, pero se encuentran típicamente en el intervalo de 400 N a 1000 N.

A menudo es conveniente escribir la potencia en términos de la fuerza neta $\vec{\mathbf{F}}$ aplicada a un objeto y su velocidad $\vec{\mathbf{v}}$. Como $P = dW/dt$ y $dW = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ (ecuación 7-7), entonces

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \frac{d\vec{\boldsymbol{\ell}}}{dt} = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}. \qquad \textbf{(8–21)}$$

†La unidad fue elegida por James Watt (1736-1819), quien necesitaba una manera de especificar la potencia de sus nuevas máquinas de vapor. Experimentando, encontró que un buen caballo puede trabajar todo el día a una razón promedio de aproximadamente 360 ft·lb/s. Para no ser acusado de exageración en la venta de sus máquinas de vapor, multiplicó esto por aproximadamente $1\frac{1}{2}$ cuando definió el hp.

EJEMPLO 8–15 **Potencia requerida por un automóvil.** Calcule la potencia requerida por un automóvil de 1400 kg en las siguientes circunstancias: *a*) el automóvil sube una colina de 10° (bastante empinada) con rapidez constante de 80 km/h; y *b*) el automóvil acelera a lo largo de un camino horizontal de 90 a 110 km/h en 6.0 s para rebasar a otro vehículo. Suponga que la fuerza retardadora promedio sobre el automóvil es $F_R = 700$ N en total. Véase la figura 8-22.

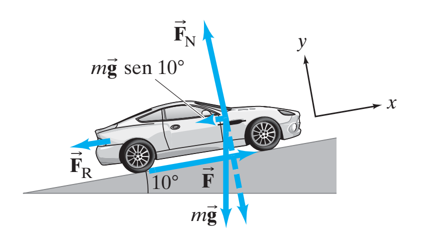


FIGURA 8–22 Ejemplo 8-15: Cálculo de la potencia necesaria en un automóvil para subir una colina.

PLANTEAMIENTO Primero debemos ser cuidadosos y no confundir $\vec{\mathbf{F}}_R$, que se debe a la resistencia del aire y a la fricción que retarda el movimiento, con la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ necesaria para acelerar el automóvil, que es la fuerza de fricción ejercida por el camino sobre los neumáticos; es decir, la reacción de los neumáticos impulsados por el motor que empujan contra el camino. Tenemos que determinar la última fuerza F antes de determinar la potencia.

SOLUCIÓN *a*) Para moverse con rapidez uniforme hacia arriba de la colina, por la segunda ley de Newton, el automóvil debe ejercer una fuerza F igual a la suma de la fuerza retardadora, 700 N, y a la componente de la gravedad paralela a la colina, mg sen 10°. Así,

$$\begin{aligned} F &= 700\,\text{N} + mg \,\text{sen}\, 10^\circ \\ &= 700\,\text{N} + (1400\,\text{kg})(9.80\,\text{m/s}^2)(0.174) = 3100\,\text{N}. \end{aligned}$$

Como $\bar{v} = 80\,\text{km/h} = 22\,\text{m/s}$ y es paralela a $\vec{\mathbf{F}}$, entonces (ecuación 8-21), la potencia es

$$\overline{P} = F\bar{v} = (3100\,\text{N})(22\,\text{m/s}) = 6.80 \times 10^4\,\text{W} = 68.0\,\text{kW} = 91\,\text{hp}.$$

b) El automóvil acelera de 25.0 m/s a 30.6 m/s (90 a 110 km/h). El automóvil debe entonces ejercer una fuerza que venza la fuerza retardadora de 700 N, más aquella requerida para darle la aceleración

$$\bar{a}_x = \frac{(30.6\,\text{m/s} - 25.0\,\text{m/s})}{6.0\,\text{s}} = 0.93\,\text{m/s}^2.$$

Aplicamos la segunda ley de Newton, donde x será la dirección del movimiento:

$$ma_x = \Sigma F_x = F - F_R.$$

Despejamos la fuerza F requerida:

$$\begin{aligned} F &= ma_x + F_R \\ &= (1400\,\text{kg})(0.93\,\text{m/s}^2) + 700\,\text{N} = 1300\,\text{N} + 700\,\text{N} = 2000\,\text{N}. \end{aligned}$$

Como $P = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$, la potencia requerida crece con la rapidez y el motor debe ser capaz de proporcionar una salida de potencia máxima de

$$\overline{P} = (2000\,\text{N})(30.6\,\text{m/s}) = 6.12 \times 10^4\,\text{W} = 61.2\,\text{kW} = 82\,\text{hp}.$$

NOTA Aun tomando en cuenta el hecho de que sólo del 60 al 80% de la salida de potencia del motor llega a las ruedas, resulta claro con tales cálculos que un motor de 75 a 100 kW (100 a 130 hp) es adecuado desde un punto de vista práctico.

En el ejemplo anterior mencionamos que sólo parte de la energía de salida de un motor de automóvil llega a las ruedas. No sólo se pierde alguna energía al pasar del motor a las ruedas, sino que en el mismo motor mucha de la energía de entrada (de la gasolina) no termina haciendo trabajo útil. Una característica importante de todos los motores es su eficiencia total *e*, definida como la razón de potencia de salida útil del motor, P_{sal}, con la potencia de entrada, P_{ent}:

$$e = \frac{P_{\text{sal}}}{P_{\text{ent}}}.$$

La eficiencia es siempre menor que 1.0 porque ningún motor puede crear energía y, de hecho, ni siquiera puede transformar energía de una forma a otra sin pérdidas por fricción, energía térmica u otras formas de energía no útiles. Por ejemplo, un motor de automóvil convierte la energía química liberada en la combustión de la gasolina en energía mecánica que mueve los pistones y finalmente las ruedas. Sin embargo, casi el 85% de la energía de entrada "se pierde" como energía térmica que sale por el tubo de escape, más la fricción en las partes móviles. Los motores automotrices son aproximadamente sólo 15% eficientes. Estudiaremos en detalle la eficiencia en el capítulo 20.

*8–9 Diagramas de energía potencial; equilibrio estable y equilibrio inestable

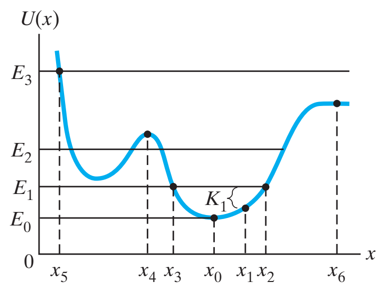


FIGURA 8–23 Un diagrama de energía potencial.

Si sólo las fuerzas conservativas realizan trabajo sobre un objeto, podemos aprender mucho acerca de su movimiento simplemente examinando un diagrama de energía potencial, es decir, la gráfica de $U(x)$ versus x. Un ejemplo de un diagrama de energía potencial se muestra en la figura 8-23. La curva algo compleja representa alguna complicada energía potencial $U(x)$. La energía total $E = K + U$ es constante y puede representarse con una línea horizontal en esta gráfica. Se muestran cuatro posibles valores diferentes para E, llamados E_0, E_1, E_2 y E_3. El valor real de E para un sistema dado depende de las condiciones iniciales. (Por ejemplo, la energía total E de una masa que oscila en el extremo de un resorte depende de la cantidad que el resorte está inicialmente comprimido o estirado). La energía cinética $K = \frac{1}{2}mv^2$ no puede ser menor que cero (v sería imaginaria) y como $E = U + K =$ constante, entonces $U(x)$ debe ser menor o igual a E para todas las situaciones: $U(x) \leq E$. El valor mínimo que la energía total puede tomar entonces para la energía potencial mostrada en la figura 8-23 es E_0. Para este valor de E, la masa sólo puede estar en reposo en $x = x_0$. El sistema tiene energía potencial pero no energía cinética en esta posición.

Si la energía total del sistema E es mayor que E_0, digamos que es E_1 en nuestra gráfica, el sistema puede tener tanto energía cinética como potencial. Como la energía se conserva,

$$K = E - U(x).$$

Como la curva representa $U(x)$ en cada x, la energía cinética en cualquier valor de x está representada por la distancia entre la línea E y la curva $U(x)$ en ese valor de x. En el diagrama, la energía cinética para un objeto en x_1, cuando su energía total es E_1, está indicada por la notación K_1.

Un objeto con energía E_1 puede oscilar sólo entre los puntos x_2 y x_3. Esto es porque si $x > x_2$ o $x < x_3$, la energía potencial sería mayor que E, lo que implica que $K = \frac{1}{2}mv^2 < 0$ y v sería imaginaria e imposible. En x_2 y x_3 la velocidad es cero, ya que $E = U$ en esos puntos. Por consiguiente, x_2 y x_3 se denominan **puntos de cambio** del movimiento. Si el objeto está en x_0, digamos, moviéndose hacia la derecha, su energía cinética (y rapidez) disminuye hasta que llega a cero en $x = x_2$. El objeto cambia entonces de dirección, procediendo hacia la izquierda e incrementando su rapidez hasta que pasa de nuevo por x_0. Continúa moviéndose, disminuyendo su rapidez hasta que alcanza $x = x_3$, donde de nuevo $v = 0$ y el objeto cambia su dirección otra vez.

Si el objeto tiene energía $E = E_2$ en la figura 8-23, hay cuatro puntos de cambio. El objeto se puede mover en sólo uno de los dos "valles" de energía potencial, dependiendo de dónde se encuentre inicialmente. No puede pasar de un valle al otro debido a la barrera entre ellos, por ejemplo, en un punto como x_4, $U > E_2$, lo cual significa que v sería imaginaria.† Para la energía E_3, hay un solo punto de cambio, ya que $U(x) < E_3$ para toda $x > x_5$. Si nuestro objeto se está moviendo inicialmente hacia la izquierda, su rapidez variará al pasar por los valles de potencial, aunque finalmente se detiene y regresa en $x = x_5$. Luego procede hacia la derecha indefinidamente y no regresa jamás.

¿Cómo sabemos que el objeto cambia de dirección en los puntos de cambio? Debido a la fuerza ejercida sobre él. La fuerza F está relacionada con la energía potencial U por la ecuación 8-7, $F = -dU/dx$. La fuerza F es igual al negativo de la pendiente de la curva U versus x en cualquier punto x. En $x = x_2$, por ejemplo, la pendiente es positiva por lo que la fuerza es negativa, lo cual significa que actúa hacia la izquierda (hacia valores decrecientes de x).

En $x = x_0$ la pendiente es cero, por lo que $F = 0$. En tal punto, se dice que la partícula está en **equilibrio**. Este término significa simplemente que la fuerza neta sobre el objeto es cero. Por consiguiente, su aceleración es cero, y si está inicialmente en reposo, permanecerá así. Si el objeto en reposo en $x = x_0$ se moviera ligeramente hacia la izquierda o hacia la derecha, una fuerza diferente de cero actuaría sobre él en la dirección

† Aunque esto es cierto de acuerdo con la física newtoniana, la mecánica cuántica moderna predice que los objetos pueden cruzar tal barrera gracias al "efecto túnel". Tales procesos se han observado a los niveles atómico y subatómico.

que lo moviera de regreso a x_0. Se dice que un objeto que regresa hacia su punto de equilibrio cuando se desplaza ligeramente a un punto de **equilibrio estable**. Cualquier *mínimo* en la curva de energía potencial representa un punto de equilibrio estable.

Un objeto en $x = x_4$ también estaría en equilibrio, ya que $F = -dU/dx = 0$. Si el objeto se desplazara un poco hacia cualquier lado de x_4, una fuerza actuaría para *alejar* al objeto del punto de equilibrio. Los puntos como x_4, donde la curva de energía potencial tiene un máximo, son puntos de **equilibrio inestable**. El objeto *no* retornará al equilibrio si se desplaza ligeramente, sino que más bien se alejará de él.

Cuando un objeto está en una región sobre la cual U es constante, como en $x = x_6$ en la figura 8-23, la fuerza será cero durante alguna distancia. El objeto está en equilibrio y si se desplaza ligeramente hacia un lado, la fuerza será cero aún. Se dice que el objeto está en **equilibrio neutro** en tal región.

Resumen

Una **fuerza conservativa** es aquella para la cual el trabajo realizado por la fuerza al mover un objeto de una posición a otra depende sólo de las dos posiciones, y no de la trayectoria seguida. El trabajo efectuado por una fuerza conservativa es recuperable, lo cual no es cierto para fuerzas no conservativas, como la fricción.

La **energía potencial** U es energía asociada con fuerzas conservativas que dependen de la posición o configuración de objetos. La energía potencial gravitacional es

$$U_{\text{grav}} = mgy, \qquad \textbf{(8–3)}$$

donde la masa m está cerca de la superficie terrestre, a una altura y arriba de algún punto de referencia: La energía potencial elástica está dada entonces por

$$U_{\text{el}} = \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad \textbf{(8–5)}$$

para un resorte con constante de rigidez k, estirado o comprimido una distancia x desde su posición de equilibrio. Otras energías potenciales son la química, la eléctrica y la nuclear.

La energía potencial está siempre asociada con una fuerza conservativa, y el cambio en energía potencial ΔU entre dos puntos bajo la acción de una fuerza conservativa $\vec{\mathbf{F}}$ se define como el negativo del trabajo hecho por la fuerza:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_1^2 \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}. \qquad \textbf{(8–4)}$$

De manera inversa, para el caso unidimensional escribimos

$$F = -\frac{dU(x)}{dx}. \qquad \textbf{(8–7)}$$

Sólo *cambios* en energía potencial tienen sentido físico, por lo que la selección de dónde $U = 0$ se realiza por conveniencia. La energía potencial no es una propiedad de un objeto, sino que está asociada con la interacción de dos o más objetos.

Cuando sólo actúan fuerzas conservativas, la **energía mecánica** total E, definida como la suma de las energías cinética y potencial, se conserva:

$$E = K + U = \text{constante}. \qquad \textbf{(8–10)}$$

Si también actúan fuerzas no conservativas, se tienen tipos adicionales de energía, como la térmica. Se ha encontrado experimentalmente que, cuando se incluyen todas las formas de energía, se conserva la energía total. Ésta es la **ley de la conservación de la energía**:

$$\Delta K + \Delta U + \Delta(\text{otros tipos de energía}) = 0. \qquad \textbf{(8–14)}$$

Según la describe la ley de Newton de la gravitación universal, la fuerza gravitacional es una fuerza conservativa. La energía potencial de un objeto de masa m debido a la fuerza gravitacional ejercida sobre él por la Tierra está dada por

$$U(r) = -\frac{GmM_{\text{E}}}{r}, \qquad \textbf{(8–17)}$$

donde M_{E} es la masa de la Tierra y r es la distancia del objeto al centro de la Tierra ($r \geq$ radio de la Tierra).

La **potencia** se define como la tasa a la que se efectúa trabajo, o la tasa a la cual la energía se transforma de una forma a otra:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}, \qquad \textbf{(8–20)}$$

o bien,

$$P = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{v}}. \qquad \textbf{(8–21)}$$

Preguntas

1. Mencione algunas fuerzas de la vida diaria que no sean conservativas, y explique por qué no lo son.

2. Usted levanta un libro pesado de una mesa a un anaquel alto. Indique qué fuerzas actúan sobre el libro durante este proceso, y diga si son conservativas o no conservativas.

3. La fuerza neta que actúa sobre una partícula es conservativa e incrementa la energía cinética en 300 J. ¿Cuál es el cambio en *a*) la energía potencial, y *b*) la energía total de la partícula?

4. Cuando se deja caer una “superpelota”, ¿puede rebotar a una mayor altura que su altura original?

5. Una colina tiene una altura h. Un niño sobre un trineo (masa total m) se desliza hacia abajo partiendo del reposo en la cima. ¿La velocidad en el fondo depende del ángulo de la colina *a*) si ésta está congelada y no hay fricción, y *b*) si hay fricción (nieve profunda)?

6. ¿Por qué uno se fatiga al empujar fuertemente contra un muro sólido, aun cuando no se efectúe trabajo alguno?

7. Analice el movimiento de un péndulo simple en términos de energía, *a*) ignorando la fricción, y *b*) tomando en cuenta la fricción. Explique por qué al reloj del abuelo tiene que dársele cuerda.

8. Describa con precisión que es físicamente "incorrecto" en el célebre dibujo de Escher que se muestra en la figura 8-24.

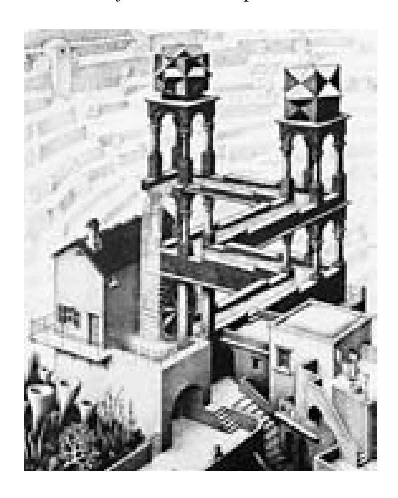


FIGURA 8–24
Pregunta 8.

9. En la figura 8-25, se lanzan globos de agua desde el techo de un edificio, todos con la misma rapidez pero con diferentes ángulos de lanzamiento. ¿Cuál tiene la mayor rapidez al tocar el suelo? Ignore la resistencia del aire.

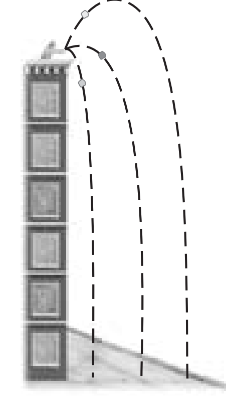


FIGURA 8–25
Pregunta 9.

10. Un resorte de masa m descansa en posición vertical sobre una mesa. Si usted comprime el resorte presionándolo hacia abajo con la mano y luego lo libera, ¿el resorte puede separarse de la mesa? Explique usando la ley de la conservación de la energía.

11. ¿Qué le pasa a la energía potencial gravitacional cuando el agua en la parte superior de una cascada llega al estanque que está fondo de la misma?

12. Los alpinistas experimentados prefieren evitar un tronco caído en su camino, que apoyarse sobre él y saltar para llegar al otro lado. Explique.

13. *a*) ¿De dónde proviene la energía cinética cuando un automóvil acelera uniformemente partiendo del reposo? *b*) ¿Cómo el incremento de energía cinética se relaciona con la fuerza de fricción que el camino ejerce sobre los neumáticos?

14. La Tierra está más cerca del Sol en el invierno (hemisferio norte). ¿Cuándo es máxima la energía potencial gravitacional?

15. ¿Puede ser negativa la energía mecánica total $E = K + U$? Explique.

16. Suponga que usted desea lanzar un cohete desde la superficie de la Tierra, de manera que escape del campo gravitacional terrestre. Usted quiere usar la cantidad mínima de combustible. ¿Desde qué punto de la superficie de la Tierra debe usted efectuar el lanzamiento y en qué dirección? ¿Importan la posición y la dirección del lanzamiento? Explique.

17. Recuerde del capítulo 4, ejemplo 4-14, que puede usar una polea y una cuerda para disminuir la fuerza necesaria para elevar una carga pesada (véase la figura 8-26). sin embargo, por cada metro que se sube la carga, ¿cuánta cuerda debe jalarse? Aclare esto usando conceptos de energía.

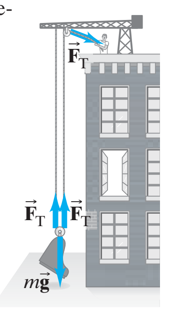


FIGURA 8–26
Pregunta 17.

18. Dos flechas idénticas, una con el doble de la rapidez de la otra, se disparan hacia un fardo de heno. Suponiendo que el heno ejerce una fuerza "de fricción" constante sobre las flechas, ¿cuánto más adentro penetrará la flecha más rápida que la más lenta? Explique.

19. Del techo cuelga una bola de bolos unida a un alambre de acero (figura 8-27). El profesor jala la bola hacia atrás y se para junto a la pared con la bola contra su nariz. Para evitar lesionarse, se supone que el profesor debe soltar la bola sin empujarla. ¿Por qué?

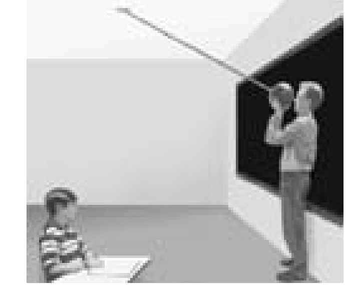


FIGURA 8–27
Pregunta 19.

20. Un péndulo se lanza desde un punto que está a una altura h sobre el punto más bajo de dos formas diferentes (figura 8-28). Durante ambos lanzamientos, al péndulo se le da una rapidez inicial de 3.0 m/s. En el primer lanzamiento, la velocidad inicial del péndulo está dirigida hacia arriba a lo largo de la trayectoria, y en el segundo punto de lanzamiento está dirigida hacia abajo a lo largo de la trayectoria. ¿Cuál lanzamiento provocará la mayor rapidez cuando la lenteja del péndulo pase por el punto más bajo de su lanzamiento? Explique su respuesta.

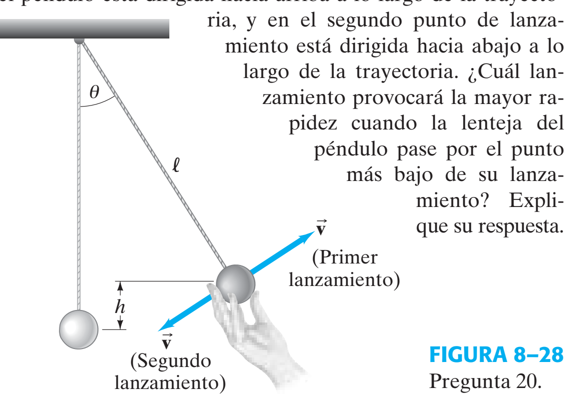


FIGURA 8–28
Pregunta 20.

21. Describa las transformaciones de energía cuando un niño da brincos con un pogo saltarín.

22. Describa las transformaciones de energía que ocurren cuando un esquiador comienza a esquiar colina abajo, pero después de un tiempo llega al reposo luego de golpear un montón de nieve.

23. Suponga que usted levanta una maleta del suelo a una mesa. ¿El trabajo que usted hace sobre la maleta depende de *a*) si la levanta en línea recta o a lo largo de una trayectoria más complicada, *b*) del tiempo que se requiere, *c*) de la altura de la mesa, y *d*) el peso de la maleta?

24. Repita la pregunta 23 para la *potencia* necesaria en vez del trabajo.

25. ¿Por qué es más fácil subir una montaña en zigzag que en línea recta?

* **26.** La figura 8-29 muestra una curva de energía potencial $U(x)$. *a*) ¿En qué punto la fuerza tiene su magnitud más grande? *b*) Para cada punto marcado, indique si la fuerza actúa hacia la izquierda, hacia la derecha o es cero. *c*) ¿Dónde hay equilibrio y de qué tipo es?

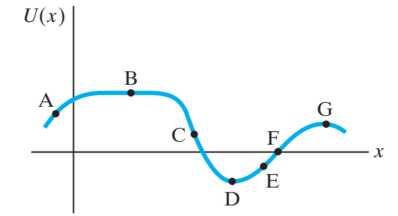


FIGURA 8–29
Pregunta 26.

* **27.** *a*) Describa con detalle los cambios de velocidad de una partícula que tiene energía E_3 en la figura 8-23 al moverse de x_6 a x_5 y de regreso a x_6. *b*) ¿Dónde es máxima y dónde es mínima la energía cinética?

* **28.** Indique el tipo de equilibrio para cada posición de las pelotas de la figura 8-30.

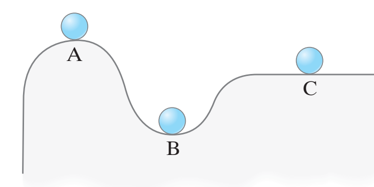


FIGURA 8–30
Pregunta 28.

Problemas

8–1 y 8–2 Fuerzas conservativas y energía potencial

1. (I) Un resorte tiene una constante de resorte k de 82.0 N/m. ¿Cuánto debe comprimirse este resorte para almacenar 35.0 J de energía potencial?

2. (I) Un mono de 6.0 kg oscila de una rama a otra que está 1.3 m más arriba. ¿Cuál es su cambio en energía potencial gravitacional?

3. (II) Un resorte con $k = 63$ N/m cuelga verticalmente junto a una regla. El extremo del resorte está junto a la marca de 15 cm de la regla. Si ahora se une una masa de 2.5 kg al extremo del resorte, ¿dónde se alineará el extremo del resorte con las marcas de la regla?

4. (II) Un alpinista de 56.5 kg parte de una elevación de 1270 m y sube hasta la cima de un pico de 2660 m. *a*) ¿Cuál es el cambio de energía potencial del alpinista? *b*) ¿Cuál es el trabajo mínimo requerido por parte del alpinista? *c*) ¿El trabajo real efectuado puede ser mayor que este valor? Explique.

5. (II) Una persona de 1.60 m de altura levanta un libro de 1.95 kg del suelo hasta una elevación de 2.20 m. ¿Cuál es la energía potencial del libro respecto a *a*) el suelo, y *b*) la parte superior de la cabeza de la persona? *c*) ¿Cómo es el trabajo efectuado por la persona respecto a las respuestas en los incisos *a*) y *b*)?

6. (II) Un automóvil de 1200 kg que rueda sobre una superficie horizontal tiene rapidez $v = 75$ km/h cuando golpea un resorte horizontal y llega al reposo en una distancia de 2.2 m. ¿Cuál es la constante de rigidez del resorte?

7. (II) Un resorte particular obedece la ley de fuerza $\vec{\mathbf{F}} = \left(-kx + ax^3 + bx^4\right)\hat{\mathbf{i}}$. *a*) ¿Esta fuerza es conservativa? Explique. *b*) Si es conservativa, determine la forma de la función de energía potencial.

8. (II) Si $U = 3x^2 + 2xy + 4y^2z$, ¿cuál será la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$?

9. (II) Una partícula está restringida a moverse en una dimensión a lo largo del eje x y sobre ella actúa una fuerza dada por

$$\vec{\mathbf{F}}(x) = -\frac{k}{x^3}\hat{\mathbf{i}}$$

donde k es una constante con unidades apropiadas al sistema SI. Encuentre la función de energía potencial $U(x)$ si U se define arbitrariamente como cero en $x = 2.0$ m, de modo que $U(2.0\text{ m}) = 0$.

10. (II) Una partícula restringida a moverse en una dimensión se somete a una fuerza $F(x)$ que varía con la posición x como

$$\vec{\mathbf{F}}(x) = A\,\text{sen}(kx)\,\hat{\mathbf{i}}$$

donde A y k son constantes. ¿Cuál es la función de energía potencial $U(x)$, si se toma $U = 0$ en el punto $x = 0$?

8–3 y 8–4 Conservación de la energía mecánica

11. (I) Una esquiadora novata, partiendo del reposo, se desliza hacia abajo por una pendiente de 13.0° cuya altura vertical es de 125 m. ¿Qué tan rápido va ella al llegar al fondo de la pendiente?

12. (I) En la selva Jane, quien busca a Tarzán, corre a 5.0 m/s y toma una liana que cuelga verticalmente de un árbol alto. ¿Qué tan alto puede ella oscilar hacia arriba? ¿Afecta su respuesta la longitud de la liana?

13. (II) En el salto de altura, la energía cinética de un atleta se transforma en energía potencial gravitacional sin ayuda de una pértiga. ¿Con qué rapidez mínima debe el atleta dejar el suelo para levantar su centro de masa 2.10 m y cruzar la barra con una rapidez de 0.70 m/s?

14. (II) Se le da un empujón a un trineo hacia arriba de una pendiente, sin fricción, de 23.0°. Alcanza una altura vertical máxima de 1.12 m por arriba del punto en que partió. ¿Cuál fue su rapidez inicial?

15. (II) Una saltadora de *bungee* de 55 kg salta desde un puente. Ella está amarrada a una cuerda *bungee* que tiene 12 m de largo cuando no está estirada y cae un total de 31 m. *a*) Calcule la constante k del resorte de la cuerda *bungee*, suponiendo que aplica la ley de Hooke. *b*) Calcule la aceleración máxima experimentada por la saltadora.

16. (II) Un artista de trampolín de 72 kg salta verticalmente hacia arriba desde la parte superior de una plataforma con una rapidez de 4.5 m/s. *a*) ¿Con qué rapidez llega él al trampolín, que se encuentra 2.0 m abajo (figura 8-31)? *b*) Si el trampolín se comporta como un resorte de constante igual a 5.8×10^4 N/m, ¿qué tanto se deflexiona éste?

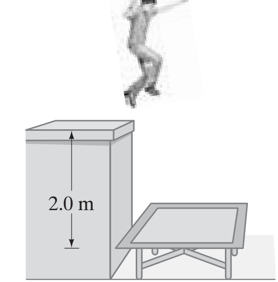


FIGURA 8–31
Problema 16.

17. (II) La energía total E de un objeto de masa m que se mueve en una dimensión sólo bajo la influencia de fuerzas conservativas se escribe como

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U.$$

Use conservación de energía, $dE/dt = 0$, para predecir la segunda ley de Newton.

18. (II) Una pelota de 0.40 kg se lanza con una rapidez de 8.5 m/s con un ángulo de 36° con respecto a la horizontal. *a*) ¿Cuál es su rapidez en su punto más alto, y *b*) qué tanto sube? (Use la conservación de la energía).

19. (II)Un resorte vertical (ignore su masa), cuya constante es de 875 N/m, está unido a una mesa y está comprimido 0.160 m. *a*) ¿Qué rapidez hacia arriba puede darle a una bola de 0.380 kg cuando se libera? *b*) ¿Hasta qué altura por arriba de su posición original (resorte comprimido) viajará la bola?

20. (II) Un carro de montaña rusa, figura 8-32, se sube hasta el punto 1 desde donde se libera del reposo. Suponiendo que no hay fricción, calcule la rapidez en los puntos 2, 3 y 4.

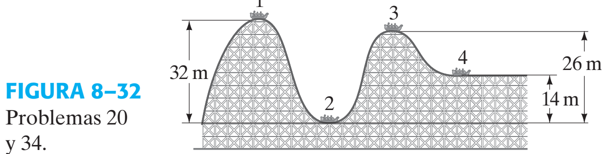


FIGURA 8–32 Problemas 20 y 34.

21. (II) Cuando una masa m se asienta en reposo sobre un resorte, el resorte se comprime una distancia d de su longitud no deformada (figura 8-33a). Suponga, en vez de ello, que la masa se libera desde el reposo cuando apenas toca el resorte no deformado (figura 8-33b). Encuentre la distancia D que el resorte se comprime antes de que sea capaz de detener la masa. ¿$D = d$? Si no, ¿por qué?

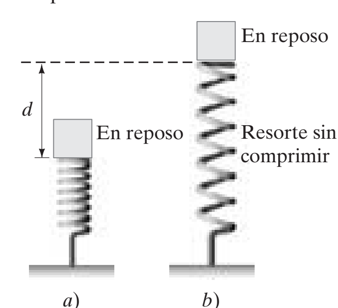
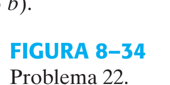


FIGURA 8–33 Problema 21. *a*) *b*)

22. (II) Dos masas están conectadas mediante un resorte, como se muestra en la figura 8-34. La masa $m_A = 4.0$ kg descansa sobre un plano inclinado sin fricción, mientras que $m_B = 5.0$ kg inicialmente se mantiene a una altura de $h = 0.75$ m sobre el suelo. *a*) Si a m_B se le permite caer, ¿cuál será la aceleración resultante de las masas? *b*) Si las masas inicialmente están en reposo, use las ecuaciones de cinemática (ecuaciones 2-12) para encontrar su velocidad justo antes de que m_B golpee el suelo. *c*) Use la conservación de energía para encontrar la velocidad de las masas justo antes de que m_B golpee el suelo. Debe obtener la misma respuesta que en el inciso *b*).



m_A m_B $\theta = 32°$ h

FIGURA 8–34 Problema 22.

23. (II) Un bloque de masa m está unido al extremo de un resorte (constante de rigidez k), figura 8-35. A la masa se le da un desplazamiento inicial x_0 desde su posición de equilibrio y una rapidez inicial v_0. Ignorando la fricción y la masa del resorte, use métodos de energía para encontrar *a*) su rapidez máxima, y *b*) su alargamiento máximo desde la posición de equilibrio, en términos de las cantidades dadas.

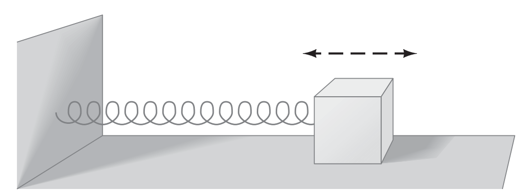


FIGURA 8–35 Problemas 23, 37 y 38.

24. (II) Un ciclista pretende subir una colina a 9.50° cuya altura vertical es de 125 m. Los pedales giran en un círculo de 36.0 cm de diámetro. Suponiendo que la masa de la bicicleta más la persona es de 75.0 kg, *a*) calcule cuánto trabajo debe efectuarse contra la gravedad. *b*) Si cada revolución completa de los pedales mueve la bicicleta 5.10 m a lo largo de su trayectoria, calcule la fuerza promedio que debe ejercerse sobre los pedales tangente a su trayectoria circular. Ignore el trabajo realizado por la fricción y otras pérdidas.

25. (II) Un péndulo de 2.00 m de longitud se libera (desde el reposo) en un ángulo $\theta_0 = 30.0°$ (figura 8-14). Determine la rapidez de la lenteja de 70.0 g: *a*) en el punto más bajo ($\theta = 0$); *b*) en $\theta = 15.0°$; *c*) en $\theta = -15.0°$ (es decir, en el lado opuesto). *d*) Determine la tensión en la cuerda en cada uno de esos tres puntos. *e*) Si a la lenteja se le da una rapidez inicial $v_0 = 1.20$ m/s al liberarla en $\theta = 30.0°$, calcule de nuevo las rapideces en los incisos *a*), *b*) y *c*).

26. (II) ¿Cuál debería ser la constante k de un resorte diseñado para llevar al reposo un automóvil de 1200 kg desde una rapidez de 95 km/h, de manera que los ocupantes experimenten una aceleración máxima de 5.0 g??

27. (III) Un ingeniero quiere diseñar un resorte que deberá colocarse en el fondo del hueco de un elevador. Si el cable del elevador se rompe cuando el elevador está a una altura h por arriba de la parte superior del resorte, calcule qué valor debería tener la constante k del resorte para que los pasajeros sufran una aceleración de no más de 5.0 g cuando el elevador se detenga. Sea M la masa total del elevador y los pasajeros.

28. (III) Un esquiador de masa m parte del reposo en la parte superior de una esfera sólida de radio r y se desliza hacia abajo sobre la superficie sin fricción. *a*) ¿A qué ángulo θ (figura 8-36) dejará el esquiador la esfera? *b*) Si hubiera fricción, ¿el esquiador dejaría la esfera con un ángulo mayor o menor?

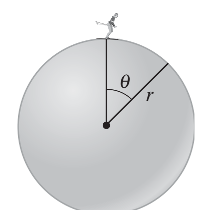


FIGURA 8–36 Problema 28.

8–5 y 8–6 Ley de la conservación de la energía

29. (I) Dos carros de ferrocarril, cada uno con masa de 56,000 kg, viajan a 95 km/h y entran en colisión frontal, deteniéndose. ¿Cuánta energía térmica se producida en esta colisión?

30. (I) Un niño de 16.0 kg desciende por una rampa de 2.20 m de altura y alcanza el fondo de ésta con una rapidez de 1.25 m/s. ¿Cuánta energía térmica debido a la fricción se generó en este proceso?

31. (II) Un esquiador parte del reposo y se desliza por una pendiente de 28° y 85 m de largo. *a*) Si el coeficiente de fricción es de 0.090, ¿cuál será la rapidez del esquiador en la base de la pendiente? *b*) Si la nieve está a nivel en la base de la pendiente y tiene el mismo coeficiente de fricción, ¿qué tan lejos viajará el esquiador a lo largo del tramo a nivel? Use métodos de energía.

32. Una pelota de béisbol de 145 g se deja caer desde un árbol a 14.0 m por arriba del suelo. *a*) ¿Con qué rapidez tocará el terreno si se ignora la resistencia del aire? *b*) Si en realidad toca el suelo con una rapidez de 8.00 m/s, ¿cuál será la fuerza promedio de la resistencia del aire ejercida sobre la pelota?

33. (II) Partiendo del reposo, un cajón de 96 kg se jala sobre un piso con una fuerza horizontal constante de 350 N. En los primeros 15 m el piso no tiene fricción y en los siguientes 15 m el coeficiente de fricción es de 0.25. ¿Cuál será la rapidez final del cajón?

34. (II) Suponga que el carro de la montaña rusa de la figura 8-32 pasa el punto 1 con una rapidez de 1.70 m/s. Si la fuerza de fricción promedio es igual a 0.23 de su peso, ¿con qué rapidez llegará al punto 2? La distancia recorrida es de 45.0 m.

35. (II) Un esquiador que viaja a 9.0 m/s llega al pie de una pendiente hacia arriba de 19°, y se desliza 12 m a lo largo de esta pendiente antes de llegar al reposo. ¿Cuál es el coeficiente de fricción promedio?

36. (II) Considere la vía que se presenta en la figura 8-37. La sección AB es un cuadrante de un círculo de radio 2.0 m y no tiene fricción. B a C es un tramo horizontal de 3.0 m de largo con un coeficiente de fricción cinética $\mu_k = 0.25$. La sección CD bajo el resorte no tiene fricción. Un bloque de masa igual a 1.0 kg se suelta del reposo en A. Después de resbalar sobre la vía, la masa comprime 0.20 m el resorte. Determine: *a*) la velocidad del bloque en el punto B; *b*) la energía térmica producida cuando el bloque resbala de B a C; *c*) la velocidad del bloque en el punto C; *d*) la constante de rigidez *k* para el resorte.

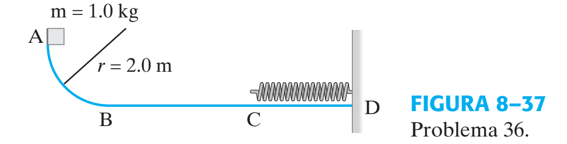


FIGURA 8–37 Problema 36.

37. (II) Un bloque de madera de 0.620 kg está firmemente unido a un resorte horizontal muy ligero ($k = 180$ N/m), como se muestra en la figura 8-35. Cuando el sistema bloque-resorte se comprime 5.0 cm y se suelta, se alarga 2.3 cm más allá de la posición de equilibrio antes de detenerse y regresar. ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la mesa?

38. (II) Un bloque de madera de 180 g está firmemente unido a un resorte horizontal muy ligero, figura 8-35. El bloque puede deslizarse a lo largo de una mesa donde el coeficiente de fricción es de 0.30. Una fuerza de 25 N comprime 18 cm el resorte. Si el resorte se libera desde esta posición, ¿qué tanto más allá de su posición de equilibrio se estirará en su primer ciclo??

39. (II) Una bola se suelta desde un altura de 2.0 m y rebota de vuelta hasta una altura de 1.5 m. *a*) ¿Qué fracción de la energía inicial se pierde durante el rebote? *b*) ¿Cuál es la rapidez de la bola justo cuando deja el suelo después del rebote? *c*) ¿A dónde se va la energía?

40. (II) Un esquiador de 56 kg parte del reposo en la parte superior de una pista de 1200 m de largo, que desciende un total de 230 m desde la parte superior. En la parte de abajo el esquiador se mueve a 11.0 m/s. ¿Cuánta energía se disipó por la fricción?

41. (II) ¿Cuánto cambia su energía potencial gravitacional cuando usted salta tan alto como le es posible (digamos 1.0 m)?

42. (III) Un resorte ($k = 75$ N/m) tiene una longitud en equilibrio de 1.00 m. El resorte se comprime a una longitud de 0.50 m y una masa de 2.0 kg se coloca en su extremo libre, sobre una pendiente sin fricción que forma un ángulo de 41° con respecto a la horizontal (figura 8-38). Después se libera el resorte. *a*) Si la masa *no* se une al resorte, ¿cuán alto sobre la pendiente se moverá la masa antes de llegar al reposo? *b*) Si la masa *se* une al resorte, ¿cuán alto sobre la pendiente se moverá la masa antes de llegar al reposo? *c*) Ahora el plano inclinado tiene un coeficiente de fricción cinética m_k. Si se observa que el bloque, unido al resorte, se detiene justo cuando alcanza la posición de equilibrio del resorte, ¿cuál es el coeficiente de fricción μ_k?

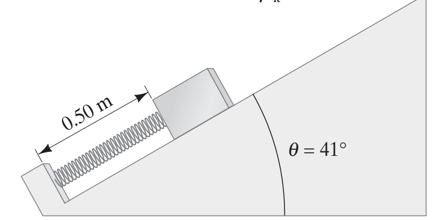


FIGURA 8–38 Problema 42.

43. (III) Un bloque de 2.0 kg se desliza a lo largo de una superficie horizontal con un coeficiente de fricción cinética $\mu_k = 0.30$. El bloque tiene una rapidez $v = 1.3$ m/s cuando golpea frontalmente un resorte sin masa (como en la figura 8-18). *a*) Si el resorte tiene una constante de fuerza $k = 120$ N/m, ¿cuánto se comprimirá éste? *b*) ¿Qué valor mínimo del coeficiente de fricción estática μ_S garantizará que el resorte permanezca comprimido en su posición de máxima compresión? *c*) Si μ_S es menor que este valor, ¿cuál será la rapidez del bloque cuando se separa del resorte descomprimido? [*Sugerencia*: La separación ocurre cuando el resorte alcanza su longitud natural ($x = 0$); explique].

44. (III) Los primeros vuelos de prueba del trasbordador espacial usaban un "planeador" (con masa de 980 kg incluyendo el piloto). Después de un lanzamiento horizontal a 480 km/h a una altitud de 3500 m, el planeador finalmente aterrizaba con una rapidez de 210 km/h. *a*) ¿Cuál habría sido su rapidez de aterrizaje en ausencia de resistencia del aire? *b*) ¿Cuál era la fuerza promedio que la resistencia del aire ejercía sobre él cuando entraba con un ángulo de planeo constante de 12° con respecto a la Tierra?

8–7 Energía potencial gravitacional

45. (I) Para un satélite de masa m_S en órbita circular de radio r_S alrededor de la Tierra, determine *a*) su energía cinética *K*, *b*) su energía potencial *U* ($U = 0$ en el infinito) y *c*) la razón K/U.

46. (I) Julia y sus amigas construyeron un pequeño cohete que poco después del despegue alcanza una rapidez de 850 m/s. ¿Qué tan alto sobre la Tierra puede subir el cohete? Ignore la fricción del aire.

47. (I) La velocidad de escape del planeta A es el doble que para el planeta B. Los dos planetas tienen la misma masa. ¿Cuál es la razón de sus radios, r_A/r_B?

48. (II) Demuestre que la ecuación 8-16 para la energía potencial gravitacional se reduce a la ecuación 8-2, $\Delta U = mg(y_2 - y_1)$, para objetos cercanos a la superficie terrestre.

49. (II) Determine la velocidad de escape del Sol para un objeto *a*) en la superficie del Sol ($r = 7.0 \times 10^5$ km, $M = 2.0 \times 10^{30}$ kg) y *b*) a la distancia promedio de la Tierra (1.50×10^8 km). Compárela con la rapidez de la Tierra en su órbita.

50. (II) Dos satélites terrestres, A y B, cada uno de masa $m = 950$ kg, se lanzan en orbitas circulares alrededor del centro de la Tierra. El satélite A orbita a una altitud de 4200 km y el satélite B orbita a una altitud de 12,600 km. *a*) ¿Cuáles son las energías potenciales de los dos satélites? *b*) ¿Cuáles son las energías cinéticas de los dos satélites? *c*) ¿Cuánto trabajo se requeriría para cambiar la órbita del satélite A de manera que se ajuste a la del satélite B?

51. (II) Demuestre que la velocidad de escape de cualquier satélite en una órbita circular es $\sqrt{2}$ veces su velocidad.

52. (II) (*a*) Demuestre que la energía mecánica total de un satélite (masa *m*) que orbita a una distancia *r* del centro de la Tierra (masa M_E) es

$$E = -\frac{1}{2}\frac{GmM_E}{r},$$

si $U = 0$ en $r = \infty$. *b*) Demuestre que aunque la fricción ocasiona que el valor de *E* disminuya lentamente, la energía cinética debe aumentar realmente si la órbita permanece circular.

53. (II) Tome en cuenta la rapidez rotacional de la Tierra (1 rev/día) y determine la rapidez necesaria, con respecto a la Tierra, para que un cohete escape de ella si se lanza desde el ecuador en una dirección *a*) hacia el este, *b*) hacia el oeste y *c*) verticalmente hacia arriba.

54. (II) *a*) Obtenga una fórmula para la altura máxima h que un cohete alcanzará si se lanza verticalmente desde la superficie terrestre con rapidez v_0 ($< v_{esc}$). Exprésela en términos de v_0, r_E, M_E y G. *b*) ¿Qué altura alcanzará un cohete si $v_0 = 8.35$ km/s? Ignore la resistencia del aire y la rotación de la Tierra.

55. (II) *a*) Determine la tasa a la que la velocidad de escape desde la Tierra cambia con la distancia desde el centro de la Tierra, dv_{esc}/dr. *b*) Utilice la aproximación $\Delta v \approx (dv/dr)\Delta r$ para determinar la velocidad de escape para una nave espacial que órbita la Tierra a una altitud de 320 km.

56. (II) Un meteorito tiene una rapidez de 90.0 m/s cuando se encuentra a 850 km por arriba de la Tierra. Si cae verticalmente (ignore la resistencia del aire), golpea una cama de arena donde alcanza el reposo en 3.25 m. *a*) ¿Cuál es su rapidez justo antes de golpear la arena? *b*) ¿Cuánto trabajo efectúa la arena para detener el meteorito (masa = 575 kg)? *c*) ¿Cuál es la fuerza promedio ejercida por la arena sobre el meteorito? *d*) ¿Cuánta energía térmica se produce?

57. (II) ¿Cuánto trabajo se requeriría para mover un satélite de masa m de una órbita circular de radio $r_1 = 2r_E$ alrededor de la Tierra a otra órbita circular de radio $r_2 = 3r_E$? (r_E es el radio de la Tierra).

58. (II) *a*) Suponga que tenemos tres masas, m_1, m_2 y m_3, que inicialmente están infinitamente lejos entre sí. Demuestre que el trabajo necesario para llevarlas a las posiciones que se muestran en la figura 8-39 es

$$W = -G\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}\right).$$

b) ¿Podemos decir que esta fórmula da también la energía potencial del sistema, o la energía potencial de uno o dos de los objetos? *c*) ¿W es igual a la energía de conexión del sistema, es decir, igual a la energía requerida para separar las componentes una distancia infinita? Explique.

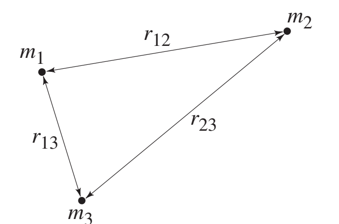


FIGURA 8–39
Problema 58.

59. (II) Un satélite de la NASA acaba de observar un asteroide que va a chocar contra la Tierra. El asteroide tiene una masa estimada, basada en su tamaño, de 5×10^9 kg. Se acerca a nuestro planeta en un curso frontal con velocidad de 660 m/s con respecto a la Tierra y está ahora a 5.0×10^6 km de distancia. ¿Con qué rapidez golpeará la superficie terrestre, ignorando la fricción con la atmósfera?

60. (II) Una esfera de radio r_1 tiene una cavidad esférica concéntrica de radio r_2 (figura 8-40). Suponga que este cascarón esférico de espesor $r_1 - r_2$ es uniforme y tiene una masa total M. Demuestre que la energía potencial gravitacional de una masa m a una distancia r desde el centro del cascarón ($r > r_1$) está dada por

$$U = -\frac{GmM}{r}.$$

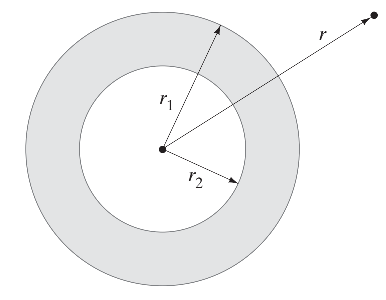


FIGURA 8–40
Problema 60.

61. (III) Para escapar del sistema solar, una nave espacial interestelar debe vencer la atracción gravitacional tanto de la Tierra como del Sol. Ignore los efectos de otros cuerpos en el Sistema Solar. *a*) Demuestre que la velocidad de escape es

$$v = \sqrt{v_E^2 + (v_S - v_0)^2} = 16.7 \text{ km/s},$$

donde: v_E es la velocidad de escape de la Tierra (ecuación 8-19); $v_S = \sqrt{2GM_S/r_{SE}}$ es la velocidad de escape del campo gravitatorio del Sol en la órbita de la Tierra, pero lejos de la influencia de ésta (r_{SE} es la distancia Sol-Tierra); y v_0 es la velocidad orbital de la Tierra alrededor del Sol. *b*) Demuestre que la energía requerida es 1.40×10^8 J por kilogramo de masa de la nave espacial. [*Sugerencia*: Escriba la ecuación de energía para el escape de la Tierra con v' como la velocidad, relativa a la Tierra, pero lejos de ella; entonces sea $v' + v_0$ igual a la velocidad de escape del Sol].

8–8 Potencia

62. (I) ¿Cuánto tiempo le tomará a un motor de 1750 W levantar un piano de 335 kg a la ventana de un sexto piso situada a 16.0 m desde el suelo?

63. (I) Si un automóvil genera 18 hp al viajar a una rapidez constante de 95 km/h, ¿cuál debe ser la fuerza promedio ejercida sobre el automóvil debida a la fricción y a la resistencia del aire?

64. (I) Un jugador de fútbol de 85 kg que corre a 5.0 m/s es detenido en 1.0 s por un tacleador. *a*) ¿Cuál es la energía cinética original del jugador? *b*) ¿Qué potencia promedio se requiere para detenerlo?

65. (II) Una conductora nota que su automóvil de 1080 kg desacelera de 95 km/h a 65 km/h en aproximadamente 7.0 s en un camino horizontal cuando está en punto muerto. ¿Qué potencia aproximada (watts y hp) se requiere para mantener el auto viajando a una rapidez constante de 80 km/h?

66. (II) ¿Cuánto trabajo puede efectuar un motor de 3.0 hp en 1.0 hora?

67. (II) Un motor fuera de borda para un bote se designa como de 55 hp. Si el motor puede mover un bote específico a una rapidez constante de 35 km/h, ¿cuál será la fuerza total que resiste el movimiento del bote?

68. (II) Una automóvil deportivo de 1400 kg acelera desde el reposo hasta 95 km/h en 7.4 s. ¿Cuál es la potencia promedio del motor?

69. (II) Durante un entrenamiento, los jugadores de fútbol de una universidad estatal corrieron hacia arriba las escaleras del estadio en 75 s. Las escaleras tienen 78 m de longitud y están inclinadas a 33°. Si un jugador tiene una masa de 92 kg, estime su potencia promedio en la carrera hacia arriba. Ignore la fricción y la resistencia del aire.

70. (II) Una bomba levanta 21.0 kg de agua por minuto a una altura de 3.50 m. ¿Qué potencia mínima (watts) debe tener el motor de la bomba?

71. (II) Se afirma que una zona de esquiar puede subir en sus sillas a 47,000 personas cada hora. Si la silla promedio sube a la gente aproximadamente a 200 m (verticalmente), estime la potencia total máxima requerida.

72. (II) Un esquiador de 75 kg se sujeta a una cuerda movible que es impulsada por un motor y es jalado a rapidez constante hacia la parte superior de una colina de 23°. El esquiador es jalado una distancia $x = 220$ m a lo largo del plano inclinado y le toma 2.0 minutos alcanzar la parte superior de la colina. Si el coeficiente de fricción cinética entre la nieve y el esquí es $\mu_k = 0.10$ qué potencia requiere el motor, si 30 de esos esquiadores (máx) están sobre la cuerda al mismo tiempo?

73. (III) La posición de un objeto de 280 g está dada (en metros) por $x = 5.0\, t^3 - 8.0\, t^2 - 44\, t$, donde t está en segundos. Determine la tasa neta del trabajo hecho sobre este objeto *a*) en t = 2.0 s y *b*) en t = 4.0 s. *c*) ¿Cuál es la potencia de entrada neta promedio durante el intervalo de t = 0 s a t = 2.0 s, y en el intervalo de t = 2.0 s a 4.0 s?

74. (III) Un ciclista desciende libremente por una colina inclinada 6.0° con rapidez constante de 4.0 m/s. Suponiendo una masa total de 75 kg (bicicleta más ciclista), ¿cuál debe ser la potencia empleada por el ciclista para subir la misma colina con la misma rapidez?

*8–9 Diagramas de energía potencial

***75.** (II) Dibuje un diagrama de energía potencial, U versus x, y analice el movimiento de una masa m que descansa sobre una mesa horizontal sin fricción y está conectada a un resorte horizontal con constante de rigidez k. La masa se jala una distancia tal hacia la derecha que el resorte está estirado una distancia x_0 inicialmente, y luego la masa se libera desde el reposo.

***76.** (II) El resorte del problema 75 tiene una constante de rigidez $k = 160$ N/m. La masa $m = 5.0$ kg se suelta del reposo cuando el resorte está estirado $x_0 = 1.0$ m desde su posición de equilibrio. Determine *a*) la energía total del sistema; *b*) la energía cinética cuando $x = \frac{1}{2}x_0$; *c*) la energía cinética máxima; *d*) la rapidez máxima y las posiciones en que ocurre; *e*) la aceleración máxima y dónde ocurre.

***77.** (III) La energía potencial de dos átomos en una molécula diatómica (dos átomos) puede escribirse como

$$U(r) = -\frac{a}{r^6} + \frac{b}{r^{12}},$$

donde r es la distancia entre los dos átomos y a y b son constantes positivas. *a*) ¿Para qué valores de r es $U(r)$ un mínimo? ¿Y un máximo? *b*) ¿Para qué valores de r es $U(r) = 0$? *c*) Grafique $U(r)$ como función de r desde $r = 0$ hasta r con un valor suficientemente grande para que se muestren todas las características en *a*) y en *b*). *d*) Describa el movimiento de un átomo con respecto al segundo átomo cuando $E < 0$, y cuando $E > 0$. *e*) Sea F la fuerza que un átomo ejerce sobre el otro. ¿Para qué valores de r es $F > 0$, $F < 0$, $F = 0$? *f*) Determine F como función de r.

***78.** (III) La *energía de enlace* de un sistema de dos partículas se define como la energía requerida para separar las dos partículas desde su estado de mínima energía hasta $r = \infty$. Determine la energía de enlace para la molécula del problema 77.

Problemas generales

79. ¿Cuál es la salida de potencia promedio de un elevador que levanta 885 kg una distancia vertical de 32.0 m en 11.0 segundos?

80. Un proyectil es disparado hacia arriba con un ángulo de 48.0° desde la cima de un acantilado de 135 m con una rapidez de 165 m/s. ¿Cuál será su rapidez cuando golpee el suelo? (Use la conservación de la energía).

81. El agua fluye en una presa a una tasa de 580 kg/s y cae verticalmente 88 m antes de golpear los alabes de una turbina. Calcule *a*) la rapidez del agua justo antes de golpear los alabes de la turbina (ignore la resistencia del aire), y *b*) la tasa a la que la energía mecánica es transferida a los alabes, suponiendo una eficiencia del 55%.

82. Un ciclista de 75 kg (incluida la bicicleta) puede descender libremente por una colina a 4.0° con rapidez constante de 12 km/h. Pedaleando fuertemente, el ciclista puede descender por la colina con una rapidez de 32 km/h. Usando la misma potencia, ¿con qué rapidez el ciclista puede subir la misma colina? Suponga que la fuerza de fricción es proporcional al cuadrado de la rapidez v, es decir, $F_{\text{fr}} = bv^2$, donde b es una constante.

83. Una esquiadora de 62 kg parte del reposo en la cima de una rampa de esquiar, punto A en la figura 8-41 y viaja hacia abajo por la rampa. Si se ignoran la fricción y la resistencia del aire, *a*) determine su rapidez v_B cuando ella alcanza el extremo horizontal de la rampa en B. *b*) Determine la distancia s en que ella llega al suelo en C.

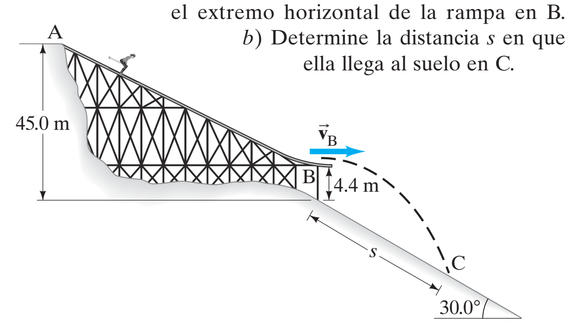


FIGURA 8–41 Problemas 83 y 84.

84. Resuelva de nuevo el problema 83, pero ahora suponga que el esquiador salta hacia arriba al llegar al punto B y adquiere una componente vertical de velocidad (en B) de 3.0 m/s.

85. Un balón está unido a una cuerda horizontal de longitud ℓ cuyo extremo opuesto está fijo, figura 8-42. *a*) Si el balón se suelta, ¿cuál será su rapidez en el punto más bajo de su trayectoria? *b*) Una clavija está localizada a una distancia h directamente abajo del punto de fijación de la cuerda. Si $h = 0.80\ell$, ¿cuál será la rapidez del balón cuando éste alcance la parte superior de su trayectoria circular alrededor de la clavija?

FIGURA 8–42 Problemas 85 y 86.

86. Demuestre que h debe ser mayor que 0.60ℓ si el balón de la figura 8-42 puede describir un círculo completo alrededor de la clavija.

87. Demuestre que en una montaña rusa con un lazo circular vertical (figura 8-43), la diferencia en su peso aparente en la parte superior del lazo y en el fondo del lazo es 6 g, es decir, seis veces su peso. Ignore la fricción. Demuestre también que en tanto su rapidez sea mayor que la mínima necesaria, esta respuesta no depende del tamaño del lazo ni de qué tan rápido viaje usted por él.

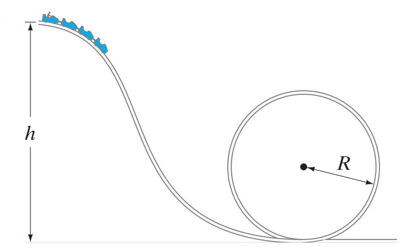


FIGURA 8–43 Problema 87.

88. Si usted está parado en una báscula de baño, el resorte dentro de ella se comprime 0.50 mm y registra un peso de 760 N. Ahora, si usted salta sobre la báscula desde una altura de 1.0 m, ¿qué peso registrará en como máximo?

89. Un alpinista de 65 kg sube a la cima de una montaña de 4200 m. La ascensión la hace en 5.0 h partiendo de una elevación de 2800 m. Calcule *a*) el trabajo hecho por el alpinista contra la gravedad, *b*) la potencia promedio desarrollada en watts y en caballos de potencia, y *c*) suponiendo que el cuerpo es 15% eficiente, ¿qué tasa de energía de entrada se requirió?

90. La pequeña masa m que se desliza sin fricción a lo largo de la vía con lazo circular de la figura 8-44 debe permanecer sobre la vía en todo momento, aun en la parte superior del lazo de radio r. *a*) En términos de las cantidades dadas, calcule la altura mínima h de liberación. Luego, si la altura real de liberación es $2h$, calcule *b*) la fuerza normal ejercida por la vía en el fondo del lazo, *c*) la fuerza normal ejercida por la vía en la parte superior del lazo, y *d*) la fuerza normal ejercida por la vía después de que el bloque sale del lazo y entra a la sección plana.

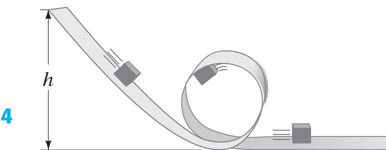


FIGURA 8–44 Problema 90.

91. Un estudiante de 56 kg corre a 5.0 m/s, toma una cuerda colgante, y se balancea sobre un lago (figura 8-45). Suelta la cuerda cuando su velocidad es cero. *a*) ¿Cuál es el ángulo θ cuando él suelta la cuerda? *b*) ¿Cuál es la tensión en la cuerda justo antes de que la suelte? *c*) ¿Cuál es la tensión máxima en la cuerda?

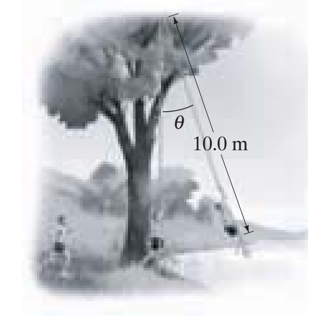


FIGURA 8–45 Problema 91.

92. En un núcleo la fuerza nuclear entre dos neutrones se describe aproximadamente por el potencial de Yukawa

$$U(r) = -U_0 \frac{r_0}{r} e^{-r/r_0},$$

donde r es la distancia entre los neutrones y U_0 y r_0 ($\approx 10^{-15}$ m) son constantes. *a*) Determine la fuerza $F(r)$. *b*) ¿Cuál es la razón $F(3r_0)/F(r_0)$? *c*) Calcule esta misma razón para la fuerza entre dos partículas eléctricamente cargadas donde $U(r) = -C/r$, y C es una constante. ¿Por qué la fuerza de Yukawa se llama fuerza de "rango corto"?

93. En áreas urbanas una manguera contra incendios debe arrojar un flujo de agua a una altura máxima de 33 metros. El agua sale de la manguera al nivel del suelo en un flujo circular de 3.0 cm de diámetro. ¿Qué potencia mínima se requiere para crear dicho flujo de agua? Un metro cúbico de agua tiene una masa de 1.00×10^3 kg.

94. Un trineo de 16 kg sube por una pendiente de 28° con rapidez de 2.4 m/s. El coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.25$. *a*) ¿Qué distancia viaja el trineo hacia arriba por la pendiente? *b*) ¿Qué condición debe ponerse al coeficiente de fricción estática, para que el trineo no se quede trabado en el punto determinado en el inciso *a*)? *c*) Si el trineo de desliza de regreso hacia abajo, ¿cuál será su rapidez cuando regrese a su punto de partida?

95. El módulo lunar podría efectuar un aterrizaje seguro si su velocidad vertical en el impacto fuera de 3.0 m/s o menor. Suponga que se quiere determinar la altura máxima a la que el piloto podría apagar el motor, si la velocidad del módulo relativa a la superficie es *a*) cero, *b*) 2.0 m/s hacia abajo, y *c*) 2.0 m/s hacia arriba. Use la conservación de la energía para determinar h en cada caso. La aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna es de 1.62 m/s^2.

96. El diseño apropiado del sistema de frenos de un automóvil debe tomar en cuenta la generación de calor durante el frenado. Calcule la energía térmica disipada por los frenos de un automóvil de 1500 kg al descender por una colina de 17°. El auto empieza a frenar cuando su rapidez es de 95 km/h y desacelera a una rapidez de 35 km/h en una distancia de 0.30 km medida a lo largo del camino.

97. Algunas compañías generadoras de energía eléctrica usan agua para almacenar energía. El agua se bombea utilizando dispositivos de turbina reversible desde un depósito bajo a otro depósito alto. Si se desea almacenar la energía producida en 1.0 hora por una planta de energía eléctrica de 180 MW, ¿cuántos metros cúbicos de agua tendrán que bombearse del depósito bajo al alto? Suponga que el depósito superior está a 380 m por arriba del inferior, y que podemos ignorar el pequeño cambio en las profundidades de cada depósito. El agua tiene una masa de 1.0×10^3 kg por cada 1.0 m^3.

98. Estime la energía requerida a partir del combustible para lanzar un satélite de 1465 kg y ponerlo en órbita a 1375 km por arriba de la superficie terrestre. Considere dos casos: *a*) el satélite se lanza a una órbita ecuatorial desde un punto sobre el ecuador terrestre, y *b*) se lanza desde el polo norte a una órbita polar.

99. Un satélite está en una órbita elíptica alrededor de la Tierra (figura 8-46). Su rapidez en el perigeo A es de 8650 m/s. *a*) Use la conservación de la energía para determinar su rapidez en B. El radio de la Tierra es de 6380 km. *b*) Utilice la conservación de la energía para determinar la rapidez en el apogeo C.

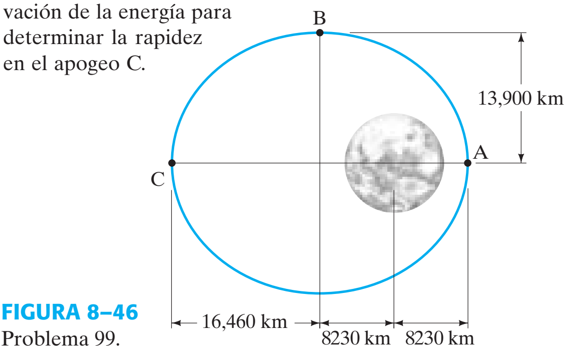


FIGURA 8–46 Problema 99.

100. Suponga que la energía potencial gravitacional de un objeto de masa m a una distancia r del centro de la Tierra está dada por

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} e^{-\alpha r}$$

donde α es una constante positiva y e es la función exponencial. (En la ley de Newton de la gravitación universal, $\alpha = 0$). *a*) ¿Cuál sería la fuerza sobre el objeto como una función de r? *b*) ¿Cuál sería la velocidad de escape del objeto en términos del radio de la Tierra R_E?

101. *a*) Si el cuerpo humano pudiera convertir directamente una barra de dulce en trabajo, ¿a qué altura de una escalera podría ascender un hombre de 76 kg si fuera cargado de combustible con una barra (= 1100 kJ)? *b*) Si luego el hombre saltara de la escalera, ¿cuál será su rapidez cuando alcance el fondo?

102. Las unidades de energía eléctrica a menudo se expresan en la forma de "kilowatt-horas". *a*) Demuestre que un kilowatt-hora (kWh) es igual a 3.6×10^6 J. *b*) Si una familia de cuatro miembros consume energía eléctrica a una tasa promedio de 580 W, ¿cuántos kWh registrará mensualmente su recibo de energía eléctrica? *c*) ¿A cuántos joules equivaldría esa cantidad? *d*) Si el costo por kWh es de $0.12, ¿cuál sería el monto que tendrían que pagar al mes? ¿El monto del recibo mensual depende de la *tasa* a la que consumen energía eléctrica?

103. Chris salta de un puente con una cuerda *bungee* (una cuerda pesada y elástica) atada a su tobillo (figura 8-47). Cae 15 m antes de que la cuerda comience a estirarse. La masa de Chris es de 75 kg y se supone que la cuerda obedece la ley de Hooke, $F = -kx$, con $k = 50$ N/m. Si se desprecia la resistencia del aire, estime qué tan lejos del puente estará el pie de Chris antes de que él se detenga. Desprecie la masa de la cuerda (aunque esto no sea realista) y considere a Chris como una partícula.

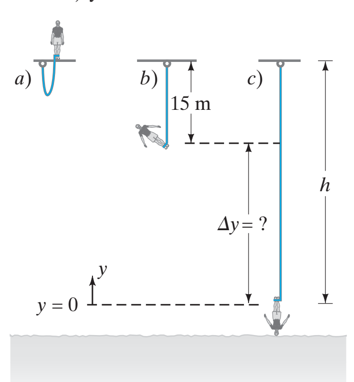


FIGURA 8–47 Problema 103. *a*) Un individuo a punto de saltar atado a una cuerda *bungee*. *b*) Longitud de la cuerda *bungee* sin estirar. *c*) Estiramiento máximo de la cuerda.

104. En un examen habitual de función cardiaca (la "prueba de tensión"), el paciente camina sobre una rampa giratoria (caminadora, figura 8-48). Estime la potencia que requiere un paciente de 75 kg cuando la caminadora está inclinada en un ángulo de 12° y la velocidad es de 3.3 km/h. (¿Cómo se compara esta potencia con la clasificación de potencia de una bombilla eléctrica?).



FIGURA 8–48 Problema 104.

105. *a*) Si un volcán lanza una roca de 450 kg verticalmente hacia arriba a una distancia de 320 m, ¿cuál era la velocidad de la roca cuando salió del volcán? *b*) Si el volcán arroja el equivalente de 1000 rocas de ese tamaño cada minuto, estime su potencia de salida.

106. En una película del famoso salto largo de Jesse Owens (figura 8-49) en las Olimpiadas de 1936, se observa que su centro de masa se elevó 1.1 m del punto de despegue al punto superior del arco. ¿Qué rapidez mínima requirió en el despegue, si en la parte superior del arco tenía una rapidez de 6.5 m/s?

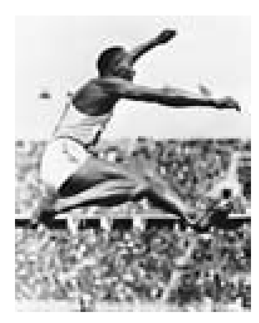


FIGURA 8–49 Problema 106.

107. Un cable de elevador se rompe cuando el elevador de 920 kg está a 24 m sobre un gran resorte ($k = 2.2 \times 10^5$ N/m) en el fondo del hueco. Calcule *a*) el trabajo realizado por la gravedad sobre el elevador antes de que éste golpee el resorte, *b*) la rapidez del elevador justo antes de golpear al resorte y *c*) cuánto se comprime el resorte (note que, en esta parte, tanto la gravedad como el resorte efectúan trabajo).

108. Una partícula se mueve con energía potencial dada por $U(r) = U_0[(2/r^2) - (1/r)]$. *a*) Grafique $U(r)$ versus r. ¿Dónde cruza la curva el eje $U(r) = 0$? ¿Para qué valor de r se presenta el valor mínimo de $U(r)$? *b*) Suponga que la partícula tiene una energía $E = -0.050U_0$. Indique en su diagrama los puntos de inflexión aproximados del movimiento de la partícula. ¿Cuál será la energía cinética máxima de la partícula y para qué valor de r ocurre esto?

109. Una partícula de masa m se mueve bajo la influencia de una energía potencial

$$U(x) = \frac{a}{x} + bx$$

donde a y b son constantes positivas y la partícula está restringida a la región $x > 0$. Encuentre un punto de equilibrio para la partícula y demuestre que ésta es estable.

* Ejercicios numéricos y por computadora

* **110.** (III) Los dos átomos en una molécula diatómica ejercen una fuerza de atracción mutua a grandes distancias, y una fuerza de repulsión cuando se encuentran a corta distancia. La magnitud de la fuerza entre los dos átomos en una molécula diatómica puede aproximarse mediante la fuerza Lennard-Jones, $F(r) = F_0[2(\sigma/r)^{13} - (\sigma/r)^7]$, donde r es la separación entre los dos átomos, en tanto que σ y F_0 son constantes. Para una molécula de oxígeno (que es diatómica), $F_0 = 9.60 \times 10^{-11}$ N y $\sigma = 3.50 \times 10^{-11}$ m. *a*) Integre la ecuación para $F(r)$ y determine la energía potencial $U(r)$ de la molécula de oxígeno. *b*) Encuentre la distancia de equilibrio r_0 entre los dos átomos. *c*) Grafique $F(r)$ y $U(r)$ entre 0.9 r_0 y 2.5 r_0.

Respuestas a los ejercicios

A: *e*), *e*); *e*), *c*).

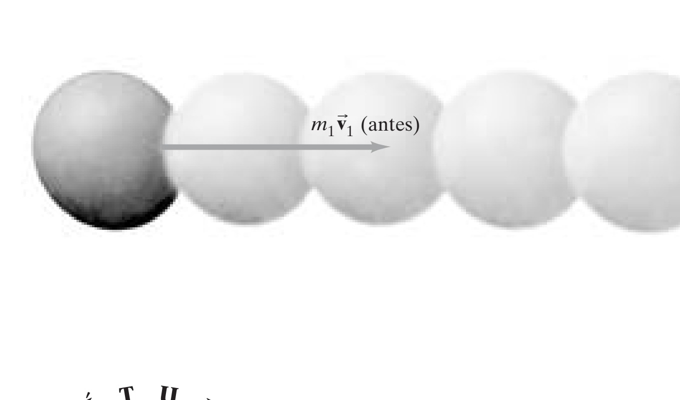
B: *b*).

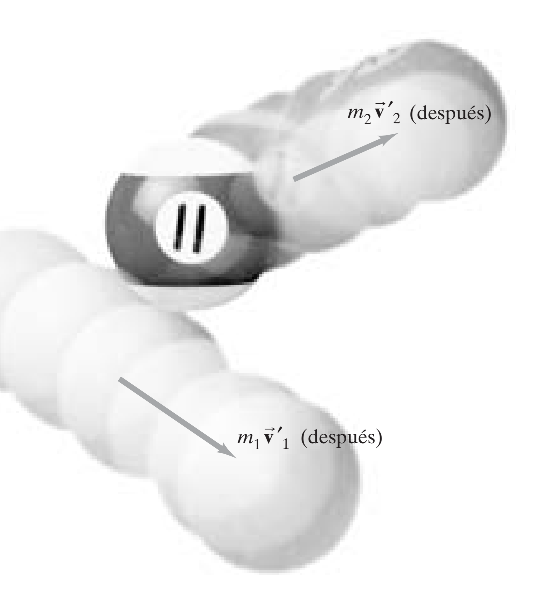
C: *c*).

D: Rapideces iguales.

La conservación de la cantidad de movimiento lineal es otra de las grandes leyes de conservación de la física. Las colisiones, como las que ocurren entre bolas de billar, ilustran muy adecuadamente esta ley vectorial: la cantidad de movimiento vectorial total justo antes de la colisión es igual a la cantidad de movimiento vectorial total justo después de la colisión. En esta imagen, la bola blanca golpea la bola 11 que está en reposo. Ambas bolas se mueven después de la colisión según ángulos diferentes, pero la suma de sus cantidades de movimiento vectoriales es igual a la cantidad de movimiento vectorial inicial de la bola blanca.

Consideraremos tanto las colisiones elásticas (donde también se conserva la energía cinética) como las colisiones inelásticas. Además, examinaremos el concepto de centro de masa y como éste nos ayuda al estudio de un movimiento complejo.







Cantidad de movimiento lineal y colisiones

CONTENIDO

PREGUNTAS DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!

1. Un vagón del ferrocarril cargado con piedras avanza libremente sobre vías horizontales sin fricción. En el vagón un trabajador empieza a lanzar horizontalmente las piedras hacia atrás del carro. ¿Qué sucede entonces?

a) El vagón desacelera.
b) El vagón acelera.
c) El vagón primero acelera y luego desacelera.
d) La rapidez del vagón permanece constante.
e) Ninguna de éstas.

2. ¿Qué respuesta elegiría usted si las piedras cayeran por un agujero en el piso del vagón, una a la vez.

La ley de la conservación de la energía, que vimos en el capítulo anterior, es una de las diversas leyes importantes de la conservación en la física. Entre las otras cantidades que se conservan están la cantidad de movimiento lineal, la cantidad de movimiento angular y la carga eléctrica. A la postre, analizaremos todas porque las leyes de la conservación están entre las ideas más importantes de toda la ciencia. En este capítulo estudiaremos la cantidad de movimiento lineal y su conservación. La ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal es esencialmente un replanteamiento de las leyes de Newton que nos da una visión física poderosa y una herramienta muy útil para la resolución de problemas.

Usamos las leyes de la conservación de la cantidad de movimiento lineal y de la energía para analizar las colisiones. De hecho, la ley de la conservación de la cantidad de movimiento es especialmente útil al tratar con un sistema de dos o más objetos que interactúan entre sí, como en los choques de objetos ordinarios o de partículas nucleares.

Nuestro estudio hasta ahora ha estado principalmente enfocado al movimiento de un solo objeto, a menudo considerándolo como una "partícula", en el sentido de que hemos ignorado cualquier rotación o movimiento interno. En este capítulo trataremos con sistemas de dos o más objetos, y hacia el final del capítulo estudiaremos al centro de masa.

9–1 Cantidad de movimiento lineal y su relación con la fuerza

La **cantidad de movimiento lineal**, (también llamada **momento lineal**, o simplemente, momento) de un objeto se define como el producto de su masa por su velocidad. La cantidad de movimiento se representa usualmente con el símbolo $\vec{\mathbf{p}}$. Si m representa la masa de un objeto y $\vec{\mathbf{v}}$ su velocidad, entonces su cantidad de movimiento lineal o momento lineal $\vec{\mathbf{p}}$ se define como

$$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}. \tag{9–1}$$

Como la velocidad es un vector, la cantidad de movimiento también es un vector. La dirección y sentido de la cantidad de movimiento son iguales a los de la velocidad, y la magnitud de la cantidad de movimiento es $p = mv$. Como la velocidad depende del marco de referencia, al igual que la cantidad de movimiento, debe especificarse claramente el marco de referencia. La unidad de la cantidad de movimiento lineal es masa × velocidad, que en unidades del SI es kg·m/s. No hay un nombre especial para esta unidad.

El uso cotidiano del término *cantidad de movimiento* está de acuerdo con la definición anterior, ya que según la ecuación 9-1, un automóvil que se mueve a gran velocidad tiene más cantidad de movimiento que otro que se mueve lentamente con la misma masa; un camión pesado tiene mayor cantidad de movimiento que un automóvil pequeño que se mueve con la misma rapidez. Cuanto más cantidad de movimiento tenga un objeto, más difícil será detenerlo y mayor será el efecto que tendrá sobre otro objeto, al traerlo al reposo por un impacto o una colisión contra ese objeto. Es más probable que un jugador de fútbol quede noqueado al ser tacleado por un defensivo pesado que corre a máxima velocidad, que por uno más ligero o que se mueva a menor velocidad. Un camión a gran velocidad puede ocasionar más daños que una motocicleta que se desplaza a baja velocidad.

Se requiere una fuerza para cambiar la cantidad de movimiento lineal de un objeto, ya sea para aumentar o disminuir su magnitud, o bien, para cambiar su dirección y sentido. Newton originalmente estableció su segunda ley en términos del momento lineal y le llamó "cantidad de movimiento" al producto mv. El enunciado de Newton de la **segunda ley del movimiento**, traducido a lenguaje moderno, señala que

> **La tasa de cambio de la cantidad de movimiento de un objeto es igual a la fuerza neta aplicada sobre él.**

Podemos escribir esto como una ecuación,

$$\Sigma\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}, \tag{9–2}$$

SEGUNDA LEY DE NEWTON

donde $\Sigma\vec{\mathbf{F}}$ es la fuerza neta aplicada al objeto (la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre él). Podemos obtener fácilmente la forma familiar de la segunda ley, $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$, a partir de la ecuación 9-2 para el caso de una masa constante. Si $\vec{\mathbf{v}}$ es la velocidad de un objeto en cualquier momento, entonces la ecuación 9-2 da

$$\Sigma\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \frac{d(m\vec{\mathbf{v}})}{dt} = m\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = m\vec{\mathbf{a}} \qquad \text{[masa constante]}$$

porque, por definición, $\vec{\mathbf{a}} = d\vec{\mathbf{v}}/dt$ y suponemos que m es constante. La formulación de Newton, dada por la ecuación 9-2, es en realidad más general que la expresión más conocida, pues incluye la situación en que la masa puede cambiar. Esto es importante en ciertas circunstancias, como en el caso de cohetes que pierden masa al quemar combustible (sección 9-10) y también en la teoría de la relatividad (capítulo 36).

CUIDADO

El cambio del vector cantidad de movimiento lineal es en la dirección de la fuerza neta.

EJERCICIO A La luz tiene cantidad de movimiento, de manera que si un haz de luz choca contra una superficie, ejercerá una fuerza sobre esa superficie. Si la luz se refleja en vez de absorberse, la fuerza será *a*) la misma, *b*) menor, *c*) mayor, *d*) imposible de determinar, *e*) ninguna de las anteriores.



FIGURA 9–1 Ejemplo 9–1.

EJEMPLO 9–1 **ESTIMACIÓN** **Fuerza de un servicio en el tenis.** Para un jugador de primer nivel, en el servicio una pelota de tenis perderá contacto con la raqueta con una rapidez de 55 m/s (aproximadamente 120 mi/h; figura 9-1). Si la pelota tiene una masa de 0.060 kg y está en contacto con la raqueta por aproximadamente 4 ms (4×10^{-3} s), estime la fuerza promedio sobre la pelota. ¿Esta fuerza sería lo suficientemente grande como para levantar a una persona de 60 kg?

PLANTEAMIENTO Escribimos la segunda ley de Newton (ecuación 9-2) para una fuerza promedio:

$$F_{\text{prom}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv_2 - mv_1}{\Delta t},$$

donde mv_1 y mv_2 son las cantidades de movimiento inicial y final. La pelota de tenis es golpeada cuando su velocidad inicial v_1 es muy cercana a cero en lo alto del lanzamiento, así que $v_1 = 0$; mientras que $v_2 = 55$ m/s tiene dirección horizontal. Ignoramos todas las demás fuerzas sobre la pelota, como la gravedad, en comparación con la fuerza que ejerce la raqueta de tenis.

SOLUCIÓN La fuerza que ejerce la raqueta sobre la pelota es

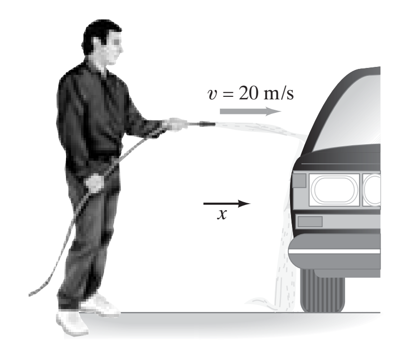
$$F_{\text{prom}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{mv_2 - mv_1}{\Delta t} = \frac{(0.060\,\text{kg})(55\,\text{m/s}) - 0}{0.004\,\text{s}}$$
$$\approx 800\,\text{N}.$$

Esto es una gran fuerza, mayor que el peso de una persona de 60 kg, que requeriría de una fuerza $mg = (60\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2) \approx 600$ N para ser levantada.

NOTA La fuerza de gravedad que actúa sobre la pelota de tenis es $mg = (0.060\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2) = 0.59$ N, lo que justifica el hecho de ignorarla frente a la enorme fuerza ejercida por la raqueta.

NOTA Una fotografía de alta rapidez y un radar pueden darnos una estimación del tiempo de contacto y la velocidad de la pelota al salir de la raqueta. Pero una medición directa de la fuerza no es una labor práctica. Nuestro cálculo ilustra una técnica práctica para determinar una fuerza desconocida en el mundo real.

FIGURA 9–2 Ejemplo 9–2.



EJEMPLO 9–2 **Lavado de un automóvil: Cambio de la cantidad de movimiento y fuerza.** De una manguera sale agua a una tasa de 1.5 kg/s con una rapidez de 20 m/s y se dirige al lado de un auto, que la detiene (figura 9-1). (Es decir, ignoramos cualquier salpicadura hacia atrás.) ¿Cuál es la fuerza ejercida por el agua sobre el automóvil?

PLANTEAMIENTO El agua que sale de la manguera tiene masa y velocidad, de modo que tiene una cantidad de movimiento p_{inicial} en la dirección (x) horizontal, y suponemos que la gravedad no atrae hacia abajo el agua de manera importante. Cuando el agua golpea el automóvil, pierde esta cantidad de movimiento ($p_{\text{final}} = 0$). Usamos la segunda ley de Newton, en forma de cantidad de movimiento para encontrar la fuerza que el automóvil ejerce sobre el agua para detenerla. Por la tercera ley de Newton, se sabe que la fuerza que el agua ejerce sobre el automóvil es igual y opuesta. Se tiene un proceso continuo: 1.5 kg de agua salen de la manguera en cada intervalo de tiempo de 1.0 s. Así que podemos escribir $F = \Delta p/\Delta t$ donde $\Delta t = 1.0$ s y $mv_{\text{inicial}} = (1.5\text{ kg})(20\text{ m/s})$.

SOLUCIÓN La fuerza (que se supone constante) que el auto debe ejercer para cambiar la cantidad de movimiento del agua es

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p_{\text{final}} - p_{\text{inicial}}}{\Delta t} = \frac{0 - 30\,\text{kg}\cdot\text{m/s}}{1.0\,\text{s}} = -30\,\text{N}.$$

El signo menos indica que la fuerza ejercida por el automóvil sobre el agua es opuesta a la velocidad original del agua. El auto ejerce una fuerza de 30 N hacia la izquierda para detener el agua, de manera que, por la tercera ley de Newton, el agua ejerce una fuerza de 30 N sobre el auto.

NOTA Lleve la cuanta de los signos, aunque el sentido común también ayuda. El agua se mueve hacia la derecha, así que el sentido común indica que la fuerza sobre el automóvil debe ser hacia la derecha.

EJERCICIO B Si el agua salpica hacia atrás desde el automóvil del ejemplo 9-2, ¿la fuerza sobre el automóvil sería mayor o menor?

9–2 Conservación de la cantidad de movimiento

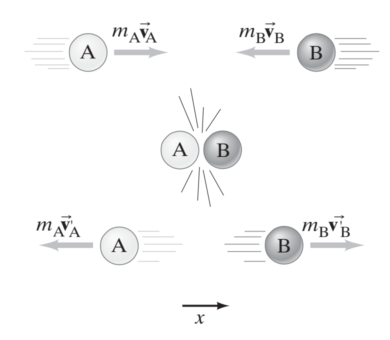


FIGURA 9–3 La cantidad de movimiento se conserva en una colisión entre dos bolas, llamadas A y B.

El concepto de cantidad de movimiento es particularmente importante porque si ninguna fuerza neta externa actúa sobre un sistema, entonces se conserva la cantidad de movimiento total del sistema. Considere, por ejemplo, la colisión frontal de dos bolas de billar, como se muestra en la figura 9-3. Suponemos que la fuerza neta externa sobre este sistema de dos bolas es cero, es decir, que las únicas fuerzas significativas durante la colisión son aquellas que ejercen las bolas entre sí, una sobre la otra. Aunque la cantidad de movimiento de cada una de las dos bolas cambia como resultado de la colisión, la *suma* de sus cantidades de movimiento es la misma antes y después de la colisión. Si $m_A\vec{\mathbf{v}}_A$ es la cantidad de movimiento de la bola A y $m_B\vec{\mathbf{v}}_B$ es la cantidad de movimiento de la bola B, ambas medidas justo antes de la colisión, entonces la cantidad de movimiento total de las dos bolas antes de la colisión es la suma vectorial $m_A\vec{\mathbf{v}}_A + m_B\vec{\mathbf{v}}_B$. Inmediatamente después de la colisión, las bolas tienen cada una diferentes velocidad y cantidad de movimiento, que designaremos con una "prima" sobre la velocidad: $m_A\vec{\mathbf{v}}'_A$ y $m_B\vec{\mathbf{v}}'_B$. La cantidad de movimiento total después de la colisión es la suma vectorial $m_A\vec{\mathbf{v}}'_A + m_B\vec{\mathbf{v}}'_B$. Independientemente de qué velocidades y masas sean, los experimentos demuestran que la cantidad de movimiento total antes de la colisión es la misma que la cantidad de movimiento total después de la colisión, sea frontal o no la colisión, siempre que no actúe ninguna fuerza neta externa:

CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO (dos cuerpos en colisión)

cantidad de movimiento lineal antes = cantidad de movimiento después

$$m_A\vec{\mathbf{v}}_A + m_B\vec{\mathbf{v}}_B = m_A\vec{\mathbf{v}}'_A + m_B\vec{\mathbf{v}}'_B. \qquad \left[\Sigma\vec{\mathbf{F}}_{ext} = 0\right] \quad \textbf{(9–3)}$$

Es decir, el vector cantidad de movimiento total del sistema de las dos bolas que colisionan se conserva: permanece constante.

Aunque la ley de la conservación de la cantidad de movimiento se descubrió experimentalmente, puede derivarse de las leyes de Newton del movimiento, lo que haremos ahora.

Considere dos objetos de masas m_A y m_B que tienen cantidades de movimiento lineales $\vec{\mathbf{p}}_A$ y $\vec{\mathbf{p}}_B$ antes de chocar entre sí, y $\vec{\mathbf{p}}'_A$ y $\vec{\mathbf{p}}'_B$ después de chocar, como en la figura 9-4. Durante la colisión, suponga que la fuerza ejercida por el objeto A sobre el objeto B en cualquier instante es $\vec{\mathbf{F}}$. Entonces, por la tercera ley de Newton, la fuerza ejercida por el cuerpo B sobre el cuerpo A es $-\vec{\mathbf{F}}$. Durante el breve momento de la colisión, suponga que no actúa ninguna otra fuerza (externa) (o que $\vec{\mathbf{F}}$ es mucho mayor que cualquier otra fuerza externa que actúe). De manera que tenemos

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}_B}{dt}$$

y

$$-\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}_A}{dt}.$$

Sumamos esas dos ecuaciones y encontramos

$$0 = \frac{d\left(\vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B\right)}{dt}$$

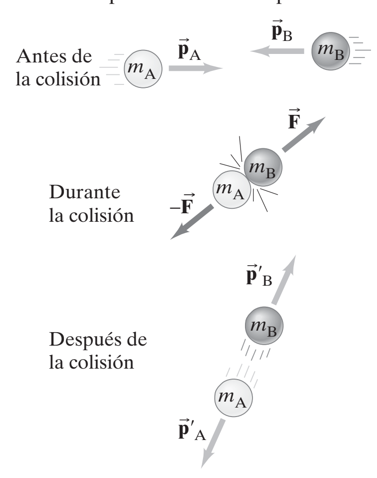
lo cual nos indica que

$$\vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B = \text{constante.}$$

Así la cantidad de movimiento total se conserva.

Hicimos esta derivación en el contexto de una colisión y, en tanto que no actúen fuerzas externas, este resultado es válido sobre cualquier intervalo de tiempo, de modo que la conservación de la cantidad de movimiento se cumple siempre y cuando no actúen fuerzas externas. En el mundo real actúan fuerzas externas: fricción sobre bolas de billar, gravedad sobre una pelota de tenis, etcétera. Parecería entonces que la conservación de la cantidad de movimiento no puede aplicarse. ¿O sí se puede? En una colisión, la fuerza que cada objeto ejerce sobre el otro actúa sólo durante un muy breve intervalo de tiempo y es muy intensa en relación con otras fuerzas. Si medimos las cantidades de movimiento justo antes y justo después de la colisión, la cantidad de movimiento casi se conservará. No podemos esperar hasta que las fuerzas externas produzcan efectos sobre el sistema antes de medir $\vec{\mathbf{p}}'_A$ y $\vec{\mathbf{p}}'_B$.

FIGURA 9–4 Colisión entre dos objetos. Sus cantidades de movimiento antes de la colisión so $\vec{\mathbf{p}}_A$ y $\vec{\mathbf{p}}_B$, y después de la colisión son $\vec{\mathbf{p}}'_A$ y $\vec{\mathbf{p}}'_B$. En cualquier instante durante la colisión, los objetos se ejercen fuerzas entre sí que son de la misma magnitud y dirección pero con sentido opuesto.



Por ejemplo, cuando una raqueta golpea una pelota de tenis o un bate golpea una pelota de béisbol, tanto antes como después de la "colisión", la pelota se mueve como un proyectil bajo la acción de la gravedad y de la resistencia del aire. Sin embargo, cuando el bate o la raqueta golpean la pelota, durante el breve intervalo de la colisión, esas fuerzas externas son insignificantes comparadas con la fuerza de colisión que el bate o la raqueta ejercen sobre la pelota. La cantidad de movimiento se conserva (o muy aproximadamente) siempre que midamos $\vec{\mathbf{p}}_A$ y $\vec{\mathbf{p}}_B$ justo antes de la colisión, y $\vec{\mathbf{p}}'_A$ y $\vec{\mathbf{p}}'_B$ justo después de la colisión (ecuación 9-3).

Nuestra derivación de la conservación de la cantidad de movimiento puede extenderse para incluir cualquier número de objetos que interactúan entre sí. Sea $\vec{\mathbf{P}}$ la cantidad de movimiento total de un sistema de n objetos en interacción, que numeramos de 1 a n:

$$\vec{\mathbf{P}} = m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2 + \cdots + m_n\vec{\mathbf{v}}_n = \Sigma\vec{\mathbf{p}}_i .$$

Diferenciamos con respecto al tiempo:

$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = \Sigma\frac{d\vec{\mathbf{p}}_i}{dt} = \Sigma\vec{\mathbf{F}}_i \qquad \textbf{(9–4)}$$

donde $\vec{\mathbf{F}}_i$ representa la fuerza *neta* sobre el $i^{\text{ésimo}}$ objeto. Las fuerzas pueden ser de dos tipos: (1) *fuerzas externas* sobre objetos del sistema, ejercidas por objetos fuera del sistema, y (2) *fuerzas internas* sobre objetos dentro del sistema ejercidas sobre otros objetos también dentro del sistema. Por la tercera ley de Newton, las fuerzas internas se presentan en parejas: si un objeto ejerce una fuerza sobre un segundo objeto, éste ejerce una fuerza de la misma magnitud, en la misma dirección pero de sentido opuesto sobre el primer objeto. Entonces, en la suma de todas las fuerzas en la ecuación 9-4, todas las fuerzas internas se cancelan entre sí por parejas. Tenemos entonces

SEGUNDA LEY DE NEWTON (para un sistema de objetos)

$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = \Sigma\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}, \qquad \textbf{(9–5)}$$

donde $\Sigma\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$ es la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre nuestro sistema. Si la fuerza neta externa es cero, entonces $d\vec{\mathbf{P}}/dt = 0$, so $\Delta\vec{\mathbf{P}} = 0$ por lo que $\vec{\mathbf{P}} =$ constante. Tenemos entonces

LEY DE LA CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL

si la fuerza neta externa sobre un sistema de objetos es cero, entonces la cantidad de movimiento total del sistema permanece constante.

Ésta es la **ley de la conservación de la cantidad de movimiento (o momento lineal)**. Puede también enunciarse como

la cantidad de movimiento total de un sistema de objetos aislado permanece constante.

Por **sistema aislado** entendemos aquel sobre el cual no actúan fuerzas externas: las únicas fuerzas que actúan son aquellas existentes entre los objetos del sistema (fuerzas internas).

Si una fuerza neta externa actúa sobre un sistema, entonces no será aplicable la ley de la conservación de la cantidad de movimiento. Sin embargo, si el "sistema" puede redefinirse de modo que incluya a los otros objetos que ejercen esas fuerzas, entonces sí podrá aplicarse el principio de la conservación de la cantidad de movimiento. Por ejemplo, si tomamos como nuestro sistema una roca que cae, la cantidad de movimiento no se conserva, ya que una fuerza externa, la fuerza de la gravedad ejercida por la Tierra, actúa sobre la roca y cambia su cantidad de movimiento. Sin embargo, si incluimos la Tierra en el sistema, se conserva la cantidad de movimiento de la roca más la Tierra. (Esto por supuesto significa que la Tierra se acerca para encontrar a la roca. Como la masa de la Tierra es tan grande, su velocidad hacia arriba es diminuta).

Aunque la ley de la conservación de la cantidad de movimiento se deriva de la segunda ley de Newton, como hemos visto, es más general que las leyes de Newton. En el pequeño mundo atómico, fallan las leyes de Newton; pero se ha encontrado que las grandes leyes de la conservación, como las de energía, cantidad de movimiento, cantidad de movimiento angular y carga eléctrica, son válidas en cualquier situación experimental probada. Por ello, las leyes de la conservación se consideran más básicas que las leyes de Newton.

EJEMPLO 9–3 **Colisión de carros de ferrocarril: Conservación de la cantidad de movimiento.** Un carro de ferrocarril con masa de 10,000 kg que viaja con una rapidez de 24.0 m/s golpea a un carro idéntico en reposo. Si los carros se quedan unidos como resultado de la colisión, ¿cuál será su rapidez común inmediatamente después de la colisión? Véase la figura 9-5.

PLANTEAMIENTO Elegimos los dos carros de ferrocarril como nuestro sistema. Consideramos un intervalo de tiempo muy breve, justo desde antes de la colisión hasta

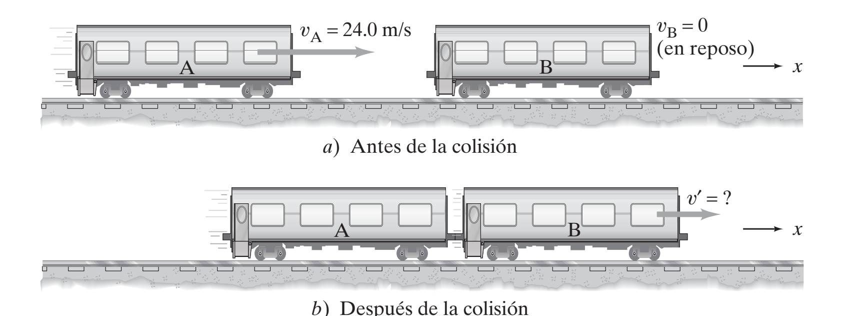


FIGURA 9–5 Ejemplo 9-3.

justo después de la colisión, de manera que las fuerzas externas como la fricción pueden ignorarse. Después, aplicamos la conservación de la cantidad de movimiento.

$$P_{\text{inicial}} = P_{\text{final}}.$$

SOLUCIÓN La cantidad de movimiento total inicial es

$$P_{\text{inicial}} = m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A$$

ya que el carro B está inicialmente en reposo ($v_B = 0$). El sentido es a la derecha en la dirección +x. Después de la colisión, los dos carros están unidos, por lo que tendrán la misma rapidez, que llamaremos v'. Entonces, la cantidad de movimiento total después de la colisión es:

$$P_{\text{final}} = (m_A + m_B)v'.$$

Suponemos que no hay fuerzas externas, por lo que se conserva la cantidad de movimiento total:

$$P_{\text{inicial}} = P_{\text{final}}$$
$$m_A v_A = (m_A + m_B)v'.$$

Al despejar v', obtenemos

$$v' = \frac{m_A}{m_A + m_B} v_A = \left(\frac{10{,}000 \text{ kg}}{10{,}000 \text{ kg} + 10{,}000 \text{ kg}}\right)(24.0 \text{ m/s}) = 12.0 \text{ m/s},$$

hacia la derecha. Su rapidez mutua después de la colisión es la mitad de la rapidez inicial del carro A, ya que sus masas son iguales.

NOTA Conservamos los símbolos hasta el final, por lo que tenemos una ecuación que podemos usar en otras situaciones (relacionadas).

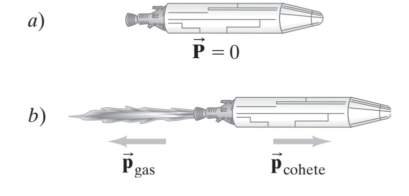
NOTA Aquí no hemos mencionado la fricción. ¿Por qué? Porque estamos examinando las rapideces justo antes y justo después del brevísimo intervalo de tiempo que dura la colisión, y durante ese breve intervalo de tiempo la fricción no puede hacer mucho: es despreciable (aunque no por mucho tiempo, pues los carros se frenarán debido a la fricción).

EJERCICIO C Un niño de 50 kg salta corriendo a 2.0 m/s (horizontalmente) de un muelle y cae en un bote de remos con masa de 150 kg. ¿A qué rapidez se alejará el bote del muelle?

EJERCICIO D En el ejemplo 9-3, ¿qué resultado obtendría usted si *a*) $m_B = 3m_A$, *b*) m_B es mayor que m_A ($m_B \gg m_A$), y *c*) $m_B \ll m_A$?

La ley de la conservación de la cantidad de movimiento es particularmente útil cuando tratamos con sistemas muy sencillos, como colisiones entre objetos y ciertos tipos de explosiones. Por ejemplo, la *propulsión de cohetes*, que estudiamos en el capítulo 4, puede entenderse con base en la acción y la reacción, y puede también explicarse con base en la conservación de la cantidad de movimiento. Podemos considerar el cohete y el combustible como un sistema aislado, si se encuentra muy lejos en el espacio. En el marco de referencia del cohete antes de que expulse cualquier combustible, la cantidad de movimiento total del cohete más el combustible es cero. Conforme el combustible se quema, la cantidad de movimiento total permanece sin cambio: la cantidad de movimiento hacia atrás de los gases expelidos se equilibra justamente con la cantidad de movimiento hacia adelante ganada por el cohete mismo (véase la figura 9-6). Un cohete puede entonces acelerar en el espacio vacío. No es necesario que los gases expelidos empujen contra la Tierra o el aire (como a veces se piensa erróneamente). Ejemplos similares de sistemas (casi) aislados en que se conserva la cantidad de movimiento son el retroceso de una arma cuando dispara una bala y el lanzamiento de un paquete desde un bote.

FIGURA 9–6 *a*) Un cohete, con combustible, en reposo en algún marco de referencia. *b*) En el mismo marco de referencia, el cohete se dispara y expele gases con gran rapidez por la parte trasera. El vector cantidad de movimiento total, $\vec{\mathbf{P}} = \vec{\mathbf{p}}_{\text{gas}} + \vec{\mathbf{p}}_{\text{cohete}}$, permanece igual a cero.



FÍSICA APLICADA
Propulsión de cohetes

CUIDADO
Un cohete empuja sobre los gases liberados por el combustible, no sobre la Tierra ni sobre otros objetos

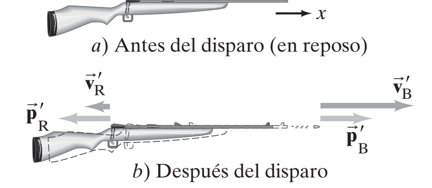


FIGURA 9–7 Ejemplo 9-4.

EJEMPLO 9–4 **Retroceso de un rifle.** Calcule la velocidad de retroceso de un rifle de 5.0 kg que dispara una bala de 0.020 kg con una rapidez de 620 m/s, figura 9-7.

PLANTEAMIENTO El sistema son el rifle y la bala, ambos están inicialmente en reposo, justo antes de que se jale el gatillo. Al jalar el gatillo ocurre una explosión y observamos al rifle y a la bala en el preciso instante en que la bala sale del cañón. La bala se mueve hacia la derecha $(+x)$ y el arma retrocede hacia la izquierda. Durante el muy breve intervalo de tiempo de la explosión, se puede suponer que las fuerzas externas son pequeñas en comparación con las fuerzas ejercidas por la pólvora que estalla. Así que podemos aplicar la conservación de la cantidad de movimiento, al menos aproximadamente.

SOLUCIÓN Sean los subíndices B la bala, y R el rifle; las velocidades finales están indicadas por primas. La conservación de la cantidad de movimiento en la dirección x implica queda entonces

Cantidad de movimiento antes = cantidad de movimiento después

$$m_B v_B + m_R v_R = m_B v'_B + m_R v'_R$$

$$0 + 0 = m_B v'_B + m_R v'_R$$

De manera que,

$$v'_R = -\frac{m_B v'_B}{m_R} = -\frac{(0.020\,\text{kg})(620\,\text{m/s})}{(5.0\,\text{kg})} = -2.5\,\text{m/s}.$$

Como el rifle tiene una masa mucho mayor, su velocidad (de retroceso) es mucho menor que la de la bala. El signo menos indica que la velocidad (y la cantidad de movimiento) del rifle es en la dirección x negativa, opuesta a la velocidad de la bala.

EJEMPLO CONCEPTUAL 9–5 **Caída sobre o desde un trineo.** *a)* Un trineo vacío se desliza sobre hielo sin fricción, cuando Susana cae verticalmente desde un árbol hacia él. Cuando ella cae, ¿el trineo acelera, frena o conserva la misma rapidez? *b)* Más tarde, Susana cae fuera del trineo hacia un lado. Cuando ella cae, ¿el trineo acelera, frena o conserva la misma rapidez?

RESPUESTA *a)* Como Susana cae verticalmente sobre el trineo, no tiene cantidad de movimiento horizontal inicial. Por ende, la cantidad de movimiento horizontal total después de esto es igual a la cantidad de movimiento inicial del trineo. Puesto que la masa del sistema (trineo + persona) aumenta, la rapidez debe disminuir. *b)* En el instante en que Susana cae, se mueve con la misma rapidez horizontal que tenía mientras estaba sobre el trineo. En el momento en que deja al trineo, tiene la misma cantidad de movimiento que tenía un instante antes. Como la cantidad de movimiento se conserva, el trineo conserva la misma rapidez.

EJERCICIO E Regrese a la Pregunta de inicio de capítulo de la página 214, e intente responderla de nuevo. Trate de explicar por qué quizás usted la respondió de manera diferente la primera vez.

FIGURA 9–8 Una raqueta de tenis golpea una pelota. Tanto la pelota como la raqueta se deforman debido a la gran fuerza que se ejercen entre sí.

9–3 Colisiones e impulso

La conservación de la cantidad de movimiento lineal es una herramienta muy útil para tratar con procesos de colisión cotidianos, como una raqueta de tenis o un bate de béisbol al golpear una pelota, la colisión de dos bolas de billar, o un martillo al golpear un clavo. A nivel subatómico, los científicos estudian la estructura de los núcleos y sus constituyentes, y la naturaleza de las fuerzas involucradas, mediante un estudio cuidadoso de las colisiones entre núcleos y/o partículas elementales.

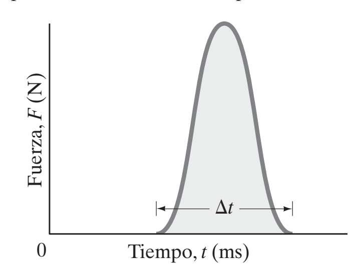
En una colisión de dos objetos ordinarios, ambos objetos se deforman, a menudo considerablemente, debido a las grandes fuerzas aplicadas (figura 9-8). Cuando ocurre la colisión, la fuerza que cada uno ejerce sobre el otro usualmente salta de cero en el momento de contacto, hasta un valor muy grande en un tiempo muy corto y luego abruptamente regresa de nuevo a cero. Una gráfica de la magnitud de la fuerza que un objeto ejerce sobre el otro durante una colisión, en función del tiempo, tiene la forma de la curva en la figura 9-9. El intervalo de tiempo Δt es generalmente muy pequeño.

De la segunda ley de Newton, ecuación 9-2, la fuerza *neta* sobre un objeto es igual a la tasa de cambio de su cantidad de movimiento:

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}.$$

(Hemos escrito $\vec{\mathbf{F}}$ en vez de $\Sigma\vec{\mathbf{F}}$ para la fuerza neta, porque suponemos que ésta se debe completamente a la breve pero gran fuerza que actúa durante la colisión). Esta

FIGURA 9–9 Fuerza en función del tiempo durante una colisión típica: F puede volverse muy grande; Δt generalmente está en milisegundos para colisiones macroscópicas.



ecuación es aplicable a *cada uno* de los objetos en una colisión. Durante el intervalo de tiempo infinitesimal dt, la cantidad de movimiento cambia en

$$d\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{F}}\,dt.$$

Si integramos esto dentro del intervalo de la colisión, tenemos

$$\int_{\mathrm{i}}^{\mathrm{f}} d\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{f}} - \vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{i}} = \int_{t_{\mathrm{i}}}^{t_{\mathrm{f}}} \vec{\mathbf{F}}\,dt,$$

donde $\vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{i}}$ y $\vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{f}}$ son las cantidades de movimiento inicial y final del objeto, justo antes y justo después de la colisión. La integral de la fuerza neta sobre el intervalo de tiempo durante el cual actúa se llama **impulso lineal**, $\vec{\mathbf{J}}$:

$$\vec{\mathbf{J}} = \int_{t_{\mathrm{i}}}^{t_{\mathrm{f}}} \vec{\mathbf{F}}\,dt.$$

Así, el cambio de cantidad de movimiento lineal de un objeto, $\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{f}} - \vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{i}}$, es igual al impulso lineal que actúa sobre él:

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{f}} - \vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{i}} = \int_{t_{\mathrm{i}}}^{t_{\mathrm{f}}} \vec{\mathbf{F}}\,dt = \vec{\mathbf{J}}. \qquad \textbf{(9–6)}$$

Las unidades del impulso son las mismas que las de la cantidad de movimiento lineal, kg · m/s (o N · s) en el SI. Como $\vec{\mathbf{J}} = \int \vec{\mathbf{F}}\,dt$, podemos establecer que el impulso $\vec{\mathbf{J}}$ de una fuerza es igual al área bajo la curva F versus t, como se indica por el área sombreada en la figura 9-9.

La ecuación 9-6 es válida sólo si $\vec{\mathbf{F}}$ es la fuerza *neta* sobre el objeto. Es válida para *cualquier* fuerza neta $\vec{\mathbf{F}}$ donde $\vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{i}}$ y $\vec{\mathbf{p}}_{\mathrm{f}}$ corresponden precisamente a los tiempos t_i y t_{f}. Pero el concepto de impulso es realmente más útil para las llamadas *fuerzas impulsivas*, es decir, para una fuerza como la mostrada en la figura 9-9, que tiene una magnitud muy grande sobre un intervalo de tiempo muy corto y es esencialmente cero fuera de este intervalo de tiempo. Para la mayoría de las colisiones, la fuerza impulsiva es mucho mayor que cualquier otra fuerza presente, así que las otras fuerzas pueden ignorarse. Para tal fuerza impulsiva, el intervalo de tiempo durante el cual tomamos la integral en la ecuación 9-6 no es crítico siempre que empecemos antes de t_i y terminemos después de t_{f}, ya que $\vec{\mathbf{F}}$ es esencialmente cero fuera de este intervalo de tiempo. (Por supuesto, si el intervalo de tiempo elegido es muy grande, el efecto de las otras fuerzas se vuelve importante, como el vuelo de una pelota de tenis que, después de la fuerza impulsiva suministrada por la raqueta, empieza a caer debido a la fuerza de la gravedad).

Durante una colisión a veces es útil hablar de la fuerza promedio $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{prom}}$, que se define como aquella fuerza constante que, si actuara sobre el mismo intervalo de tiempo $\Delta t = t_{\mathrm{f}} - t_{\mathrm{i}}$ que la fuerza real, produciría el mismo impulso y el mismo cambio en la cantidad de movimiento. Así,

$$\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{prom}}\,\Delta t = \int_{t_{\mathrm{i}}}^{t_{\mathrm{f}}} \vec{\mathbf{F}}\,dt.$$

La figura 9-10 muestra la magnitud de la fuerza promedio, F_{prom}, para la fuerza impulsiva de la figura 9-9. El área rectangular $F_{\mathrm{prom}}\,\Delta t$ es igual al área bajo la curva de la fuerza impulsiva.

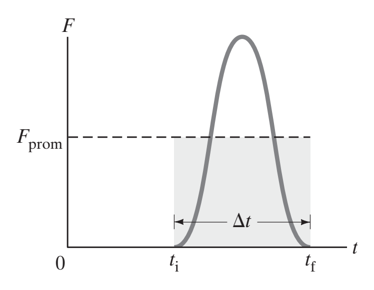


FIGURA 9–10 La fuerza promedio F_{prom} que actúa sobre un intervalo de tiempo muy breve Δt da el mismo impulso ($F_{\mathrm{prom}}\,\Delta t$) que la fuerza real.

EJEMPLO 9–6 ESTIMACIÓN Golpe de karate. Estime el impulso y la fuerza promedio de un golpe de karate (figura 9-11) que rompe una tabla de algunos centímetros de grosor. Suponga que la mano se mueve aproximadamente a 10 m/s cuando golpea la tabla.

PLANTEAMIENTO Utilizamos la relación entre impulso y cantidad de movimiento (ecuación 9-6). La rapidez de la mano cambia de 10 m/s a cero a lo largo de una distancia quizá de 1 cm (aproximadamente lo que la mano y la tabla se comprimen antes de que la mano se detenga, o casi, y la tabla comience a ceder). La masa de la mano probablemente debería incluir parte del brazo, por lo que la consideramos como $m \approx 1$ kg.

SOLUCIÓN El impulso J es igual al cambio en la cantidad de movimiento

$$J = \Delta p = (1\,\mathrm{kg})(10\,\mathrm{m/s} - 0) = 10\,\mathrm{kg \cdot m/s}.$$

Obtenemos la fuerza a partir de la definición de impulso $F_{\mathrm{prom}} = J/\Delta t$; pero, ¿cuánto vale Δt? La mano llega al reposo después de una distancia aproximada de un centímetro: $\Delta x \approx 1$ cm. La rapidez promedio durante el impacto es $\bar{v} = (10\,\mathrm{m/s} + 0)/2 = 5\,\mathrm{m/s}$ y es igual a $\Delta x/\Delta t$. Por lo tanto, $\Delta t = \Delta x/\bar{v} \approx (10^{-2}\,\mathrm{m})/(5\,\mathrm{m/s}) = 2 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}$ o aproximadamente 2 ms. Por consiguiente, la fuerza aproximada (ecuación 9-6) es de

$$F_{\mathrm{prom}} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{10\,\mathrm{kg \cdot m/s}}{2 \times 10^{-3}\,\mathrm{s}} \approx 5000\,\mathrm{N} = 5\,\mathrm{kN}.$$

FIGURA 9–11 Ejemplo 9-6.



9–4 Conservación de la energía y de la cantidad de movimiento lineal en colisiones

Durante la mayoría de las colisiones, usualmente no sabemos cómo varía la fuerza impulsiva como función del tiempo, por lo que el análisis usando la segunda ley de Newton resulta difícil o imposible. Sin embargo, utilizando las leyes de la conservación de la cantidad de movimiento lineal y de la energía, podemos aún determinar mucho sobre el movimiento después de una colisión, si se conoce el movimiento inicial. En la sección 9-2 vimos que en la colisión de dos objetos como bolas de billar, se conserva la cantidad de movimiento lineal del sistema. Si los dos objetos son muy duros y no se produce calor ni otra forma de energía en la colisión, entonces la energía cinética de los dos objetos es antes y después de la colisión. Por el breve momento durante el cual los dos objetos están en contacto, parte (o toda) la energía se almacena momentáneamente en forma de energía potencial elástica. Pero si comparamos la energía cinética total antes de la colisión con la energía cinética total justo después de la colisión, y se encuentra que son iguales, entonces decimos que se conserva la energía cinética total. Dicha colisión se llama **colisión elástica**. Si usamos los subíndices A y B para representar los dos objetos, podemos escribir la ecuación para la conservación de la energía cinética total como

energía cinética total antes = energía cinética total después

$$\tfrac{1}{2}m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_B^2 = \tfrac{1}{2}m_A v_A'^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_B'^2. \qquad \text{[colisión elástica]} \qquad \textbf{(9–7)}$$

Las cantidades con primas (′) significan después de la colisión; y las cantidades sin primas significan antes de la colisión, justo como en la ecuación 9-3 para la conservación de la cantidad de movimiento.

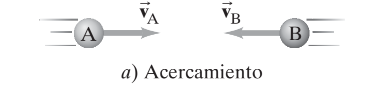
Al nivel atómico a menudo las colisiones de átomos y moléculas son elásticas. No obstante, en el mundo "macroscópico" de los objetos ordinarios, una colisión perfectamente elástica es un ideal inalcanzable, ya que siempre se produce durante la colisión al menos una pequeña energía térmica (y tal vez acústica o de otras formas de energía). La colisión de dos bolas elásticas duras, como las bolas de billar, representa aproximadamente una colisión perfectamente elástica y a menudo podemos tratarla como tal.

Es necesario que recordemos que aun cuando no se conserva la energía cinética, la energía *total*, por supuesto, siempre se conserva.

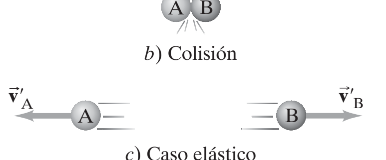
Las colisiones en las que la energía cinética no se conserva se llaman **colisiones inelásticas**. La energía cinética que se pierde cambia a otras formas de energía, a menudo energía térmica, por lo que la energía total (como siempre) se conserva. En este caso,

$$K_A + K_B = K_A' + K_B' + \text{energía térmica y otras formas de energía.}$$

Véase la figura 9-12 y los detalles en el pie de figura. Estudiaremos las colisiones inelásticas en la sección 9-6.



a) Acercamiento



b) Colisión

$\vec{v}'_A$ A B $\vec{v}'_B$

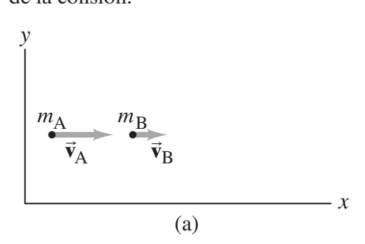
c) Caso elástico



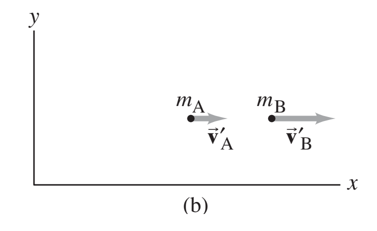
d) Caso inelástico

FIGURA 9–12 Dos objetos de igual masa *a*) se aproximan entre sí con rapideces iguales, *b*) chocan, y luego *c*) rebotan con rapideces iguales en sentidos opuestos, si la colisión es elástica; o *d*) rebotan mucho menos o nada en absoluto, si la colisión es inelástica.

FIGURA 9–13 Dos objetos pequeños de masas m_A y m_B, *a*) antes de la colisión, y *b*) después de la colisión.



(a)



(b)

9–5 Colisiones elásticas en una dimensión

Aplicaremos ahora las leyes de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía cinética, a una colisión elástica entre dos objetos pequeños que entran en colisión frontal, de manera que todo el movimiento es a lo largo de una línea recta. Supongamos que ambos objetos se están moviendo con velocidades v_A y v_B a lo largo del eje x antes de la colisión, figura 9-13a. Después de la colisión, sus velocidades son v'_A y v'_B figura 9-13b. Para cualquier $v > 0$, el objeto se mueve hacia la derecha (x creciente); mientras que para $v < 0$, el objeto se mueve hacia la izquierda (hacia valores decrecientes de x).

De la conservación de la cantidad de movimiento, tenemos

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'.$$

Como la colisión se supone elástica, la energía cinética también se conserva:

$$\tfrac{1}{2}m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_B^2 = \tfrac{1}{2}m_A v_A'^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_B'^2.$$

Tenemos dos ecuaciones, de las cuales podemos despejar dos incógnitas. Si conocemos las masas y las velocidades antes de la colisión, entonces con estas dos ecuaciones po-

demos encontrar las velocidades v'_A y v'_B después de la colisión. Obtendremos un resultado de gran utilidad, reescribiendo la ecuación de la cantidad de movimiento como

$$m_A(v_A - v'_A) = m_B(v'_B - v_B), \qquad \textbf{(i)}$$

y reescribimos la ecuación de la energía cinética como

$$m_A(v_A^2 - v_A'^2) = m_B(v_B'^2 - v_B^2).$$

y como algebraicamente $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, escribimos esta última ecuación como

$$m_A(v_A - v'_A)(v_A + v'_A) = m_B(v'_B - v_B)(v'_B + v_B). \qquad \textbf{(ii)}$$

Dividimos la ecuación (ii) entre la ecuación (i), y (suponiendo que $v_A \neq v'_A$ y $v_B \neq v'_B$)† obtenemos

$$v_A + v'_A = v'_B + v_B.$$

Podemos reescribir esta ecuación como

$$v_A - v_B = v'_B - v'_A$$

o bien,

$$v_A - v_B = -(v'_A - v'_B). \quad \text{[colisión elástica frontal en una dimensión]} \qquad \textbf{(9–8)}$$

Rapideces relativas (sólo en una dimensión)

Éste es un resultado interesante: nos indica que para cualquier colisión elástica frontal, la rapidez relativa de los dos objetos después de la colisión tiene la misma magnitud que antes de la colisión (pero en sentido opuesto), sin importar la magnitud de las masas.

La ecuación 9-8 se dedujo a partir de la conservación de la energía cinética para colisiones elásticas, y se puede usar en vez de ella. Puesto que las v no están al cuadrado, es más sencillo utilizar la ecuación 9-8 la en cálculos en que se emplea directamente la ecuación de la conservación de la energía cinética (ecuación 9-7).

EJEMPLO 9–7 **Masas iguales.** Una bola de billar A de masa m que se mueve con rapidez v_A entra en colisión frontal con una bola B de igual masa. ¿Cuáles son las rapideces de las dos bolas después de la colisión, suponiendo que ésta es elástica? Suponga *a*) que ambas bolas se están moviendo inicialmente (v_A y v_B), *b*) que la bola B está inicialmente en reposo ($v_B = 0$).

PLANTEAMIENTO Hay dos incógnitas, v'_A y v'_B, así que se necesitan dos ecuaciones independientes. Nos centramos en el intervalo de tiempo que va desde el instante preciso antes de la colisión hasta el instante justo después de la colisión. Ninguna fuerza externa neta actúa sobre el sistema de dos bolas (se cancelan mg y la fuerza normal), así que se conserva la cantidad de movimiento total lineal del sistema. También se aplica la conservación de la energía cinética, pues la colisión es elástica.

SOLUCIÓN *a)* Las masas son iguales ($m_A = m_B = m$), por lo que la conservación de la cantidad de movimiento da

$$v_A + v_B = v'_A + v'_B.$$

Necesitamos una segunda ecuación, ya que hay dos incógnitas. Podríamos usar la ecuación de la conservación de la energía cinética, o la ecuación más sencilla 9-8 obtenida arriba:

$$v_A - v_B = v'_B - v'_A.$$

Sumamos ahora estas dos ecuaciones:

$$v'_B = v_A$$

y luego restamos las dos ecuaciones para obtener

$$v'_A = v_B.$$

Es decir, las bolas intercambian velocidades como resultado de la colisión: La bola B adquiere la velocidad que tenía la bola A antes de la colisión, y viceversa.

b) Si la bola B está inicialmente en reposo, de manera que $v_B = 0$, entonces

$$v'_B = v_A \quad \text{y} \quad v'_A = 0.$$

Esto es, la bola A es llevada al reposo por la colisión; en tanto que la bola B adquiere la velocidad original de la bola A. Este resultado a menudo es observado por jugadores de billar, y es válido sólo si las dos bolas tienen masas iguales (y no se les da ningún giro a las bolas). Véase la figura 9-14.



FIGURA 9–14 En esta fotografía estroboscópica (de flash múltiple) de una colisión frontal entre dos bolas de igual masa, la bola blanca es acelerada del reposo por el taco y luego golpea la bola 3 que está inicialmente en reposo. La bola blanca se detiene y la bola 3 (de igual masa) se mueve con la misma rapidez que tenía la bola blanca antes de la colisión. Véase el ejemplo 9-7.

† Advierta que las ecuaciones (i) y (ii), que son las leyes de conservación para la cantidad de movimiento y la energía cinética, son ambas satisfechas por la solución $v'_1 = v_1$ y $v'_2 = v_2$. Ésta es una solución válida, pero no muy interesante. Corresponde a ninguna colisión, es decir, cuando los dos objetos no se tocan.

EJEMPLO 9–8 **Masas desiguales, blanco en reposo.** Una situación práctica muy común sucede cuando un objeto en movimiento (m_A) golpea un segundo objeto (m_B, el "blanco") en reposo ($v_B = 0$). Suponga que los objetos tienen masas desiguales, y que la colisión es elástica y ocurre a lo largo de una línea recta (colisión frontal). *a*) Obtenga ecuaciones para v'_B y v'_A en términos de la velocidad inicial v_A de la masa m_A y de las masas m_A y m_B. *b*) Determine las velocidades finales si el objeto en movimiento es mucho más masivo que el blanco ($m_A \gg m_B$). *c*) Determine las velocidades finales si el objeto en movimiento es mucho menos masivo que el blanco ($m_A \ll m_B$).

PLANTEAMIENTO La ecuación de la cantidad de movimiento (con $v_B = 0$) es

$$m_B v'_B = m_A(v_A - v'_A).$$

También se conserva la energía cinética y la usamos con la ecuación 9-8 reescribiéndola como

$$v'_A = v'_B - v_A.$$

SOLUCIÓN *a*) Sustituimos la ecuación v'_A anterior en la ecuación de la cantidad de movimiento y, reordenando tenemos,

$$v'_B = v_A\left(\frac{2m_A}{m_A + m_B}\right).$$

Sustituimos este valor para v'_B en la ecuación $v'_A = v'_B - v_A$ anterior para llegar a

$$v'_A = v_A\left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\right).$$

Para comprobar estas dos ecuaciones que derivamos, sea $m_A = m_B$, por lo que

$$v'_B = v_A \quad \text{y} \quad v'_A = 0.$$

Éste es el mismo caso tratado en el ejemplo 9-7 y obtenemos el mismo resultado: para objetos de igual masa, uno de los cuales está inicialmente en reposo, la velocidad del que está en movimiento inicialmente se transfiere completamente al objeto originalmente en reposo.

b) Se nos dan $v_B = 0$ y $m_A \gg m_B$. Un objeto muy pesado en movimiento golpea un objeto ligero en reposo, y tenemos, usando las relaciones anteriores para v'_B y v'_A,

$$v'_B \approx 2v_A$$
$$v'_A \approx v_A.$$

La velocidad del objeto pesado originalmente en movimiento entonces permanece prácticamente sin cambio; en tanto que el objeto ligero, originalmente en reposo, sale de la colisión con el doble de la velocidad del objeto pesado. Por ejemplo, la velocidad de una bola de bolos pesada se afecta muy poco al golpear los pinos que son mucho más ligeros.

c) Esta vez tenemos $v_B = 0$ y $m_A \ll m_B$. Un objeto ligero en movimiento golpea un objeto muy masivo en reposo. En este caso, usando las ecuaciones del inciso *a*)

$$v'_B \approx 0$$
$$v'_A \approx -v_A.$$

El objeto masivo permanece esencialmente en reposo y el objeto muy ligero rebota esencialmente con su misma rapidez, aunque en sentido contrario. Por ejemplo, una pelota de tenis que entra en colisión frontal con una bola de bolos estacionaria apenas afectará a ésta; sin embargo, rebotará casi con la misma rapidez que tenía inicialmente, justo como si hubiera golpeado una pared rígida.

Se puede mostrar fácilmente (como en el problema 40) para cualquier colisión elástica frontal que

$$v'_B = v_A\left(\frac{2m_A}{m_A + m_B}\right) + v_B\left(\frac{m_B - m_A}{m_A + m_B}\right)$$

y

$$v'_A = v_A\left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\right) + v_B\left(\frac{2m_B}{m_A + m_B}\right).$$

Sin embargo, estas ecuaciones generales no tienen que memorizarse, ya que pueden obtenerse rápidamente a partir de las leyes de la conservación. En muchos problemas es más sencillo comenzar desde el principio, como lo hicimos en los casos especiales anteriores y como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 9–9 Una colisión nuclear. Un protón (p) de masa 1.01 u (unidad unificada de masa atómica) que viaja con una rapidez de 3.60×10^4 m/s tiene una colisión elástica frontal contra un núcleo ($m_{He} = 4.00$ u) de helio (He) inicialmente en reposo. ¿Cuáles serán las velocidades del protón y del núcleo de helio después de la colisión? (Como se mencionó en el capítulo 1, 1 u $= 1.66 \times 10^{-27}$ kg, aunque no necesitaremos este dato). Suponga que la colisión ocurre en espacio casi vacío.

PLANTEAMIENTO Ésta es una colisión elástica frontal. La única fuerza externa es la gravedad de la Tierra, aunque es insignificante en comparación con la intensa fuerza durante la colisión. De nuevo se usan las leyes de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía cinética, que se aplican a nuestro sistema de dos partículas.

SOLUCIÓN Sean el protón (p) la partícula A y el núcleo de helio (He) la partícula B. Tenemos $v_B = v_{He} = 0$ y $v_A = v_p = 3.60 \times 10^4$ m/s. Queremos encontrar las velocidades v'_p y v'_{He} después de la colisión. A partir de la conservación de la cantidad de movimiento,

$$m_p v_p + 0 = m_p v'_p + m_{He} v'_{He}.$$

Como la colisión es elástica, también se conserva la energía cinética de nuestro sistema de dos partículas y podemos usar la ecuación 9-8, que toma la forma

$$v_p - 0 = v'_{He} - v'_p.$$

Entonces,

$$v'_p = v'_{He} - v_p,$$

y sustituyendo esto en la ecuación de la cantidad de movimiento presentada antes, obtenemos

$$m_p v_p = m_p v'_{He} - m_p v_p + m_{He} v'_{He}.$$

Despejando v'_{He},

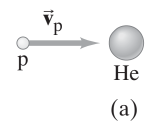
$$v'_{He} = \frac{2m_p v_p}{m_p + m_{He}} = \frac{2(1.01\text{ u})(3.60 \times 10^4\text{ m/s})}{5.01\text{ u}} = 1.45 \times 10^4\text{ m/s}.$$

La otra incógnita es v'_p, que ahora obtenemos de

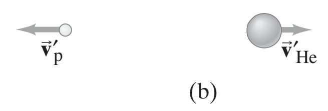
$$v'_p = v'_{He} - v_p = (1.45 \times 10^4\text{ m/s}) - (3.60 \times 10^4\text{ m/s}) = -2.15 \times 10^4\text{ m/s}.$$

El signo menos en v'_p nos indica que el protón cambia de sentido en la colisión y vemos que su rapidez es menor que su rapidez inicial (véase la figura 9-15).

NOTA Este resultado tiene sentido: se espera que el protón más ligero "rebote" contra el núcleo más masivo de helio; pero no con su velocidad original total como lo haría contra una pared rígida (que correspondería a una masa extremadamente grande o infinita).



(a)



(b)

FIGURA 9–15 Ejemplo 9-9: *a*) antes de la colisión, *b*) después de la colisión.

9–6 Colisiones inelásticas

Las colisiones en que no se conserva la energía cinética se llaman **colisiones inelásticas**. Parte de la energía cinética inicial en dichas colisiones se transforma en otros tipos de energía, como energía térmica o energía potencial, de manera que la energía cinética final total después de la colisión es menor que la energía cinética inicial total antes de la colisión. Lo inverso también puede suceder, como cuando se libera energía potencial (como energía química o nuclear), en cuyo caso la energía cinética total después de la interacción puede ser mayor que la energía cinética inicial. Las explosiones son ejemplos de este tipo de proceso.

Las colisiones macroscópicas típicas son inelásticas, por lo menos en alguna medida y a menudo en gran parte. Si dos objetos se quedan unidos como resultado de una colisión, se dice que ésta es **completamente inelástica**. Dos bolas de masilla (plastilina) que quedan juntas, o dos carros de ferrocarril que quedan acoplados al entrar en colisión, son ejemplos de colisiones completamente inelásticas. La energía cinética en algunos casos se transforma totalmente a otras formas de energía en una colisión inelástica; sin embargo, en otros casos sólo parte de ella se transforma. En el ejemplo 9-3 vimos que cuando un carro de ferrocarril en movimiento choca contra otro carro estacionario, ambos carros acoplados siguen viajando con algo de energía cinética. En una colisión completamente inelástica, se transforma la máxima cantidad de energía cinética posible en otros tipos, siendo también consistente con la conservación de la cantidad de movimiento. Aun cuando la energía cinética no se conserve en las colisiones inelásticas, la energía total siempre se conserva, y el vector cantidad de movimiento total también se conserva.

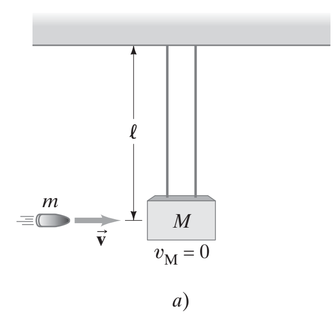
EJEMPLO 9–10 **De nuevo carros de ferrocarril.** Para la colisión completamente inelástica de los dos carros de ferrocarril que consideramos en el ejemplo 9-3, calcule cuánta de la energía cinética inicial se transforma en energía térmica o en otros tipos de energía.

PLANTEAMIENTO Los carros de ferrocarril quedan enganchados después de la colisión, así que ésta es una colisión completamente inelástica. Al restar la energía cinética total después de la colisión, de la energía cinética total antes de la colisión, se encuentra que gran parte de la energía se transforma en otros tipos de energía.

SOLUCIÓN Antes de la colisión, sólo se mueve el carro A, así que la energía cinética inicial total es $\frac{1}{2}m_A v_A^2 = \frac{1}{2}(10{,}000\text{ kg})(24.0\text{ m/s})^2 = 2.88 \times 10^6\text{ J}$. Después de la colisión, ambos carros se mueven con una rapidez de 12.0 m/s, por la conservación de la cantidad de movimiento (ejemplo 9-3). Así que la energía cinética total después de la colisión es $\frac{1}{2}(20{,}000\text{ kg})(12.0\text{ m/s})^2 = 1.44 \times 10^6\text{ J}$. Por lo tanto, la energía transformada a otros tipos de energía es

$$\left(2.88 \times 10^6\text{ J}\right) - \left(1.44 \times 10^6\text{ J}\right) = 1.44 \times 10^6\text{ J},$$

que es precisamente la mitad de la energía cinética original.



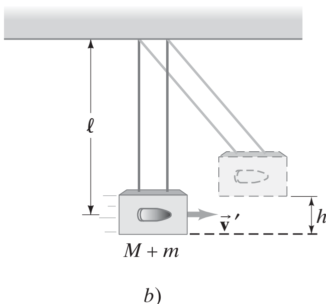


FIGURA 9–16 Péndulo balístico. Ejemplo 9-11.

EJEMPLO 9–11 **Péndulo balístico.** El *péndulo balístico* es un dispositivo usado para medir la rapidez de un proyectil, por ejemplo la de una bala. El proyectil, de masa m, se dispara hacia un gran bloque (de madera u otro material) de masa M, que está suspendido como un péndulo. (Usualmente, M es algo mayor que m). Como resultado de la colisión, el sistema proyectil-péndulo oscila hasta una altura máxima h, figura 9-16. Determine la relación entre la rapidez horizontal inicial del proyectil v y la altura h.

PLANTEAMIENTO Analizamos este proceso dividiéndolo en dos etapas o en dos intervalos de tiempo: 1) el intervalo de tiempo desde justo antes hasta justo después de la colisión misma, y 2) el intervalo de tiempo subsecuente durante el cual el péndulo se mueve desde la posición colgante vertical original hasta la altura máxima h.

En la parte 1, figura 9-16a, suponemos que el tiempo de colisión es muy corto, por lo que el proyectil alcanza el reposo en el bloque antes que éste se haya movido considerablemente desde su posición de reposo directamente abajo de su soporte. Por lo tanto, en realidad no hay fuerza externa neta y se puede aplicar la conservación de la cantidad de movimiento a esta colisión completamente inelástica. En la parte 2 (figura 9-16b), el péndulo comienza a moverse sujeto a una fuerza externa neta (la gravedad, que tiende a jalarlo de vuelta hacia la posición vertical); así que, para el inciso 2, no podemos usar la conservación de la cantidad de movimiento. Pero puede utilizarse la conservación de la energía mecánica, ya que la gravedad es una fuerza conservativa (capítulo 8). Inmediatamente después de la colisión, la energía cinética cambia por completo a energía potencial gravitacional cuando el péndulo alcanza su altura máxima, h.

SOLUCIÓN En el inciso 1, la cantidad de movimiento se conserva:

$$P \text{ total antes} = P \text{ total después}$$
$$mv = (m + M)v', \qquad \textbf{(i)}$$

donde v' es la rapidez del bloque y el proyectil encajado justo después de la colisión, antes que se hayan movido considerablemente.

En el inciso 2, se conserva la energía mecánica. Elegimos $y = 0$ cuando el péndulo cuelga verticalmente, y luego $y = h$ cuando el sistema péndulo-proyectil alcanza su altura máxima. Por lo tanto, escribimos

$(K + U)$ justo después de la colisión $= (K + U)$ en la altura máxima del péndulo

o bien,

$$\tfrac{1}{2}(m + M)v'^2 + 0 = 0 + (m + M)gh. \qquad \textbf{(ii)}$$

Despejamos v':

$$v' = \sqrt{2gh}.$$

Al insertar este resultado para v' en la ecuación (i) anterior y despejando para v obtenemos:

$$v = \frac{m + M}{m}v' = \frac{m + M}{m}\sqrt{2gh},$$

que es el resultado final.

NOTA La separación del proceso en dos etapas resultó fundamental. Tal análisis es una poderosa herramienta en la resolución de problemas. ¿Pero cómo decide usted la manera de realizar tal división? Piense acerca de las leyes de la conservación. Son sus *herramientas.* Comience un problema preguntándose si las leyes de la conservación se aplican en la situación planteada. Aquí determinamos que la cantidad de movimiento se conserva sólo durante la breve colisión, que llamamos parte 1. Sin embargo, en la parte 1, como la colisión es inelástica, no es válida la conservación de la energía mecánica. Luego, en la parte 2, la conservación de la energía mecánica es válida, pero no la conservación de la cantidad de movimiento.

Advierta, sin embargo, que si hubiera un movimiento significativo del péndulo durante la desaceleración del proyectil dentro del bloque, entonces *habría* una fuerza externa (gravedad) durante la colisión, de modo que la conservación de la cantidad de movimiento no habría sido válida en la parte 1.



Utilice las leyes de la conservación para analizar un problema

9–7 Colisiones en dos o en tres dimensiones

La conservación de la cantidad de movimiento y la energía también pueden aplicarse a colisiones en dos o tres dimensiones, donde la naturaleza vectorial de la cantidad de movimiento es especialmente importante. Un tipo común de colisión no frontal es aquella en que un objeto en movimiento (llamado el "proyectil") golpea un segundo objeto inicialmente en reposo (llamado el "blanco"). Ésta es la situación común en juegos como el billar, así como en experimentos de física atómica y nuclear (los proyectiles, de decaimientos radiactivos o de aceleradores de alta energía, golpean un núcleo blanco estacionario; figura 9-17).

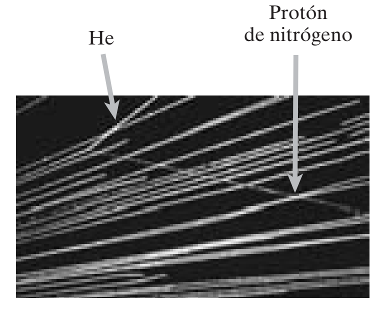


FIGURA 9–17 Una versión reciente mejorada de una fotografía de una cámara de niebla, tomada en los primeros días de la física nuclear (década de 1920). Las líneas blancas son trayectorias de núcleos de helio (He) provenientes desde la izquierda. Un He choca contra un protón del gas de hidrógeno en la cámara, y ambos se dispersan a un cierto ángulo; la trayectoria dispersada del protón se muestra señalado con una flecha en esta figura.

La figura 9-18 muestra el proyectil en movimiento m_A viajando a lo largo del eje x hacia el blanco m_B, que está inicialmente en reposo. Si se trata de bolas de billar, m_A golpea a m_B, de manera no totalmente frontal, y ambas bolas se mueven ahora según ángulos θ'_A y θ'_B, respectivamente, que se miden con respecto a la dirección inicial de m_A (el eje x).[†]

Apliquemos la ley de conservación de la cantidad de movimiento a una colisión como la de la figura 9-18. Elegimos el plano xy como el plano donde se encuentran las cantidades de movimiento inicial y final. Como la cantidad de movimiento es un vector y se conserva la cantidad de movimiento total, sus componentes en las direcciones x y y también deben conservarse. La componente x de la conservación de la cantidad de movimiento da

$$p_{Ax} + p_{Bx} = p'_{Ax} + p'_{Bx}$$

o bien, con $p_{Bx} = m_B v_{Bx} = 0$,

$$m_A v_A = m_A v'_A \cos\theta'_A + m_B v'_B \cos\theta'_B, \qquad \textbf{(9–9a)}$$

p_x se conserva

donde las primas (′) se refieren a cantidades *después* de la colisión. Como inicialmente no hay movimiento en la dirección y, la componente y de la cantidad de movimiento total es cero antes de la colisión. La ecuación de la componente y de la conservación de la cantidad de movimiento es, entonces,

$$p_{Ay} + p_{By} = p'_{Ay} + p'_{By}$$

o bien,

$$0 = m_A v'_A \operatorname{sen}\theta'_A + m_B v'_B \operatorname{sen}\theta'_B. \qquad \textbf{(9–9b)}$$

p_y se conserva

Cuando tenemos dos ecuaciones independientes, podemos despejar con ellas un máximo de dos incógnitas.

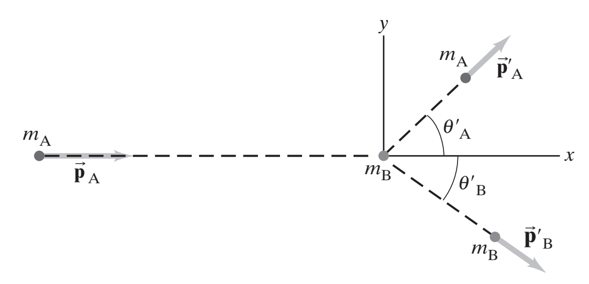


FIGURA 9–18 El objeto A (proyectil) choca contra el objeto B (blanco). Los objetos se mueven después de la colisión, con cantidades de movimiento $\vec{p}'_A$ y $\vec{p}'_B$ según ángulos θ'_A y θ'_B. Los objetos que se presentan aquí son como partículas, como las visualizaríamos en la física nuclear o atómica. Sin embargo, también podrían ser bolas de billar macroscópicas.

[†]Los objetos pueden comenzar a desviarse aun antes de que se toquen, si actúan sobre ellos fuerzas eléctricas, magnéticas o nucleares. Por ejemplo, piense usted en dos imanes orientados de manera que se repelan entre sí: cuando uno se acerca al otro, el segundo se aleja antes de que el primero lo toque.

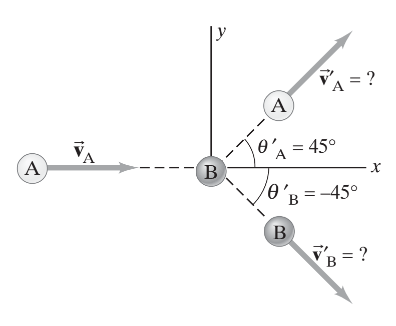


FIGURA 9–19 Ejemplo 9-12.

EJEMPLO 9–12 Colisión de bolas de billar en dos dimensiones. La bola de billar A, que se mueve con rapidez $v_A = 3.0$ m/s en la dirección $+x$ (figura 9-19), golpea una bola B de igual masa e inicialmente en reposo. Se observa que las dos bolas se mueven a 45° con respecto al eje x, la bola A por arriba del eje x y la bola B por debajo. Esto es, $\theta'_A = 45°$ y $\theta'_B = -45°$ en la figura 9-19. ¿Cuáles serán las rapideces de las bolas después de la colisión?

PLANTEAMIENTO No existe fuerza externa neta sobre nuestro sistema de dos bolas, si se supone que la mesa es horizontal (ya que la fuerza normal equilibra a la fuerza de gravedad). Así que se aplica la conservación de la cantidad de movimiento tanto a la componente x como a la componente y, utilizando el sistema coordenado xy que se representa en la figura 9-19. Se tienen dos ecuaciones y dos incógnitas, v'_A y v'_B. A partir de la simetría es posible conjeturar que las dos bolas tienen la misma rapidez. Pero no supongamos eso por ahora. Aun cuando no hayamos indicado si la colisión es elástica o inelástica, todavía es posible usar la conservación de la cantidad de movimiento.

SOLUCIÓN Aplicamos la conservación de la cantidad de movimiento para las componentes x y y (ecuaciones 9-9a y 9-9b) y despejamos v'_A y v'_B. Se nos da $m_A = m_B$ (= m), así que

$$\text{(para } x) \quad mv_A = mv'_A \cos(45°) + mv'_B \cos(-45°)$$

y

$$\text{(para } y) \quad 0 = mv'_A \operatorname{sen}(45°) + mv'_B \operatorname{sen}(-45°).$$

Las m se cancelan en ambas ecuaciones, dado que son iguales. La segunda ecuación nos da [recuerde que $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$]:

$$v'_B = -v'_A \frac{\operatorname{sen}(45°)}{\operatorname{sen}(-45°)} = -v'_A \left(\frac{\operatorname{sen} 45°}{-\operatorname{sen} 45°}\right) = v'_A.$$

De modo que tienen la misma rapidez, como supusimos desde el inicio. La ecuación de la componente x produce [recuerde que $\cos(-\theta) = \cos\theta$]:

$$v_A = v'_A \cos(45°) + v'_B \cos(45°) = 2v'_A \cos(45°),$$

de este modo,

$$v'_A = v'_B = \frac{v_A}{2\cos(45°)} = \frac{3.0 \text{ m/s}}{2(0.707)} = 2.1 \text{ m/s}.$$

Si sabemos que una colisión es elástica, podemos aplicar la conservación de la energía cinética y obtener una tercera ecuación, además de las ecuaciones 9-9a y 9-9b:

$$K_A + K_B = K'_A + K'_B$$

o, para la colisión mostrada en las figuras 9-18 o 9-19,

$$\tfrac{1}{2}m_A v_A^2 = \tfrac{1}{2}m_A v_A'^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_B'^2. \qquad \text{[colisión elástica]} \qquad \textbf{(9–9c)}$$

Si la colisión es elástica, tenemos tres ecuaciones independientes y podemos despejar de ellas tres incógnitas. Si se nos dan m_A, m_B, v_A (y v_B, si no es igual a cero), no podemos, por ejemplo, predecir las variables finales v'_A, v'_B, θ'_A, y θ'_B, porque hay cuatro incógnitas. Sin embargo, si medimos una de esas variables, digamos θ'_A, entonces las otras tres variables (v'_A, v'_B, y θ'_B) quedan unívocamente determinadas, y las podemos determinar usando las ecuaciones 9-9a, 9-9b, y 9-9c.



CUIDADO

La ecuación 9-8 se aplica sólo en una dimensión

Una nota de advertencia: La ecuación 9-8 *no* se aplica en colisiones bidimensionales. Esta ecuación es válida sólo para una colisión frontal, a lo largo de una línea recta.

EJEMPLO 9–13 Colisión protón-protón. Un protón que viaja con rapidez de 8.2×10^5 m/s sufre una colisión elástica contra un protón estacionario en un blanco de hidrógeno, como se indica en la figura 9-18. Se observa que uno de los protones se dispersa a un ángulo de 60º. ¿Con qué ángulo de dispersión se moverá el segundo protón y cuáles serán las velocidades de los dos protones después de la colisión?

PLANTEAMIENTO Vimos una colisión bidimensional en el ejemplo 9-12, donde tuvimos que usar sólo la conservación de la cantidad de movimiento. Ahora se nos da menos información: tenemos tres incógnitas en vez de dos. Como la colisión es elástica, podemos usar la ecuación de conservación de energía cinética, así como las dos ecuaciones x, y de conservación de la cantidad de movimiento.

SOLUCIÓN Como $m_A = m_B$, las ecuaciones 9-9a, 9-9b y 9-9c se convierten en

$$v_A = v'_A \cos\theta'_A + v'_B \cos\theta'_B \qquad \textbf{(i)}$$

$$0 = v'_A \operatorname{sen}\theta'_A + v'_B \operatorname{sen}\theta'_B \qquad \textbf{(ii)}$$

$$v_A^2 = v'^2_A + v'^2_B, \qquad \textbf{(iii)}$$

donde se dan $v_A = 8.2 \times 10^5$ m/s y $\theta'_A = 60°$. En las primera y segunda ecuaciones, pasamos los términos v'_A al lado izquierdo y elevamos al cuadrado ambos lados de las ecuaciones:

$$v_A^2 - 2v_A v'_A \cos\theta'_A + v'^2_A \cos^2\theta'_A = v'^2_B \cos^2\theta'_B$$

$$v'^2_A \operatorname{sen}^2\theta'_A = v'^2_B \operatorname{sen}^2\theta'_B.$$

Sumamos estas dos ecuaciones y usamos $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ para obtener:

$$v_A^2 - 2v_A v'_A \cos\theta'_A + v'^2_A = v'^2_B.$$

En esta ecuación sustituimos $v'^2_B = v_A^2 - v'^2_A$, de la ecuación (iii) anterior, y llegamos a

$$2v'^2_A = 2v_A v'_A \cos\theta'_A$$

o bien,

$$v'_A = v_A \cos\theta'_A = (8.2 \times 10^5\ \text{m/s})(\cos 60°) = 4.1 \times 10^5\ \text{m/s}.$$

Para obtener v'_B, usamos la ecuación (iii) anterior (conservación de la energía cinética):

$$v'_B = \sqrt{v_A^2 - v'^2_A} = 7.1 \times 10^5\ \text{m/s}.$$

Finalmente, de la ecuación (ii),

$$\operatorname{sen}\theta'_B = -\frac{v'_A}{v'_B}\operatorname{sen}\theta'_A = -\left(\frac{4.1 \times 10^5\ \text{m/s}}{7.1 \times 10^5\ \text{m/s}}\right)(0.866) = -0.50,$$

por lo que $\theta'_B = -30°$. (El signo menos significa que la partícula B se mueve a un ángulo por debajo del eje x si la partícula A está por arriba del eje, como en la figura 9-19.) Un ejemplo de tal colisión se muestra en la fotografía de la cámara de burbujas de la figura 9-20. Note que las dos trayectorias están en ángulos rectos entre sí después de la colisión. Puede mostrarse que esto se cumple en general para colisiones elásticas no frontales de dos partículas de igual masa, una de las cuales está inicialmente en reposo (véase el problema 61).

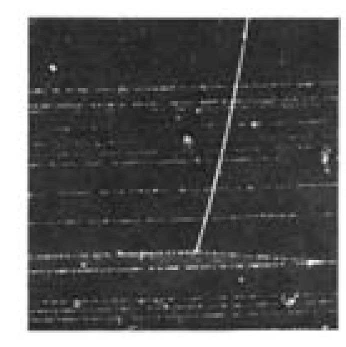


FIGURA 9–20 Fotografía de una colisión protón-protón en una cámara de burbujas de hidrógeno (dispositivo que hace visibles las trayectorias de partículas elementales). Las líneas múltiples representan los protones que entran y pueden golpear a los protones del hidrógeno en la cámara.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Conservación de la cantidad de movimiento y colisiones

1. Elija el **sistema**. Si la situación es compleja, piense en como dividirla en partes en las que se cumplen una o más leyes de la conservación.
2. Si una **fuerza externa neta** significativa actúa sobre su sistema elegido, asegúrese de que el intervalo de tiempo Δt sea tan corto que el efecto sobre la cantidad de movimiento sea despreciable. Esto es, si se va a usar la conservación de la cantidad de movimiento, debemos asegurarnos que las fuerzas que actúan entre los objetos interactuantes son las únicas fuerzas significativas, [Nota: Si es válido para una porción del problema, usted puede usar la conservación de la cantidad de movimiento sólo para esa porción].
3. Dibuje un **diagrama** de la situación inicial, justo antes de que ocurra la interacción (colisión, explosión), y represente la cantidad de movimiento de cada objeto con una flecha y rotúlela. Haga lo mismo para la situación final, justo después de la interacción.
4. Elija un **sistema coordenado** y el sentido de los ejes "+" y "−". (Para una colisión frontal, necesitará sólo un eje x.) A menudo es conveniente elegir el eje $+x$ en el sentido de la velocidad inicial de un objeto.
5. Aplique la(s) ecuación(es) de la **conservación de la cantidad de movimiento**:

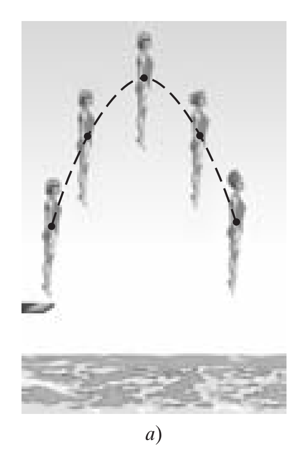
   cantidad de movimiento inicial total = cantidad de movimiento final total.

   Usted tiene una ecuación para cada componente (x, y, z); y sólo una ecuación para una colisión frontal.
6. Si la colisión es elástica, usted también puede usar la ecuación de **conservación de la energía cinética**:

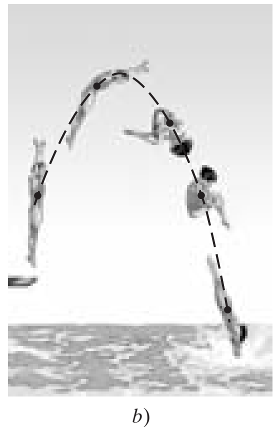
   energía cinética inicial total = energía cinética final total.

   [Alternativamente, podría usar la ecuación 9-8: $v_A - v_B = v'_B - v'_A$, si la colisión es unidimensional (frontal)].
7. Despeje la(s) **incógnita(s)**.
8. **Verifique** su trabajo, compruebe las unidades y pregúntese si el resultado es razonable.

9–8 Centro de masa (CM)



a)



b)

FIGURA 9–21 El movimiento de la clavadista es puramente traslacional en *a*), pero es traslacional más rotacional en *b*). El punto negro representa el CM de la clavadista en cada momento.

La cantidad de movimiento es un poderoso concepto no sólo para analizar colisiones, sino también para analizar el movimiento de traslación de objetos extendidos reales. Hasta ahora, cuando hemos tratado con el movimiento de un objeto extenso (es decir, un objeto que tiene tamaño), supusimos que podría aproximarse como una partícula puntual, o que experimenta sólo movimiento traslacional. Sin embargo, los objetos extensos reales pueden también experimentar rotaciones y otros tipos de movimiento. Por ejemplo, la clavadista de la figura 9-21a experimenta sólo movimiento traslacional (todas las partes de su cuerpo siguen la misma trayectoria); en tanto que la clavadista en la figura 9-21b experimenta movimiento tanto traslacional como rotacional. Llamaremos *movimiento general* al movimiento que no es sólo de traslación pura.

Las observaciones indican que aun si un cuerpo gira, o varias partes de un sistema de objetos tienen movimiento relativo entre sí, hay un punto que se mueve en la misma trayectoria que se movería una partícula si ésta está sometida a la misma fuerza neta. Este punto se llama **centro de masa** (abreviado CM). El movimiento general de un objeto extenso (o sistema de objetos) se puede considerar como *la suma del movimiento traslacional del* CM*, más los movimientos rotacionales, vibratorios o de otros tipos, con respecto al* CM.

Como ejemplo, considere el movimiento del centro de masa de la clavadista de la figura 9-21; su CM sigue una trayectoria parabólica aun cuando ella gira, como se muestra en la figura 9-21b. Ésta es la misma trayectoria parabólica que sigue una partícula lanzada, al actuar sobre ella sólo la fuerza de la gravedad (movimiento de proyectiles, sección 3-7). Otros puntos del cuerpo de la clavadista en rotación, como sus pies y su cabeza, siguen trayectorias más complicadas.

La figura 9-22 muestra una llave inglesa sobre la que actúa una fuerza neta cero, trasladándose y girando a lo largo de una superficie horizontal; note que su CM, marcado con una cruz, se mueve en línea recta, como indica la línea punteada blanca.

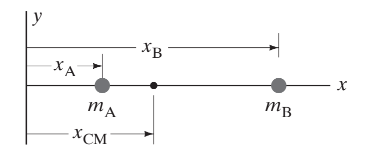


FIGURA 9–22 Traslación más rotación: Una llave inglesa que se mueve libremente sobre una superficie horizontal. El CM, marcado con una cruz, se mueve en línea recta.

En la sección 9-9 mostraremos que las propiedades importantes del CM se derivan de las leyes de Newton si el CM se define de la siguiente manera. Podemos considerar cualquier objeto extenso como formado por muchas partículas pequeñas. Sin embargo, primero consideremos un sistema formado sólo por dos partículas (u objetos pequeños), de masas m_A y m_B. Elegimos un sistema coordenado tal que ambas partículas se encuentren sobre el eje x en las posiciones x_A y x_B, figura 9-23. Por definición, el centro de masa de este sistema está en la posición x_{CM}, dada por

$$x_{cm} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B} = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{M},$$

FIGURA 9–23 El centro de masa de un sistema de dos partículas se encuentra sobre la línea que une las dos masas. Aquí $m_A > m_B$, por lo que el CM está más cerca de m_A que de m_B.



donde $M = m_A + m_B$ es la masa total del sistema. El centro de masa se encuentra sobre la línea que une m_A y m_B. Si esas dos masas son iguales ($m_A = m_B = m$), x_{CM} está justo a la mitad de la distancia entre ellas, ya que en este caso

$$x_{cm} = \frac{m(x_A + x_B)}{2m} = \frac{(x_A + x_B)}{2}.$$

Si una masa es mayor que la otra, digamos, $m_A > m_B$, entonces el CM está más cerca de la masa mayor. Si toda la masa está concentrada en x_B, de manera que $m_A = 0$, entonces $x_{CM} = (0x_A + m_B x_B)/(0 + m_B) = x_B$, como se esperaría.

Consideremos ahora un sistema que consiste en n partículas, donde n puede ser un número muy grande. Este sistema puede ser un objeto extenso que consideramos formado por n partículas pequeñas. Si todas esas n partículas están a lo largo de una línea recta (llamado eje x), definimos el CM del sistema como el punto del espacio localizado en

$$x_{\text{cm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M}, \qquad \textbf{(9–10)}$$

donde $m_A, m_B, \ldots, m_n$ son las masas de cada una de las partículas y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son sus posiciones. El símbolo $\sum_{i=1}^{n}$ es la sumatoria que significa sumar sobre todas las partículas, donde i toma valores enteros de 1 a n. (A menudo escribimos simplemente $\Sigma m_i x_i$, dejando sin expresar $i = 1$ a n). La masa total del sistema es $M = \Sigma m_i$.

EJEMPLO 9–14 CM de tres personas sobre una balsa. Tres personas de masa m aproximadamente equivalente sobre una balsa de banana (inflada) ligera están sentadas a lo largo del eje x en las posiciones $x_A = 1.0$ m, $x_B = 5.0$ m y $x_C = 6.0$ m, medidas desde el extremo izquierdo, como se muestra en la figura 9-24. Encuentre la posición del CM. Ignore la masa de la balsa.

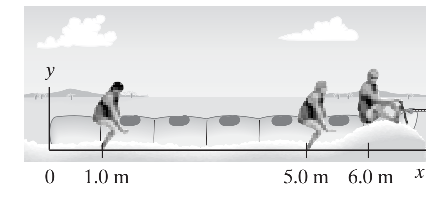


FIGURA 9–24 Ejemplo 9-14.

PLANTEAMIENTO Se proporcionan la masa y la ubicación de las tres personas, así que se pueden usar tres términos en la ecuación 9-10. A cada persona la consideramos como una partícula puntual. De manera equivalente, la ubicación de cada persona es la posición del CM propio de esa persona.

SOLUCIÓN Utilizamos la ecuación 9-10 con tres términos:

$$x_{\text{cm}} = \frac{m x_A + m x_B + m x_C}{m + m + m} = \frac{m(x_A + x_B + x_C)}{3m}$$
$$= \frac{(1.0\,\text{m} + 5.0\,\text{m} + 6.0\,\text{m})}{3} = \frac{12.0\,\text{m}}{3} = 4.0\,\text{m}.$$

El CM está a 4.0 m del extremo izquierdo de la balsa, lo cual tiene sentido, pues debería estar más cerca de las dos personas del frente, que de la persona que va en la parte trasera.

Advierta que las coordenadas del CM dependen del marco de referencia o sistema coordenado elegido. Sin embargo, la posición física (respecto del objeto mismo) del CM no depende de tal elección.

EJERCICIO F Calcule el CM de las tres personas del ejemplo 9-14, tomando como origen al conductor ($x_C = 0$) a la derecha. ¿La ubicación física del CM es la misma?

Si las partículas están dispersas en dos o tres dimensiones, como en un objeto extenso típico, entonces definimos las coordenadas del CM como:

$$x_{\text{cm}} = \frac{\Sigma m_i x_i}{M}, \qquad y_{\text{cm}} = \frac{\Sigma m_i y_i}{M}, \qquad z_{\text{cm}} = \frac{\Sigma m_i z_i}{M}, \qquad \textbf{(9–11)}$$

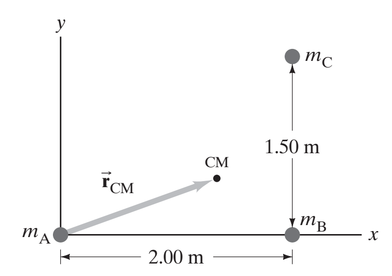
donde x_i, y_i y z_i son las coordenadas de la partícula de masa m_i y de nuevo $M = \Sigma m_i$ es la masa total.

Aunque desde un punto de vista práctico, calculamos usualmente las componentes del CM (ecuación 9-11), a veces es conveniente (por ejemplo, para derivaciones) escribir la ecuación 9-11 en forma vectorial. Si $\vec{\mathbf{r}}_i = x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}} + z_i\hat{\mathbf{k}}$ es el vector posición de la i-ésima partícula, y $\vec{\mathbf{r}}_{\text{cm}} = x_{\text{cm}}\hat{\mathbf{i}} + y_{\text{cm}}\hat{\mathbf{j}} + z_{\text{cm}}\hat{\mathbf{k}}$ es el vector posición del centro de masa, entonces,

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{cm}} = \frac{\Sigma m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{M}. \qquad \textbf{(9–12)}$$

EJEMPLO 9–15 Tres partículas en dos dimensiones. Tres partículas, cada una con masa de 2.50 kg, están localizadas en las esquinas de un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 2.00 m y 1.50 m, como se muestra en la figura 9-25. Localice el centro de masa.

FIGURA 9–25 Ejemplo 9-15.



PLANTEAMIENTO Elegimos nuestro sistema coordenado como se muestra (para simplificar los cálculos) con m_A en el origen y m_B sobre el eje x. Entonces m_A tiene coordenadas $x_A = y_A = 0$; m_B tiene coordenadas $x_B = 2.0$ m, $y_B = 0$; y m_C tiene coordenadas $x_C = 2.0$ m, $y_C = 1.5$ m.

SOLUCIÓN De las ecuaciones 9-11,

$$x_{\text{cm}} = \frac{(2.50\,\text{kg})(0) + (2.50\,\text{kg})(2.00\,\text{m}) + (2.50\,\text{kg})(2.00\,\text{m})}{3(2.50\,\text{kg})} = 1.33\,\text{m}$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{(2.50\,\text{kg})(0) + (2.50\,\text{kg})(0) + (2.50\,\text{kg})(1.50\,\text{m})}{7.50\,\text{kg}} = 0.50\,\text{m}.$$

El CM y el vector posición $\vec{\mathbf{r}}_{\text{cm}}$ se muestran en la figura 9-25, dentro del "triángulo", como esperaríamos.

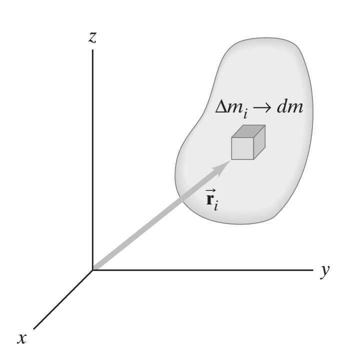


FIGURA 9–26 Un objeto extenso, mostrado aquí sólo en dos dimensiones, se puede considerar formado por muchas partículas pequeñas (n), cada una de masa Δm_i. Se muestra una partícula localizada en un punto $\vec{\mathbf{r}}_i = x_i\hat{\mathbf{i}} + y_i\hat{\mathbf{j}} + z_i\hat{\mathbf{k}}$. Tomamos el límite cuando $n \to \infty$ de manera que Δm_i se vuelve el infinitesimal dm.

EJERCICIO G Un deportista practica un clavado que implica un giro con brazos y piernas extendidos con el cuerpo doblado a la mitad. ¿Qué diría usted acerca del centro de masa del clavadista? *a*) Acelera con una magnitud de 9.8 m/s^2 (ignorando la fricción del aire). *b*) Se mueve en una trayectoria circular a causa de la rotación del clavadista. *c*) Siempre debe estar localizado dentro del cuerpo del clavadista, en algún sitio dentro del centro geométrico. *d*) Todas las opciones anteriores son válidas.

A menudo es conveniente considerar que un objeto extenso está formado por una distribución continua de materia. En otras palabras, consideramos como si el cuerpo estuviera formado por n partículas, cada una de masa Δm_i en un pequeño volumen alrededor de un punto x_i, y_i, z_i, y tomamos el límite cuando n tiende a infinito (figura 9-26). Entonces, Δm_i se vuelve la masa infinitesimal dm en los puntos x, y, z. Las sumatorias en las ecuaciones 9-11 y 9-12 se vuelven integrales:

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int x\,dm, \quad y_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int y\,dm, \quad z_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int z\,dm, \qquad \textbf{(9–13)}$$

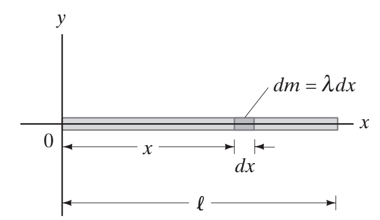
donde la suma sobre todos los elementos de masa es $\int dm = M$, que es la masa total del objeto. En notación vectorial, tenemos

$$\vec{\mathbf{r}}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int \vec{\mathbf{r}}\,dm. \qquad \textbf{(9–14)}$$

Un concepto similar al *centro de masa* es el **centro de gravedad** (CG). El CG de un objeto es aquel punto donde puede considerarse que actúa la fuerza de gravedad. En realidad, la fuerza de gravedad actúa sobre *todas* las diferentes partes o partículas de un objeto, pero con el fin de determinar el movimiento traslacional de un objeto como un todo, supondremos que todo el peso del objeto (que es la suma de los pesos de todas sus partes) actúa en el CG. Estrictamente hablando, hay una diferencia conceptual entre el centro de gravedad y el centro de masa; no obstante, en general para fines prácticos son el mismo punto.†

EJEMPLO 9–16 CM de una varilla (barra delgada). *a*) Demuestre que el CM de una varilla uniforme de longitud ℓ y masa M está en su centro. *b*) Determine el CM de la varilla suponiendo que su densidad lineal de masa λ (masa por unidad de longitud) varía linealmente de $\lambda = \lambda_0$ en el extremo izquierdo al doble de ese valor, $\lambda = 2\lambda_0$, en el extremo derecho.

FIGURA 9–27 Ejemplo 9-16.



PLANTEAMIENTO Elegimos un sistema coordenado tal que la varilla se encuentre sobre el eje x con su extremo izquierdo en el origen, $x = 0$, figura 9-27. Entonces $y_{\text{CM}} = 0$ y $z_{\text{CM}} = 0$.

SOLUCIÓN *a*) La varilla es uniforme, por lo que su masa por longitud unitaria (densidad lineal de masa λ) es constante y la escribimos como $\lambda = M/\ell$. Ahora imaginemos la varilla dividida en elementos infinitesimales de longitud dx, cada uno con masa $dm = \lambda dx$. Usamos la ecuación 9-13:

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int_{x=0}^{\ell} x\,dm = \frac{1}{M}\int_0^{\ell}\lambda x\,dx = \frac{\lambda}{M}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\ell} = \frac{\lambda\ell^2}{2M} = \frac{\ell}{2}$$

donde hicimos $\lambda = M/\ell$. Este resultado, con x_{CM} en el centro geométrico, es lo que esperábamos.

b) Ahora tenemos $\lambda = \lambda_0$ en $x = 0$ y se nos dice que λ crece linealmente hasta $\lambda = 2\lambda_0$ en $x = \ell$. Y escribimos

$$\lambda = \lambda_0(1 + \alpha x)$$

que satisface $\lambda = \lambda_0$ en $x = 0$, se incrementa linealmente hasta $\lambda = 2\lambda_0$ en $x = \ell$ si $(1 + \alpha\ell) = 2$. En otras palabras, $\alpha = 1/\ell$. De nuevo usamos la ecuación 9-13, con $\lambda = \lambda_0\,(1 + x/\ell)$:

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\int_{x=0}^{\ell}\lambda x\,dx = \frac{1}{M}\lambda_0\int_0^{\ell}\left(1 + \frac{x}{\ell}\right)x\,dx = \frac{\lambda_0}{M}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3\ell}\right)\bigg|_0^{\ell} = \frac{5}{6}\frac{\lambda_0}{M}\ell^2.$$

Ahora escribamos M en términos de λ_0 y ℓ. Podemos escribir

$$M = \int_{x=0}^{\ell} dm = \int_0^{\ell}\lambda\,dx = \lambda_0\int_0^{\ell}\left(1 + \frac{x}{\ell}\right)dx = \lambda_0\left(x + \frac{x^2}{2\ell}\right)\bigg|_0^{\ell} = \frac{3}{2}\lambda_0\ell.$$

Entonces,

$$x_{\text{cm}} = \frac{5}{6}\frac{\lambda_0}{M}\ell^2 = \frac{5}{9}\ell,$$

que es más de la mitad a lo largo de la varilla, como esperaríamos, ya que hay más masa hacia la derecha.

†Habría una diferencia entre CM y CG sólo en el caso inusual de que un objeto fuera tan grande que la aceleración debida a la gravedad g fuera diferente en distintas partes del objeto.

Para cuerpos simétricamente conformados de composición uniforme, como esferas, cilindros y sólidos rectangulares, el CM está localizado en el centro geométrico del objeto. Considere un cilindro circular uniforme, como un disco circular sólido. Esperamos que el CM esté en el centro del círculo. Para demostrarlo, elegimos primero un sistema coordenado, cuyo origen esté en el centro del círculo con el eje z perpendicular al disco (figura 9-28). Cuando tomamos la suma $\Sigma m_i x_i$ en las ecuaciones 9-11, hay tanta masa en cualquier $+x_i$ como hay en $-x_i$. Por lo tanto, todos los términos se cancelan en parejas y $x_{CM} = 0$. Lo mismo es cierto para y_{CM}. En la dirección vertical (z), el CM debe encontrarse a la mitad de la distancia entre las caras circulares: Si elegimos nuestro origen de coordenadas en ese punto, hay tanta masa en cualquier $+z_i$ como en $-z_i$, por lo que $z_{CM} = 0$. Para otros objetos uniformes de forma simétrica podemos hacer consideraciones similares para mostrar que el CM debe encontrarse sobre una línea de simetría. Si un cuerpo simétrico *no* es uniforme, entonces esos argumentos de simetría no son válidos. Por ejemplo, el CM de una rueda o un disco con un peso sobre un lado no está en el centro geométrico, sino más cerca del lado que tiene el peso.

Para ubicar el centro de masa de un grupo de objetos extensos, usamos la ecuación 9-11, donde las m_i son las masas de esos objetos y x_i, y_i y z_i son las coordenadas del CM de cada uno de los objetos.

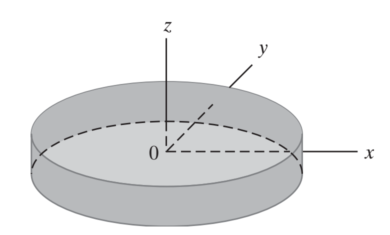


FIGURA 9–28 Disco cilíndrico con el origen de coordenadas en el centro geométrico.

EJEMPLO 9–17 **CM de un objeto plano con forma de L.** Determine el CM de la escuadra delgada y uniforme de la figura 9-29.

PLANTEAMIENTO Consideramos el objeto como dos rectángulos: el rectángulo A de 2.06 m × 0.20 m, y el rectángulo B de 1.48 m × 0.20 m. Elegimos el origen en 0, como se muestra y suponemos un espesor uniforme t.

SOLUCIÓN El CM de del rectángulo A está en

$$x_A = 1.03\text{ m},\quad y_A = 0.10\text{ m}.$$

El CM de B está en

$$x_B = 1.96\text{ m},\quad y_B = -0.74\text{ m}.$$

La masa de A, cuyo espesor es t, es

$$M_A = (2.06\text{ m})(0.20\text{ m})(t)(\rho) = (0.412\text{ m}^2)(\rho t),$$

donde ρ es la densidad (masa por unidad de volumen). La masa de B es

$$M_B = (1.48\text{ m})(0.20\text{ m})(\rho t) = (0.296\text{ m}^2)(\rho t),$$

y la masa total es $M = (0.708\text{ m}^2)(\rho t)$. Entonces,

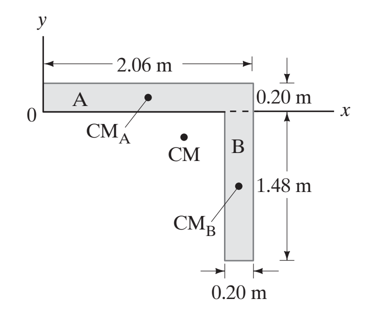
$$x_{cm} = \frac{M_A x_A + M_B x_B}{M} = \frac{(0.412\text{ m}^2)(1.03\text{ m}) + (0.296\text{ m}^2)(1.96\text{ m})}{(0.708\text{ m}^2)} = 1.42\text{ m},$$

donde ρt se canceló en el numerador y en el denominador. Asimismo,

$$y_{cm} = \frac{(0.412\text{ m}^2)(0.10\text{ m}) + (0.296\text{ m}^2)(-0.74\text{ m})}{(0.708\text{ m}^2)} = -0.25\text{ m},$$

que localiza el CM aproximadamente en el punto marcado CM en la figura 9-29. Tomando en cuenta el espesor, $z_{CM} = t/2$, ya que se supone que el objeto es uniforme.

FIGURA 9–29 Ejemplo 9-17. Este objeto en forma de L tiene espesor t (que no se muestra en el diagrama).



Note en este último ejemplo que el CM puede encontrarse en realidad *fuera* del objeto. Otro ejemplo es una dona cuyo CM está en el centro del agujero.

A menudo es más fácil determinar el CM o el CG de un objeto extenso en forma experimental que analíticamente. Un objeto suspendido de cualquier punto oscilará (figura 9-30) debido a la fuerza de gravedad ejercida sobre él, a menos que esté situado de manera que su CG se encuentre sobre una línea vertical directamente abajo del punto del que está suspendido. Si el objeto es bidimensional o tiene un plano de simetría, sólo hay que colgarlo de dos puntos pivote diferentes y trazar las líneas de plomada respectivas. El CG estará entonces en la intersección de las dos líneas, como se muestra en la figura 9-31. Si el objeto no tiene un plano de simetría, el CG con respecto a la tercera dimensión se encuentra suspendiendo el objeto de por lo menos tres puntos, cuyas líneas de plomada no se encuentren en el mismo plano. Para objetos simétricamente formados, el CM se localiza en el centro geométrico del objeto.

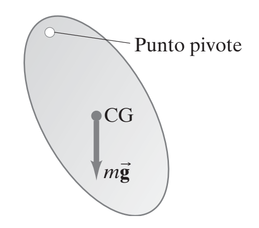
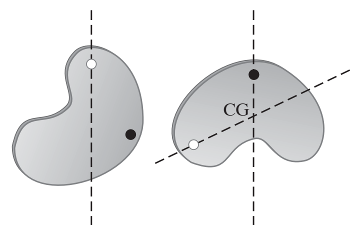


FIGURA 9–30 Determinación del CM de un cuerpo plano uniforme.

FIGURA 9–31 Determinación del CG.



9–9 Centro de masa y movimiento traslacional

Como se mencionó en la sección 9-8, una razón fundamental de la importancia del concepto de centro de masa es que el movimiento traslacional del CM para un sistema de partículas (u objetos extensos) está directamente relacionado con la fuerza neta que actúa sobre el sistema en su conjunto. Mostramos esto ahora examinando el movimiento de una sistema de n partículas de masa total M, y suponemos que todas las masas permanecen constantes. Comenzamos reescribiendo la ecuación 9-12 como

$$M\vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{cm}} = \Sigma m_i \vec{\mathbf{r}}_i .$$

Diferenciamos esta ecuación con respecto al tiempo:

$$M\frac{d\vec{\mathbf{r}}_{\mathrm{cm}}}{dt} = \Sigma m_i \frac{d\vec{\mathbf{r}}_i}{dt}$$

o bien,

$$M\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{cm}} = \Sigma m_i \vec{\mathbf{v}}_i , \qquad \textbf{(9–15)}$$

donde $\vec{\mathbf{v}}_i = d\vec{\mathbf{r}}_i/dt$ es la velocidad de la i-ésima partícula de masa m_i y $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{cm}}$ es la velocidad del CM. Tomamos de nuevo la derivada con respecto al tiempo y obtenemos

$$M\frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{cm}}}{dt} = \Sigma m_i \vec{\mathbf{a}}_i ,$$

donde $\vec{\mathbf{a}}_i = d\vec{\mathbf{v}}_i/dt$ es la aceleración de la i-ésima partícula. Ahora, $d\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{cm}}/dt$ es la aceleración del CM, $\vec{\mathbf{a}}_{\mathrm{cm}}$. Por la segunda ley de Newton, $m_i\vec{\mathbf{a}}_i = \vec{\mathbf{F}}_i$ donde $\vec{\mathbf{F}}_i$ es la fuerza neta sobre la i-ésima partícula. Por lo tanto,

$$M\vec{\mathbf{a}}_{\mathrm{cm}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + \cdots + \vec{\mathbf{F}}_n = \Sigma\vec{\mathbf{F}}_i . \qquad \textbf{(9–16)}$$

Es decir, la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema es igual a la masa total del sistema multiplicada por la aceleración de su centro de masa. Advierta que nuestro sistema de n partículas podrían ser las n partículas que forman uno o más objetos extensos.

Las fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_i$ ejercidas sobre las partículas del sistema pueden dividirse en dos tipos: (1) *fuerzas externas* ejercidas por objetos fuera del sistema y (2) *fuerzas internas* que ejercen entre sí las partículas dentro del sistema. Por la tercera ley de Newton, las fuerzas internas se presentan en parejas: si una partícula ejerce una fuerza sobre una segunda partícula en nuestro sistema, la segunda debe ejercer una fuerza de la misma magnitud, en la misma dirección pero de sentido opuesto sobre la primera. Así, en la suma total de todas las fuerzas en la ecuación 9-16, esas fuerzas internas se cancelan entre sí por parejas. Nos quedan sólo las fuerzas externas del lado derecho de la ecuación 9-16:

SEGUNDA LEY DE NEWTON (para un sistema)

$$M\vec{\mathbf{a}}_{\mathrm{cm}} = \Sigma\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{ext}} , \qquad [M \text{ constante}] \qquad \textbf{(9–17)}$$

donde $\Sigma\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{ext}}$ es la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre nuestro sistema, que equivale a la *fuerza neta* que actúa sobre el sistema. Entonces,

> **la suma de todas las fuerzas que actúan sobre un sistema es igual a la masa total del sistema multiplicada por la aceleración de su centro de masa.**

Ésta es la **segunda ley de Newton** para un sistema de partículas. Se aplica también a un objeto extenso (que puede considerarse un conjunto de partículas) y a un sistema de objetos. Concluimos entonces que

MOVIMIENTO TRASLACIONAL DEL CM

> **el centro de masa de un sistema de partículas (u objetos) con masa total *M* se mueve como una sola partícula de masa *M*, sobre la que actúa la misma fuerza externa neta.**

Es decir, el sistema se mueve como si toda su masa estuviera concentrada en el CM y todas las fuerzas externas actuaran en ese punto. Podemos entonces tratar el *movimiento traslacional* de cualquier objeto o sistema de objetos como el movimiento de una partícula (véase las figuras 9-21 y 9-22). Evidentemente este resultado simplifica

nuestro análisis del movimiento de sistemas complejos y objetos extensos. Aunque el movimiento de varias partes del sistema puede ser complicado, a menudo nos basta conocer el movimiento del centro de masa. Este resultado nos permite resolver también muy fácilmente ciertos tipos de problemas, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO CONCEPTUAL 9–18 **Un cohete de dos etapas.** Un cohete se dispara al aire como se muestra en la figura 9-32. En el momento en que alcanza su punto más alto, a una distancia horizontal d desde su punto de inicio, una explosión programada lo separa en dos partes de masas iguales. La parte I se detiene en el aire por la explosión y cae verticalmente hacia la Tierra. ¿Dónde caerá la parte II? Suponga $\vec{\mathbf{g}} =$ constante.

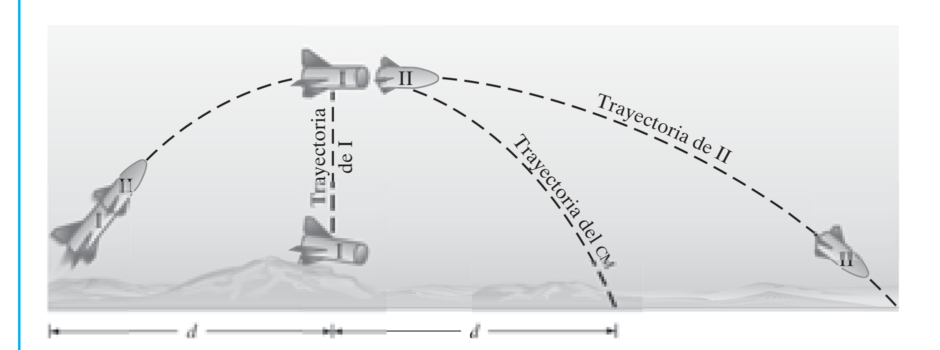


FIGURA 9–32 Ejemplo 9-18.

RESPUESTA Después de disparado el cohete, la trayectoria del CM del sistema continúa siguiendo la trayectoria parabólica de un proyectil sobre el que actúa sólo una fuerza gravitacional constante. El CM llegará a un punto situado a $2d$ del punto de inicio. Como las masas de I y II son iguales, el CM debe estar a la mitad entre ellas. Por lo tanto, la parte II aterriza a una distancia $3d$ del punto de inicio.

NOTA Si a la parte I se le hubiera dado un empuje hacia arriba o hacia abajo, en vez de tan sólo caer, la solución habría sido algo más complicada.

EJERCICIO H Una mujer está de pie en un bote de remos y camina desde un extremo del bote hacia el otro extremo. ¿Cómo se mueve el bote, visto desde la orilla?

Podemos escribir la ecuación 9-17, $M\vec{\mathbf{a}}_{\text{cm}} = \Sigma\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$, en términos de la cantidad de movimiento total $\vec{\mathbf{P}}$ de un sistema de partículas. $\vec{\mathbf{P}}$ se define, como vimos en la sección 9-2, de la siguiente manera:

$$\vec{\mathbf{P}} = m_1\vec{\mathbf{v}}_1 + m_2\vec{\mathbf{v}}_2 + \cdots + m_n\vec{\mathbf{v}}_n = \Sigma\vec{\mathbf{p}}_i .$$

De la ecuación 9-15 $\left(M\vec{\mathbf{v}}_{\text{cm}} = \Sigma m_i\vec{\mathbf{v}}_i\right)$ tenemos

$$\vec{\mathbf{P}} = M\vec{\mathbf{v}}_{\text{cm}} . \qquad \textbf{(9–18)}$$

Así, *la cantidad de movimiento lineal total de un sistema de partículas es igual al producto de la masa total* M *y la velocidad del centro de masa del sistema.* O bien, *la cantidad de movimiento lineal de un objeto extenso es el producto de la masa del objeto y la velocidad de su* CM.

Si diferenciamos la ecuación 9-18 con respecto al tiempo, obtenemos (suponiendo que la masa total M es constante)

$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = M\frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\text{cm}}}{dt} = M\vec{\mathbf{a}}_{\text{cm}} .$$

De la ecuación 9-17, vemos que

$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = \Sigma\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} , \qquad \text{[misma que la ecuación 9-5]}$$

SEGUNDA LEY DE NEWTON (para un sistema)

donde $\Sigma\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$ es la fuerza externa neta sobre el sistema. Ésta es la ecuación 9-5 obtenida antes: **la segunda ley de Newton para un sistema de objetos**. Es válida para cualquier sistema fijo definido de partículas u objetos. Si conocemos $\Sigma\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$, podemos determinar cómo cambia la cantidad de movimiento total.

FÍSICA APLICADA
Descubrimiento de planetas distantes

Una aplicación interesante es el descubrimiento de estrellas cercanas (sección 6-5) que parecen "oscilar". ¿Qué podría causar dicha oscilación? Tal vez un planeta que orbita la estrella, y cada cuerpo ejerce una fuerza gravitacional sobre el otro. Los planetas son muy pequeños y muy lejanos como para poder observarse directamente con los telescopios existentes. Sin embargo, la ligera oscilación en el movimiento de una estrella sugiere que tanto el planeta como la estrella (su sol) orbitan alrededor de su centro de masa mutuo y, por ello, la estrella parece tener una oscilación. Las irregularidades en el movimiento de la estrella pueden obtenerse con gran exactitud; y de los datos puede calcularse el tamaño de las órbitas de los planetas, así como sus masas. Véase la figura 6-18 en el capítulo 6.

*9–10 Sistemas de masa variable: propulsión de cohetes

Veremos ahora objetos o sistemas cuya masa varía. Tales sistemas pueden tratarse como un tipo de colisión inelástica; no obstante, es más sencillo usar la ecuación 9-5, $d\vec{\mathbf{P}}/dt = \Sigma\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$, donde $\vec{\mathbf{P}}$ es la cantidad de movimiento total del sistema y $\Sigma\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$ es la fuerza neta externa ejercida sobre el sistema. Debe tenerse cuidado al definir el sistema e incluir todos los cambios en la cantidad de movimiento. Una aplicación importante es en los cohetes que se impulsan a sí mismos hacia adelante por la eyección de combustibles quemados: la fuerza ejercida por los gases sobre el cohete lo acelera. La masa M del cohete disminuye durante este proceso, por lo que $dM/dt < 0$. Otra aplicación es la caída de material (grava, artículos empacados) sobre una banda transportadora. En esta situación, la masa M de la banda cargada se incrementa, por lo que $dM/dt > 0$.

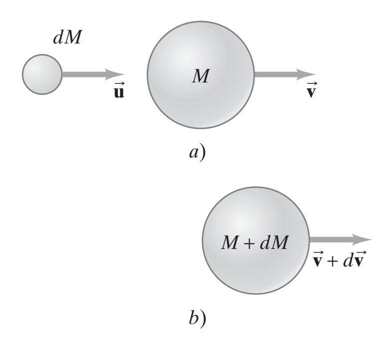


FIGURA 9–33 *a*) En el tiempo t, una masa dM está a punto de agregarse a nuestro sistema M. *b*) En el tiempo $t + dt$, se sumó la masa dM a nuestro sistema.

Para tratar el caso general de masa variable, consideremos el sistema mostrado en la figura 9-33. En algún tiempo t, tenemos un sistema de masa M y cantidad de movimiento $M\vec{\mathbf{v}}$. tenemos también una masa diminuta (infinitesimal) dM que viaja con velocidad $\vec{\mathbf{u}}$ que está a punto de entrar a nuestro sistema. Un tiempo infinitesimal dt después, la masa dM se combina con el sistema. Por sencillez, nos referiremos a esto como una "colisión". Nuestro sistema ha cambiado entonces de masa M a $M + dM$ en el tiempo dt. Note que dM puede ser menor que cero, como en el caso de un cohete impulsado por los gases eyectados, cuya masa M disminuye por consiguiente.

Para aplicar la ecuación 9-5, $d\vec{\mathbf{P}}/dt = \Sigma\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$, debemos considerar un sistema de partículas fijo definido. Es decir, al considerar el cambio de la cantidad de movimiento, $d\vec{\mathbf{P}}$, debemos considerar la cantidad de movimiento de las mismas partículas al inicio y al final. Definiremos nuestro *sistema total* incluyendo M más dM. Entonces inicialmente, en el tiempo t, la cantidad de movimiento total es $M\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}}\,dM$ (figura 9-33). En el tiempo $t + dt$, después que dM se combinó con M, la velocidad del conjunto es ahora $\vec{\mathbf{v}} + d\vec{\mathbf{v}}$ y la cantidad de movimiento total es $(M + dM)(\vec{\mathbf{v}} + d\vec{\mathbf{v}})$. Por lo que el cambio en la cantidad de movimiento $d\vec{\mathbf{P}}$ es

$$\begin{aligned} d\vec{\mathbf{P}} &= (M + dM)(\vec{\mathbf{v}} + d\vec{\mathbf{v}}) - (M\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}}\,dM) \\ &= M\,d\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{v}}\,dM + dM\,d\vec{\mathbf{v}} - \vec{\mathbf{u}}\,dM. \end{aligned}$$

El término $dM\,d\vec{\mathbf{v}}$ es el producto de dos diferenciales y es cero incluso después de que dividimos entre dt", lo cual hacemos y aplicamos la ecuación 9-5 para obtener

$$\Sigma\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = \frac{M\,d\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{v}}\,dM - \vec{\mathbf{u}}\,dM}{dt}.$$

Obtenemos entonces

$$\Sigma\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = M\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} - (\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}})\frac{dM}{dt}. \qquad \textbf{(9–19a)}$$

Advierta que la cantidad $(\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}})$ es la velocidad relativa, $\vec{\mathbf{v}}_{\text{rel}}$, de dM con respecto a M. Es decir,

$$\vec{\mathbf{v}}_{rel} = \vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}}$$

es la velocidad de la masa entrante dM como la ve un observador sobre M. Podemos reordenar la ecuación 9-19a como

$$M\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \Sigma\vec{\mathbf{F}}_{ext} + \vec{\mathbf{v}}_{rel}\frac{dM}{dt}. \quad \textbf{(9–19b)}$$

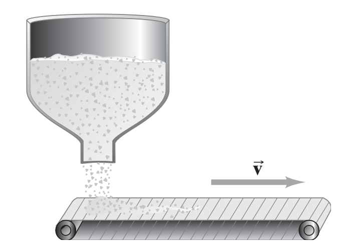
Podemos interpretar esta ecuación como sigue. $M\,d\vec{\mathbf{v}}/dt$ es la masa multiplicada por la aceleración de M. El primer término a la derecha, $\Sigma\vec{\mathbf{F}}_{ext}$, se refiere a la fuerza externa sobre la masa M (para un cohete, incluiría la fuerza de gravedad y la resistencia del aire). Pero *no* incluye la fuerza que dM ejerce sobre M como resultado de su colisión. Esto se toma en cuenta en el segundo término a la derecha, $\vec{\mathbf{v}}_{rel}(dM/dt)$, que representa la tasa a la que se transfiere la cantidad de movimiento a (o desde) la masa M, debido a la masa que se agrega (o se elimina). Entonces puede interpretarse como la fuerza ejercida sobre la masa M debido a la adición (o eyección) de masa. En un cohete, este término se llama *empuje*, ya que representa la fuerza ejercida sobre el cohete por los gases expelidos. Para un cohete que expulsa combustible quemado, $dM/dt < 0$; pero también lo es $\vec{\mathbf{v}}_{rel}$ (los gases se expelen hacia atrás), por lo que el segundo término en la ecuación 9-19b actúa para aumentar $\vec{\mathbf{v}}$.

EJEMPLO 9–19 **Banda transportadora.** Usted va a diseñar un sistema transportador para una cantera de grava. Una tolva deja caer grava a una tasa de 75.0 kg/s sobre una banda transportadora que se mueve con rapidez constante $v = 2.20$ m/s (figura 9-34). *a*) Determine la fuerza adicional (más allá de la fricción interna) necesaria para mantener la banda en movimiento conforme la grava cae sobre ella. *b*) ¿Qué potencia debería tener el motor que impulsa la banda transportadora?

FÍSICA APLICADA

Banda transportadora en movimiento

FIGURA 9–34 Ejemplo 9-19. La grava cae desde la tolva sobre la banda transportadora.



PLANTEAMIENTO Suponemos que la tolva está en reposo, por lo que $u = 0$, y que justamente ha empezado a dejar caer grava, por lo que $dM/dt = 75.0$ kg/s.

SOLUCIÓN *a*) La banda tiene que moverse a rapidez constante ($dv/dt = 0$), de manera que la ecuación 9-19, como se escribe para una dimensión, da:

$$\begin{aligned} F_{ext} &= M\frac{dv}{dt} - (u - v)\frac{dM}{dt} \\ &= 0 - (0 - v)\frac{dM}{dt} \\ &= v\frac{dM}{dt} = (2.20\,\mathrm{m/s})(75.0\,\mathrm{kg/s}) = 165\,\mathrm{N}. \end{aligned}$$

b) Esta fuerza efectúa trabajo (ecuación 8-21) a una tasa de

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \vec{\mathbf{F}}_{ext}\cdot\vec{\mathbf{v}} = v^2\frac{dM}{dt} \\ &= 363\,\mathrm{W}, \end{aligned}$$

que es la potencia requerida del motor.

NOTA Este trabajo no se transforma por completo en energía cinética de la grava, ya que

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Mv^2\right) = \frac{1}{2}\frac{dM}{dt}v^2,$$

que es sólo la mitad del trabajo efectuado por $\vec{\mathbf{F}}_{ext}$. La otra mitad del trabajo externo se transforma en energía térmica producida por la fricción entre la grava y la banda (la misma fuerza de fricción que acelera la grava).

FÍSICA APLICADA
Propulsión de cohetes

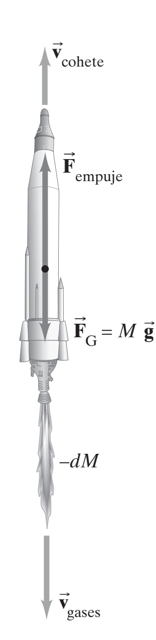


FIGURA 9–35 Ejemplo 9–20; $\vec{v}_{rel} = \vec{v}_{gases} - \vec{v}_{cohete}$. M es la masa del cohete en cualquier instante y disminuye hasta que se quema el combustible.

EJEMPLO 9–20 **Propulsión de un cohete.** Un cohete lleno de combustible tiene una masa de 21,000 kg, de los cuales 15,000 kg son de combustible. El combustible quemado se expele por la parte trasera a una tasa de 190 kg/s con una rapidez de 2800 m/s con respecto al cohete. Si el cohete se dispara verticalmente hacia arriba (figura 9-35), calcule: *a*) el empuje del cohete; *b*) la fuerza neta sobre el cohete en el despegue y justo antes de que todo el combustible se haya agotado; *c*) la velocidad del cohete en función del tiempo, y *d*) su velocidad final cuando se agota el combustible. Ignore la resistencia del aire y suponga que la aceleración de la gravedad es constante e igual a $g = 9.80\ \text{m/s}^2$.

PLANTEAMIENTO Para empezar, el empuje se define (véase el análisis después de la ecuación 9-19b) como el último término de la ecuación 9-19b, $v_{rel}(dM/dt)$. La fuerza neta [para el inciso *b*)] es la suma vectorial del empuje y la gravedad. La velocidad se determina a partir de la ecuación 9-19b.

SOLUCIÓN *a*) El empuje es:

$$F_{empuje} = v_{rel}\frac{dM}{dt} = (-2800\ \text{m/s})(-190\ \text{kg/s}) = 5.3 \times 10^5\ \text{N},$$

donde tomamos como positivo el sentido hacia arriba, por lo que v_{rel} es negativa por estar dirigida hacia abajo, y dM/dt es negativa porque disminuye la masa del cohete.

b)$F_{ext} = Mg = (2.1 \times 10^4\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) = 2.1 \times 10^5$ N inicialmente, y $F_{ext} = (6.0 \times 10^3\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2) = 5.9 \times 10^4$ N cuando se ha agotado el combustible. Por consiguiente, la fuerza neta sobre el cohete en el despegue es

$$F_{net} = 5.3 \times 10^5\ \text{N} - 2.1 \times 10^5\ \text{N} = 3.2 \times 10^5\ \text{N}, \quad \text{[despegue]}$$

y justo antes de que se agote el combustible, la fuerza es

$$F_{net} = 5.3 \times 10^5\ \text{N} - 5.9 \times 10^4\ \text{N} = 4.7 \times 10^5\ \text{N}. \quad \text{[combustible agotado]}$$

Por supuesto, *después* de que se acaba el combustible, la fuerza neta es la de gravedad, -5.9×10^4 N.

c) De la ecuación 9-19b, tenemos

$$dv = \frac{F_{ext}}{M}dt + v_{rel}\frac{dM}{M},$$

donde $F_{ext} = -Mg$, y M es la masa del cohete que es una función del tiempo. Como v_{rel} es constante, podemos integrar esto fácilmente:

$$\int_{v_0}^{v} dv = -\int_0^t g\,dt + v_{rel}\int_{M_0}^{M}\frac{dM}{M}$$

o bien,

$$v(t) = v_0 - gt + v_{rel}\ln\frac{M}{M_0},$$

donde $v(t)$ es la velocidad del cohete y M es su masa en cualquier tiempo t. Advierta que v_{rel} es negativa (-2800 m/s en nuestro caso) porque es opuesta al movimiento, y que ln (M/M_0) es también negativo porque $M_0 > M$. Por consiguiente, el último término, que representa el empuje, es positivo y actúa incrementando la velocidad.

d) El tiempo requerido para que se queme todo el combustible (15,000 kg) a una tasa de 190 kg/s es

$$t = \frac{1.50 \times 10^4\ \text{kg}}{190\ \text{kg/s}} = 79\ \text{s}.$$

Si hacemos $v_0 = 0$, entonces, usando el resultado del inciso *c*):

$$v = -(9.80\ \text{m/s}^2)(79\ \text{s}) + (-2800\ \text{m/s})\left(\ln\frac{6000\ \text{kg}}{21{,}000\ \text{kg}}\right) = 2700\ \text{m/s}.$$

Resumen

La **cantidad de movimiento lineal** o **momento lineal** $\vec{\mathbf{p}}$, de un objeto se define como el producto de su masa por su velocidad,

$$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}. \qquad \textbf{(9–1)}$$

En términos de la cantidad de movimiento, la **segunda ley de Newton** puede escribirse como

$$\Sigma\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}. \qquad \textbf{(9–2)}$$

Es decir, la tasa de cambio de la cantidad de movimiento de un objeto es igual a la fuerza neta ejercida sobre él.

Cuando la fuerza neta externa sobre un sistema de objetos es cero, la cantidad de movimiento total permanece constante. Ésta es la **ley de conservación de la cantidad de movimiento**. Expresado de otra manera, la cantidad de movimiento total de un sistema aislado de objetos permanece constante.

La ley de la conservación de la cantidad de movimiento es muy útil al tratar con la clase de eventos conocidos como **colisiones**. En una colisión, dos (o más) objetos interactúan entre sí durante un tiempo muy corto, y la fuerza que cada uno ejerce sobre el otro en este tiempo es muy grande en comparación con cualquier otra fuerza que esté actuando. El **impulso** de una fuerza sobre un objeto se define como

$$\vec{\mathbf{J}} = \int \vec{\mathbf{F}}\, dt$$

y es igual al cambio en la cantidad de movimiento del objeto en tanto que $\vec{\mathbf{F}}$ sea la fuerza neta sobre el objeto:

$$\Delta\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_f - \vec{\mathbf{p}}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{\mathbf{F}}\, dt = \vec{\mathbf{J}}. \qquad \textbf{(9–6)}$$

La cantidad de movimiento total se conserva en cualquier colisión:

$$\vec{\mathbf{p}}_A + \vec{\mathbf{p}}_B = \vec{\mathbf{p}}'_A + \vec{\mathbf{p}}'_B.$$

La energía total también se conserva; pero esto quizá no sea útil a menos que se conserve la energía cinética. En este caso, la colisión se llama **colisión elástica**:

$$\tfrac{1}{2}m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_B^2 = \tfrac{1}{2}m_A v_A'^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_B'^2. \qquad \textbf{(9–7)}$$

Si no se conserva la energía cinética, la colisión se llama **inelástica**. Si dos objetos entran en colisión y quedan unidos entre sí, como resultado de la colisión, se dice entonces que ésta es **completamente inelástica**.

Para un sistema de partículas, o para un objeto extenso que puede considerarse que tiene una distribución continua de materia, el **centro de masa** (CM) se define como

$$x_{cm} = \frac{\Sigma m_i x_i}{M}, \qquad y_{cm} = \frac{\Sigma m_i y_i}{M}, \qquad z_{cm} = \frac{\Sigma m_i z_i}{M} \qquad \textbf{(9–11)}$$

o bien

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\int x\, dm, \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\, dm, \qquad z_{cm} = \frac{1}{M}\int z\, dm, \qquad \textbf{(9–13)}$$

donde M es la masa total del sistema.

El centro de masa de un sistema es importante porque este punto se mueve como una partícula individual de masa M sobre la que actúa la misma fuerza neta externa $\Sigma\vec{\mathbf{F}}_{ext}$. En forma de ecuación, esto es justo la segunda ley de Newton para un sistema de partículas (u objetos extensos):

$$M\vec{\mathbf{a}}_{cm} = \Sigma\vec{\mathbf{F}}_{ext}, \qquad \textbf{(9–17)}$$

donde M es la masa total del sistema, $\vec{\mathbf{a}}_{cm}$ es la aceleración del CM del sistema, y $\Sigma\vec{\mathbf{F}}_{ext}$ es la fuerza total externa o fuerza neta que actúa sobre las partes del sistema.

Para un sistema de partículas con cantidad de movimiento lineal total $\vec{\mathbf{P}} = \Sigma m_i \vec{\mathbf{v}}_i = M\vec{\mathbf{v}}_{cm}$, la segunda ley de Newton es

$$\frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt} = \Sigma\vec{\mathbf{F}}_{ext}. \qquad \textbf{(9–5)}$$

[*Si la masa M de un objeto no es constante, entonces

$$M\frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt} = \Sigma\vec{\mathbf{F}}_{ext} + \vec{\mathbf{v}}_{rel}\frac{dM}{dt} \qquad \textbf{(9–19b)}$$

donde $\vec{\mathbf{v}}$ es la velocidad del objeto en cualquier instante y $\vec{\mathbf{v}}_{rel}$ es la velocidad relativa a la que la masa entra al objeto (o sale del objeto)].

Preguntas

1. Decimos que se conserva la cantidad de movimiento. Sin embargo, a final de cuentas la mayoría de los objetos en movimiento desaceleran y se detienen. Explique.

2. Dos bloques de masas m_1 y m_2 descansan sobre una mesa sin fricción y están conectados por un resorte. Se jalan los bloques separándolos entre sí, estirándo el resorte, y luego se sueltan. Describa el movimiento subsecuente de los dos bloques.

3. Un cuerpo ligero y un cuerpo pesado tienen la misma energía cinética. ¿Cuál tiene la mayor cantidad de movimiento? Explique.

4. Cuando una persona salta desde un árbol al suelo, ¿qué le sucede a la cantidad de movimiento de la persona al llegar al suelo?

5. Con base en la conservación de la cantidad de movimiento, explique cómo un pez se impulsa a sí mismo hacia adelante gracias al movimiento alternado de su cola.

6. Dos niños flotan inmóviles en una estación espacial. La niña de 20 kg empuja al niño de 40 kg y éste se aleja a 1.0 m/s. La niña *a*) permanece inmóvil; *b*) se mueve en la misma dirección a 1.0 m/s; *c*) se mueve en la dirección contraria a 1.0 m/s; *d*) se mueve en la dirección contraria a 2.0 m/s; *e*) ninguna de las opciones anteriores es correcta.

7. Un camión se desplaza a 15 km/h y choca de frente con un automóvil compacto que viaja a 30 km/h. ¿Cuál de los siguientes enunciados describe mejor la situación? *a*) El camión sufre un mayor cambio en la cantidad de movimiento porque tiene mayor masa. *b*) El automóvil experimenta un mayor cambio en la cantidad de movimiento porque va a mayor rapidez. *c*) Ni el automóvil ni el camión cambian su cantidad de movimiento en el choque, porque se conserva la cantidad de movimiento. *d*) Ambos experimentan el mismo cambio en la magnitud de la cantidad de movimiento porque la cantidad de movimiento se conserva. *e*) Ninguno de los enunciados anteriores es necesariamente cierto.

8. Si una pelota al caer tuviera una colisión perfectamente elástica contra el piso, ¿rebotaría hasta su altura original? Explique.

9. Un niño parado en la parte trasera de un bote de remos se lanza al agua. ¿Qué le ocurre al bote cuando el niño sale de él. Explique.

10. Se cuenta que en tiempos lejanos un hombre muy adinerado se quedó varado con una bolsa de monedas de oro sobre la superficie de un lago congelado. Como el hielo no tenía fricción, él no pudo empujarse hacia la orilla y murió congelado. ¿Qué pudo haber hecho para salvarse, de no haber sido tan avaro?

11. La rapidez de una pelota de tenis en la devolución de un servicio puede ser tan grande como la del servicio, aun cuando la raqueta no le pegue tan rápido. ¿A qué se debe esto?
12. ¿Es posible que un objeto reciba un mayor impulso de una fuerza pequeña que de una grande? Explique.
13. ¿Cómo podría una fuerza dar un impulso cero sobre un intervalo de tiempo diferente de cero, aun cuando la fuerza no sea cero, por lo menos durante una parte de ese intervalo de tiempo?
14. En una colisión entre dos automóviles, ¿qué caso esperaría usted que fuese más peligroso para los ocupantes: si los automóviles chocan y permanecen unidos, o si los dos automóviles chocan y rebotan hacia atrás? Explique.
15. Se deja caer una superpelota desde una altura h sobre una placa de acero (fija a la Tierra), desde la cual rebota casi con su rapidez original. *a*) ¿La cantidad de movimiento de la pelota se conserva durante alguna parte de este proceso? *b*) Si consideramos la pelota y la Tierra como nuestro sistema, ¿durante qué partes o etapas del proceso se conserva la cantidad de movimiento? *c*) Responda el inciso *b*) para una pieza de masilla que cae y se queda pegada a la placa de acero.
16. Anteriormente se solía construir los automóviles tan rígidos como fuese posible para resistir las colisiones. Sin embargo, actualmente los automóviles se diseñan con "zonas de aplastamiento" que se colapsan por impacto. ¿Qué ventaja tiene el nuevo diseño?
17. En una planta hidroeléctrica, el agua se dirige a alta rapidez contra las aspas de la turbina sobre un eje que hace girar un generador eléctrico. Para la máxima generación de potencia, ¿las aspas de la turbina deben estar diseñadas de modo que el agua detenga por completo o que rebote?
18. Una pelota de squash golpea una pared en un ángulo de 45°, como se observa en la figura 9-36. ¿Cuál será la dirección *a*) del cambio en la cantidad de movimiento de la pelota, y *b*) de la fuerza sobre la pared?



FIGURA 9–36
Pregunta 18.

19. ¿Por qué un bateador puede mandar más lejos una bola de béisbol lanzada por el pitcher, que una bola lanzada por sí mismo al aire?
20. Describa una colisión en la que se pierda toda la energía cinética.
21. Las colisiones elásticas e inelásticas son similares en que se conservan *a*) la cantidad de movimiento y la energía cinética en ambas; *b*) la cantidad de movimiento se conserva en ambas; *c*) la cantidad de movimiento y la energía potencial se conservan en ambas; *d*) la energía cinética se conserva en ambas.
22. Si un avión para 20 pasajeros no está lleno, en ocasiones se les dice a los pasajeros que deben ocupar ciertos asientos y que no se muevan a los asientos vacíos. ¿Por qué sucede esto?
23. ¿Por qué usted tiende a inclinarse hacia atrás cuando carga un objeto pesado en sus brazos?
24. ¿Por qué el CM de un tubo de 1 m de longitud está en su punto medio; en tanto que esto no es válido para un brazo o una pierna de seres humanos?
25. Muestre sobre un diagrama cómo cambia su CM cuando usted se mueve de una posición acostada a otra sentada.
26. Describa un modo analítico para determinar el CM de cualquier placa uniforme delgada de forma triangular.
27. Colóquese frente al borde de una puerta abierta. Ponga los pies, uno a cada lado de la puerta, con la nariz y el abdomen tocando el borde de la puerta. Intente levantarse sobre la punta de sus pies. ¿Por qué no puede hacer esto?
28. Si sólo una fuerza externa puede cambiar la cantidad de movimiento del centro de masa de un objeto, ¿cómo podría la fuerza interna del motor acelerar un automóvil?
29. Un cohete que sigue una trayectoria parabólica en el aire explota repentinamente en muchas partes. ¿Qué puede usted decir acerca del movimiento de este sistema de partes?
30. ¿Cómo puede un cohete cambiar de dirección cuando se encuentra muy lejos en el espacio y está esencialmente en el vacío?
31. En observaciones de la desintegración β nuclear, el electrón y el núcleo al retroceder no se separan a lo largo de la misma línea. Utilice la conservación de la cantidad de movimiento en dos dimensiones para explicar por qué esto implica la emisión de por lo menos alguna otra partícula en la desintegración.
32. Roberto y Jaime deciden jalar cada uno del extremo de una cuerda, sobre un lago (congelado) sin fricción. Jaime es considerablemente más fuerte que Roberto; sin embargo, Roberto pesa 160 lbs; mientras que Jaime pesa 145 lbs. ¿Quién pierde por cruzar primero la línea media?
33. En un juego de parque de diversiones, usted trata de volcar un cilindro pesado lanzándole una bola pequeña. Tiene la opción de tirarle una bola que quede adherida al cilindro, o tirarle una segunda bola de igual masa y rapidez que rebote del cilindro. ¿Qué bola es más probable que mueva el cilindro?

Problemas

9–1 Cantidad de movimiento

1. (I) Calcule la fuerza ejercida sobre un cohete en el despegue, cuando los gases son expelidos a una tasa de 1300 kg/s con una rapidez de 4.5×10^4 m/s.
2. (I) Una fuerza de fricción constante de 25 N actúa durante 15 s sobre un esquiador de 65 kg. ¿Cuál será el cambio en la velocidad del esquiador?
3. (II) La cantidad de movimiento de una partícula, en unidades del SI, está dada por $\vec{\mathbf{p}} = 4.8\,t^2\hat{\mathbf{i}} - 8.0\hat{\mathbf{j}} - 8.9\,t\hat{\mathbf{k}}$. ¿Cuál es la fuerza en función del tiempo?
4. (II) La fuerza sobre una partícula de masa m está dada por $\vec{\mathbf{F}} = 26\hat{\mathbf{i}} - 12\,t^2\hat{\mathbf{j}}$ donde F está en N y t en s. ¿Cuál será el cambio en la cantidad de movimiento de la partícula entre $t = 1.0$ s y $t = 2.0$ s?
5. (II) Una pelota de béisbol de 145 g, que se mueve a lo largo del eje x con rapidez de 30.0 m/s, golpea una cerca con un ángulo de 45º, y rebota a lo largo del eje y sin cambio en su rapidez. Dé su cambio en la cantidad de movimiento usando la notación de vectores unitarios.
6. (II) Una pelota de béisbol de 0.145 kg, lanzada horizontalmente a 32.0 m/s, golpea un bate y se envía directamente hacia arriba a una altura de 36.5 m. Si el tiempo de contacto entre el bate y la pelota es de 2.5 s, calcule la fuerza promedio entre la pelota y el bate durante el contacto.
7. (II) Un cohete de 3180 kg está viajando en el espacio exterior con velocidad de 115 m/s y para alterar su curso en 35.0º, dispara sus cohetes brevemente en una dirección perpendicular a su movimiento original. Si los gases del cohete son expelidos con una rapidez de 1750 m/s, ¿qué masa debe expelerse?
8. (III) El aire en un viento de 120 km/h golpea de frente la fachada de un edificio de 45 m de ancho por 65 m de altura, y alcanza el reposo. Si el aire tiene una masa de 1.3 kg por metro cúbico, determine la fuerza promedio del viento sobre el edificio.

9–2 Conservación de la cantidad de movimiento

9. (I) Un vagón de 7700 kg que viaja a 18 m/s golpea un segundo vagón. Los dos permanecen unidos y se mueven juntos con una rapidez de 5.0 m/s. ¿Cuál es la masa del segundo vagón?

10. (I) Un carro de ferrocarril de 9150 kg viaja a lo largo de una vía horizontal sin fricción con rapidez constante de 15.0 m/s. Una carga de 4350 kg, inicialmente en reposo, se deja caer sobre el carro. ¿Cuál será entonces la nueva rapidez del carro?

11. (I) Un núcleo atómico en reposo decae radiactivamente en una partícula alfa y en un núcleo más pequeño. ¿Cuál será la rapidez de este núcleo al retroceder, si la rapidez de la partícula alfa es de 2.8×10^5 m/s? Suponga que el núcleo que retrocede tiene una masa 57 veces mayor que la de la partícula alfa.

12. (I) Un jugador de 130 kg se encuentra frontalmente a 2.5 m/s contra otro jugador (y lo derriba) de 82 kg que se mueve a 5.0 m/s. ¿Cuál será su rapidez mutua inmediatamente después de la colisión?

13. (II) Un niño en un bote lanza un paquete de 5.70 kg horizontalmente con una rapidez de 10.0 m/s, figura 9-37. Calcule la velocidad del bote inmediatamente después, suponiendo que inicialmente estaba en reposo. La masa del niño es de 24.0 kg y la del bote es de 35.0 kg.

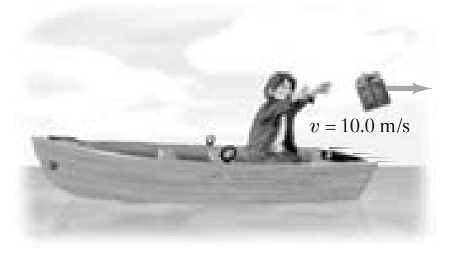


FIGURA 9–37
Problema 13.

14. (II) Un núcleo atómico que inicialmente se mueve a 420 m/s, emite una partícula alfa en la dirección de su velocidad, y el resto del núcleo frena a 350 m/s. Si la partícula alfa tiene una masa de 4.0 u y el núcleo original tiene una masa de 222 u, ¿qué rapidez tiene la partícula alfa cuando se emite?

15. (II) Una explosión rompe un objeto, originalmente en reposo, en dos fragmentos. Un fragmento adquiere el doble de la energía cinética del otro. ¿Cuál será la razón de sus masas?

16. (II) Una bala de 22 g que viaja a 210 m/s penetra un bloque de madera de 2.0 kg y emerge a 150 m/s. Si el bloque está en reposo sobre una superficie sin fricción al ser golpeado, ¿qué tan rápido se moverá el bloque después de que emerge la bala?

17. (II) Un cohete de masa m que viaja con rapidez v_0 a lo largo el eje x se desprende repentinamente de un tercio de su masa, perpendicularmente al eje x (a lo largo del eje y) con rapidez $2v_0$. Exprese la velocidad final del cohete con la notación $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$.

18. (II) El decaimiento de un neutrón en un protón, un electrón y un neutrino es un ejemplo de un proceso de decaimiento en tres partículas. Use la naturaleza vectorial de la cantidad de movimiento para demostrar que si el neutrón está inicialmente en reposo, los vectores de velocidad de las tres partículas deben ser coplanares (esto es, en el mismo plano). El resultado no es válido para decaimientos en más de tres partículas.

19. (II) Una masa $m_A = 2.0$ kg se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}_A = (4.0\hat{\mathbf{i}} + 5.0\hat{\mathbf{j}} - 2.0\hat{\mathbf{k}})$ m/s, y choca contra una masa $m_B = 3.0$ kg, que inicialmente está en reposo. Inmediatamente después del choque, se registra que la masa m_A viaja a una velocidad $\vec{\mathbf{v}}'_A = (-2.0\hat{\mathbf{i}} + 3.0\hat{\mathbf{k}})$ m/s. Calcule la velocidad de la masa m_B después del choque. Suponga que ninguna fuerza actúa sobre las dos masas durante la colisión.

20. (II) Un cohete de dos etapas de 925 kg está viajando con una rapidez de 6.60×10^3, m/s alejándose de la Tierra, cuando una explosión programada separa el cohete en dos secciones de igual masa, que después se mueven con una rapidez relativa entre sí de 2.80×10^3 m/s, a lo largo de la línea original de movimiento. *a*) ¿Cuáles serán la rapidez y dirección de movimiento de cada sección (relativa a la Tierra) después de la explosión? *b*) ¿Cuánta energía fue suministrada por la explosión? [*Sugerencia*: ¿Cuál es el cambio en energía cinética como resultado de la explosión?].

21. (III) Un proyectil de 224 kg, disparado con una rapidez de 116 m/s y con un ángulo de 60.0º, se rompe en tres partes de igual masa en el punto más alto de su arco (donde su velocidad es horizontal). Justo después de la explosión, dos de los fragmentos se mueven con la misma rapidez que tenía el proyectil completo antes de la explosión: uno de los fragmentos se mueve verticalmente hacia abajo y el otro horizontalmente. Determine *a*) la velocidad del tercer fragmento inmediatamente después de la explosión, y *b*) la energía liberada en la explosión.

9–3 Colisiones e impulso

22. (I) Una pelota de béisbol de 0.145 kg lanzada a 35.0 m/s se batea horizontalmente de regreso al pitcher a 56.0 m/s. Si el tiempo de contacto entre la pelota y el bate es de 5.00×10^{-3} s, calcule la fuerza (que se supone constante) que ejerce el bate sobre la pelota.

23. (II) Una pelota de golf con masa de 0.045 kg se golpea desde el *tee* con una rapidez de 45 m/s. El palo de golf estuvo en contacto con la pelota durante 3.5×10^{-3} s. Encuentre *a*) el impulso impartido a la pelota y *b*) la fuerza promedio ejercida sobre la pelota por el palo de golf.

24. (II) Un martillo de 12 kg golpea un clavo a una velocidad de 8.5 m/s y llega al reposo en un intervalo de tiempo de 8.0 ms. *a*) ¿Cuál es el impulso que se dio al clavo? *b)* ¿Cuál es la fuerza promedio que actúa sobre el clavo?

25. (II) Una pelota de tenis con masa $m = 0.060$ kg y rapidez $v = 25$ m/s golpea una pared con un ángulo de 45º y rebota con la misma rapidez a 45º (figura 9-38). ¿Cuál será el impulso (magnitud y dirección) dado a la pared?

FIGURA 9–38
Problema 25.

26. (II) Un astronauta de 130 kg (incluido su traje espacial) adquiere una rapidez de 2.50 m/s al empujarse con sus piernas contra una cápsula espacial de 1700 kg. *a*) ¿Cuál es el cambio en rapidez de la cápsula espacial? *b*) Si el empujón dura 0.500 s, ¿cuál será la fuerza promedio ejercida por cada cuerpo sobre el otro? Como marco de referencia, use la posición de la cápsula antes del empujón. *c*) ¿Cuál será la energía cinética de cada uno después del empujón?

27. (II) La lluvia cae a una tasa de 5.0 cm/h y se acumula en un recipiente. Si las gotas de lluvia golpean a 8.0 m/s, estime la fuerza en el fondo de un recipiente de 1.0 m^2 debida al impacto de la lluvia que no rebota. El agua tiene una masa de 1.00 Δ 10^3 kg por m^3.

28. (II) Suponga que la fuerza que actúa sobre una pelota de tenis (masa de 0.060 kg) apunta en la dirección $+x$ y está dada por la gráfica de la figura 9-39 en función del tiempo. Use la gráfica para estimar *a*) el impulso total dado a la pelota, y *b*) la velocidad de la pelota después de ser golpeada, suponiendo que la pelota se sirve cuando está casi inicialmente en reposo.

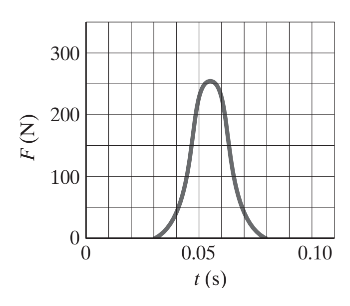


FIGURA 9–39
Problema 28.

29. (II) ¿Con qué impulso tiene que lanzarse un periódico de 0.50 kg para darle una rapidez de 3.0 m/s?

30. (II) La fuerza sobre una bala está dada por la fórmula $F = [740 - (2.3 \times 10^5\ \text{s}^{-1})t]$ N en el intervalo de tiempo $t = 0$ a $t = 3.0 \times 10^{-3}$ s. *a*) Dibuje una gráfica de F versus t desde $t = 0$ hasta $t = 3.0$ ms. *b*) Use la gráfica para determinar el impulso dado a la bala. *c*) Determine el impulso por integración. *d*) Si la bala alcanza una rapidez de 260 m/s como resultado de este impulso, dado a ella en el cañón de una arma, ¿cuál debe ser la masa de la bala? *e*) ¿Cuál será la rapidez de retroceso del arma de 4.5 kg?

31. (II) *a*) Una molécula de masa m y rapidez v golpea una pared en ángulo recto y rebota con la misma rapidez. Si el tiempo de colisión es Δt, ¿cuál será la fuerza promedio sobre la pared durante la colisión? *b*) Si moléculas, todas de este tipo, golpean la pared a intervalos de tiempo t (en promedio), ¿cuál será la fuerza promedio sobre la pared promediada durante un largo tiempo?

32. (III) *a*) Calcule el impulso que se experimenta cuando una persona de 65 kg cae en tierra firme después de saltar desde una altura de 3.0 m. *b*) Estime la fuerza promedio que ejerce la tierra sobre los pies del individuo, si la caída es con las piernas extendidas y *c*) con las piernas dobladas. Suponga que durante el impacto el cuerpo se mueve 1.0 cm con las piernas extendidas, y 50 cm con las piernas dobladas. [*Sugerencia:* Considere que la fuerza neta promedio sobre la persona, relacionada con el impulso, es la suma vectorial de la fuerza de gravedad y de la fuerza que ejerce la tierra].

33. (III) Una báscula se ajusta de manera que cuando una sartén plana se coloca sobre ella, registre un peso cero. Se abre un grifo de agua con altura $h = 2.5$ m y el agua cae sobre la sartén a una tasa $R = 0.14$ kg/s. Obtenga *a*) una fórmula para la lectura de la báscula en función del tiempo t y *b*) la lectura en $t = 9.0$ s. *c*) Resuelva de nuevo *a*) y *b*), pero reemplace la sartén plana por un recipiente cilíndrico estrecho y alto con área $A = 20\ \text{cm}^2$ (en este caso el nivel del agua dentro del cilindro se incrementa).

9–4 y 9–5 Colisiones elásticas

34. (II) Una pelota de tenis de 0.060 kg que se mueve con una rapidez de 4.50 m/s, tiene una colisión frontal contra otra pelota de 0.090 kg que se mueve inicialmente en la misma dirección y sentido con una rapidez de 3.00 m/s. Suponiendo una colisión perfectamente elástica, ¿cuál será la velocidad de cada pelota (magnitud, dirección y sentido) después de la colisión?

35. (II) Un disco de hockey de 0.450 kg que viaja hacia el este con una rapidez de 4.80 m/s, tiene una colisión frontal contra otro disco de 0.900 kg inicialmente en reposo. Suponiendo una colisión perfectamente elástica, ¿cuáles serán la rapidez y la dirección de cada disco después de la colisión?

36. (II) Una pelota de croquet de 0.280 kg tiene una colisión elástica frontal contra una segunda pelota inicialmente en reposo. La segunda pelota sale con la mitad de la rapidez original de la primera pelota. *a*) ¿Cuál es la masa de la segunda pelota? *b*) ¿Qué fracción de la energía cinética original ($\Delta K/K$) se transfiere a la segunda pelota?

37. (II) Una bola de masa 0.220 kg que se mueve con una rapidez de 7.5 m/s sufre una colisión frontal elástica contra otra bola inicialmente en reposo. Inmediatamente después de la colisión, la primera bola rebota hacia atrás con una rapidez de 3.8 m/s. Calcule *a*) la velocidad de la bola blanco después de la colisión, y *b*) la masa de la bola blanco.

38. (II) Una bola de masa m sufre una colisión frontal elástica contra una segunda bola (en reposo) y rebota con una rapidez igual a 0.350 de su rapidez original. ¿Cuál es la masa de la segunda bola?

39. (II) Determine la fracción de energía cinética perdida por un neutrón ($m_1 = 1.01$ u) cuando choca frontal y elásticamente contra una partícula blanco en reposo que es *a*) ${}^1_1\text{H}$ ($m = 1.01$ u); *b*) ${}^2_1\text{H}$ (hidrógeno pesado, $m = 2.01$ u); ${}^{12}_6\text{C}$ ($m = 12.00$ u); *d*) ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ (plomo, $m = 208$ u).

40. (II) Demuestre que, en general, para cualquier colisión elástica frontal unidimensional, las rapideces después de la colisión son

$$v'_B = v_A\left(\frac{2m_A}{m_A + m_B}\right) + v_B\left(\frac{m_B - m_A}{m_A + m_B}\right)$$

y

$$v'_A = v_A\left(\frac{m_A - m_B}{m_A + m_B}\right) + v_B\left(\frac{2m_B}{m_A + m_B}\right),$$

donde v_A y v_B son las rapideces iniciales de los dos objetos de masas m_A y m_B.

41. (III) Un bloque de 3.0 kg se desliza a lo largo de una mesa sin fricción a 8.0 m/s hacia un segundo bloque (en reposo) de masa 4.5 kg. Un resorte, que obedece la ley de Hooke y tiene una constante $k = 850$ N/m, está unido al segundo bloque de tal manera que se comprimirá al ser golpeado por el bloque en movimiento, figura 9-40. *a*) ¿Cuál será la compresión máxima del resorte? *b*) ¿Cuáles serán las velocidades finales de los bloques después de la colisión? c) ¿Es elástica la colisión? Ignore la masa del resorte.



FIGURA 9–40 Problema 41.

9–6 Colisiones inelásticas

42. (I) En un experimento de péndulo balístico, el proyectil 1 provoca una altura máxima h del péndulo igual a 2.6 cm. Un segundo proyectil (con la misma masa) provoca que el péndulo se balance el doble de alto, $h_2 = 5.2$ cm. ¿Cuántas veces más rápido es el segundo proyectil que el primero?

43. (II) *a*) Obtenga una fórmula para la fracción de energía cinética perdida durante la colisión, $\Delta K/K$, en términos de m y M, para la colisión del péndulo balístico del ejemplo 9-11. *b*) Haga la evaluación para $m = 16.0$ g y $M = 380$ g.

44. (II) Una bala de rifle de 28 g viaja a 210 m/s y se encaja en un péndulo de 3.6 kg que cuelga de una cuerda de 2.8 m de longitud, lo cual hace que el péndulo oscile hacia arriba describiendo un arco. Determine las componentes vertical y horizontal del desplazamiento máximo del péndulo.

45. (II) Una explosión interna rompe un objeto, inicialmente en reposo, en dos partes, una de las cuales tiene 1.5 veces la masa del otro. Si se liberaron 7500 J en la explosión, ¿cuánta energía cinética adquirió cada parte?

46. (II) Un automóvil deportivo de 920 kg choca contra la parte trasera de una camioneta todoterreno (SUV) de 2300 kg que estaba parada frente a una luz roja. Los parachoques y los frenos se traban, y los dos automóviles se deslizan hacia adelante 2.8 m antes de detenerse. El policía de tránsito, que sabe que el coeficiente de fricción cinética entre los neumáticos y el pavimento es de 0.80, calcula la rapidez del auto deportivo en el impacto. ¿Cuál fue esa rapidez?

47. (II) Usted suelta una bola de 12 g desde una altura de 1.5 m y sólo rebota hasta una altura de 0.75 m. ¿Cuál fue el impulso total sobre la pelota cuando golpea el piso? (Ignore la resistencia del aire).

48. (II) El automóvil A choca contra el automóvil B (inicialmente en reposo y de igual masa) por atrás mientras viaja a 35 m/s. Inmediatamente después del choque, el automóvil B se mueve hacia delante a 25 m/s y el automóvil A queda en reposo. ¿Qué fracción de la energía cinética inicial se pierde en el choque?

49. (II) Una medida de la inelasticidad en una colisión frontal de dos cuerpos es el *coeficiente de restitución e*, definido como

$$e = \frac{v'_A - v'_B}{v_B - v_A},$$

donde $v'_A - v'_B$ es la velocidad relativa de los dos objetos después de la colisión, y $v_B - v_A$ es su velocidad relativa antes del choque. *a*) Demuestre que para una colisión perfectamente elástica, $e = 1$; en tanto que para una colisión completamente inelástica, $e = 0$. *b*) Para medir el coeficiente de restitución de un cuerpo que entra en colisión con una superficie muy dura como el acero, un procedimiento sencillo consiste en dejar caer el objeto sobre una placa de acero, como se muestra en la figura 9-41. Determine una fórmula para *e* en términos de la altura original *h* y de la altura máxima *h′* alcanzada después de la colisión.

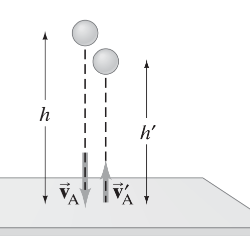


FIGURA 9–41 Problema 49. Medición del coeficiente de restitución.

50. (II) Un péndulo de masa *M* cuelga del extremo inferior de una varilla de longitud ℓ, cuya masa se ignora, con un pivote que no ejerce fricción en su extremo superior. Una masa *m*, que se mueve con una velocidad *v* como se muestra en la figura 9-42, choca contra *M* y se encaja. ¿Cuál es el valor mínimo de *v* suficiente para hacer que el péndulo (con la masa *m* incrustada) se balancee hasta el punto superior de su arco?

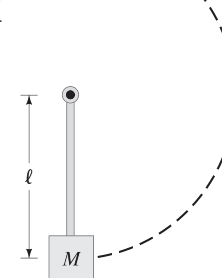




FIGURA 9–42 Problema 50.

51. (II) Una bala de masa $m = 0.0010$ kg se incrusta en un bloque de madera con masa $M = 0.999$ kg, que luego comprime un resorte ($k = 120$ N/m) a lo largo de una distancia $x = 0.050$ m antes de llegar al reposo. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la mesa es $m = 0.50$. *a*) ¿Cuál es la rapidez inicial de la bala? *b*) ¿Qué fracción de la energía cinética inicial de la bala se disipa (en forma de daños al bloque de madera, aumento de temperatura, etcétera) en la colisión entre la bala y el bloque?

52. (II) Una pelota de béisbol de 144 g se desplaza a 28.0 m/s y choca contra un ladrillo estacionario de 5.25 kg que descansa sobre pequeños rodillos, de manera que puede moverse sin fricción considerable. Después de golpear el ladrillo, la pelota rebota en línea recta hacia atrás, mientras que el ladrillo se mueve hacia delante a 1.10 m/s. *a*) ¿Cuál es la rapidez de la pelota de béisbol después del choque? *b*) Calcule la energía cinética total antes y después de la colisión.

53. (II) Un objeto de 6.0 kg que se mueve en la dirección $+x$ a 5.5 m/s choca frontalmente contra un objeto de 8.0 kg que se mueve en la dirección $-x$ a 4.0 m/s. Encuentre la velocidad final de cada masa si: *a*) los objetos se quedan pegados; *b*) la colisión es elástica; *c*) el objeto de 6.0 kg permanece en reposo después de la colisión; *d*) el objeto de 8.0 kg permanece en reposo después de la colisión; *e*) el objeto de 6.0 kg tiene una velocidad de 4.0 m/s en la dirección $-x$ después de la colisión. ¿Son "razonables" los resultados en los incisos *c*), *d*) y *e*)? Explique.

9–7 Colisiones en dos dimensiones

54. (II) Una bola de billar A de masa $m_A = 0.120$ kg que se mueve con una rapidez $v_A = 2.80$ m/s golpea una bola B de masa $m_B = 0.140$ kg que se encuentra inicialmente en reposo. Como resultado de la colisión, la bola A sale desviada en un ángulo de 30.0º con una rapidez $v'_A = 2.10$ m/s. *a*) Tomando el eje *x* como la dirección original del movimiento de la bola A, escriba las ecuaciones que expresan la conservación de la cantidad de movimiento en las componentes *x*, *y* por separado. *b*) En esas ecuaciones despeje la rapidez v'_B y el ángulo θ'_B, de la bola B. No suponga que la colisión es elástica.

55. (II) Un núcleo radiactivo en reposo decae en un segundo núcleo, un electrón y un neutrino. El electrón y el neutrino se emiten en ángulos rectos y tienen cantidades de movimiento de 9.6×10^{-23} kg · m/s y 6.2×10^{-23} kg · m/s, respectivamente. ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de la cantidad de movimiento del segundo núcleo (en retroceso)?

56. (II) Dos bolas de billar de igual masa se mueven según ángulos rectos y se encuentran en el origen de un sistema coordenado *xy*. Inicialmente la bola A se mueve hacia arriba a lo largo del eje *y* a 2.0 m/s, y la bola B se mueve hacia la derecha a lo largo del eje *x* con rapidez de 3.7 m/s. Después de la colisión (que se supone elástica), la segunda bola se mueve a lo largo del eje *y* positivo (figura 9-43). ¿Cuál es la dirección final de la bola A, y cuáles son las rapideces de las dos bolas?

FIGURA 9–43 Problema 56. (La bola A no se muestra después de la colisión).

57. (II) Un núcleo atómico de masa *m* que viaja con rapidez *v* sufre una colisión elástica con una partícula blanco de masa 2*m* (inicialmente en reposo) y se dispersa a 90º. *a*) ¿Con qué ángulo se mueve la partícula blanco después de la colisión? *b*) ¿Cuáles son las rapideces finales de las dos partículas? *c*) ¿Qué fracción de la energía cinética inicial se transfiere a la partícula blanco?

58. (II) Un neutrón choca elásticamente con un núcleo de helio (inicialmente en reposo), cuya masa es cuatro veces la del neutrón. Se observa que el núcleo de helio sale disparado a una ángulo $\theta'_2 = 45º$. Determine el ángulo del neutrón, θ'_1, y las rapideces de las dos partículas, v'_n y v'_{He}, después de la colisión. La rapidez inicial del neutrón es de 6.2×10^5 m/s.

59. (III) Un átomo de neón ($m = 20.0$ u) sufre una colisión perfectamente elástica contra otro átomo en reposo. Después del impacto, el átomo de neón viaja a un ángulo de 55.6º con respecto a su dirección original de movimiento y el átomo desconocido viaja a un ángulo de −50.0°. ¿Cuál será la masa (en u) del átomo desconocido? [*Sugerencia*: Utilice la ley de los senos].

60. (III) Para una colisión elástica entre una partícula proyectil de masa m_1 y una partícula blanco (en reposo) de masa m_2, demuestre que el ángulo de dispersión, θ'_1, del proyectil *a*) puede tomar cualquier valor entre 0 y 180º para $m_1 < m_2$; pero *b*) tiene un ángulo máximo ϕ dado por $\cos^2 \phi = 1 - (m_2/m_1)^2$ para $m_1 > m_2$.

61. (III) Demuestre que en la colisión elástica de dos objetos de masa idéntica, con uno de ellos inicialmente en reposo, el ángulo que forman sus vectores de velocidad final, después de la colisión siempre es de 90º.

9–8 Centro de masa (CM)

62. (I) Un automóvil vacío con masa de 1250 kg tiene su CM a 2.50 m detrás del frente del auto. ¿Qué tan lejos del frente estará el CM cuando dos personas viajan en el asiento delantero a 2.80 m del frente del vehículo y tres personas van en el asiento trasero a 3.90 m del frente? Suponga que cada persona tiene una masa de 70.0 kg.

63. (I) La distancia entre un átomo de carbono ($m = 12$ u) y un átomo de oxígeno ($m = 16$ u) en la molécula de CO es de 1.13×10^{-10} m. ¿Qué tan lejos del átomo de carbono está el centro de masa de la molécula?

64. (II) Tres cubos de lados ℓ_0, $2\ell_0$ y $3\ell_0$ están situados uno junto al otro (en contacto) con sus centros a lo largo de una línea recta, como se muestra en la figura 9-44. ¿Cuál es la posición, a lo largo de esta línea, del CM de este sistema? Suponga que los cubos están hechos del mismo material uniforme.

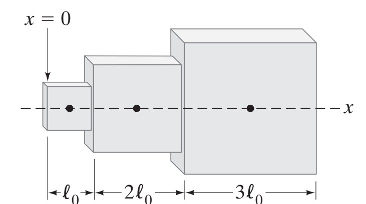


FIGURA 9–44 Problema 64.

65. (II) Una balsa cuadrada uniforme, de 18 m × 18 m, de masa 6200 kg se usa como trasbordador. Si tres automóviles, cada uno con masa de 1350 kg, ocupan las esquinas NE, SE y SO, determine el CM del trasbordador cargado con respecto al centro de la balsa.

66. (II) Una placa circular uniforme de radio $2R$ tiene un agujero circular de radio R. El centro C′ del agujero está a una distancia de $0.80R$ del centro C de la placa, figura 9-45. ¿Cuál es la posición del centro de masa de la placa? [*Sugerencia*: Intente una resta].

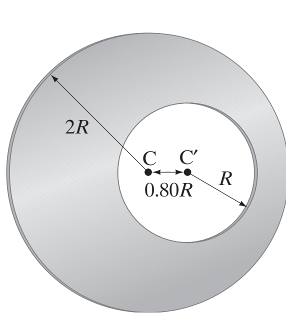


FIGURA 9–45 Problema 66.

67. (II) Un alambre delgado uniforme se dobla en un semicírculo de radio r. Determine las coordenadas de su centro de masa con respecto a un origen de coordenadas en el centro del círculo "completo".

68. (II) Encuentre el centro de masa de la molécula de amoniaco. La formula química del amoniaco es NH_3. Los hidrógenos están en las esquinas de un triángulo equilátero (con lados de 0.16 nm) que forma la base de una pirámide con el nitrógeno en el ápice (0.037 nm verticalmente arriba del plano del triángulo).

69. (III) Determine el CM de una parte de máquina, que tiene la forma de cono uniforme de altura h y radio R, figura 9-46. [*Sugerencia*: Divida el cono en un número infinito de discos de espesor dz, uno de los cuales se muestra].

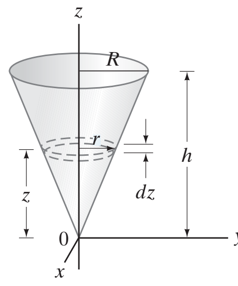


FIGURA 9–46 Problema 69.

70. (III) Determine el CM de una pirámide uniforme que tiene cuatro caras triangulares y una base cuadrada con todos los lados iguales de longitud s. [*Sugerencia*: Véase el problema 69].

71. (III) Determine el CM de una placa semicircular, delgada, uniforme.

9–9 CM y movimiento traslacional

72. (II) La masa $M_A = 35$ kg y la masa $M_B = 25$ kg tienen velocidades (en m/s) de $\vec{\mathbf{v}}_A = 12\hat{\mathbf{i}} - 16\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{v}}_B = -20\hat{\mathbf{i}} + 14\hat{\mathbf{j}}$. Determine la velocidad del centro de masa del sistema.

73. (II) Las masas de la Tierra y de la Luna son 5.98×10^{24} kg y 7.35×10^{22} kg, respectivamente, y sus centros están separados por 3.84×10^{8} m. *a*) ¿Dónde se encuentra el CM de este sistema? *b*) ¿Qué puede usted decir acerca del movimiento del sistema Tierra-Luna alrededor del Sol, así como de la Tierra y la Luna por separado alrededor del Sol?

74. (II) Un mazo consiste en una cabeza cilíndrica uniforme de masa 2.80 kg y diámetro de 0.0800 m montado sobre un mango cilíndrico uniforme de masa 0.500 kg y longitud de 0.240 m, como se muestra en la figura 9-47. Si este mazo se lanza girando al aire, ¿a qué distancia arriba del fondo del mango está el punto que describirá una trayectoria parabólica?

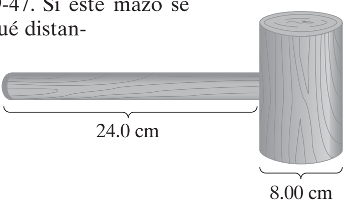


FIGURA 9–47 Problema 74.

75. (II) Una mujer de 55 kg y un hombre de 72 kg están de pie a 10.0 m de distancia entre sí sobre hielo sin fricción. *a*) ¿Qué tan lejos de la mujer está el CM de los dos? *b*) Si cada uno sostiene un extremo de una cuerda, y el hombre jala la cuerda de manera que él se mueve 2.5 m, ¿a qué distancia de la mujer estará él ahora? *c*) ¿Qué tan lejos se habrá movido el hombre cuando choca con la mujer?

76. (II) Suponga que en el ejemplo 9-18 (figura 9-32) $m_{II} = 3m_I$. *a*) ¿Donde aterrizaría entonces m_{II}? *b*) ¿Dónde aterrizará, si $m_I = 3m_{II}$?

77. (II) Dos personas, una con masa de 85 kg y la otra con masa de 55 kg, están sentadas en un bote de remos con masa de 78 kg. Con el bote inicialmente en reposo, las dos personas que han estado sentadas en los extremos opuestos del bote, a 3.0 m de distancia entre sí, intercambian sus posiciones. ¿Cuánto y en qué dirección se moverá el bote?

78. (III) Un vagón plano de 280 kg y 25 m de largo se mueve con una rapidez de 6.0 m/s a lo largo de rieles horizontales sin fricción. Un trabajador de 95 kg empieza a caminar de un extremo del carro al otro en la dirección del movimiento, con rapidez de 2.0 m/s con respecto al carro. En el tiempo que le toma a él llegar al otro extremo, ¿cuánto se habrá movido el carro?

79. (III) Un globo aerostático y su góndola, de masa M, están en el aire y estacionarios con respecto al suelo. Un pasajero de masa m desciende por una cuerda con rapidez v, medida con respecto al globo. ¿Con qué rapidez y dirección (relativa a la Tierra) se mueve entonces el globo mientras el pasajero desciende? ¿Qué ocurre si el pasajero se detiene?

* 9–10 Masa variable

*** 80.** (II) Un cohete de 3500 kg va a acelerarse a 3.0 g en el despegue desde la Tierra. Si los gases pueden ser expulsados a una tasa de 27 kg/s, ¿cuál debe ser la rapidez de salida de los gases?

*** 81.** (II) Suponga que la banda transportadora del ejemplo 9-19 es retardada por una fuerza de fricción de 150 N. Determine la potencia de salida (hp) requerida del motor en función del tiempo, a partir del momento en que la grava empieza a caer ($t = 0$) hasta 3.0 s después de que la grava empieza a descargarse fuera en el extremo de la banda transportadora de 22 m de largo.

*** 82.** (II) El motor a chorro de un avión toma 120 kg de aire por segundo, que se quema con 4.2 kg de combustible por segundo. Los gases quemados salen del avión a una rapidez de 550 m/s (con respecto al avión). Si el avión está viajando a 270 m/s (600 mi/h), determine *a*) el empuje debido al combustible expelido; *b*) el empuje debido al aire acelerado que pasa por el motor; y *c*) la potencia entregada en hp.

*83. (II) Un cohete que viaja a 1850 m/s, alejándose de la Tierra, enciende sus motores a una altitud de 6400 km que expelen gas con una rapidez de 1300 m/s (con respecto a los motores). Si la masa del cohete en este momento es de 25,000 kg y se desea adquirir una aceleración de 1.5 m/s^2, ¿a qué tasa deben expulsarse los gases?

*84. (III) Un trineo lleno con arena resbala sin fricción hacia abajo por una pendiente de 32º. La arena se sale por un agujero en el trineo a una tasa de 2.0 kg/s. Si el trineo parte del reposo con una masa total inicial de 40.0 kg, ¿cuánto tiempo le tomará al trineo viajar 120 m a lo largo de la pendiente?

Problemas generales

85. Un jugador de billar novato tiene que meter la bola de color en la buchaca superior izquierda, como se muestra en la figura 9-48, donde se indican las dimensiones relativas. ¿El jugador debería preocuparse de que la bola blanca también cayera en una buchaca? Dé detalles. Suponga que la masa de las bolas es la misma y que es una colisión elástica.

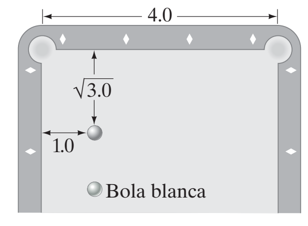


FIGURA 9–48 Problema 85.

86. Durante una tormenta en Chicago, el viento puede soplar horizontalmente con rapidez de 120 km/h. Si el aire golpea a una persona con una tasa de 45 kg/s por metro cuadrado y es llevado al reposo, calcule la fuerza del viento sobre una persona. Suponga que el área de la persona es de 1.60 m de altura y 0.50 m de ancho. Compárela con la fuerza de fricción típica máxima ($\mu \approx 1.0$) entre la persona y el suelo, si la persona tiene una masa de 75 kg.

87. Se deja caer una bola desde una altura de 1.50 m y rebota hasta una altura de 1.20 m. ¿Aproximadamente cuántos rebotes dará la bola antes de perder el 90% de su energía?

88. Para derribar un pino situado como se observa en la figura 9-49, es necesario golpear otro pino de forma lateral. Suponga que la bola viaja inicialmente a 13.0 m/s y tiene cinco veces la masa de un pino, y que éste sale disparado a un ángulo de 75º con respecto a la dirección original de la bola. Calcule la rapidez *a*) del pino y *b*) de la bola justo después de la colisión; y *c*) determine el ángulo al cual se desvía la bola. Suponga que la colisión es elástica e ignore cualquier rotación de la bola.

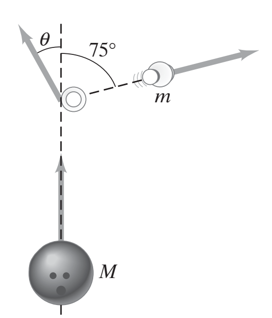


FIGURA 9–49 Problema 88.

89. Una arma es disparada verticalmente hacia un bloque de 1.40 kg de madera, que está en reposo sobre una delgada hoja horizontal directamente debajo de él, figura 9-50. Si la bala tiene una masa de 24.0 g y una rapidez de 310 m/s, ¿qué tan alto se elevará el bloque en el aire después de que la bala queda empotrada en él?

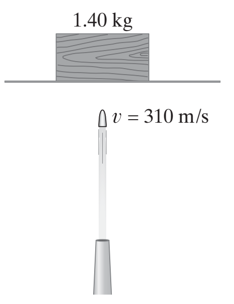


FIGURA 9–50 Problema 89.

90. Un disco de hockey de masa $4m$ se programó para explotar, como parte de un juego. Inicialmente el disco está en reposo sobre una cancha de hielo sin fricción y luego explota en tres partes. Un trozo, de masa m, se desliza sobre el hielo con velocidad $v\hat{\mathbf{i}}$. Otro trozo, de masa $2m$, se desliza sobre el hielo con velocidad $2v\hat{\mathbf{j}}$. Determine la velocidad del tercer trozo.

91. Para la colisión completamente inelástica de los dos carros de ferrocarril que consideramos en el ejemplo 9-3, calcule qué tanto de la energía cinética inicial se transforma a térmica u otra forma de energía.

92. Un vagón abierto de ferrocarril de 4800 kg se mueve libremente con rapidez constante de 8.60 m/s sobre una vía horizontal. Empieza a caer nieve verticalmente y llena el vagón a una tasa de 3.80 kg/min. Ignorando la fricción con las vías, determine la rapidez del vagón después de 60.0 min. (Véase la sección 9-2).

*93. Considere el carro de ferrocarril del problema 92, que se llena lentamente con nieve. *a*) Determine la rapidez del carro en función del tiempo usando la ecuación 9-19. *b*) ¿Cuál es la rapidez del carro después de 60.0 minutos? ¿Concuerda esto con el cálculo más sencillo (problema 92)?

94. Dos bloques de masas m_A y m_B, que descansan sobre una mesa sin fricción, están conectados por un resorte estirado y luego se sueltan. *a*) ¿Hay una fuerza neta externa sobre el sistema? *b*) Determine la razón de sus rapideces, v_A/v_B. *c*) ¿Cuál es la razón de sus energías cinéticas? *d*) Describa el movimiento del CM de este sistema. *e*) ¿Cómo alteraría la presencia de fricción los resultados anteriores?

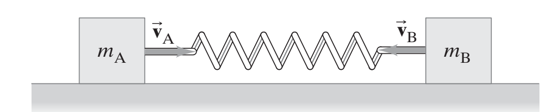


FIGURA 9–51 Problema 94.

95. Usted ha sido contratado como testigo experto en un caso judicial relacionado con un accidente automovilístico, el cual involucró un automóvil A con masa de 1500 kg que chocó contra un auto B estacionado con masa de 1100 kg. El conductor del automóvil A aplicó los frenos 15 m antes de derraparse y estrellarse contra el auto B. Después de la colisión, A se derrapó 18 m, y B se derrapó 30 m. El coeficiente de fricción cinética entre las ruedas trabadas y el camino se midió igual a 0.60. Demuestre al tribunal que el conductor del automóvil A excedía el límite de velocidad de 55 mi/h (90 km/h), antes de aplicar los frenos.

96. Un meteorito cuya masa aproximada era de 2.0×10^8 kg golpeó la Tierra ($m_E = 6.0 \times 10^{24}$ kg) con una rapidez de aproximadamente 25 km/s y llegó al reposo en la Tierra. *a*) ¿Cuál fue la rapidez de retroceso de la Tierra (relativa a la Tierra en resposo antes del choque)? *b*) ¿Qué fracción de la energía cinética del meteorito se transformó en energía cinética de la Tierra? *c*) ¿Cuánto cambió la energía cinética de la Tierra como resultado de esta colisión?

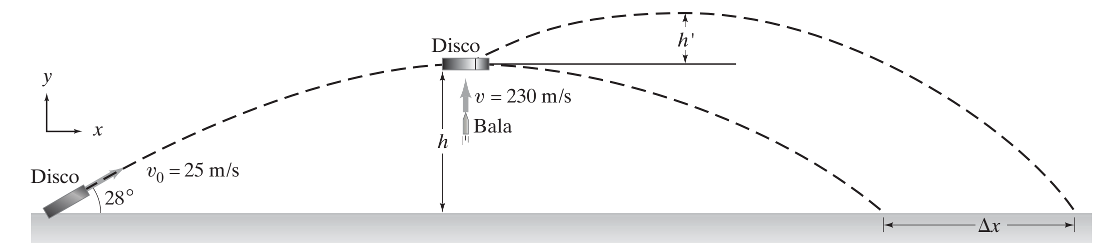


FIGURA 9–54 Problema 103.

97. Dos astronautas, con masas de 65 kg, y 85 kg respectivamente, se encuentran inicialmente en reposo en el espacio. Después se empujan uno al otro alejándose. ¿Qué tan lejos estarán luego de que el astronauta más ligero se haya desplazado 12 m?

98. Una bala de 22 g golpea y queda encajada dentro de un bloque de madera de 1.35 kg que está colocado sobre una superficie horizontal justo enfrente del arma. Si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es 0.28 y el impacto impulsa al bloque una distancia de 8.5 m antes de llegar al reposo, ¿cuál fue la rapidez de disparo de la bala?

99. Dos bolas, de masas $m_A = 45$ g y $m_B = 65$ g, están suspendidas como se observa en la figura 9-52. La bola más ligera se jala en un ángulo de 66° con respecto a la vertical y se libera. *a*) ¿Cuál es la velocidad de la bola más ligera antes del impacto? *b*) ¿Cuál es la velocidad de cada bola después de la colisión elástica? *c*) ¿Cuál será la altura máxima de cada bola después de la colisión elástica?

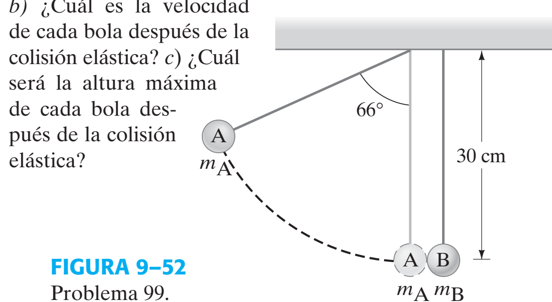


FIGURA 9–52 Problema 99.

100. Un bloque de masa m = 2.20 kg se desliza hacia abajo por una rampa inclinada a 30.0º que tiene 3.60 m de altura. En el fondo, golpea un bloque de masa M = 7.00 kg que está en reposo sobre una superficie horizontal, figura 9-53. (Suponga una transición suave en el fondo de la rampa.) Si la colisión es elástica y puede ignorarse la fricción, determine *a*) las rapideces de los dos bloques justo después de la colisión, y *b*) ¿qué distancia recorrerá hacia arriba de la rampa masa más ligera?

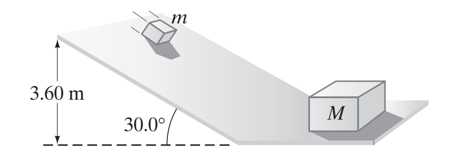


FIGURA 9–53 Problemas 100 y 101.

101. En el problema 100 (figura 9-53), ¿cuál es el límite superior para la masa m si ésta debe rebotar desde M, subir por la rampa, detenerse, deslizarse hacia abajo por la rampa, y golpear a M de nuevo?

102. Después de una colisión completamente inelástica entre dos objetos de igual masa, cada uno con rapidez inicial v, los dos se mueven juntos con rapidez $v/3$. ¿Cuál era el ángulo entre sus direcciones iniciales?

103. Un disco de arcilla (el blanco) de 0.25 kg se dispara a un ángulo de 28º con respecto a la horizontal con una rapidez de 25 m/s (figura 9-54). Cuando alcanza la altura máxima h, es golpeado desde abajo por una bala de 15 g que viaja verticalmente hacia arriba con una rapidez de 230 m/s. La bala se encaja en el disco. *a*) ¿Cuánto más, h', subirá el disco? *b*) ¿Qué distancia *adicional* Δx viajará el disco debido a la colisión?

104. Un resorte sin masa y con constante k se coloca entre un bloque de masa m y un bloque de masa $3m$. Inicialmente los bloques están en reposo sobre una superficie sin fricción, y se mantienen juntos de manera que el resorte entre ellos está comprimido una cantidad D a partir de su longitud natural. Los bloques son liberados y el resorte los empuja separándolos en sentidos opuestos. Encuentre las rapideces de los dos bloques justo cuando se separan del resorte.

105. *Efecto de honda gravitacional*. En la figura 9-55 se muestra al planeta Saturno moviéndose en la dirección x negativa con su rapidez orbital (con respecto al Sol) de 9.6 km/s. La masa de Saturno es 5.69×10^{26} kg. Una nave espacial con masa de 825 kg se acerca a Saturno. Cuando está lejos de Saturno, la nave se mueve en la dirección $+x$ a 10.4 km/s. La atracción gravitacional de Saturno (una fuerza conservativa) ocasiona que la nave espacial dé la vuelta alrededor de él (la órbita se muestra con línea punteada) y se aleje en la dirección opuesta. Estime la rapidez final de la nave cuando esté de nuevo lo suficientemente lejos como para quedar libre del jalón gravitacional de Saturno.

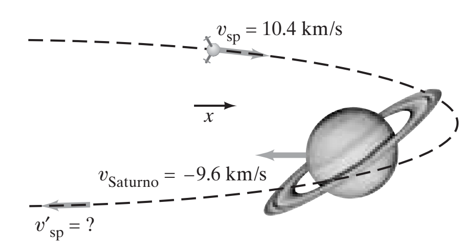


FIGURA 9–55 Problema 105.

106. En un parque de diversiones los parachoques de dos cochecitos chocan elásticamente conforme uno se aproxima al otro directamente desde la parte trasera (figura 9-56). El auto A tiene una masa de 450 kg y el B de 490 kg, a causa de las masas diferentes de los pasajeros. Si el auto A se aproxima a 4.50 m/s y el auto B se mueve a 3.70 m/s, calcule *a*) sus velocidades después del choque, y *b*) el cambio en la cantidad de movimiento de cada uno.

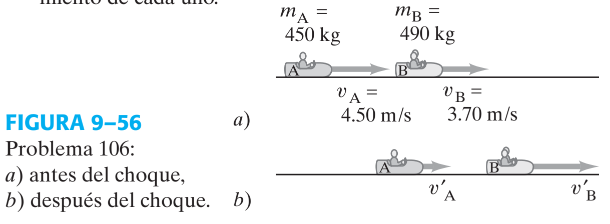


FIGURA 9–56 Problema 106: *a*) antes del choque, *b*) después del choque.

107. En un laboratorio de física, un cubo pequeño se desliza hacia abajo por un plano sin fricción, como se muestra en la figura 9-57, y golpea elásticamente otro cubo que está en la parte inferior y tiene sólo la mitad de la masa del primero. Si el plano tiene 35 cm de altura y la mesa tiene 95 cm de altura medida desde el piso, ¿dónde caerá cada cubo? [*Sugerencia:* Ambos salen del plano moviéndose horizontalmente].

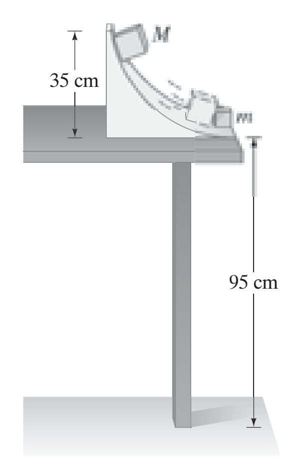


FIGURA 9–57 Problema 107.

108. El transbordador espacial lanza un satélite de 850 kg expulsándolo desde el compartimiento de carga. El mecanismo de eyección se activa y está en contacto con el satélite durante 4.0 s para impartirle una velocidad de 0.30 m/s en la dirección z con respecto al transbordador. La masa de éste es de 92,000 kg. *a*) Determine la componente de la velocidad v_f del transbordador en la dirección $-z$ como resultado de la expulsión. *b*) Encuentre la fuerza promedio que el transbordador ejerce sobre el satélite durante la expulsión.

109. Suponga que usted es el ingeniero de diseño encargado de las pruebas de resistencia a los choques de nuevos modelos de automóviles. Los autos se prueban haciéndolos estrellarse a 45 km/h contra enormes barreras fijas. Un nuevo modelo con masa de 1500 kg tarda 0.15 s en llegar al reposo luego de sufrir el impacto. *a*) Calcule la fuerza promedio que ejerce la barrera sobre el automóvil. *b*) Calcule la desaceleración promedio del auto.

110. Los astrónomos estiman que un asteroide de 2.0 km de diámetro choca contra la Tierra una vez cada millón de años. El choque supondría una amenaza para la vida en la Tierra. *a*) Suponga que un asteroide esférico tiene una masa de 3200 kg por cada metro cúbico de volumen y se mueve hacia la tierra a 15 km/s. ¿Cuánta energía destructiva podría liberarse cuando se incruste en la Tierra? *b*) Por comparación, una bomba nuclear podría liberar cerca de 4.0×10^{16} J. ¿Cuántas de esas armas tendrían que explotar al mismo tiempo para liberar la energía destructiva de la colisión del asteroide contra la Tierra?

111. Un astronauta con masa de 210 kg, incluidos su traje y propulsor, desea adquirir una velocidad de 2.0 m/s para regresar al trasbordador espacial. Suponiendo que el propulsor puede lanzar gas con una velocidad de 35 m/s, ¿qué masa de gas necesitará expulsar?

112. Un planeta extrapolar (que está fuera del Sistema Solar) puede detectarse al observar la oscilación que le produce el planeta a la estrella alrededor de la cual gira. Suponga que un planeta así de masa m_B gira en torno a su estrella de masa m_A. Si ninguna fuerza externa actúa sobre este sencillo sistema de dos objetos, entonces su CM es estacionario. Suponga que m_A y m_B describen órbitas circulares con radios r_A y r_B alrededor del CM del sistema. *a*) Demuestre que

$$r_A = \frac{m_B}{m_A} r_B .$$

b) Ahora considere una estrella semejante al Sol y un solo planeta con las mismas características de Júpiter. Esto es, $m_B = 1.0 \times 10^{-3}\, m_A$; y el planeta tiene un radio orbital de 8.0×10^{11} m. Determine el radio r_A de la órbita de la estrella alrededor del CM del sistema. *c*) Cuando se observa desde la Tierra, el sistema distante parece oscilar a lo largo de una distancia de $2r_A$. Si los astrónomos son capaces de detectar los desplazamientos angulares θ de un milisegundo de arco (1 segundo de arco = ($\frac{1}{3600}$ de un grado), ¿desde qué distancia d (en años-luz) podrá detectarse la oscilación de la estrella (1 año-luz = 9.46×10^{15} m)? *d*) La estrella más cercana al Sol está aproximadamente a 4 años-luz. Suponiendo que las estrellas están distribuidas de manera uniforme en nuestra región de la Vía Láctea, ¿a cuántas estrellas podrá aplicarse esta técnica para buscar sistemas planetarios más allá del Sistema Solar?

113. Suponga que dos asteroides chocan frontalmente entre sí. El asteroide A ($m_A = 7.5 \times 10^{12}$ kg) tiene una velocidad de 3.3 km/s antes de la colisión, en tanto que el asteroide B ($m_B = 1.45 \times 10^{13}$ kg) tiene una velocidad de 1.4 km/s antes del choque en la misma dirección pero con sentido contrario. Si los asteroides se quedan pegados, ¿cuál será la velocidad (magnitud y dirección) del nuevo sistema de asteroides después de la colisión?

* Problemas numéricos/por computadora

***114.** (III) Una partícula de masa m_A viaja con una rapidez v_A y tiene un choque elástico de frente contra una partícula estacionaria con una masa más pequeña de m_B. *a*) Demuestre que la rapidez de m_B después del choque es

$$v'_B = \frac{2v_A}{1 + m_B/m_A}.$$

b) Considere ahora una tercera partícula de masa m_C en reposo entre m_A y m_B, de manera que primero m_A choca de frente contra m_C y luego m_C choca de frente contra m_B. Ambos choques son elásticos. Demuestre que, en este caso,

$$v'_B = 4v_A \frac{m_C m_A}{(m_C + m_A)(m_B + m_C)}.$$

c) A partir del resultado del inciso *b*), demuestre que para el máximo de v'_B, $m_C = \sqrt{m_A m_B}$. *d*) Suponga que $m_B = 2.0$ kg, $m_A = 18.0$ kg y $v_A = 2.0$ m/s. Utilice una hoja de cálculo para determinar y graficar los valores de v'_B considerando $m_C = 0.0$ kg a $m_C = 50.0$ kg en pasos de 1.0 kg. ¿Para qué valor de m_C es máximo el valor de v'_B? ¿Su resultado numérico está en concordancia con su resultado para el inciso *c*)?

Respuestas a los ejercicios

A: *c*) porque es mayor el cambio en la cantidad de movimiento.

B: Mayor (Δp es más grande).

C: 0.50 m/s.

D: *a*) 6.0 m/s; *b*) casi cero; *c*) casi 24.0 m/s.

E: *b*); *d*).

F: $x_{CM} = -2.0$ m; sí.

G: *a*).

H: El bote se mueve en la dirección contraria.

Usted también puede experimentar el rápido movimiento de rotación, si su estómago es capaz de resistir la elevada velocidad angular y la aceleración centrípeta de alguna de las atracciones más rápidas del parque de diversiones. Si no, intente con el carrusel o con la rueda de la fortuna, que son más lentos. Los juegos de rotación de las ferias tienen energía cinética rotacional, así como cantidad de movimiento angular. La aceleración angular se produce por una fuerza no balanceada y un objeto en rotación tiene energía cinética rotacional.





Movimiento rotacional

CONTENIDO

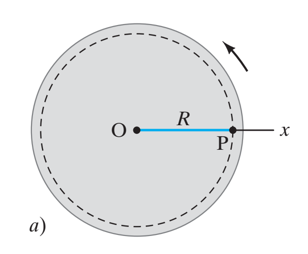
PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!
Una pelota y un cilindro sólidos bajan rodando por una rampa. Ambos parten del reposo al mismo tiempo. ¿Cuál llegará primero al fondo de la rampa?

a) Ambos llegarán al mismo tiempo.
b) Llegarán casi al mismo tiempo, excepto por diferencias en la fricción.
c) La pelota llegará primero.
d) El cilindro llegará primero.
e) No se puede determinar sin conocer la masa y el radio de cada uno.

Hasta ahora nos hemos ocupado sólo del movimiento traslacional. Discutimos ya la cinemática y la dinámica del movimiento traslacional (por ejemplo, el papel de la fuerza), y la energía y la cantidad de movimiento asociadas con el movimiento traslacional. En este capítulo y en el siguiente nos ocuparemos del movimiento rotacional. Explicaremos la cinemática del movimiento rotacional y luego su dinámica (incluyendo la torca), así como la energía cinética rotacional y la cantidad de movimiento angular (el análogo rotacional de la cantidad de movimiento lineal). Nuestra comprensión del mundo que nos rodea aumentará de forma significativa; hablaremos de las ruedas de una bicicleta en movimiento, los discos compactos, los juegos en un parque de diversiones, un patinador que da vueltas, la Tierra que gira y una centrífuga. Seguramente habrá algunas sorpresas.

Nos enfocaremos principalmente en la rotación de objetos rígidos. Un **objeto rígido** o **cuerpo rígido** es aquel que tiene una forma definida que no cambia, por lo que las partículas que lo componen permanecen en posiciones fijas entre sí. Cualquier objeto real es capaz de vibrar o de deformarse cuando se ejerce una fuerza sobre él. Sin embargo, a menudo tales efectos son muy pequeños, por lo que el concepto de un objeto rígido ideal es muy útil como una buena aproximación.

Nuestro desarrollo del movimiento rotacional será análogo a nuestro análisis del movimiento traslacional: posición rotacional, velocidad angular, aceleración angular, inercia rotacional y el análogo rotacional de fuerza: "la torca o par de torsión".



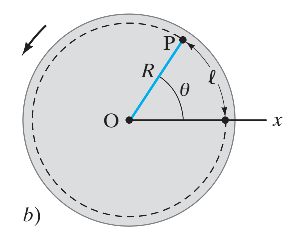


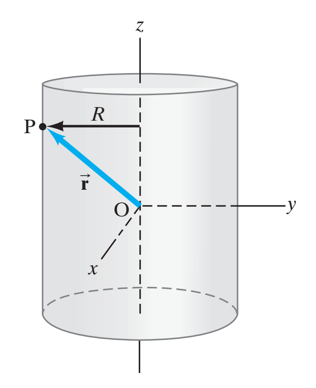
FIGURA 10–1 Vista de una rueda con rotación antihoraria alrededor de un eje que pasa por el centro O de la rueda (perpendicular a la página). Cada punto, como el punto P, se mueve en una trayectoria circular; ℓ es la distancia que viaja el punto P conforme la rueda gira a través del ángulo θ.

10–1 Cantidades angulares

El movimiento de un objeto rígido se puede analizar como el movimiento traslacional de su centro de masa más el movimiento rotacional *con respecto a* su centro de masa (secciones 9-8 y 9-9). Ya hemos estudiado en detalle el movimiento traslacional, por lo que ahora centraremos nuestra atención en el movimiento rotacional puro. *Movimiento rotacional puro* de un objeto alrededor de un eje fijo significa que todos los puntos en el objeto se mueven en círculos, como el punto P en la rueda en rotación de la figura 10-1, y que los centros de tales círculos se encuentran todos sobre una línea llamada el **eje de rotación**. En la figura 10-1, el eje de rotación es perpendicular a la página y pasa por el punto O. Suponemos que el eje está fijo en un marco de referencia inercial, aunque puede ser que el eje no pase por el centro de masa.

Para objetos rígidos tridimensionales en rotación alrededor de un eje fijo, usaremos el símbolo R para representar la distancia perpendicular de un punto o una partícula del objeto al eje de rotación. Hacemos esto para distinguir R de r, que continuará representando la posición de una partícula con referencia al origen (un punto) de algún sistema coordenado. Esta diferencia se ilustra en la figura 10-2. Tal distinción quizá parezca un detalle pequeño, pero no tener esta notación presente ocasionaría graves errores cuando se trabaje con el movimiento rotacional. Para un cuerpo plano, muy delgado, como una rueda, con el origen en el plano del objeto (por ejemplo, en el centro de una rueda), R y r serán casi los mismos.

FIGURA 10–2 Se muestra la diferencia entre $\vec{\mathbf{r}}$ (vector posición) y R (distancia perpendicular desde el eje de rotación) para un punto P sobre el borde de un cilindro que gira alrededor del eje z.



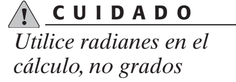
Todo punto de un cuerpo que gira alrededor de un eje fijo se mueve en un círculo (que se indica con una línea punteada en la figura 10-1 para el punto P), cuyo centro está sobre el eje de rotación y cuyo radio es R, es decir, la distancia de ese punto al eje de rotación. Una línea recta dibujada del eje a cualquier punto en el objeto barre el mismo ángulo θ en el mismo intervalo de tiempo.

Para indicar la posición angular del objeto, o cuánto ha girado, especificamos el ángulo θ de alguna línea particular en el objeto (en color en la figura 10-1) con respecto a alguna línea de referencia, como el eje x en la figura 10-1. Un punto en el objeto, como P en la figura 10-1b, se mueve a través de un ángulo θ cuando viaja la distancia ℓ medida a lo largo de la circunferencia de su trayectoria circular. Los ángulos se indican comúnmente en grados, pero la matemática del movimiento circular es mucho más sencilla si usamos el *radián* para medidas angulares. Un **radián** (que se abrevia rad) se define como el ángulo subtendido por un arco cuya longitud es igual al radio. Por ejemplo, en la figura 10-1, el punto P está a una distancia R del eje de rotación, y se ha movido una distancia ℓ a lo largo del arco de un círculo. Se dice entonces que la longitud ℓ del arco "subtiende" un ángulo θ. En general, cualquier ángulo θ está dado por

$$\theta = \frac{\ell}{R}, \qquad [\theta \text{ en radianes}] \qquad \textbf{(10–1a)}$$

donde R es el radio del círculo y ℓ es la longitud del arco subtendido por el ángulo θ, que se especifica en radianes. Si $\ell = R$, entonces $\theta = 1$ rad.

El radián, como es la razón de dos longitudes, es una cantidad adimensional. Por lo que no tenemos que mencionarlo en los cálculos, aunque por lo general es mejor incluirlo para que recordemos que el ángulo está en radianes y no en grados. Reescribimos la ecuación 10-1a en términos de la longitud del arco ℓ como:



Utilice radianes en el cálculo, no grados

$$\ell = R\theta. \qquad \textbf{(10–1b)}$$

Los radianes pueden relacionarse con los grados de la siguiente manera. En un círculo completo hay 360°, que por supuesto corresponden a una longitud de arco igual a la circunferencia del círculo, $\ell = 2\pi R$. Entonces, $\theta = \ell/R = 2\pi R/R = 2\pi$ radianes en un círculo completo, por lo que

$$360° = 2\pi \text{ rad.}$$

Por tanto, un radián es igual a $360°/2\pi r \approx 360°/6.28 \approx 57.3°$. Un objeto que hace una revolución (rev) completa ha girado 360° o 2π radianes:

$$1 \text{ rev} = 360° = 2\pi \text{ rad.}$$

EJEMPLO 10–1 **Aves de presa: En radianes.** El ojo de un ave particular puede distinguir objetos que subtienden un ángulo no menor que aproximadamente 3×10^{-4} radianes. *a*) ¿A cuántos grados corresponde esto? *b*) ¿Qué tan pequeño sería un objeto que el ave pueda distinguir justo al volar a una altitud de 100 m (figura 10-3a)?

PLANTEAMIENTO Para *a)* se usa la relación $360° = 2\pi$ rad. Para *b)* se utiliza la ecuación 10-1b, $\ell = R\theta$, para encontrar la longitud del arco.

SOLUCIÓN *a)* Convertimos 3×10^{-4} rad a grados:

$$\left(3 \times 10^{-4}\,\text{rad}\right)\left(\frac{360°}{2\pi\,\text{rad}}\right) = 0.017°,$$

o casi 0.02°.

b) Empleamos la ecuación 10-1b, $\ell = R\theta$. Para ángulos pequeños, la longitud de arco ℓ y la longitud de la cuerda son aproximadamente iguales (figura 10-3b). Como R = 100 m y $\theta = 3 \times 10^{-4}$ rad, encontramos

$$\ell = (100\,\text{m})\left(3 \times 10^{-4}\,\text{rad}\right) = 3 \times 10^{-2}\,\text{m} = 3\,\text{cm}.$$

Una ave puede distinguir un pequeño ratón (de aproximadamente 3 cm de longitud) desde una altura de 100 m. Ésta es una buena agudeza visual.

NOTA Si el ángulo se hubiera proporcionado en grados, primero habríamos tenido que hacer la conversión a radianes para realizar este cálculo. La ecuación 10-1 es válida *solamente* si el ángulo se especifica en radianes. Los grados (o revoluciones) no funcionarán.

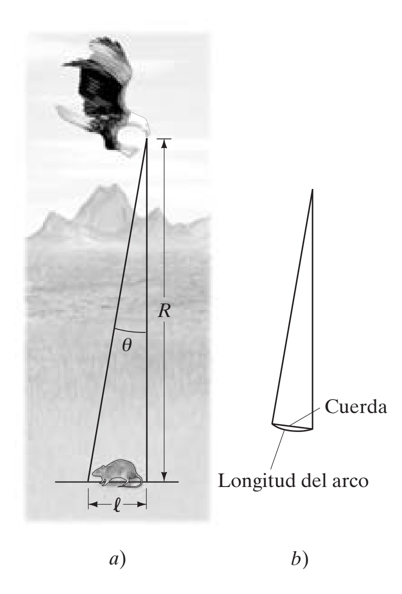


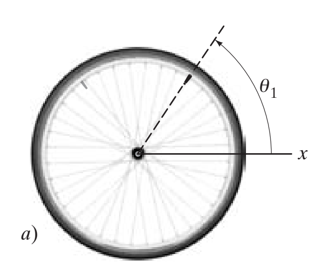
FIGURA 10–3 *a*) Ejemplo 10-1. *b*) Para ángulos pequeños, la longitud del arco y la longitud de la cuerda (línea recta) son casi iguales. Para ángulos de hasta 15°, el error al hacer la estimación es de sólo 1%. Para ángulos mayores, el error se incrementa rápidamente.

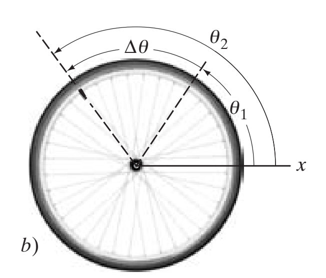
Para describir el movimiento rotacional, usamos cantidades angulares, como la velocidad angular y la aceleración angular. A tales cantidades se les define en analogía con las cantidades correspondientes al movimiento lineal, y se eligen para describir al objeto en rotación como un todo, así que son las mismas para cada punto del objeto giratorio. Cada punto de un objeto en rotación también puede tener velocidad y aceleración traslacionales, pero éstas tienen valores distintos para diferentes puntos del objeto.

Cuando un objeto, como la rueda de bicicleta en la figura 10-4, gira desde una posición inicial especificada por θ_1 hasta una posición final θ_2, su **desplazamiento angular** es

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 .$$

FIGURA 10–4 Una rueda gira de *a*) la posición inicial θ_1 a *b*) la posición final θ_2. El desplazamiento angular es $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.





La *velocidad angular* (denotada con la letra griega omega minúscula ω) se define por analogía con la velocidad lineal (traslacional) que estudiamos en el capítulo 2. En vez de un desplazamiento lineal, usamos el desplazamiento angular. La **velocidad angular promedio** de un objeto que gira alrededor de un eje fijo se define, entonces, como la razón de cambio de la posición angular respecto del tiempo.

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \qquad \textbf{(10–2a)}$$

donde $\Delta\theta$ es el ángulo que ha rotado el objeto en el intervalo de tiempo Δt. La **velocidad angular instantánea** es el límite de esta razón de cambio cuando Δt tiende a cero:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \qquad \textbf{(10–2b)}$$

La velocidad angular por lo general se especifica en radianes por segundo (rad/s). Advierta que *todos los puntos en un cuerpo rígido giran con la misma velocidad angular*, ya que toda posición en el objeto se mueve a través del mismo ángulo en el mismo intervalo de tiempo.

Un objeto como la rueda de la figura 10-4 puede girar en torno a un eje fijo, ya sea en sentido horario o en sentido contrario. La dirección se especifica con los signos + o −, tal como hicimos en el capítulo 2 para el movimiento lineal en la dirección $+x$ o $-x$. La convención habitual consiste en elegir el desplazamiento angular $\Delta\theta$ y la velocidad angular ω como positivos cuando la rueda gira en sentido antihorario. Si la rotación es en el sentido horario, entonces θ disminuye, por lo que $\Delta\theta$ *y* ω serán negativos.

La *aceleración angular* (denotada con la letra griega alfa minúscula α), en analogía con la aceleración lineal, se define como el cambio en la velocidad angular dividido entre el tiempo requerido para efectuar este cambio. La **aceleración angular promedio** se define como

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \quad \textbf{(10–3a)}$$

donde ω_1 es la velocidad angular inicial y ω_2 es la velocidad angular final después de un intervalo de tiempo Δt. La **aceleración angular instantánea** se define como el límite de esta razón cambio cuando Δt tiende a cero:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \quad \textbf{(10–3b)}$$

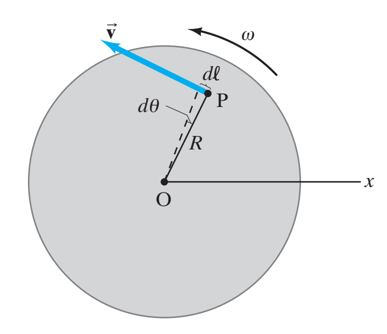


FIGURA 10–5 Un punto P sobre una rueda en rotación tiene una velocidad lineal $\vec{\mathbf{v}}$ en cualquier momento.

Como ω es la misma para todos los puntos de un objeto en rotación, la ecuación 10-3 nos indica que α también será la misma para todos los puntos. Así, ω y α son propiedades del objeto en rotación como un todo. Con ω se mide en radianes por segundo y t se mide en segundos, α estará expresada en radianes sobre segundo al cuadrado (rad/s^2).

Cada partícula o cada punto de un objeto rígido en rotación tiene, en cualquier momento, una velocidad lineal v y una aceleración lineal a. Podemos relacionar esas cantidades lineales en cada punto, v y a, con las cantidades angulares, ω y α, del objeto en rotación. Considere un punto P situado a una distancia R del eje de rotación, como en la figura 10-5. Si el objeto gira con velocidad angular ω, cualquier punto tendrá una velocidad lineal cuya dirección es tangente a su trayectoria circular. La magnitud de su velocidad lineal es $v = d\ell/dt$. De la ecuación 10-1b, un cambio en el ángulo de rotación $d\theta$ (en radianes) está relacionado con la distancia lineal recorrida por $d\ell = R\, d\theta$. Por consiguiente,

$$v = \frac{d\ell}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$

o bien,

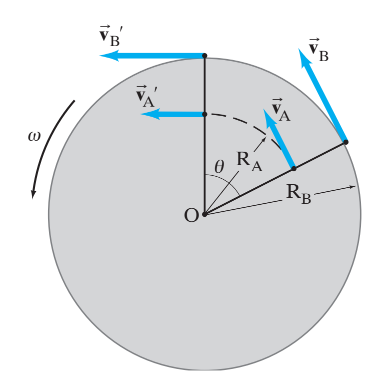
$$v = R\omega, \quad \textbf{(10–4)}$$

donde R es una distancia fija desde el eje de rotación y ω está en rad/s. Entonces, aunque ω es la misma para todo punto de un objeto que gira en cualquier instante, la velocidad lineal v es mayor para puntos más alejados del eje (figura 10-6). Note que la ecuación 10-4 es válida tanto instantáneamente como en el promedio.

EJEMPLO CONCEPTUAL 10–2 **¿El león es más rápido que el caballo?** En un carrusel o tiovivo en rotación, un niño se sienta sobre un caballo cerca de la orilla y otro niño se sienta sobre un león a la mitad del camino desde el centro. a) ¿Cuál de los dos niños tiene la mayor velocidad lineal? *b)* ¿Cuál de ellos tiene la mayor velocidad angular?

RESPUESTA *a)* La velocidad *lineal* es la distancia recorrida dividida entre el intervalo de tiempo. En una rotación, el niño situado en la orilla recorre una distancia más larga que el niño cerca del centro, pero el intervalo de tiempo es el mismo para ambos. Por lo tanto, el niño que está en la orilla, sentado sobre el caballo, tiene mayor velocidad lineal. *b)* La velocidad *angular* es el ángulo de rotación dividido entre el intervalo de tiempo. En una rotación ambos niños giran a través del mismo ángulo (360° = 2π rad). Los dos niños tienen la misma velocidad angular.

FIGURA 10–6 Rueda que gira uniformemente en sentido antihorario. Dos puntos sobre la rueda, a distancias R_A y R_B desde el centro, tienen la misma velocidad angular ω porque recorren el mismo ángulo θ en el mismo intervalo de tiempo. Sin embargo, los dos puntos tienen diferentes velocidades lineales porque recorren distancias diferentes en el mismo intervalo de tiempo. Como $R_B > R_A$, entonces $v_B > v_A$ (ya que $v = R\omega$).



Si cambia la velocidad angular de un objeto en rotación, el objeto como un todo (y cada punto en él) tiene una aceleración angular. Cada punto también tiene una aceleración lineal, cuya dirección es tangente a la trayectoria circular de dicho punto. La ecuación 10-4 ($v = R\omega$) nos sirve para demostrar que la aceleración angular α está relacionada con la aceleración tangencial a_{tan} de un punto en el objeto en rotación por

$$a_{tan} = \frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt}$$

o bien,

$$a_{tan} = R\alpha. \quad \textbf{(10–5)}$$

En esta ecuación, R es el radio del círculo en que se mueve la partícula, y el subíndice "tan" en a_{tan} significa "tangencial".

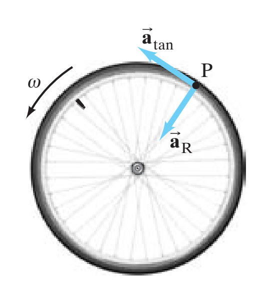


FIGURA 10–7 Sobre una rueda en rotación cuya velocidad angular está creciendo, un punto P tiene componentes de aceleración tangencial y radial (centrípeta). (Véase también el capítulo 5).

TABLA 10–1
Cantidades lineales y rotacional

Lineal	Tipo	Rota-cional	Relación (θ en radianes)
x	desplazamiento	θ	$x = R\theta$
v	velocidad	ω	$v = R\omega$
a_{tan}	aceleración	α	$a_{tan} = R\alpha$

La aceleración lineal total de un punto en un instante dado es la suma vectorial de dos componentes:

$$\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_{tan} + \vec{\mathbf{a}}_R,$$

donde la componente radial, $\vec{\mathbf{a}}_R$, es la aceleración radial o "centrípeta" y su dirección es hacia el centro de la trayectoria circular del punto; véase la figura 10-7. Vimos en el capítulo 5 (ecuación 5-1) que una partícula que se mueve en un círculo de radio R con rapidez lineal v tiene una aceleración radial $a_R = v^2/R$; podemos reescribir esto en términos de ω usando la ecuación 10-4:

$$a_R = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = \omega^2 R. \quad \textbf{(10–6)}$$

La ecuación 10-6 se aplica a cualquier partícula de un objeto en rotación. Así, la aceleración centrípeta es mayor cuanto más lejos está usted del eje de rotación: el niño más cerca del borde exterior del carrusel siente una aceleración mayor.

La tabla 10-1 resume las relaciones entre las cantidades angulares que describen la rotación de un objeto con las cantidades lineales para cada punto del objeto.

EJEMPLO 10–3 **Velocidades y aceleraciones angulares y lineales.** Un carrusel inicialmente está en reposo. En $t = 0$ se le imprime una aceleración angular constante $\alpha = 0.060\ \text{rad/s}^2$, que aumenta su velocidad angular durante 8.0 s. Determine la magnitud de las siguientes cantidades cuando $t = 8.0$ s: *a*) la velocidad angular del carrusel; *b)* la velocidad lineal de un niño (figura 10-8*a*) ubicado a 2.5 m desde el centro, el punto P en la figura 10-8b; *c*) la aceleración tangencial (lineal) de ese niño; *d)* su aceleración centrípeta; y *e*) la aceleración lineal total del niño.

PLANTEAMIENTO La aceleración angular α es constante, así que podemos utilizar $\alpha = \Delta\omega/\Delta t$ para despejar ω después de un tiempo $t = 8.0$ s. Con esta ω y la α que se proporciona, determinamos las otras cantidades utilizando las relaciones que acabamos de desarrollar, es decir, las ecuaciones 10-4 y 10-6.

SOLUCIÓN *a*) En la ecuación 10-3a, $\bar{\alpha} = (\omega_2 - \omega_1)/\Delta t$, hacemos $\Delta t = 8.0$ s, $\bar{\alpha} = 0.060\ \text{rad/s}^2$, y $\omega_1 = 0$. Despejando ω_2:

$$\omega_2 = \omega_1 + \bar{\alpha}\,\Delta t = 0 + (0.060\ \text{rad/s}^2)(8.0\ \text{s}) = 0.48\ \text{rad/s}.$$

Durante el intervalo de 8.0 s, el carrusel aceleró desde $\omega_1 = 0$ (reposo) hasta $\omega_2 = 0.48$ rad/s.

b) La velocidad lineal del niño, con $R = 2.5$ m en el tiempo $t = 8.0$ s, se encuentra con la ecuación 10-4:

$$v = R\omega = (2.5\ \text{m})(0.48\ \text{rad/s}) = 1.2\ \text{m/s}.$$

Note que aquí se eliminó "rad" porque es adimensional (y sólo un recordatorio): es una razón de dos distancias (ecuación 10-1a).

c) La ecuación 10-5 proporciona la aceleración tangencial del niño:

$$a_{tan} = R\alpha = (2.5\ \text{m})(0.060\ \text{rad/s}^2) = 0.15\ \text{m/s}^2,$$

y es la misma durante el intervalo de aceleración de 8.0 s.

d) La aceleración centrípeta del niño en $t = 8.0$ está dada por la ecuación 10-6:

$$a_R = \frac{v^2}{R} = \frac{(1.2\ \text{m/s})^2}{(2.5\ \text{m})} = 0.58\ \text{m/s}^2.$$

e) Las dos componentes de la aceleración lineal calculada en los incisos *c*) y *d*) son perpendiculares entre sí. Por lo tanto, la aceleración lineal total en $t = 8.0$ s tiene magnitud

$$a = \sqrt{a_{tan}^2 + a_R^2} = \sqrt{(0.15\ \text{m/s}^2)^2 + (0.58\ \text{m/s}^2)^2} = 0.60\ \text{m/s}^2.$$

Su dirección (figura 10-8b) es

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_{tan}}{a_R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.15\ \text{m/s}^2}{0.58\ \text{m/s}^2}\right) = 0.25\ \text{rad},$$

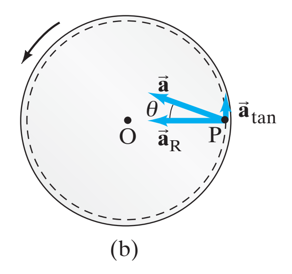
así que $\theta \approx 15°$.

NOTA La aceleración lineal en este instante es principalmente centrípeta, manteniendo al niño en un movimiento circular con el carrusel. La componente tangencial que acelera el movimiento es menor.

FIGURA 10–8 Ejemplo 10-3. El vector de la aceleración total $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}_{tan} + \vec{\mathbf{a}}_R$, en $t = 8.0$ s.



(a)



(b)

Podemos relacionar la velocidad angular ω con la frecuencia de rotación f. La **frecuencia** es el número de revoluciones (rev) completas por segundo, como vimos en el capítulo 5. Una revolución (digamos, de una rueda) corresponde a un ángulo de 2π radianes, y entonces 1 rev/s = 2π rad/s. Por lo tanto, en general, la frecuencia f está relacionada con la velocidad angular ω por

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

o bien,

$$\omega = 2\pi f. \qquad \textbf{(10–7)}$$

A la unidad de frecuencia, revoluciones por segundo (rev/s), se le da un nombre especial, el hertz (Hz). Es decir,
1 Hz = 1 rev/s.

$$1\,\text{Hz} = 1\,\text{rev/s}.$$

Advierta que "revolución" no es realmente una unidad, por lo que podemos también escribir 1 Hz = 1 s^{-1}.

El tiempo requerido para efectuar una revolución completa es el **periodo**, T, y está relacionado con la frecuencia por

$$T = \frac{1}{f}. \qquad \textbf{(10–8)}$$

Por ejemplo, si una partícula gira con una frecuencia de tres revoluciones por segundo, entonces cada revolución toma $\frac{1}{3}$ s.

EJERCICIO A En el ejemplo 10-3 encontramos que el carrusel, luego de 8.0 s gira con una velocidad angular ω = 0.48 rad/s y lo sigue haciendo después de t = 8.0 s porque la aceleración cesó. Determine la frecuencia y el periodo del carrusel después de que alcanza su velocidad angular constante.

FÍSICA APLICADA
Disco duro y rapidez de bits

EJEMPLO 10–4 **Disco duro.** El plato de un disco duro de una computadora gira a 7200 rpm (revoluciones por minuto = rev/min). *a*) ¿Cuál es la velocidad angular (rad/s) del plato? *b*) Si la cabeza lectora del drive se localiza a 3.00 cm del eje de rotación, ¿cuál será la rapidez lineal del punto sobre el plato justo debajo de ella? *c*) Si un bit requiere 0.50 μm de longitud a lo largo de la dirección del movimiento, ¿cuántos bits por segundo puede escribir la cabeza escritora cuando está a 3.00 cm del eje?

PLANTEAMIENTO Utilizamos f, la frecuencia dada, para encontrar la velocidad angular ω del plato y luego la rapidez lineal de un punto sobre el plato ($v = R\omega$). La tasa de bits se determina al dividir la rapidez lineal entre la longitud de un bit (v = distancia/tiempo).

SOLUCIÓN *a*) Primero encontramos la frecuencia en rev/s, dado f = 7200 rev/min:

$$f = \frac{(7200\,\text{rev/min})}{(60\,\text{s/min})} = 120\,\text{rev/s} = 120\,\text{Hz}.$$

La velocidad angular es, entonces,

$$\omega = 2\pi f = 754\,\text{rad/s}.$$

b) La rapidez lineal de un punto a 3.00 cm del eje está dada por la ecuación 10-4:

$$v = R\omega = (3.00 \times 10^{-2}\,\text{m})(754\,\text{rad/s}) = 22.6\,\text{m/s}.$$

c) Cada bit requiere 5.0×10^{-6} m, por lo que a una rapidez de 22.6 m/s, el número de bits que pasan por la cabeza por segundo es

$$\frac{22.6\,\text{m/s}}{0.50 \times 10^{-6}\,\text{m/bit}} = 45 \times 10^{6}\,\text{bits por segundo},$$

o 45 megabits/s (Mbps).

EJEMPLO 10–5 **Dada ω en función del tiempo.** Un disco de radio $R = 3.0$ m gira a una velocidad angular $\omega = (1.6 + 1.2\,t)$ rad/s, donde t está en segundos. En el instante $t = 2.0$ s., determine *a*) la aceleración angular y *b*) la rapidez v y las componentes de la aceleración a de un punto en el borde del disco.

PLANTEAMIENTO Usamos $\alpha = d\omega/dt$, $v = R\omega$, $a_{\tan} = R\alpha$ y $a_R = \omega^2 R$, que son las ecuaciones 10-3b, 10-4, 10-5 y 10-6. Podemos escribir ω explícitamente para que muestre las unidades de las constantes (en caso de que queramos comprobar más adelante): $\omega = [1.6\,\mathrm{s}^{-1} + (1.2\,\mathrm{s}^{-2})t]$ que nos dará s^{-1} (= rad/s) para cada término.

SOLUCIÓN *a*) La aceleración angular es

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(1.6 + 1.2\,t)\mathrm{s}^{-1} = 1.2\,\mathrm{rad/s^2}.$$

b) La rapidez v de un punto a 3.0 m desde el centro del disco que gira en $t = 2.0$ s es, usando la ecuación 10-4,

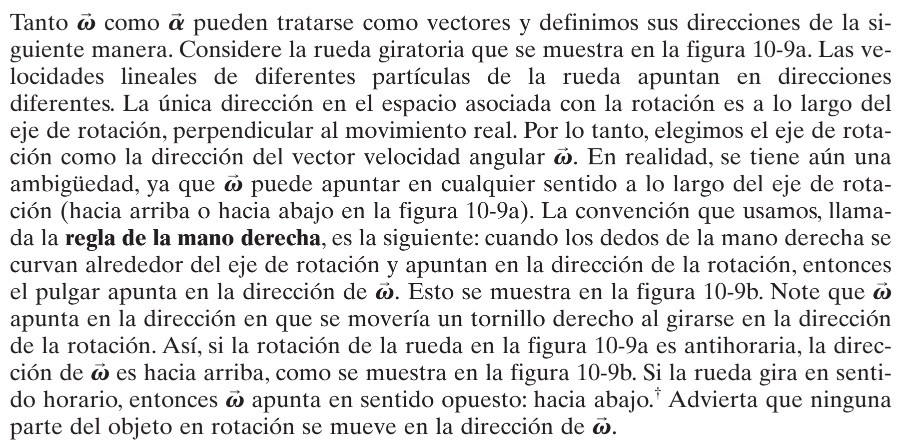
$$v = R\omega = (3.0\,\mathrm{m})(1.6 + 1.2\,t)\mathrm{s}^{-1} = (3.0\,\mathrm{m})(4.0\,\mathrm{s}^{-1}) = 12.0\,\mathrm{m/s}.$$

Las componentes de la aceleración lineal de este punto en $t = 2.0$ s son:

$$a_{\tan} = R\alpha = (3.0\,\mathrm{m})(1.2\,\mathrm{rad/s^2}) = 3.6\,\mathrm{m/s^2}$$

$$a_R = \omega^2 R = \left[(1.6 + 1.2\,t)\mathrm{s}^{-1}\right]^2(3.0\,\mathrm{m}) = (4.0\,\mathrm{s}^{-1})^2(3.0\,\mathrm{m}) = 48\,\mathrm{m/s^2}.$$

10–2 Naturaleza vectorial de las cantidades angulares



Tanto $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ como $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ pueden tratarse como vectores y definimos sus direcciones de la siguiente manera. Considere la rueda giratoria que se muestra en la figura 10-9a. Las velocidades lineales de diferentes partículas de la rueda apuntan en direcciones diferentes. La única dirección en el espacio asociada con la rotación es a lo largo del eje de rotación, perpendicular al movimiento real. Por lo tanto, elegimos el eje de rotación como la dirección del vector velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$. En realidad, se tiene aún una ambigüedad, ya que $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ puede apuntar en cualquier sentido a lo largo del eje de rotación (hacia arriba o hacia abajo en la figura 10-9a). La convención que usamos, llamada la **regla de la mano derecha**, es la siguiente: cuando los dedos de la mano derecha se curvan alrededor del eje de rotación y apuntan en la dirección de la rotación, entonces el pulgar apunta en la dirección de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$. Esto se muestra en la figura 10-9b. Note que $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ apunta en la dirección en que se movería un tornillo derecho al girarse en la dirección de la rotación. Así, si la rotación de la rueda en la figura 10-9a es antihoraria, la dirección de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ es hacia arriba, como se muestra en la figura 10-9b. Si la rueda gira en sentido horario, entonces $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ apunta en sentido opuesto: hacia abajo.[†] Advierta que ninguna parte del objeto en rotación se mueve en la dirección de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$.

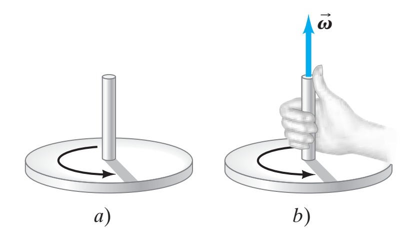
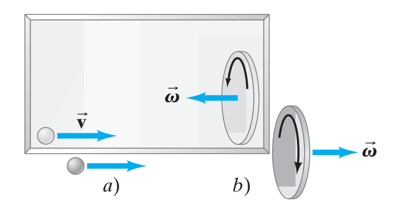


FIGURA 10–9 *a*) Rueda giratoria. *b*) Regla de la mano derecha para obtener el sentido de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$.

Si el eje de rotación está fijo en dirección, entonces $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ puede cambiar sólo en magnitud. Así, $\vec{\boldsymbol{\alpha}} = d\vec{\boldsymbol{\omega}}/dt$ debe también apuntar a lo largo del eje de rotación. Si la rotación es en sentido antihorario como en la figura 10-9a y la magnitud ω es creciente, entonces $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ señalará hacia arriba; pero si ω es decreciente (la rueda desacelera), $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ apuntará hacía abajo. Si la dirección es en sentido horario, $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ apuntará hacia abajo cuando ω aumente y apuntará hacia arriba cuando ω disminuya.

FIGURA 10–10 *a*) La velocidad es un vector verdadero. La reflexión de $\vec{\mathbf{v}}$ apunta en el mismo sentido. *b*) La velocidad angular es un pseudovector, ya que no sigue esta regla. Como se observa, la reflexión de la rueda gira en sentido opuesto, por lo que el sentido de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ es opuesto para la reflexión.



[†] Estrictamente hablando, $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ y $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ no son vectores. El problema es que no se comportan como vectores bajo la reflexión. Suponga que estamos viendo directamente hacia un espejo, y una partícula que se mueve con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ hacia la derecha pasa enfrente y paralelamente al espejo. En el reflejo del espejo, $\vec{\mathbf{v}}$ aún apunta hacia la derecha, figura 10-10a. Entonces, un vector verdadero, como la velocidad, al apuntar de forma paralela a la cara del espejo tiene el mismo sentido en la imagen reflejada que en la realidad. Ahora considere una rueda que gira frente al espejo, de manera que $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ apunta hacia la derecha. (Estaremos viendo el borde de la rueda). Vista en el espejo, figura 10-10b, la rueda estará girando en sentido opuesto, por lo que $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ señalará en sentido opuesto (hacia la izquierda) en el espejo. Debido a esta diferencia bajo reflexión entre $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ y un vector verdadero, a $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ se le llama *pseudovector* o *vector axial*. La aceleración angular $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ es también un pseudovector, como lo son todos los productos cruz de vectores verdaderos (sección 11-2). La diferencia entre vectores verdaderos y pseudovectores es importante en la física de partículas elementales, pero no nos ocuparemos de ella en este libro.

10–3 Aceleración angular constante

En el capítulo 2 obtuvimos las importantes ecuaciones cinemáticas (ecuaciones 2-12) que relacionan aceleración, velocidad, posición y tiempo para el caso especial de la aceleración lineal uniforme. Esas ecuaciones se obtuvieron a partir de las definiciones de velocidad y aceleración lineales, suponiendo una aceleración constante. Las definiciones de velocidad angular y aceleración angular son las mismas que para sus contrapartes lineales, excepto que θ reemplaza el desplazamiento lineal x, ω reemplaza v, y α reemplaza a. Por lo tanto, las ecuaciones angulares para **aceleración angular constante** serán análogas a las ecuaciones 2-12 con x reemplazada por θ, v por ω, y a por α, y pueden obtenerse exactamente de la misma forma. Las resumiremos aquí, opuestas a sus equivalentes lineales (hemos elegido $x_0 = 0$ y $\theta_0 = 0$ en el tiempo inicial $t = 0$):

Angular	**Lineal**		
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = v_0 + at$	[constante α, a]	**(10–9a)**
$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	[constante α, a]	**(10–9b)**
$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$	$v^2 = v_0^2 + 2ax$	[constante α, a]	**(10–9c)**
$\overline{\omega} = \dfrac{\omega + \omega_0}{2}$	$\overline{v} = \dfrac{v + v_0}{2}$	[constante α, a]	**(10–9d)**

Ecuaciones cinemáticas para aceleración angular constante
$(x_0 = 0,\ \theta_0 = 0)$

Note que ω_0 representa la velocidad angular en $t = 0$; mientras que θ y ω representan la posición y la velocidad angulares, respectivamente, en el tiempo t. Como la aceleración angular es constante, $\alpha = \alpha$.

EJEMPLO 10–6 **Aceleración centrífuga.** Un rotor centrífugo acelera desde el reposo hasta 20,000 rpm en 30 s. *a*) ¿Cuál es su aceleración angular promedio? *b*) ¿Cuántas revoluciones habrá dado el rotor centrífugo durante su periodo de aceleración, si se supone una aceleración angular constante?

FÍSICA APLICADA
Centrífuga

PLANTEAMIENTO Para determinar $\overline{\alpha} = \Delta\omega/\Delta t$, necesitamos las velocidades angulares inicial y final. Para *b*) usamos las ecuaciones 10-9 (recuerde que una revolución corresponde a $\theta = 2\pi$ rad).

SOLUCIÓN *a*) La velocidad angular inicial es $\omega = 0$. La velocidad angular final es

$$\omega = 2\pi f = (2\pi\ \text{rad/rev})\frac{(20{,}000\ \text{rev/min})}{(60\ \text{s/min})} = 2100\ \text{rad/s}.$$

Entonces, dado que $\overline{\alpha} = \Delta\omega/\Delta t$ y $\Delta t = 30$ s,

$$\overline{\alpha} = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t} = \frac{2100\ \text{rad/s} - 0}{30\ \text{s}} = 70\ \text{rad/s}^2.$$

Esto es, cada segundo, la velocidad angular del rotor aumenta en 70 rad/s, o por $(70/2\pi) = 11$ revoluciones por segundo.

b) Para encontrar θ podemos utilizar ya sea la ecuación 10-9b o la 10-9c, o ambas, si se quiere comprobar la respuesta. La primera da

$$\theta = 0 + \tfrac{1}{2}(70\ \text{rad/s}^2)(30\ \text{s})^2 = 3.15 \times 10^4\ \text{rad},$$

donde se conserva un dígito adicional porque éste es un resultado intermedio. Para encontrar el número total de revoluciones, dividimos entre 2π rad/rev y obtenemos

$$\frac{3.15 \times 10^4\ \text{rad}}{2\pi\ \text{rad/rev}} = 5.0 \times 10^3\ \text{rev}.$$

NOTA Calculemos θ mediante la ecuación 10-9c.

$$\theta = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha} = \frac{(2100\ \text{rad/s})^2 - 0}{2(70\ \text{rad/s}^2)} = 3.15 \times 10^4\ \text{rad}$$

que concuerda perfectamente con la respuesta.

10–4 Torca

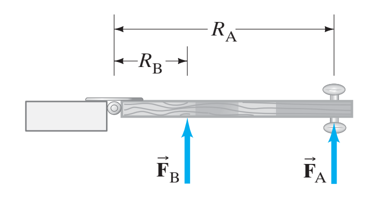


FIGURA 10–11 Vista superior de una puerta. Aplicación de la misma fuerza con brazos de palanca diferentes, R_A y R_B. Si $R_A = 3R_B$, entonces para crear el mismos efecto (aceleración angular), F_B necesita ser tres veces F_A, o $F_A = \frac{1}{3}F_B$.

FIGURA 10–12 *a*) Una llave para neumáticos puede tener un brazo de palanca largo. *b*) Un plomero puede ejercer una torca mayor al usar una llave con un brazo de palanca largo. *a*) Eje de rotación *b*) Eje de rotación



Hasta ahora hemos analizado la cinemática rotacional, que es la descripción del movimiento rotacional en términos de posición, velocidad y aceleración angulares. Veremos ahora la dinámica, o causas del movimiento rotacional. Así como encontramos analogías entre los movimientos lineal y rotacional para la descripción del movimiento, veremos que existen también equivalentes rotacionales para la dinámica.

Para que un objeto empiece a girar respecto a un eje, es claro que se requiere una fuerza. Desde luego, es importante la dirección de esta fuerza, así como el lugar donde se aplica. Por ejemplo, considere una situación ordinaria como la vista superior de la puerta en la figura 10-11. Si usted aplica una fuerza $\vec{F}_A$ a la puerta como se muestra, encontrará que cuanto más grande sea la magnitud F_A más rápido se abrirá la puerta. No obstante, si ahora aplica una fuerza de la misma magnitud en un punto cercano a la bisagra, digamos $\vec{F}_B$ en la figura 10-11, encontrará que la puerta no se abre tan rápidamente. El efecto de la fuerza es menor: el lugar *donde* actúa la fuerza, así como su dirección y magnitud, afectan la rapidez con la que se abrirá la puerta. De hecho, si sólo actúa una fuerza, la aceleración angular de la puerta es proporcional no sólo a la magnitud de la fuerza aplicada, sino también directamente proporcional a la *distancia perpendicular del eje de rotación a la línea a lo largo de la cual actúa la fuerza (o línea de acción de la fuerza)*. Esta distancia se llama **brazo de palanca**, o **brazo de momento**, de la fuerza, y se indica como R_A y R_B para las dos fuerzas en la figura 10-11. Entonces, si R_A en la figura 10-11 es tres veces mayor que R_B, la aceleración angular de la puerta será tres veces mayor, siempre que las magnitudes de las fuerzas sean iguales. Para decirlo de otra manera, si $R_A = 3R_B$, entonces F_B debe ser tres veces más grande que F_A para proporcionar la misma aceleración angular. (La figura 10-12 muestra dos ejemplos de herramientas cuyos largos de brazos de palanca son muy efectivos).

La aceleración angular es entonces proporcional al producto de la *fuerza por el brazo de palanca*. Este producto se llama *momento de la fuerza* con respecto al eje, o más comúnmente **torca**, y se abrevia τ (la letra griega minúscula tau). Así, la aceleración angular α de un objeto es directamente proporcional a la torca neta aplicada τ:

$$\alpha \propto \tau,$$

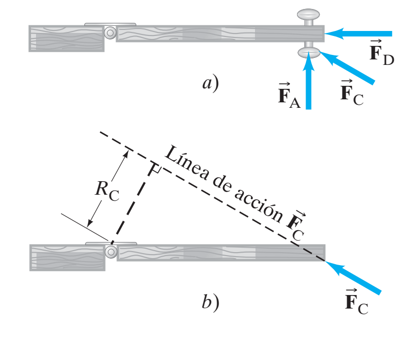
y vemos que es la torca la que origina la aceleración angular. Éste es el análogo rotacional de la segunda ley de Newton para movimiento lineal, $a \propto F$.

Definimos el brazo de palanca como la distancia *perpendicular* del eje de rotación a la línea de acción de la fuerza, es decir, la distancia que es perpendicular tanto al eje de rotación, como a la línea imaginaria dibujada a lo largo de la dirección de la fuerza. Hacemos esto para tomar en cuenta el efecto de fuerzas que actúan formando un cierto ángulo. Es evidente que una fuerza aplicada según un ángulo, tal como $\vec{F}_C$ en la figura 10-13, será menos efectiva que una fuerza de la misma magnitud aplicada perpendicularmente a la puerta, como $\vec{F}_A$ (figura 10-13a). Y si usted empuja sobre el extremo de la puerta, de manera que la fuerza esté dirigida hacia la bisagra (el eje de rotación), como la indicada por $\vec{F}_D$, entonces la puerta no girará en absoluto.

El brazo de palanca para una fuerza como $\vec{F}_C$ se encuentra dibujando una línea a lo largo de la dirección de $\vec{F}_C$ (ésta es la "línea de acción" de $\vec{F}_C$). Luego dibujamos otra línea, perpendicular a esta línea de acción, y que pasa por el eje de rotación de manera perpendicular a dicho eje. La longitud de esta segunda línea es el brazo de palanca para $\vec{F}_C$ y se designa con R_C en la figura 10-13b. El brazo de palanca para $\vec{F}_A$ es la distancia completa de la bisagra a la manija de la puerta, R_A, por lo que R_C es mucho menor que R_A.

La magnitud de la torca asociada con $\vec{F}_C$ es entonces $R_C F_C$. Este brazo de palanca corto R_C, y la correspondiente torca más pequeña asociada con $\vec{F}_C$ es consistente con la observación de que $\vec{F}_C$ es menos efectiva en acelerar la puerta que $\vec{F}_A$. Cuando se define así el brazo de palanca, los experimentos muestran que la relación $\alpha \propto \tau$ es válida en general. Advierta en la figura 10-13 que la línea de acción de la fuerza $\vec{F}_D$ pasa por la bisagra y, por consiguiente, su brazo de palanca es cero. Entonces, una torca cero se asocia con $\vec{F}_D$ que no genera ninguna aceleración angular, de acuerdo con la experiencia cotidiana.

FIGURA 10–13 *a*) Fuerzas que actúan a diferentes ángulos en la manija de la puerta. *b*) El brazo de palanca se define como la distancia perpendicular desde el eje de rotación (la bisagra) hasta la línea de acción de la fuerza.



En general, podemos entonces escribir la magnitud de la torca con respecto a un eje dado como

$$\tau = R_{\perp} F, \quad \textbf{(10–10a)}$$

donde $R_{\perp}$ es el brazo de palanca, y el símbolo de perpendicularidad (⊥) nos recuerda que debemos usar la distancia perpendicular desde el eje de rotación hasta la línea de acción de la fuerza (figura 10-14a).

Una manera equivalente de determinar la torca asociada con una fuerza es descomponer la fuerza en sus componentes paralela y perpendicular a la línea que une el eje con el punto de aplicación de la fuerza, como se muestra en la figura 10-14b. La componente $F_{\parallel}$ no ejerce torca pues está dirigida hacia el eje de rotación (su brazo de palanca es cero). La torca será entonces igual a $F_{\perp}$ veces la distancia R del eje al punto de aplicación de la fuerza:

$$\tau = RF_{\perp}. \quad \textbf{(10–10b)}$$

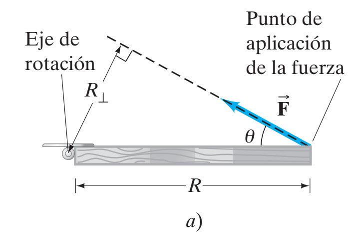
Esto da el mismo resultado que la ecuación 10-10a ya que $F_{\perp} = F \operatorname{sen} \theta$ y $R_{\perp} = R \operatorname{sen} \theta$. Así,

$$\tau = RF \operatorname{sen} \theta \quad \textbf{(10–10c)}$$

en cualquier caso. [Note que θ es el ángulo entre las direcciones de $\vec{\mathbf{F}}$ y la dirección de R (una línea radial desde el eje al punto donde actúa $\vec{\mathbf{F}}$]. Podemos usar cualquiera de las ecuaciones 10-10 para calcular la torca, la que resulte más fácil de aplicar.

Como la torca es una distancia multiplicada por una fuerza, se mide en unidades de m · N en unidades del SI,[†] en unidades de cm · dina en el sistema cgs, y en unidades de ft · lb en el sistema inglés.

Cuando más de una torca actúa sobre un objeto, la aceleración angular α es proporcional a la torca *neta*. Si todas las torcas que actúan sobre un objeto, tienden a hacerlo girar alrededor de un eje fijo de rotación en el mismo sentido, la torca neta es la suma de las torcas. Pero si, digamos, una torca tiende a hacer girar un objeto en un sentido, y una segunda torca tiende a hacerlo girar en sentido opuesto (como en la figura 10-15), la torca neta es la diferencia de las dos torcas. En general asignamos un signo positivo a las torcas que tienden a hacer girar el objeto en sentido antihorario (ya que ℓ suele ser positivo en el sentido antihorario) y asignamos un signo negativo a las torcas que tienden a hacer girar el objeto en sentido horario, manteniendo el eje de rotación fijo.



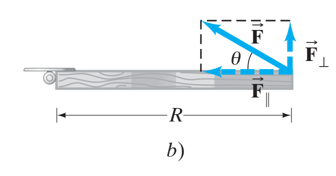


FIGURA 10–14 Torca $= R_{\perp}F = RF_{\perp}$.

EJEMPLO 10–7 Torca sobre una rueda compuesta. Dos ruedas cilíndricas delgadas de radios $R_A = 30$ cm y $R_B = 50$ cm están unidas entre sí sobre un eje, que pasa por el centro de cada una, como se muestra en la figura 10-15. Calcule la torca neta sobre el sistema de las dos ruedas debida a las dos fuerzas mostradas, cada una con magnitud de 50 N.

PLANTEAMIENTO La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_A$ hace girar al sistema en sentido antihorario; en tanto que $\vec{\mathbf{F}}_B$ lo hace girar en sentido horario. Por lo tanto, las dos fuerzas actúan en oposición entre sí. Tenemos que elegir un sentido de rotación como positivo, digamos, el antihorario. Entonces $\vec{\mathbf{F}}_A$ ejerce una torca positiva, $\tau_A = R_A F_A$, ya que el brazo de palanca es R_A. Por otro lado, $\vec{\mathbf{F}}_B$ genera una torca negativa (en sentido horario) y no actúa perpendicularmente a R_B, por lo que debemos usar su componente perpendicular para calcular la torca que produce: $\tau_B = -R_B F_{B\perp} = -R_B F_B \operatorname{sen} \theta$, donde $\theta = 60°$. (Advierta que θ debe ser el ángulo entre $\vec{\mathbf{F}}_B$ y una línea radial desde el eje de giro).

SOLUCIÓN La torca neta es

$$\tau = R_A F_A - R_B F_B \operatorname{sen} 60°$$
$$= (0.30\,\text{m})(50\,\text{N}) - (0.50\,\text{m})(50\,\text{N})(0.866) = -6.7\,\text{m}\cdot\text{N}.$$

Esta torca neta produce una aceleración rotacional de la rueda en sentido horario.

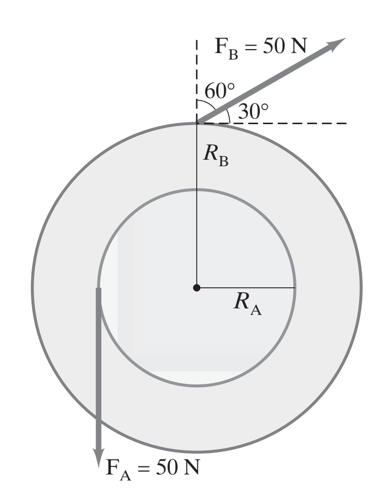
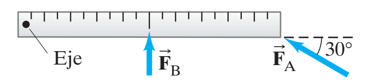


FIGURA 10–15 Ejemplo 10-7. La torca debida a $\vec{\mathbf{F}}_A$ tiende a acelerar a la rueda en sentido antihorario; mientras que la torca debida a $\vec{\mathbf{F}}_B$ tiende a acelerar a la rueda en sentido horario.

EJERCICIO B Dos fuerzas ($F_B = 20$ N y $F_A = 30$ N) se aplican a una regla de un metro que puede girar alrededor de su extremo izquierdo, figura 10-16. La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_B$ se aplica perpendicularmente en la parte media. ¿Qué fuerza ejerce la mayor torca: F_A, F_B o ambas la misma?

FIGURA 10–16 Ejercicio B.

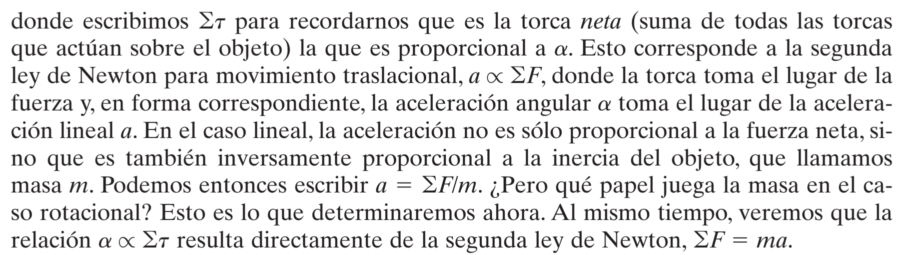


[†]Note que las unidades de torca son las mismas que las de energía. Escribimos aquí la unidad para una torca como m · N (en el SI) para distinguirla de la unidad de energía (N · m), porque las dos cantidades son muy diferentes. Una diferencia evidente es que la energía es un escalar; mientras que la torca tiene dirección y es un vector (como veremos en el capítulo 11). El nombre especial *joule* (1 J = 1 N · m) se usa sólo para energía (y para trabajo), *nunca* para una torca.

10–5 Dinámica rotacional: Torca e inercia rotacional

En la sección 10-4 vimos que la aceleración angular α de un objeto en rotación es proporcional a la torca neta τ aplicada sobre él:

$$\alpha \propto \Sigma\tau,$$



donde escribimos $\Sigma\tau$ para recordarnos que es la torca *neta* (suma de todas las torcas que actúan sobre el objeto) la que es proporcional a α. Esto corresponde a la segunda ley de Newton para movimiento traslacional, $a \propto \Sigma F$, donde la torca toma el lugar de la fuerza y, en forma correspondiente, la aceleración angular α toma el lugar de la aceleración lineal a. En el caso lineal, la aceleración no es sólo proporcional a la fuerza neta, sino que es también inversamente proporcional a la inercia del objeto, que llamamos masa m. Podemos entonces escribir $a = \Sigma F/m$. ¿Pero qué papel juega la masa en el caso rotacional? Esto es lo que determinaremos ahora. Al mismo tiempo, veremos que la relación $\alpha \propto \Sigma\tau$ resulta directamente de la segunda ley de Newton, $\Sigma F = ma$.

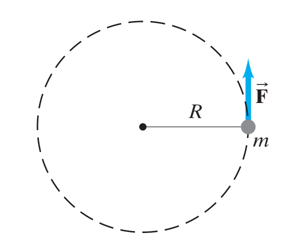


FIGURA 10–17 Una masa m que gira en un círculo de radio R con respecto a un punto fijo.

Consideraremos primero un caso muy sencillo: una partícula de masa m que gira en un círculo de radio R en el extremo de una cuerda o varilla, cuya masa podemos despreciar comparada con m (figura 10-17), y suponemos que una sola fuerza F actúa sobre m tangente al círculo, como se muestra. La torca que origina la aceleración angular es $\tau = RF$. Si usamos la segunda ley de Newton para cantidades lineales, $\Sigma F = ma$, y la ecuación 10-5 que relaciona la aceleración angular con la aceleración tangencial, $a_{tan} = R\alpha$, tenemos

$$\begin{aligned} F &= ma \\ &= mR\alpha, \end{aligned}$$

donde α está dada en rad/s^2. Al multiplicar ambos lados de esta ecuación por R, encontramos que la torca $\tau = RF = R(mR\alpha)$, o bien,

$$\tau = mR^2\alpha. \qquad \text{[una sola partícula]} \qquad \textbf{(10–11)}$$

Hasta aquí obtenemos la relación directa entre la aceleración angular y la torca aplicada τ. La cantidad mR^2 representa la *inercia rotacional* de la partícula y se llama *momento de inercia*.

Consideremos ahora un objeto rígido en rotación, tal como una rueda que gira con respecto a un eje fijo que pasa por su centro. Podemos considerar que la rueda consiste en muchas partículas localizadas a varias distancias desde el eje de rotación. Podemos aplicar la ecuación 10-11 a cada partícula del objeto; es decir, escribimos $\tau_i = m_i R_i^2 \alpha$ para la $i^{\text{ésima}}$ partícula del objeto. Luego sumamos todas las partículas. La suma de las diferentes torcas es justo la torca total, $\Sigma\tau$, por lo que obtenemos

$$\Sigma\tau_i = \left(\Sigma m_i R_i^2\right)\alpha \qquad \text{[eje fijo]} \qquad \textbf{(10–12)}$$

donde factorizamos α ya que ésta es la misma para todas las partículas del objeto rígido. La torca resultante, $\Sigma\tau$, representa la suma de todas las torcas internas que cada partícula ejerce sobre otra, más todas las torcas externas aplicadas desde el exterior: $\Sigma\tau = \Sigma\tau_{ext} + \Sigma\tau_{int}$. La suma de las torcas internas es cero de acuerdo con la tercera ley de Newton. Por consiguiente, $\Sigma\tau$ representa la torca *externa* neta o resultante.

La suma $\Sigma m_i R_i^2$ en la ecuación 10-12 representa la suma de las masas de cada partícula en el cuerpo, multiplicadas por el cuadrado de la distancia de esa partícula al eje de rotación. Si damos a cada partícula un número (1, 2, 3, …), entonces

$$\Sigma m_i R_i^2 = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + m_3 R_3^2 + \cdots.$$

A esta cantidad se llama **momento de inercia** (o *inercia rotacional*) I del objeto:

$$I = \Sigma m_i R_i^2 = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + \cdots. \quad \textbf{(10–13)}$$

Combinando las ecuaciones 10-12 y 10-13, podemos escribir

$$\Sigma\tau = I\alpha. \quad \left[\begin{array}{c}\text{eje fijo en un marco}\\ \text{de referencia inercial}\end{array}\right] \quad \textbf{(10–14)}$$

SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA ROTACIÓN

Ésta es la equivalente rotacional de la segunda ley de Newton y es válida para la rotación de un objeto rígido con respecto a un eje fijo.† Se puede mostrar (véase el capítulo 11) que la ecuación 10-14 es incluso válida cuando el objeto se traslada con aceleración, siempre que I y α se calculen con respecto al centro de masa del objeto, y que el eje de rotación que pasa a través del CM no cambie de dirección. (Una bola que rueda hacia abajo por una rampa es un ejemplo de este *movimiento plano*). Entonces,

$$(\Sigma\tau)_{\text{cm}} = I_{\text{cm}}\alpha_{\text{cm}}, \quad \left[\begin{array}{c}\text{eje fijo en dirección,}\\ \text{pero puede acelerar}\end{array}\right] \quad \textbf{(10–15)}$$

donde el subíndice CM significa "calculado con respecto al centro de masa".

Vemos que el momento de inercia I, una medida de la inercia rotacional de un objeto, juega el mismo papel para el movimiento rotacional, que la masa para el movimiento traslacional. Como se observa en la ecuación 10-13, la inercia rotacional de un objeto depende no sólo de su masa, sino también de cómo esa masa esté distribuida con respecto al eje. Un cilindro de gran diámetro, por ejemplo, tiene mayor inercia rotacional que uno de igual masa pero menor diámetro (y por lo tanto mayor longitud), figura 10-18. El primero será más difícil de ponerse a girar y también de detener. Cuando la masa está concentrada lejos del eje de rotación, la inercia rotacional es mayor. Para estudiar el movimiento rotacional, *no podemos* considerar que la masa del objeto esté concentrada en su centro de masa (los brazos de palanca de las fuerzas aplicadas serían cero).

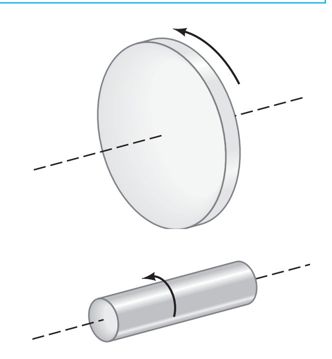


FIGURA 10–18 Un cilindro de gran diámetro tiene mayor inercia rotacional que otro de igual masa pero de menor diámetro.

CUIDADO

Para estudiar el movimiento rotacional, la masa no puede considerarse que esté concentrada en el CM

EJEMPLO 10–8 Dos pesos sobre una barra: Diferentes ejes, diferente I**.** Dos pequeños "pesos" de masa 5.0 kg y 7.0 kg están montados a 4.0 m entre sí sobre una varilla ligera (cuya masa podemos ignorar), como se muestra en la figura 10-19. Calcule el momento de inercia del sistema *a*) cuando gira con respecto a un eje situado a la mitad entre los pesos, figura 10-19a, y *b*) cuando el sistema gira con respecto a un eje 0.50 m a la izquierda de la masa de 5.0 kg (figura 10-19b).

PLANTEAMIENTO En cada caso, el momento de inercia del sistema se encuentra sumando las dos partes mediante la ecuación 10-13.

SOLUCIÓN *a*) Ambos pesos están a la misma distancia, 2.0 m, del eje de rotación. Entonces,

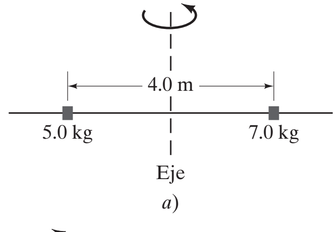
$$I = \Sigma mR^2 = (5.0\,\text{kg})(2.0\,\text{m})^2 + (7.0\,\text{kg})(2.0\,\text{m})^2$$
$$= 20\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 + 28\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 = 48\,\text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

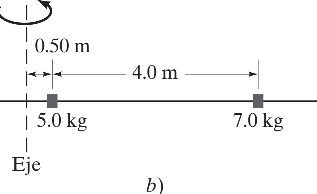
b) La masa de 5.0 kg está ahora a 0.50 m del eje y la masa de 7.0 kg está a 4.50 m del eje. Entonces,

$$I = \Sigma mR^2 = (5.0\,\text{kg})(0.50\,\text{m})^2 + (7.0\,\text{kg})(4.5\,\text{m})^2$$
$$= 1.3\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 + 142\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 = 143\,\text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

NOTA Este ejemplo ilustra dos puntos importantes. Primero, el momento de inercia de un sistema dado es distinto para diferentes ejes de rotación. Segundo, en el inciso *b*) vemos que una masa cercana al eje de rotación contribuye poco al momento de inercia total; aquí el objeto de 5.0 kg contribuye con menos del 1% al total.

FIGURA 10–19 Ejemplo 10-8. Cálculo del momento de inercia.





CUIDADO

I depende del eje de rotación elegido y de la distribución de la masa

†Es decir, el eje está fijo con respecto al objeto y está fijo en un marco de referencia inercial. Esto incluye un eje que se mueve con velocidad uniforme en un marco inercial, ya que el eje puede considerarse fijo en un segundo marco inercial que se mueve con respecto al primero.

	Objeto	Posición del eje		Momento de inercia
a)	**Aro delgado** de radio R_0	A través del centro	Eje, R_0	MR_0^2
b)	**Aro delgado** de radio R_0 y ancho w	A través de un diámetro central	Eje, R_0, w	$\frac{1}{2}MR_0^2 + \frac{1}{12}Mw^2$
c)	**Cilindro sólido** de radio R_0	A través del centro	Eje, R_0	$\frac{1}{2}MR_0^2$
d)	**Cilindro hueco** de radio interior R_1 y radio exterior R_2	A través del centro	Eje, R_1, R_2	$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$
e)	**Esfera uniforme** de radio r_0	A través del centro	Eje, r_0	$\frac{2}{5}Mr_0^2$
f)	**Varilla larga uniforme** de longitud ℓ	Por el centro	Eje, ℓ	$\frac{1}{12}M\ell^2$
g)	**Varilla larga uniforme** de longitud ℓ	Por un extremo	Eje, ℓ	$\frac{1}{3}M\ell^2$
h)	**Placa rectangular delgada de** longitud ℓ y ancho w	A través del centro	Eje, w, ℓ	$\frac{1}{12}M(\ell^2 + w^2)$

FIGURA 10–20 Momentos de inercia de varios objetos de densidad uniforme. [Usamos R para la distancia radial desde el eje, y r para la distancia desde un punto cualquiera al origen (sólo en e, la esfera), como vimos en la figura 10-2].

Para la mayoría de los objetos ordinarios, la masa está distribuida continuamente, y el cálculo del momento de inercia, ΣmR^2, puede ser difícil. Sin embargo, es posible obtener expresiones para los momentos de inercia de objetos de forma regular en términos de sus dimensiones (usando cálculo) como veremos en la sección 10-7. La figura 10-20 da esas expresiones para varios sólidos girados con respecto a los ejes especificados. El único para el cual el resultado es evidente es el aro delgado o anillo, girado con respecto a un eje que pasa por su centro perpendicularmente al plano del aro (figura 10-20a). Para tal aro, toda la masa está concentrada a la misma distancia del eje R_0. Así, $\Sigma mR^2 = (\Sigma m)R_0^2 = MR_0^2$, donde M es la masa total del aro.

Cuando el cálculo se vuelve difícil, I se puede determinar experimentalmente midiendo la aceleración angular α con respecto a un eje fijo debido a una torca neta conocida, $\Sigma\tau$, y aplicando la segunda ley de Newton, ecuación 10-14, $I = \Sigma\tau/\alpha$.

10–6 Resolución de problemas de dinámica rotacional

Siempre que se trate con torcas y aceleración angular (ecuación 10-14), es importante usar un conjunto de unidades consistente, que en el SI son: α se mide en rad/s^2; τ en m · N; y el momento de inercia I en kg · m^2.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Movimiento rotacional

1. Como siempre, dibuje un **diagrama** claro y completo.
2. Elija el objeto o los objetos que constituirán el **sistema** que va a estudiarse.
3. Dibuje un **diagrama de cuerpo libre** para el objeto en consideración (o para cada objeto si hay más de uno), que muestre todas (y sólo) las fuerzas externas que actúan sobre ese objeto y la posición exacta en que actúan (su punto de aplicación), para determinar la torca debida a cada fuerza. La gravedad actúa en el CG del objeto (sección 9-8).
4. Identifique el eje de rotación y calcule las **torcas** alrededor de él. Elija los sentidos positivo y negativo de rotación (antihorario y horario), y asigne el signo correcto a cada torca.
5. Aplique la **segunda ley de Newton para rotación**, $\Sigma\tau = I\alpha$. Si no se da el momento de inercia y no es la incógnita buscada, usted tiene que determinarlo primero. Use unidades consistentes, que en el SI son: α en rad/s^2; τ en m · N; e I en kg · m^2.
6. Aplique también, en caso necesario, **la segunda ley de Newton para traslación**, $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$, y **otras** leyes y principios.
7. **Despeje** la(s) incógnita(s) de la(s) ecuación(es) resultante(s).
8. Haga una **estimación** burda para determinar si su respuesta es razonable.

EJEMPLO 10–9 **Una polea pesada.** Una fuerza de 15.0 N (representada por $\vec{\mathbf{F}}_T$) se aplica a una cuerda enrollada alrededor de una polea de masa M = 4.00 kg y radio R_0 = 33.0 cm, figura 10-21. La polea acelera uniformemente desde el reposo hasta una rapidez angular de 30.0 rad/s en 3.00 s. Si se tiene una torca de fricción de τ_{fr} = 1.10 m · N en el eje, determine el momento de inercia de la polea. La polea gira con respecto a su centro.

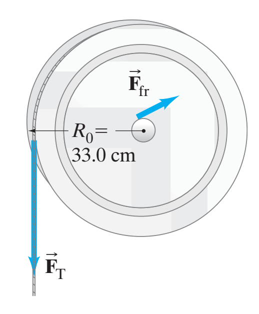


FIGURA 10–21 Ejemplo 10–9.

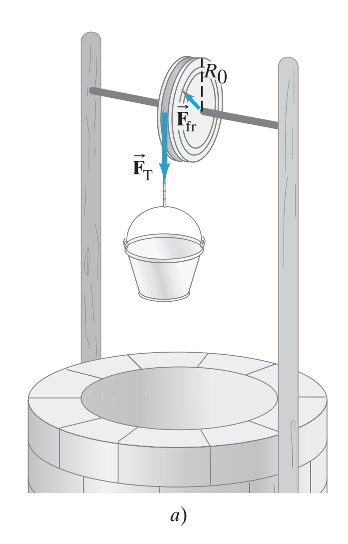
PLANTEAMIENTO Seguimos explícitamente los pasos del recuadro de Resolución de problemas.

SOLUCIÓN

1. **Dibuje un diagrama.** La polea y el cordón unido a ella se representan en la figura 10-21.
2. **Elija el sistema:** la polea.
3. **Dibuje un diagrama de cuerpo libre.** La fuerza F_T que el cordón ejerce sobre la polea se muestra en la figura 10-21. La fuerza de fricción retrasa el movimiento y actúa toda alrededor del eje en un sentido horario, como sugiere la flecha $\vec{\mathbf{F}}_{fr}$ en la figura 10-21; se nos proporciona su torca, que es todo lo que necesitamos. En el diagrama se podrían incluir otras dos fuerzas: la de gravedad mg hacia abajo y cualquier otra fuerza que mantenga el eje en su lugar. Tales fuerzas no ejercen torcas sobre la polea (sus brazos de palanca son cero), así que no las incluimos por conveniencia.
4. **Determine las torcas.** La torca ejercida por la cuerda es igual a R_0F_T y es en sentido antihorario, que elegimos como positivo. La torca de fricción está dada como τ_{fr} = 1.10 m · N; es opuesta al movimiento y es negativa.
5. **Aplique la segunda ley de Newton para la rotación.** La torca neta es
$$\Sigma\tau = R_0F_T - \tau_{fr} = (0.330\,\text{m})(15.0\,\text{N}) - 1.10\,\text{m}\cdot\text{N} = 3.85\,\text{m}\cdot\text{N}.$$
A partir de los datos proporcionados se sabe que la aceleración angular α toma 3.0 s para acelerar la polea desde el reposo hasta ω = 30.0 rad/s:
$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{30.0\,\text{rad/s} - 0}{3.00\,\text{s}} = 10.0\,\text{rad/s}^2.$$
Ahora podemos despejar I en la segunda ley de Newton (véase el paso 7).
6. **Otros cálculos:** No se necesitan.
7. **Despeje las incógnitas.** Se despeja I en la segunda ley de Newton para la rotación, $\Sigma\tau = I\alpha$, e insertamos nuestros valores para $\Sigma\tau$ y α:
$$I = \frac{\Sigma\tau}{\alpha} = \frac{3.85\,\text{m}\cdot\text{N}}{10.0\,\text{rad/s}^2} = 0.385\,\text{kg}\cdot\text{m}^2.$$
8. **Realice una estimación aproximada.** Puede hacerse una estimación aproximada del momento de inercia suponiendo que la polea es un cilindro uniforme y utilizando la figura 10-20c:
$$I \approx \tfrac{1}{2}MR_0^2 = \tfrac{1}{2}(4.00\,\text{kg})(0.330\,\text{m})^2 = 0.218\,\text{kg}\cdot\text{m}^2.$$
Esto es del mismo orden de magnitud que nuestro resultado, aunque numéricamente es un poco menor. Sin embargo, esto tiene sentido porque una polea, por lo general, no es un cilindro uniforme, sino que tiene más masa concentrada hacia el borde exterior. Se esperaría que tal polea tuviese un momento de inercia mayor que un cilindro sólido de igual masa; un aro delgado (figura 10-20a), debe tener mayor I que la polea, y de hecho lo tiene, $I = MR_0^2$ = 0.436 kg · m^2.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Utilidad y poder de las estimaciones aproximadas



a)



b)

FIGURA 10–22 Ejemplo 10-10
a) Polea y cubeta de masa *m* que cae. *b*) Diagrama de cuerpo libre para la cubeta.

EJEMPLO 10–10 Polea y cubeta. Considere de nuevo la polea en la figura 10-21 del ejemplo 10-9 con la misma fricción. Pero ahora, suponga que en vez de una fuerza constante de 15.0 N ejercida sobre la cuerda, tenemos una cubeta de 15.0 N de peso (masa $m = w/g = 1.53$ kg) colgada de la cuerda. Véase la figura 10-22a. Suponemos que la cuerda tiene masa despreciable y no se estira ni se desliza sobre la polea. *a*) Calcule la aceleración angular α de la polea y la aceleración lineal a de la cubeta. *b*) Determine la velocidad angular ω de la polea y la velocidad lineal v de la cubeta en $t = 3.00$ s, si la polea (y la cubeta) parten del reposo en $t = 0$.

PLANTEAMIENTO Esta situación se parece mucho a la del ejemplo 10-9 (figura 10-21). Pero existe una gran diferencia: la tensión en la cuerda se desconoce ahora, y ya no es igual al peso de la cubeta si ésta acelera. Nuestro sistema tiene dos partes: la cubeta, que puede experimentar movimiento de traslación (la figura 10-22b muestra su diagrama de cuerpo libre); y la polea. Esta última no se traslada, pero puede girar. A la polea le aplicamos la versión rotacional de la segunda ley de Newton, $\Sigma\tau = I\alpha$, y a la cubeta la versión lineal, $\Sigma F = ma$.

SOLUCIÓN *a*) Sea F_T la tensión en la cuerda. Entonces, una fuerza F_T actúa en el borde de la polea y usamos la segunda ley de Newton, ecuación 10-14, para la rotación de la polea:

$$I\alpha = \Sigma\tau = R_0 F_T - \tau_{fr}. \qquad \text{[polea]}$$

Luego nos fijamos en el movimiento (lineal) de la cubeta de masa m. La figura 10-22b, muestra el diagrama de cuerpo libre de la cubeta, que incluye las dos fuerzas actúan sobre ella: la fuerza de gravedad mg hacia abajo, y la tensión F_T que ejerce la cuerda hacia arriba. Entonces, al aplicar la segunda ley de Newton, con $\Sigma F = ma$ para la cubeta, tenemos (tomando como positiva la dirección hacia abajo):

$$mg - F_T = ma. \qquad \text{[cubeta]}$$

Advierta que la tensión F_T, que es la fuerza ejercida sobre el borde de la polea, *no* es igual al peso de la cubeta ($= mg = 15.0$ N). Debe haber una fuerza neta sobre la cubeta si ésta acelera, por lo tanto, $F_T < mg$. Ciertamente, de la última ecuación tenemos, $F_T = mg - ma$.

Para obtener α, notamos que la aceleración tangencial de un punto sobre el borde de la polea es la misma que la aceleración de la cubeta, si la cuerda no se estira ni se desliza sobre el borde de la polea. Por consiguiente, usamos la ecuación 10-5, $a_{tan} = a = R_0\alpha$. Sustituyendo $F_T = mg - ma = mg - mR_0\alpha$ en la primera ecuación de arriba (segunda ley de Newton para la rotación de la polea), obtenemos

$$I\alpha = \Sigma\tau = R_0 F_T - \tau_{fr} = R_0(mg - mR_0\alpha) - \tau_{fr} = mgR_0 - mR_0^2\alpha - \tau_{fr}.$$

α aparece a la izquierda y en el segundo término a la derecha, por lo que llevamos ese término al lado izquierdo y despejamos α:

$$\alpha = \frac{mgR_0 - \tau_{fr}}{I + mR_0^2}.$$

El numerador $(mgR_0 - \tau_{fr})$ es la torca neta y el denominador $\left(I + mR_0^2\right)$ es la inercia rotacional total del sistema. Entonces, como $I = 0.385\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$, $m = 1.53$ kg y $\tau_{fr} = 1.10\ \text{m}\cdot\text{N}$ (ejemplo 10-9),

$$\alpha = \frac{(15.0\,\text{N})(0.330\,\text{m}) - 1.10\,\text{m}\cdot\text{N}}{0.385\,\text{kg}\cdot\text{m}^2 + (1.53\,\text{kg})(0.330\,\text{m})^2} = 6.98\,\text{rad/s}^2.$$

La aceleración angular es algo menor en este caso que los 10.0 rad/s^2 del ejemplo 10-9. ¿Por qué? Porque F_T ($= mg - ma$) es algo menor que los 15.0 N del peso mg de la cubeta. La aceleración lineal de la cubeta es

$$a = R_0\alpha = (0.330\,\text{m})\left(6.98\,\text{rad/s}^2\right) = 2.30\,\text{m/s}^2.$$

NOTA La tensión en la cuerda F_T es menor que mg ya que la cubeta acelera hacia abajo.

b) Como la aceleración angular es constante, después de 3.00 s

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + (6.98\,\text{rad/s}^2)(3.00\,\text{s}) = 20.9\,\text{rad/s}.$$

La velocidad de la cubeta es la misma que la de un punto en el borde de la rueda:

$$v = R_0\omega = (0.330\,\text{m})(20.9\,\text{rad/s}) = 6.91\,\text{m/s}.$$

El mismo resultado puede también obtenerse usando la ecuación lineal $v = v_0 + at = 0 + (2.30\ \text{m/s}^2)(3.00\ \text{s}) = 6.90$ m/s. (La diferencia se debe al redondeo).

EJEMPLO 10–11 **Varilla giratoria.** Una varilla uniforme de masa M y longitud ℓ puede girar libremente (es decir, ignoramos la fricción) con respecto a una articulación fija (pivote), como se muestra en la figura 10-23. La varilla se mantiene en posición horizontal y luego se suelta. En este momento (cuando usted ya no ejerce fuerza para sostenerla), determine *a*) la aceleración angular de la varilla y *b*) la aceleración lineal de la punta de la varilla. Suponga que la fuerza de gravedad actúa en el centro de masa de la varilla, como se indica.

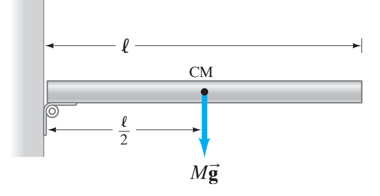


FIGURA 10–23 Ejemplo 10–11.

PLANTEAMIENTO *a*) La única torca sobre la barra con respecto a la articulación se debe a la gravedad, que actúa con una fuerza $F = Mg$ hacia abajo y con un brazo de palanca (en el momento en que se libera) de $\ell/2$, ya que el CM está en el centro de la varilla uniforme. Hay también una fuerza sobre la varilla en la articulación; sin embargo, considerando a la articulación como el eje de rotación, el brazo de palanca de esta fuerza es cero. El momento de inercia de una varilla uniforme pivoteada con respecto a su extremo es (figura 10-20g) $I = \frac{1}{3}M\ell^2$. En el inciso *b*) usamos $a_{tan} = R\alpha$.

SOLUCIÓN Usamos la ecuación 10-14, despejando α para obtener la aceleración angular inicial de la varilla:

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{Mg\frac{\ell}{2}}{\frac{1}{3}M\ell^2} = \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}.$$

Al descender la varilla, la fuerza de gravedad sobre ella es constante pero la torca debida a esta fuerza no es constante, ya que cambia el brazo de palanca; por lo tanto, la aceleración angular de la varilla no es constante.

b) La aceleración lineal de la punta de la varilla se encuentra a partir de la relación $a_{tan} = R\alpha$ (ecuación 10-5) con $R = \ell$:

$$a_{tan} = \ell\alpha = \tfrac{3}{2}g.$$

NOTA ¡La punta de la varilla cae con una aceleración mayor que g! Un objeto pequeño ubicado sobre la punta de la varilla se quedaría atrás al momento de liberar la varilla. En cambio, el CM de la varilla, a una distancia $\ell/2$ del pivote, tiene una aceleración $a_{tan} = (\ell/2)\alpha = \frac{3}{4}g$.

10–7 Determinación de momentos de inercia

Por experimento

Los momentos de inercia de cualquier objeto con respecto a un eje dado se pueden determinar experimentalmente, midiendo la torca neta $\Sigma\tau$ requerida para dar al objeto una aceleración angular α. Entonces, de la ecuación 10-14, $I = \Sigma\tau/\alpha$. Véase el ejemplo 10-9.

Usando cálculo

Para sistemas de masas o partículas sencillos, el momento de inercia se puede calcular directamente, como se hizo en el ejemplo 10-8. Muchos objetos se pueden considerar como una distribución continua de masa. En este caso, la ecuación 10-13 que define el momento de inercia, toma la forma

$$I = \int R^2\,dm, \qquad \textbf{(10–16)}$$

donde dm representa la masa de una partícula infinitesimal del objeto y R es la distancia perpendicular de esta partícula al eje de rotación. La integral se toma sobre todo el objeto. Esto se puede hacer fácilmente para objetos de forma geométrica simple.

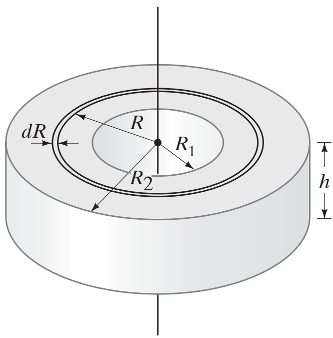


FIGURA 10–24 Determinación del momento de inercia de un cilindro hueco (ejemplo 10-12).

EJEMPLO 10–12 **Cilindro, sólido o hueco.** *a*) Demuestre que el momento de inercia de un cilindro hueco uniforme de radio interior R_1, radio exterior R_2, y masa M, es $I = \frac{1}{2}M\left(R_1^2 + R_2^2\right)$, como se indica en la figura 10-20d, con respecto a un eje de rotación que pasa a través del centro y paralelo al eje de simetría. *b*) Obtenga el momento de inercia para un cilindro sólido.

PLANTEAMIENTO Sabemos que el momento de inercia de un anillo delgado de radio R es mR^2. Dividimos entonces el cilindro en anillos o aros cilíndricos concéntricos delgados de espesor dR, uno de los cuales está indicado en la figura 10-24. Si la densidad (masa por volumen unitario) es ρ, entonces

$$dm = \rho\, dV,$$

donde dV es el volumen del anillo delgado de radio R, espesor dR y altura h. Como $dV = (2\pi R)(dR)(h)$, tenemos

$$dm = 2\pi\rho hR\, dR.$$

SOLUCIÓN *a*) El momento de inercia se obtiene por integración de todos esos aros (sumándolos):

$$I = \int R^2\, dm = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi\rho hR^3\, dR = 2\pi\rho h\left[\frac{R_2^4 - R_1^4}{4}\right] = \frac{\pi\rho h}{2}\left(R_2^4 - R_1^4\right),$$

donde se considera que el cilindro tiene densidad uniforme, ρ = constante. (Si no fuese así, tendríamos que conocer ρ como función de R antes de poder llevar a cabo la integración). El volumen V de este cilindro hueco es $V = \left(\pi R_2^2 - \pi R_1^2\right)h$, por lo que su masa M es

$$M = \rho V = \rho\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)h.$$

Como $\left(R_2^4 - R_1^4\right) = \left(R_2^2 - R_1^2\right)\left(R_2^2 + R_1^2\right)$, tenemos

$$I = \frac{\pi\rho h}{2}\left(R_2^2 - R_1^2\right)\left(R_2^2 + R_1^2\right) = \tfrac{1}{2}M\left(R_1^2 + R_2^2\right),$$

como se estableció en la figura 10-20d.

b) Para un cilindro sólido, $R_1 = 0$ y si consideramos $R_2 = R_0$, tenemos

$$I = \tfrac{1}{2}MR_0^2,$$

como se indica en la figura 10-20c para un cilindro sólido de masa M y radio R_0.

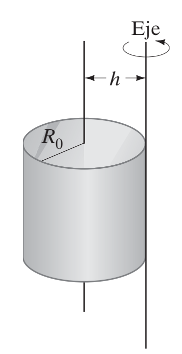
Teoremas de los ejes paralelos

Se tienen dos sencillos teoremas útiles en el cálculo de momentos de inercia. El primero se llama **teorema de los ejes paralelos** y relaciona el momento de inercia I de un objeto de masa total M con respecto a cualquier eje, con su momento de inercia I_{CM} con respecto a un eje que pasa por el centro de masa y es paralelo al primer eje. Si ambos ejes está a una distancia h, entonces

$$I = I_{cm} + Mh^2. \qquad \text{[ejes paralelos]} \quad \textbf{(10–17)}$$

Así, por ejemplo, si se conoce el momento de inercia con respecto a un eje que pase por el CM, podemos calcular fácilmente el momento de inercia respecto de cualquier otro eje que sea paralelo al eje que pasa por el centro de masa (eje centroidal).

FIGURA 10–25 Ejemplo 10–13.



EJEMPLO 10–13 **Ejes paralelos.** Determine el momento de inercia de un cilindro sólido de radio R_0 y masa M, con respecto a un eje tangente a su borde y paralelo a su eje de simetría, figura 10-25.

PLANTEAMIENTO Usamos el teorema de los ejes paralelos con $I_{cm} = \frac{1}{2}MR_0^2$ (figura 10-20c).

SOLUCIÓN Como $h = R_0$, con la ecuación 10-17:

$$I = I_{cm} + Mh^2 = \tfrac{3}{2}MR_0^2.$$

EJERCICIO C En las figuras 10-20f y 10-20g, se dan los momentos de inercia para una varilla delgada alrededor de dos ejes diferentes. Se relacionan mediante el teorema de los ejes paralelos? Por favor, indique cómo.

*Demostración del teorema de los ejes paralelos

La demostración del teorema de los ejes paralelos es como sigue. Elegimos nuestro sistema coordenado con el origen en el CM, y llamamos I_{CM} al momento de inercia con respecto al eje z. La figura 10-26 muestra una sección transversal de un objeto de forma arbitraria en el plano xy. Denotamos con I al momento de inercia del objeto, con respecto a un eje paralelo al eje z que pasa por el punto A en la figura 10-26, donde el punto A tiene las coordenadas x_A y y_A. Sean x_i, y_i y m_i las coordenadas y la masa de una partícula arbitraria del objeto. El cuadrado de la distancia desde este punto hasta A es $\left[(x_i - x_A)^2 + (y_i - y_A)^2\right]$. El momento de inercia I con respecto al eje por A es, entonces,

$$\begin{aligned} I &= \Sigma m_i\left[(x_i - x_A)^2 + (y_i - y_A)^2\right] \\ &= \Sigma m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) - 2x_A\Sigma m_i x_i - 2y_A\Sigma m_i y_i + (\Sigma m_i)\left(x_A^2 + y_A^2\right). \end{aligned}$$

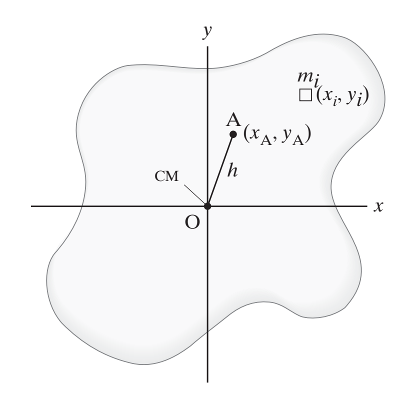


FIGURA 10–26 Derivación del teorema de los ejes paralelos.

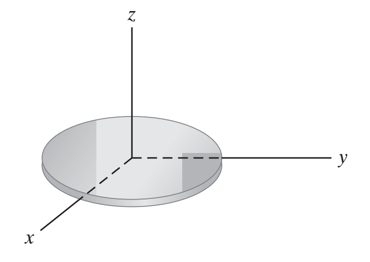
El primer término a la derecha es justamente $I_{cm} = \Sigma m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right)$ ya que el CM está en el origen. Los términos segundo y tercero son cero puesto que, por definición del CM, $\Sigma m_i x_i = \Sigma m_i y_i = 0$ porque $x_{CM} = y_{CM} = 0$. El último término es Mh^2 ya que $\Sigma m_i = M$ y $\left(x_A^2 + y_A^2\right) = h^2$ donde h es la distancia de A al CM. Hemos demostrado así que $I = I_{CM} + Mh^2$, que es la ecuación 10-17.

*El teorema de los ejes perpendiculares

El teorema de los ejes paralelos puede aplicarse a cualquier objeto. El segundo teorema, **el teorema de los ejes perpendiculares**, se aplica sólo a objetos planos, es decir, a cuerpos bidimensionales, o a objetos de espesor uniforme, cuyo espesor pueda despreciarse al compararlo con las otras dimensiones. Este teorema establece que la suma de los momentos de inercia de un objeto plano, con respecto a dos ejes perpendiculares cualquiera contenidos en el plano del objeto, es igual al momento de inercia con respecto a un eje que pase por su punto de intersección, y que sea perpendicular al plano del objeto. Entonces, si el objeto está en el plano xy (figura 10-27),

$$I_z = I_x + I_y. \qquad \text{[objeto en el plano } xy\text{]} \quad \textbf{(10–18)}$$

FIGURA 10–27 Teorema de los ejes perpendiculares.



Aquí I_z, I_x, I_y son momentos de inercia con respecto a los ejes z, x y y. La prueba es sencilla: como $I_x = \Sigma m_i y_i^2$, $I_y = \Sigma m_i x_i^2$, e $I_z = \Sigma m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right)$, la ecuación 10-18 se obtiene directamente.

10–8 Energía cinética rotacional

La cantidad $\frac{1}{2}mv^2$ es la energía cinética de un objeto en movimiento traslacional. Se dice que un objeto que gira con respecto a un eje tiene **energía cinética rotacional**. Por analogía con la energía cinética traslacional, esperaríamos que ésta estuviera dada por la expresión $\frac{1}{2}I\omega^2$ donde I es el momento de inercia del objeto y ω es su velocidad angular. De hecho, podemos demostrar que esto es cierto.

Considere cualquier objeto rígido en rotación compuesto por muchas partículas pequeñas, cada una de masa m_i. Si R_i representa la distancia de cualquier partícula al eje de rotación, entonces su velocidad lineal es $v_i = R_i\omega$. La energía cinética total de todo el objeto será la suma de las energías cinéticas de todas sus partículas:

$$\begin{aligned} K &= \Sigma\left(\tfrac{1}{2}m_i v_i^2\right) = \Sigma\left(\tfrac{1}{2}m_i R_i^2\omega^2\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\Sigma\left(m_i R_i^2\right)\omega^2. \end{aligned}$$

Hemos factorizado $\frac{1}{2}$ y ω^2 pues son los mismos para toda partícula de un objeto rígido. Como $\Sigma m_i R_i^2 = I$, es el momento de inercia, vemos que la energía cinética rotacional K de un objeto en rotación con respecto a un eje fijo es, como esperábamos,

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2. \qquad \text{[rotación con respecto a un eje fijo]} \quad \textbf{(10–19)}$$

Si el eje no está fijo en el espacio, la energía cinética rotacional toma una forma más complicada.

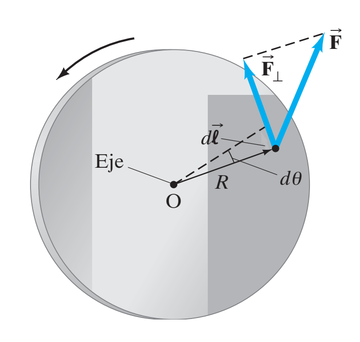


FIGURA 10–28 Cálculo del trabajo realizado por una torca que actúa sobre un objeto rígido que gira alrededor de un eje fijo.

El trabajo hecho sobre un objeto que gira con respecto a un eje fijo puede escribirse en términos de cantidades angulares. Suponga que una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ es ejercida en un punto dado del objeto cuya distancia perpendicular al eje de rotación es R, como en la figura 10-28. El trabajo hecho por esta fuerza es

$$W = \int \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \int F_\perp R\, d\theta,$$

donde $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ es una distancia infinitesimal perpendicular a R con magnitud $d\ell = R\, d\theta$, y $F_\perp$ es la componente de $\vec{\mathbf{F}}$ perpendicular a R y paralela a $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ (figura 10-28). Pero $F_\perp R$ es la torca con respecto al eje, por lo que

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\, d\theta \qquad \textbf{(10–20)}$$

es el trabajo realizado por una torca τ cuando se hace girar un objeto a través de un ángulo $\theta_2 - \theta_1$. La tasa del trabajo efectuado, o potencia P, en cualquier instante es

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega. \qquad \textbf{(10–21)}$$

El principio del trabajo y la energía es válido también para la rotación de un objeto rígido con respecto a un eje fijo. De la ecuación 10-14, tenemos

$$\tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = I\omega\frac{d\omega}{d\theta},$$

donde usamos la regla de la cadena y $\omega = d\theta/dt$. Entonces, $\tau\, d\theta = I\omega\, d\omega$ y

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\, d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega\, d\omega = \tfrac{1}{2}I\omega_2^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_1^2. \qquad \textbf{(10–22)}$$

Éste es el principio del trabajo y la energía para un objeto rígido que gira alrededor de un eje fijo y establece que el trabajo hecho al girar un objeto en un ángulo $\theta_2 - \theta_1$ es igual al cambio en la energía cinética rotacional del objeto.

FÍSICA APLICADA
Energía de un volante

EJEMPLO 10–14 ESTIMACIÓN **Volantes.** Los volantes son simplemente grandes discos en rotación, que se han sugerido como medios para almacenar energía en sistemas generadores con base en la energía solar. Estime la energía cinética que puede almacenarse en un volante de 80,000 kg (80 ton) con diámetro de 10 m (un edificio de tres niveles). Suponga que el volante puede girar sin romperse (destrozarse debido a los esfuerzos internos) a 100 rpm.

PLANTEAMIENTO Usamos la ecuación 10-19, $K = \frac{1}{2}I\omega^2$, pero sólo después de convertir 100 rpm a ω en rad/s.

SOLUCIÓN Se nos da

$$\omega = 100\text{ rpm} = \left(100\frac{\text{rev}}{\text{min}}\right)\left(\frac{1\text{ min}}{60\text{ seg}}\right)\left(\frac{2\pi\text{ rad}}{\text{rev}}\right) = 10.5\text{ rad/s}.$$

La energía cinética almacenada en el disco (para el que $I = \frac{1}{2}MR_0^2$) es

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}MR_0^2\right)\omega^2$$
$$= \tfrac{1}{4}(8.0 \times 10^4\text{ kg})(5\text{ m})^2(10.5\text{ rad/s})^2 = 5.5 \times 10^7\text{ J}.$$

NOTA En términos de kilowatts-hora [1 kWh = (1000 J/s)(3600 s/h)(1h) = 3.6×10^6 J], esta energía es sólo aproximadamente 15 kWh, que no es una gran cantidad de energía (un horno de 3 kW la usaría toda en 5 horas). Por lo tanto, los volantes son poco probables para esta aplicación.

EJEMPLO 10–15 **Varilla en rotación.** Una varilla de masa M puede girar alrededor de una articulación sin fricción fija en un extremo de ella, como se muestra en la figura 10-29. La varilla se mantiene primero horizontalmente en reposo y luego se suelta. Determine la velocidad angular de la varilla cuando alcanza la posición vertical, y la rapidez de la punta de la varilla en este momento.

PLANTEAMIENTO Podemos usar aquí el principio del trabajo y la energía. El trabajo efectuado se debe a la gravedad y es igual al cambio en la energía potencial gravitacional de la varilla.

SOLUCIÓN Como el CM de la varilla cae una distancia vertical $\ell/2$, el trabajo hecho por la gravedad es

$$W = Mg\frac{\ell}{2}.$$

La energía cinética inicial es cero. Por consiguiente, del principio del trabajo y la energía,

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 = Mg\frac{\ell}{2}.$$

Como $I = \frac{1}{3}M\ell^2$ para una varilla pivoteada alrededor de su extremo (figura 10-20g), podemos despejar ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}.$$

La punta de la varilla tendrá una rapidez lineal (véase la ecuación 10-4)

$$v = \ell\omega = \sqrt{3g\ell}.$$

NOTA En comparación, un objeto que cae verticalmente una altura ℓ tiene una rapidez $v = \sqrt{2g\ell}$.

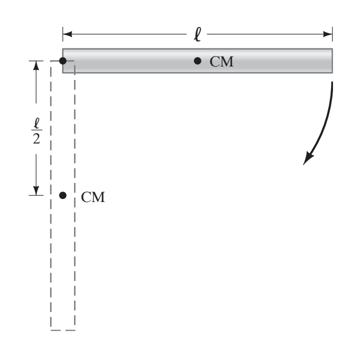


FIGURA 10–29 Ejemplo 10–15.

EJERCICIO D Estime la energía almacenada en el movimiento rotacional de un huracán. Modele el huracán como un cilindro uniforme con 300 km de diámetro y 5 km de altura, compuesto por aire cuya masa es 1.3 kg por m^3. Considere que el borde exterior del huracán se mueve a una rapidez de 200 km/h.

10–9 Movimiento rotacional más traslacional: Rodamiento

Rodamiento sin deslizamiento

El rodamiento de una bola o una rueda es un movimiento común en la vida diaria: una pelota que rueda por el piso, o las ruedas y los neumáticos de un automóvil o una bicicleta que ruedan sobre el pavimento. El rodamiento *sin deslizamiento* depende de la fricción estática entre el objeto rodante y el suelo. La fricción es estática porque el punto de contacto del objeto rodante con el suelo está en reposo en cada momento. A este movimiento se le conoce también como *rodamiento puro*.

El rodamiento sin deslizamiento implica tanto rotación como traslación. Se tiene entonces una relación simple entre la rapidez lineal v del eje y la velocidad angular ω del neumático o esfera rodantes, dada por $v = R\omega$, donde R es el radio, como demostraremos ahora. La figura 10-30a muestra una rueda que gira hacia la derecha sin deslizamiento. En el instante mostrado, el punto P sobre la rueda está en contacto con el suelo y momentáneamente en reposo. La velocidad del eje en el centro C de la rueda es $\vec{\mathbf{v}}$. En la figura 10-30b nos hemos puesto en el marco de referencia de la rueda, es decir, nos movemos hacia la derecha con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ con respecto al suelo. En este marco de referencia, el eje C está en reposo; en tanto que el suelo y el punto P se mueven hacia la izquierda con velocidad $-\vec{\mathbf{v}}$ como se muestra. Aquí tenemos una rotación pura y podemos usar la ecuación 10-4 para obtener $v = R\omega$ donde R es el radio de la rueda. Ésta es la misma v que en la figura 10-30a, por lo que vemos que la rapidez lineal v del eje relativa al suelo está relacionada con la velocidad angular ω por

$$v = R\omega, \qquad \text{[rodamiento sin deslizamiento]}$$

Esto es válido sólo si no hay deslizamiento.

FIGURA 10–30 *a*) Una rueda que gira hacia la derecha. Su centro C se mueve con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$. El punto P está en reposo con respecto al piso en este momento. *b*) La misma rueda vista desde un marco de referencia en el que el eje de la rueda C está en reposo, es decir, nos movemos hacia la derecha con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ relativa al suelo. El punto P, que estaba en reposo en a), en *b*) se mueve hacia la izquierda con velocidad $-\vec{\mathbf{v}}$ como se muestra. (Véase también la sección 3-9 sobre velocidad relativa).

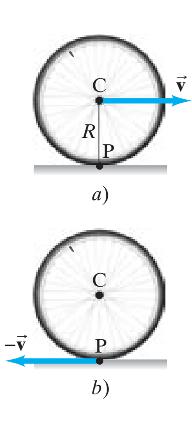
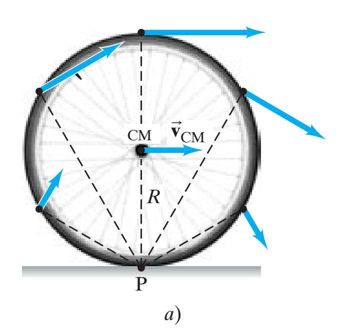
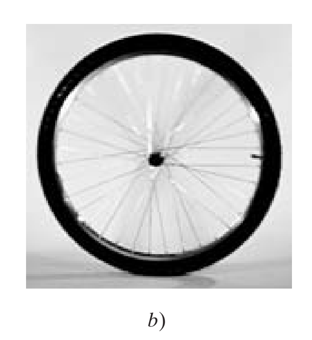


FIGURA 10–31 *a*) Una rueda al rodar gira respecto al eje instantáneo (perpendicular a la página) que pasa por el punto P de contacto con el suelo. Las flechas representan la velocidad instantánea de cada punto. *b*) Fotografía de una rueda que gira. Los rayos se ven menos nítidos donde la rapidez es mayor.



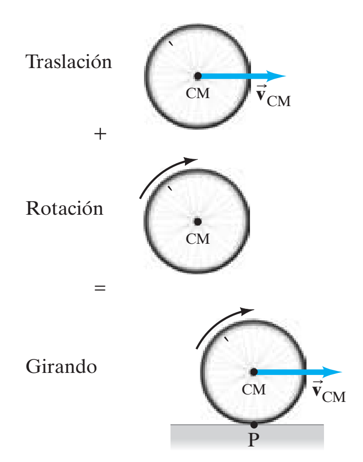


Eje instantáneo

Cuando una rueda gira sin deslizarse, el punto de contacto de la rueda con el suelo está instantáneamente en reposo. Es útil a veces considerar el movimiento de la rueda como una rotación pura con respecto a este "eje instantáneo", que pasa por el punto P (figura 10-31a). Los puntos cercanos al terreno tienen una rapidez lineal pequeña, puesto que están cerca a este eje instantáneo; mientras que los puntos más alejados tienen una rapidez lineal mayor. Esto se observa en una fotografía de una rueda real en rodamiento (figura 10-31b): los rayos cerca de la parte superior de la rueda aparecen más borrosos, porque se mueven más rápidamente que los del fondo de la rueda.

Energía cinética total = $K_{cm} + K_{rot}$

FIGURA 10–32 Una rueda que gira sin deslizamiento puede considerarse como una traslación pura de la rueda como un todo con velocidad $\vec{\mathbf{v}}_{cm}$ más una rotación pura alrededor del CM.



Un objeto que gira mientras que su centro de masa (CM) experimenta movimiento traslacional tendrá energía cinética traslacional y energía cinética rotacional. La ecuación 10-19, $K = \frac{1}{2}I\omega^2$, da la energía cinética rotacional si el eje de rotación es fijo. Si el objeto se está moviendo (como una rueda que gira por el suelo, figura 10-32), esta ecuación es aún válida siempre que el eje de rotación esté fijo en dirección. Para obtener la energía cinética total, notamos que la rueda rodante experimenta rotación pura alrededor de su punto de contacto instantáneo P, figura 10-31. Como vimos en el análisis de la figura 10-30, la rapidez v del CM con respecto al suelo es igual a la rapidez de un punto en el borde de la rueda con respecto a su centro. Ambas rapideces están relacionadas con el radio R mediante la relación $v = \omega R$. Entonces, la velocidad angular ω con respecto al punto P es la misma ω que tiene la rueda con respecto a su centro, y la energía cinética total es

$$K_{tot} = \tfrac{1}{2}I_P\omega^2,$$

donde I_P es el momento de inercia del objeto rodante con respecto al eje instantáneo en P. Podemos escribir K_{tot} en términos del centro de masa usando el teorema de los ejes paralelos: $I_P = I_{CM} + MR^2$, donde sustituimos $h = R$ en la ecuación 10-17, Así,

$$K_{tot} = \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \tfrac{1}{2}MR^2\omega^2.$$

Sin embargo, $R\omega = v_{CM}$, la rapidez del centro de masa. De manera que la energía cinética de un objeto rodante es

$$K_{tot} = \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \tfrac{1}{2}Mv_{cm}^2, \qquad \textbf{(10–23)}$$

donde v_{CM} es la velocidad lineal del CM, I_{CM} es el momento de inercia con respecto a un eje perpendicular que pasa por el CM, ω es la velocidad angular con respecto a este eje y M es la masa total del objeto.

EJEMPLO 10–16 **Esfera que rueda hacia abajo por un plano inclinado.** ¿Cuál será la rapidez de una esfera sólida de masa M y radio r_0 cuando llega al fondo de una rampa, si parte del reposo a una altura vertical H y rueda sin deslizarse? Véase la figura 10-33. (Suponga que no hay deslizamiento por la fricción estática, la cual no realiza trabajo). Compare su resultado con el de un objeto *que se desliza* hacia abajo por una rampa sin fricción.

PLANTEAMIENTO Usamos la ley de la conservación de la energía con la energía potencial gravitacional y tenemos que incluir ahora las energías cinéticas rotacional y traslacional.

SOLUCIÓN La energía total en cualquier punto a una distancia vertical y arriba de la base de la rampa es

$$\tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2 + Mgy,$$

donde v es la rapidez del CM y Mgy es la energía potencial gravitacional. Al aplicar la conservación de la energía, igualamos la energía total en la parte superior ($y = H$, $v = 0$, $\omega = 0$) a la energía total en el fondo ($y = 0$):

$$0 + 0 + MgH = \tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2 + 0.$$

De la figura 10-20e, el momento de inercia de una esfera sólida con respecto a un eje que pasa por su CM es $I_{\text{cm}} = \tfrac{2}{5}Mr_0^2$, Como la esfera rueda sin deslizamiento, tenemos $\omega = v/r_0$ (recuerde la figura 10-30). Por lo tanto,

$$MgH = \tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{5}Mr_0^2\right)\left(\frac{v^2}{r_0^2}\right).$$

Cancelando las M y los r_0, obtenemos

$$\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5}\right)v^2 = gH$$

o

$$v = \sqrt{\tfrac{10}{7}gH}.$$

Podemos comparar este resultado para la rapidez de un esfera rodante con la de un objeto que se desliza hacia abajo por un plano sin rodar y sin fricción, $\tfrac{1}{2}mv^2 = mgH$ (véase nuestra ecuación de energía anterior, eliminando el termino rotacional). Para un objeto que se desliza, $v = \sqrt{2gH}$, que es mayor que para una esfera rodante. Un objeto que sólo se desliza sin fricción transforma toda su energía potencial inicial en energía cinética de traslación (nada de energía cinética rotacional), por lo que es mayor la rapidez de su centro de masa.

NOTA Nuestro resultado de la esfera rodante muestra (quizá sorprendentemente) que v es independiente tanto de la masa M como de radio r_0 de la esfera.

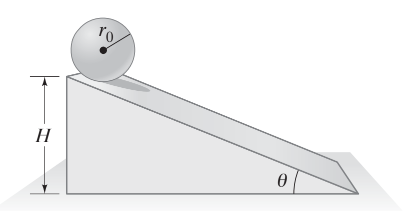
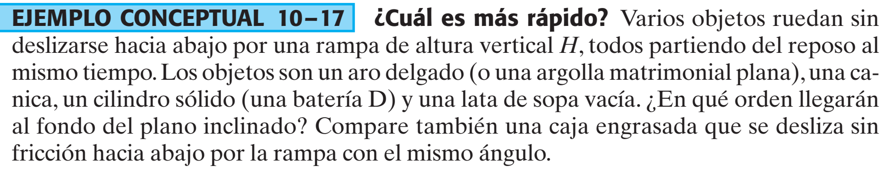


FIGURA 10–33 Una esfera que rueda hacia debajo de un plano inclinado tiene energía cinética rotacional y energía cinética traslacional. Ejemplo 10-16.



CUIDADO

Los objetos rodantes van más lentamente que los que se deslizan por la energía cinética rotacional



EJEMPLO CONCEPTUAL 10–17 **¿Cuál es más rápido?** Varios objetos ruedan sin deslizarse hacia abajo por una rampa de altura vertical H, todos partiendo del reposo al mismo tiempo. Los objetos son un aro delgado (o una argolla matrimonial plana), una canica, un cilindro sólido (una batería D) y una lata de sopa vacía. ¿En qué orden llegarán al fondo del plano inclinado? Compare también una caja engrasada que se desliza sin fricción hacia abajo por la rampa con el mismo ángulo.

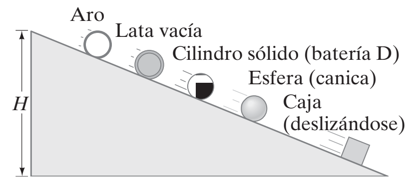
RESPUESTA Usamos la conservación de la energía considerando la energía potencial gravitacional más energías cinéticas rotacional y traslacional. La caja deslizante sería la más rápida porque la pérdida de energía potencial (MgH) se transforma completamente en energía cinética de traslación para la caja; mientras que para objetos rodantes, la energía potencial inicial es compartida entre la energía cinética traslacional y la energía cinética rotacional y, por consiguiente, es menor la rapidez del CM. Para cada uno de los objetos rodantes podemos establecer que la pérdida en energía potencial es igual al incremento en energía cinética:

$$MgH = \tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2.$$

Para todos nuestros objetos rodantes, el momento de inercia I_{CM} es un factor numérico multiplicado por la masa M y el radio R^2 (figura 10-20). La masa M está en cada término, por lo que la rapidez traslacional v_{CM} no depende de M, ni depende del radio R, ya que $\omega = v/R$ y R^2 se cancela para todos los objetos rodantes. La rapidez v en el fondo depende entonces sólo del factor numérico en I_{CM} que expresa cómo está distribuida la masa. En consecuencia, el aro, con toda su masa concentrada en el radio $R(I_{\text{CM}} = MR^2)$, tendrá el mayor momento de inercia y la v_{CM} más baja, por lo que llegará al fondo detrás del cilindro sólido $\left(I_{\text{cm}} = \tfrac{1}{2}MR^2\right)$, que a la vez llegará detrás de la canica $\left(I_{\text{cm}} = \tfrac{2}{5}MR^2\right)$. La lata vacía, que es principalmente un aro más un pequeño disco, tiene casi toda su masa concentrada en R; por lo tanto, será un poco más rápida que el aro puro, pero más lenta que la batería. Véase la figura 10-34.

NOTA Los objetos no deben tener el mismo radio: la rapidez en el fondo no depende de la masa M ni del radio R del objeto, sino sólo de su forma (y de la altura de la rampa H).

FIGURA 10–34 Ejemplo 10–17.



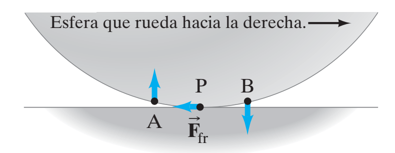


FIGURA 10–35 Una esfera rodando hacia la derecha sobre una superficie plana. El punto de contacto con el plano en cualquier momento, punto P, está momentáneamente en reposo. El punto A a la izquierda de P se está moviendo casi verticalmente hacia arriba en el instante mostrado, y el punto B a la derecha se mueve casi verticalmente hacia abajo. Un instante después, el punto B tocará el plano y estará momentáneamente en reposo. Por lo tanto la fuerza de fricción estática no realiza ningún trabajo.

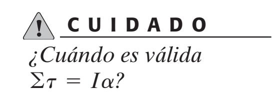
Si en estos ejemplos hubiera existido poca o ninguna fricción estática entre los objetos rodantes y el plano, los objetos redondos se habrían deslizado en vez de rodar, o bien, se presentaría una combinación de ambas situaciones. La fricción estática debe estar presente para que ruede un objeto redondo. No tuvimos que tomar en cuenta la fricción en la ecuación de la energía para objetos rodantes, porque era fricción *estática* y ésta no efectúa trabajo. El punto de contacto de la esfera en cada instante no se desliza, sino que se mueve perpendicularmente al plano (primero hacia abajo y luego hacia arriba, como se indica en la figura 10-35) conforme rueda. Así, la fuerza de fricción estática no realiza ningún trabajo por porque la fuerza y el movimiento (desplazamiento) son perpendiculares entre sí. La razón por la cual los objetos rodantes en los ejemplos 10-16 y 10-17 se mueven hacia abajo por la rampa más lentamente que si se estuvieran deslizando, *no* es porque la fricción los esté desacelerando. Más bien es porque parte de la energía potencial gravitacional se convierte en energía cinética rotacional, dejando menos energía disponible para la energía cinética traslacional.

EJERCICIO E Regrese a la Pregunta de inicio de capítulo, página 248, y respóndala de nuevo ahora. Intente explicar por qué quizás usted la contestó diferente la primera vez.

Uso de $\Sigma\tau_{cm} = I_{cm}\alpha_{cm}$

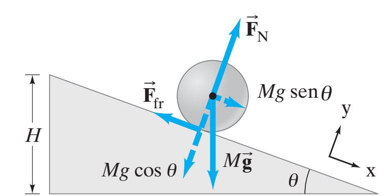
Podemos examinar objetos que ruedan hacia abajo por una rampa no sólo desde el punto de vista de la energía cinética, como lo hicimos en los ejemplos 10-16 y 10-17, sino también en términos de fuerzas y torcas. Si calculamos torcas con respecto a un eje fijo en dirección (incluso si éste acelera) que pase por el centro de masa de la esfera rodante, entonces

$$\Sigma\tau_{cm} = I_{cm}\alpha_{cm}$$



es válida, como vimos en la sección 10-5. Véase la ecuación 10-15, cuya validez mostraremos en el capítulo 11. Sin embargo, sea cuidadoso: no suponga que $\Sigma\tau = I\alpha$ es siempre válida. Usted no puede simplemente calcular τ, I y α con respecto a cualquier eje, a menos que el eje esté (1) fijo en un marco de referencia inercial o (2) fijo en dirección pero que pase por el CM del objeto.

FIGURA 10–36 Ejemplo 10–18.



EJEMPLO 10–18 Análisis de una esfera sobre un plano inclinado usando fuerzas. Analice la esfera rodante del ejemplo 10-16, figura 10-33, en términos de fuerzas y torcas. En particular, encuentre la velocidad v y la magnitud de la fuerza de fricción F_{fr}, figura 10-36.

PLANTEAMIENTO Analizamos el movimiento como traslación del CM más rotación con respecto al CM. F_{fr} se debe a la fricción estática y no podemos suponer que $F_{fr} = \mu_s F_N$, sólo $F_{fr} \leq \mu_s F_N$.

SOLUCIÓN Para la traslación en la dirección x tenemos $\Sigma F = ma$,

$$Mg \operatorname{sen}\theta - F_{fr} = Ma,$$

y en la dirección y

$$F_N - Mg\cos\theta = 0$$

ya que no hay aceleración perpendicular al plano. Esta última ecuación meramente nos da la magnitud de la fuerza normal,

$$F_N = Mg\cos\theta.$$

Para el movimiento rotacional con respecto al CM, usamos la segunda ley de Newton para rotación $\Sigma\tau_{CM} = I_{CM}\alpha_{CM}$ (ecuación 10-15), calculada con respecto a un eje que pasa por el CM, pero fijo en dirección:

$$F_{fr} r_0 = \left(\tfrac{2}{5}Mr_0^2\right)\alpha.$$

Las otras fuerzas, $\vec{F}_N$ y $M\vec{g}$, apuntan a través del eje de rotación (CM), por lo que sus brazos de palanca son cero y no aparecen aquí. Como vimos en el ejemplo 10-16 y en la figura 10-30, $\omega = v/r_0$, donde v es la rapidez del CM. Derivando $\omega = v/r_0$ con respecto al tiempo tenemos $\alpha = a/r_0$ y sustituyendo en la última ecuación, encontramos

$$F_{fr} = \tfrac{2}{5}Ma.$$

Sustituimos este valor en la primera ecuación y obtenemos

$$Mg \operatorname{sen}\theta - \tfrac{2}{5}Ma = Ma,$$

o bien,

$$a = \tfrac{5}{7}g \operatorname{sen}\theta.$$

Vemos así que la aceleración del CM de una esfera rodante es menor que la de un objeto deslizándose sin fricción ($a = g$ sen θ). La esfera partió del reposo en la parte su-

perior del plano inclinado (altura H). Para encontrar la rapidez v en el fondo usamos la ecuación 2-12c, donde la distancia total recorrida a lo largo del plano es $x = H/\text{sen}\,\theta$ (véase la figura 10-36). Así,

$$v = \sqrt{2ax} = \sqrt{2\left(\frac{5}{7}g\,\text{sen}\,\theta\right)\left(\frac{H}{\text{sen}\,\theta}\right)} = \sqrt{\frac{10}{7}gH}.$$

Éste es el mismo resultado obtenido en el ejemplo 10-16 aunque ahí se requirió menos esfuerzo. Para obtener la magnitud de la fuerza de fricción, usamos las ecuaciones obtenidas anteriormente:

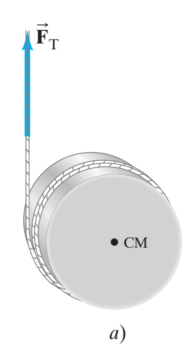
$$F_{fr} = \tfrac{2}{5}Ma = \tfrac{2}{5}M\left(\tfrac{5}{7}g\,\text{sen}\,\theta\right) = \tfrac{2}{7}Mg\,\text{sen}\,\theta.$$

NOTA Si el coeficiente de fricción estática es suficientemente pequeño, o θ es suficientemente grande de modo que $F_{fr} > \mu_s F_N$ (es decir, si[†] $\tan\theta > \tfrac{7}{2}\mu_s$), la esfera no rodará simplemente, sino que se deslizará al moverse hacia abajo por el plano.

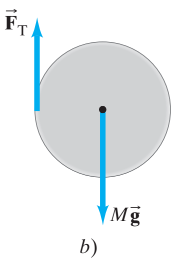
*Ejemplos más avanzados

Presentamos ahora tres ejemplos, todos ellos divertidos y muy interesantes. En cada uno de ellos se usa $\Sigma\tau = I\alpha$, y debemos recordar que esta ecuación es válida sólo si τ, α e I se calculan con respecto a un eje que (1) está fijo en un marco de referencia inercial, o (2) pasa por el CM del objeto y permanece fijo en dirección (paralelo a sí mismo).

EJEMPLO 10–19 **Caída de un yo-yo.** Una cuerda está enrollada alrededor de un cilindro sólido uniforme (una especie de yo-yo) de masa M y radio R, y el cilindro empieza a caer desde el reposo, figura 10-37a. Durante la caída del cilindro, encuentre *a*) su aceleración y *b*) la tensión en la cuerda.



a)



b)

FIGURA 10–37 Ejemplo 10–19.

PLANTEAMIENTO Como siempre, comenzamos con un diagrama de cuerpo libre, figura 10-37b, que muestra el peso del cilindro actuando en el CM y la tensión $\vec{F}_T$ de la cuerda actuando en el borde del cilindro. Escribimos la segunda ley de Newton para el movimiento lineal (positivo hacia abajo):

$$\begin{aligned} Ma &= \Sigma F \\ &= Mg - F_T. \end{aligned}$$

Como no conocemos la tensión en la cuerda, no podemos despejar inmediatamente el valor de a. Por lo que escribimos la segunda ley de Newton para el movimiento rotacional, calculado con respecto al centro de masa:

$$\begin{aligned} \Sigma\tau_{cm} &= I_{cm}\alpha_{cm} \\ F_T R &= \tfrac{1}{2}MR^2\alpha. \end{aligned}$$

Como el cilindro "gira sin deslizamiento" hacia abajo por la cuerda, tenemos la relación adicional $a = \alpha R$ (ecuación 10-5).

SOLUCIÓN La ecuación para la torca se vuelve

$$F_T R = \tfrac{1}{2}MR^2\left(\frac{a}{R}\right) = \tfrac{1}{2}MRa$$

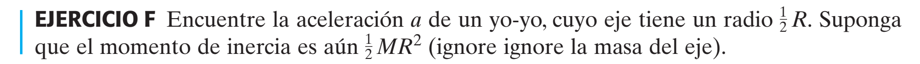
por lo que

$$F_T = \tfrac{1}{2}Ma.$$

Sustituyendo esto en la ecuación de fuerzas, obtenemos

$$\begin{aligned} Ma &= Mg - F_T \\ &= Mg - \tfrac{1}{2}Ma. \end{aligned}$$

Despejando a, encontramos que $a = \tfrac{2}{3}g$. Es decir, la aceleración lineal es menor que la que se tendría si el cilindro simplemente se dejara caer. Esto tiene sentido, ya que la gravedad no es la única fuerza vertical que actúa, pues también actúa la tensión en la cuerda. *b*) Como $a = \tfrac{2}{3}g$, $F_T = \tfrac{1}{2}Ma = \tfrac{1}{3}Mg$.



EJERCICIO F Encuentre la aceleración a de un yo-yo, cuyo eje tiene un radio $\tfrac{1}{2}R$. Suponga que el momento de inercia es aún $\tfrac{1}{2}MR^2$ (ignore ignore la masa del eje).

[†] $F_{fr} > \mu_s F_N$ es equivalente a $\tan\theta > \tfrac{7}{2}\mu_s$ porque $F_{fr} = \tfrac{2}{7}Mg\,\text{sen}\,\theta$ y $\mu_s F_N = \mu_s Mg\cos\theta$.

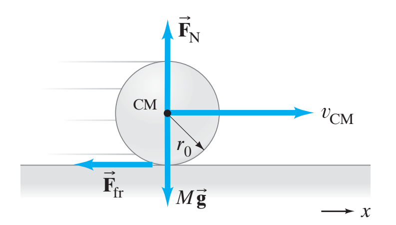


FIGURA 10–38 Ejemplo10–20.

EJEMPLO 10–20 **¿Qué ocurre si una bola rodante se desliza?** Una bola de bolos de masa M y radio r_0 se lanza a lo largo de una superficie horizontal, de manera que inicialmente ($t = 0$) se desliza con una rapidez lineal v_0 pero sin girar. Mientras se desliza, la bola empieza a girar y por último rueda sin deslizarse. ¿Cuánto tiempo le tomará comenzar a rodar sin deslizarse?

PLANTEAMIENTO El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 10-38, con la bola moviéndose hacia la derecha. La fuerza de fricción hace dos cosas: actúa para desacelerar el movimiento traslacional del CM, y actúa inmediatamente para empezar a hacer girar la bola en el sentido horario.

SOLUCIÓN La segunda ley de Newton para traslación da

$$Ma_x = \Sigma F_x = -F_{fr} = -\mu_k F_N = -\mu_k Mg,$$

donde μ_k es el coeficiente de fricción cinética porque la bola se desliza. Entonces, $a_x = -\mu_k g$. La velocidad del CM es

$$v_{cm} = v_0 + a_x t = v_0 - \mu_k gt.$$

A continuación aplicamos la segunda ley de Newton rotacional con respecto al CM, $I_{cm}\alpha_{cm} = \Sigma\tau_{cm}$:

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{5}Mr_0^2\alpha_{cm} &= F_{fr}r_0 \\ &= \mu_k Mgr_0. \end{aligned}$$

La aceleración angular es entonces $\alpha_{CM} = 5\,\mu_k g/2r_0$, que es constante. Por lo que la velocidad angular de la bola es (ecuación 10-9a)

$$\omega_{cm} = \omega_0 + \alpha_{cm}t = 0 + \frac{5\,\mu_k gt}{2r_0}.$$

La bola comienza a rodar inmediatamente después de que toca el piso, pero rueda y se desliza al mismo tiempo. Por último, deja de deslizarse y rueda entonces sin resbalar. La condición para rodar sin deslizarse es que

$$v_{cm} = \omega_{cm}r_0,$$

que es la ecuación 10-4, la cual *no* es válida si hay deslizamiento. Este rodamiento sin deslizamiento comienza en el tiempo $t = t_1$ dado por $v_{cm} = \omega_{cm}r_0$ y aplicamos las ecuaciones para V_{CM} y ω_{CM} anteriores:

$$v_0 - \mu_k gt_1 = \frac{5\,\mu_k gt_1}{2r_0}r_0$$

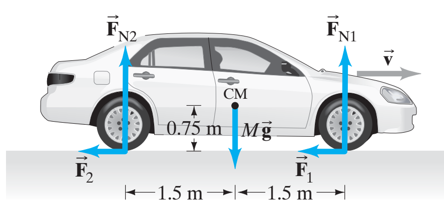
por lo que

$$t_1 = \frac{2v_0}{7\,\mu_k g}.$$

FÍSICA APLICADA

Distribución de la fuerza de frenado de un automóvil

FIGURA 10–39 Fuerzas sobre un automóvil que frena (ejemplo 10-21).



EJEMPLO 10–21 **ESTIMACIÓN** **Frenando un automóvil.** Cuando se aplican los frenos de un automóvil, la parte frontal de éste desciende un poco, y la fuerza sobre los neumáticos delanteros es mucho mayor que la fuerza sobre los neumáticos traseros. Para saber la razón de ello, calcule la magnitud de las fuerzas normales, F_{N1} y F_{N2}, sobre los neumáticos delanteros y traseros del auto que se ilustra en la figura 10-39, cuando el automóvil frena y desacelera a una tasa $a = 0.50\,g$. El auto tiene masa $M =$ 1200 kg, la distancia entre los ejes frontal y posterior es de 3.0 m, y su CM (donde actúa la fuerza de gravedad) está a la mitad de los ejes a 75 cm por arriba del piso.

PLANTEAMIENTO La figura 10-39 es el diagrama de cuerpo libre que muestra todas las fuerzas sobre el automóvil. F_1 y F_2 son las fuerzas de fricción que desaceleran al automóvil. Sea F_1 la suma de las fuerzas sobre ambos neumáticos delanteros, y F_2 la suma de las fuerzas sobre los dos neumáticos traseros. F_{N1} y F_{N2} son las fuerzas normales que ejerce el piso sobre los neumáticos y, para nuestra estimación, suponemos que la fuerza de fricción estática actúa igualmente en todos los neumáticos, de manera que F_1 y F_2 son proporcionales, respectivamente, a F_{N1} y F_{N2}:

$$F_1 = \mu F_{N1} \quad \text{y} \quad F_2 = \mu F_{N2}.$$

SOLUCIÓN Las fuerzas de fricción F_1 y F_2 desaceleran el auto, por lo que la segunda ley de Newton proporciona

$$F_1 + F_2 = Ma$$
$$= (1200\,\text{kg})(0.50)(9.8\,\text{m/s}^2) = 5900\,\text{N}. \qquad \textbf{(i)}$$

Mientras el automóvil está frenando su movimiento es sólo traslacional, de manera que la torca neta sobre él es cero. Si calculamos las torcas respecto de un eje que pasa por el CM, las fuerzas F_1, F_2 y F_{N2} actúan todas para hacer girar al auto en sentido horario, y sólo F_{N1} actúa para hacerlo girar en sentido antihorario, por lo que la torca de F_{N1} debe compensar las torcas de las otras tres fuerzas. Por consiguiente, F_{N1} debe ser considerablemente mayor que F_{N2}. Matemáticamente, tenemos para las torcas calculadas con respecto al CM:

$$(1.5\,\text{m})F_{N1} - (1.5\,\text{m})F_{N2} - (0.75\,\text{m})F_1 - (0.75\,\text{m})F_2 = 0.$$

Como F_1 y F_2 son proporcionales† a F_{N1} y F_{N2} $(F_1 = \mu F_{N1},\ F_2 = \mu F_{N2})$, podemos escribir esto como

$$(1.5\,\text{m})(F_{N1} - F_{N2}) - (0.75\,\text{m})(\mu)(F_{N1} + F_{N2}) = 0. \qquad \textbf{(ii)}$$

Además, como el automóvil no acelera verticalmente,

$$Mg = F_{N1} + F_{N2} = \frac{F_1 + F_2}{\mu}. \qquad \textbf{(iii)}$$

Comparando (iii) con (i), vemos que $\mu = a/g = 0.50$. Ahora despejamos F_{N1} en (ii) y usamos $\mu = 0.50$ para obtener:

$$F_{N1} = F_{N2}\left(\frac{2+\mu}{2-\mu}\right) = \frac{5}{3}F_{N2}.$$

F_{N1} es entonces $1\frac{2}{3}$ veces mayor que F_{N2}. Las magnitudes reales se determinan a partir de (iii) y (i): $F_{N1} + F_{N2} = (5900\,\text{N})/(0.50) = 11{,}800\,\text{N}$ que es igual a $F_{N2}(1 + \frac{5}{3})$; por lo que $F_{N2} = 4400\,\text{N}$ y $F_{N1} = 7400\,\text{N}$.

NOTA Como la fuerza en los neumáticos delanteros es por lo general mayor que sobre los neumáticos traseros, los automóviles a menudo se diseñan con almohadillas o pastillas de frenos más grandes en las ruedas delanteras que en las ruedas traseras. Dicho de otra manera, si tales almohadillas fueran iguales, los frenos delanteros se desgastarían mucho más rápido.

* 10–10 ¿Por qué desacelera una esfera rodante?

Una esfera de masa M y radio r_0 que rueda sobre una superficie plana horizontal finalmente se detiene. ¿Qué fuerzas ocasionan que se detenga? Usted quizá piense que es por la fricción, pero al examinar el problema desde un punto de vista simple y directo, se llega a una situación paradójica.

Suponga que una esfera rueda hacia la derecha como se muestra en la figura 10-40 y está desacelerando. Por la segunda ley de Newton, $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = M\vec{\mathbf{a}}$, debe haber una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ (posiblemente de fricción) que actúa hacia la izquierda como se indica, de manera que la aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ también apuntará hacia la izquierda y v será decreciente. Curiosamente, si nos fijamos ahora en la ecuación de la torca (calculada con respecto al centro de masa), $\Sigma\tau_{CM} = I_{CM}\alpha$, vemos que la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ actúa incrementando la aceleración angular α, *aumentando* así la velocidad de la esfera. Ésta es la paradoja. La fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ actúa desacelerando la esfera si nos fijamos en el movimiento traslacional, y la acelera si nos fijamos en el movimiento rotacional.

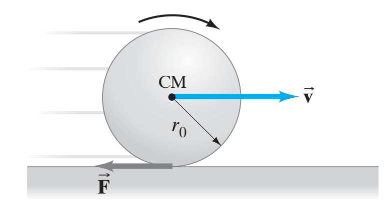


FIGURA 10–40 Esfera que rueda hacia la derecha.

†Nuestra constante de proporcionalidad μ no es igual a μ_s o coeficiente de fricción estática ($F_{fr} \leq \mu_s F_N$), a menos que el vehículo esté a punto de patinarse.

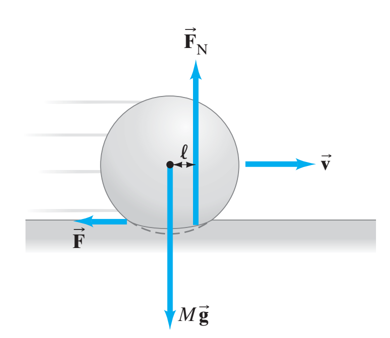


FIGURA 10–41 La fuerza normal $\vec{\mathbf{F}}_N$, ejerce una torca que desacelera la esfera. La deformación de la esfera y de la superficie sobre la que se mueve se ha exagerado para dar más detalles.

La resolución de esta aparente paradoja es que debe estar actuando alguna otra fuerza. Las únicas otras fuerzas que actúan son la gravedad $M\vec{\mathbf{g}}$, y la fuerza normal $\vec{\mathbf{F}}_N$ $(= -M\vec{\mathbf{g}})$. Éstas actúan verticalmente y, por consiguiente, no afectan el movimiento horizontal traslacional. Si suponemos que la esfera y el plano son rígidos, de manera que la esfera está en contacto en un solo punto, esas fuerzas no dan lugar a torcas con respecto al CM, ya que sus líneas de acción pasan por el CM.

Él único recurso que tenemos para resolver la paradoja es abandonar nuestra idealización de que los objetos son rígidos. De hecho, todos los cuerpos son deformables en alguna medida. Nuestra esfera se aplana ligeramente y la superficie horizontal también adquiere una ligera depresión donde las dos están en contacto. Se tiene una *área* de contacto, no un punto. Por lo tanto, puede haber una torca en esta área de contacto que actúa en sentido opuesto a la torca asociada con $\vec{\mathbf{F}}$, y desacelera la rotación de la esfera. Esta torca está asociada con la fuerza normal (equivalente) $\vec{\mathbf{F}}_N$ que ejerce la mesa sobre la esfera en toda el área de contacto. El efecto neto es que podemos considerar $\vec{\mathbf{F}}_N$ actuando verticalmente a una distancia ℓ *adelante* del CM, como se muestra en la figura 10-41 (donde la deformación se muestra muy exagerada).

¿Es razonable que la fuerza normal $\vec{\mathbf{F}}_N$ debería actuar efectivamente *adelante* del CM como se indica en la figura 10-41? Sí. La esfera está rodando y el borde por delante golpea la superficie con un ligero impulso. Por consiguiente, la mesa empuja hacia arriba un poco más fuerte sobre la parte frontal de la esfera, que en el caso de que la esfera estuviera en reposo. En la parte posterior del área de contacto, la esfera comienza a moverse hacia arriba, por lo que la mesa empuja hacia arriba sobre ella menos fuerte que cuando la esfera está en reposo. La mesa, al empujar hacia arriba más fuerte sobre la parte frontal del área de contacto, da lugar a la torca necesaria y justifica que el punto de acción efectivo de $\vec{\mathbf{F}}_N$ se encuentre al frente del CM.

Cuando están presentes otras fuerzas, la pequeña torca τ_N debida a $\vec{\mathbf{F}}_N$ en general puede ignorarse. Por ejemplo, cuando una esfera o un cilindro ruedan hacia abajo por una rampa, la fuerza de gravedad tiene más influencia que τ_N, por lo que ésta puede despreciarse. Para muchos propósitos (aunque no para todos), supondremos que una esfera dura está en contacto con una superficie dura en un punto esencialmente.

Resumen

Cuando un objeto rígido gira con respecto a un eje fijo, cada punto del objeto se mueve en una trayectoria circular. Las líneas dibujadas perpendicularmente, desde el eje de rotación hasta diferentes puntos en el objeto, barren todas el mismo ángulo θ en cualquier intervalo de tiempo dado.

A los ángulos conviene medirlos en **radianes**. Un radián es el ángulo subtendido por un arco cuya longitud es igual al radio, o bien,

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \quad \text{por lo que} \quad 1 \text{ rad} \approx 57.3^\circ.$$

Todas las partes de un objeto rígido que gira con respecto a un eje fijo tienen la misma **velocidad angular** ω y la misma **aceleración angular** α en cualquier instante, donde

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \textbf{(10–2b)}$$

y

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}. \quad \textbf{(10–3b)}$$

Las unidades de ω y α son rad/s y rad/s^2.

La velocidad y la aceleración lineales de cualquier punto en un objeto que gira con respecto a un eje fijo están relacionadas con las cantidades angulares por

$$v = R\omega \quad \textbf{(10–4)}$$

$$a_{tan} = R\alpha \quad \textbf{(10–5)}$$

$$a_R = \omega^2 R \quad \textbf{(10–6)}$$

donde R es la distancia perpendicular del punto al eje de rotación, y a_{tan} y a_R son las componentes tangencial y radial de la aceleración lineal, respectivamente. La frecuencia f y el periodo T están relacionados con ω por

$$\omega = 2\pi f \quad \textbf{(10–7)}$$

$$T = 1/f. \quad \textbf{(10–8)}$$

La velocidad y la aceleración angulares son vectores. Para un objeto rígido que gira alrededor de un eje fijo, tanto $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ como $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ apuntan a lo largo del eje de rotación. La dirección de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ está dada por la **regla de la mano derecha**.

Si un objeto rígido sufre un movimiento rotacional uniformemente acelerado (α = constante), entonces son válidas las ecuaciones análogas a las del movimiento lineal:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t; \qquad \theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2;$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta; \qquad \overline{\omega} = \frac{\omega + \omega_0}{2}. \quad \textbf{(10–9)}$$

La **torca** debida a una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ ejercida sobre un objeto rígido es igual a

$$\tau = R_\perp F = RF_\perp = RF \operatorname{sen}\theta, \quad \textbf{(10–10)}$$

donde $R_\perp$, llamado el **brazo de palanca**, es la distancia perpendicular del eje de rotación a la línea a lo largo de la cual actúa la fuerza, y θ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{F}}$ y la dirección radial R.

La equivalente rotacional de la segunda ley de Newton es

$$\Sigma\tau = I\alpha, \quad \textbf{(10–14)}$$

donde $I = \Sigma m_i R_i^2$ es el **momento de inercia** del objeto con respecto al eje de rotación. Esta relación es válida para un objeto rígido que

gira alrededor de un eje fijo en un marco de referencia inercial, o cuando τ, I y α se calculan con respecto al centro de masa de un objeto, aun si el CM se está moviendo.

La **energía cinética rotacional** de un objeto que gira alrededor de un eje fijo con velocidad angular ω es

$$K = \tfrac{1}{2} I\omega^2. \qquad \textbf{(10–19)}$$

Para un objeto con movimientos traslacional y rotacional, la energía cinética total es la suma de la energía cinética traslacional del CM del objeto más la energía cinética rotacional del objeto con respecto a su CM:

$$K_{tot} = \tfrac{1}{2} M v_{cm}^2 + \tfrac{1}{2} I_{cm}\omega^2 \qquad \textbf{(10–23)}$$

aiempre que el eje de rotación esté fijo en dirección.

La siguiente tabla resume cantidades angulares (o rotacionales), comparándolas con sus análogas traslacionales.

Traslación	Rotación	Conexión
x	θ	$x = R\theta$
v	ω	$v = R\omega$
a	α	$a = R\alpha$
m	I	$I = \Sigma mR^2$
F	τ	$\tau = RF \operatorname{sen}\theta$
$K = \frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}I\omega^2$	
$W = Fd$	$W = \tau\theta$	
$\Sigma F = ma$	$\Sigma\tau = I\alpha$	

Preguntas

1. El odómetro de una bicicleta (que cuenta las revoluciones y se calibra para medir la distancia recorrida) está colocado cerca del eje de la rueda y está diseñado para ruedas de 27 pulgadas. ¿Qué sucede si usted lo usa en una bicicleta con ruedas de 24 pulgadas?

2. Suponga que un disco gira con velocidad angular constante. ¿Un punto sobre el borde tiene aceleración radial y/o tangencial? Si la velocidad angular del disco aumenta uniformemente, ¿tiene el punto aceleración radial y/o tangencial? ¿En qué casos cambiaría la magnitud de cualquier componente de aceleración lineal?

3. ¿Podría describirse un cuerpo no rígido sólo con un valor de la velocidad angular ω? Explique su respuesta.

4. ¿Puede una fuerza pequeña ejercer una torca mayor que una fuerza más grande? Explique.

5. ¿Por qué es más difícil agacharse con las manos detrás de la cabeza que cuando están estiradas frente a uno? Un diagrama ayudaría a contestar esto.

6. Los mamíferos que dependen de su capacidad para correr rápido tienen patas delgadas con carne y músculo concentrados en la parte alta, cerca del cuerpo (figura 10-42). Sobre la base de la dinámica rotacional, explique por qué esta distribución de masa les resulta ventajosa.



FIGURA 10–42 Pregunta 6. Una gacela.

7. Si la fuerza neta sobre un sistema es cero, ¿la torca neta también es cero? Si la torca neta sobre un sistema es cero, ¿implica que la fuerza neta también es cero?

8. Dos rampas tienen la misma altura, pero forman ángulos diferentes con la horizontal. La misma bola de acero rueda hacia abajo por cada rampa. ¿Sobre cuál será mayor la rapidez de la bola, en la base de las rampas? Explique.

9. Dos esferas parecen idénticas y tienen la misma masa. Sin embargo, una está hueca y la otra es sólida. Describa un experimento para determinar cuál es cuál.

10. Dos esferas sólidas empiezan a rodar simultáneamente (partiendo del reposo) hacia abajo por una rampa. Una esfera tiene el doble de radio y el doble de la masa de la otra. ¿Cuál llegará primero al fondo de la rampa? ¿Cuál llegará ahí con mayor rapidez? ¿Cuál tendrá la mayor energía cinética total en el fondo?

11. ¿Por qué los caminadores de cuerda floja (figura 10-43) llevan consigo una barra larga y estrecha?



FIGURA 10–43 Pregunta 11.

12. Una esfera y un cilindro tienen el mismo radio y la misma masa. Parten del reposo en la parte superior de una rampa. ¿Cuál llegará primero al fondo de la rampa? ¿Cuál tendrá la mayor rapidez en el fondo? ¿Cuál tendrá la mayor energía cinética total en el fondo? ¿Cuál tendrá la mayor energía cinética rotacional?

13. ¿Respecto a qué eje de simetría a través de su centro es mínimo el momento de inercia de este libro?

14. El momento de inercia de un disco sólido en rotación en torno a un eje a través de su CM es $\frac{1}{2}MR^2$ ((figura 10-20c). Suponga en cambio que el eje de rotación paralelo pasa a través de un punto en el borde del disco. ¿El momento de inercia será igual, mayor o menor?

15. La velocidad angular de una rueda en rotación sobre un eje horizontal apunta hacia el oeste. ¿Cuál es el sentido de la velocidad lineal de un punto en la parte superior de la rueda? Si la aceleración angular señala hacia el este, describa la aceleración tangencial de este punto en la parte superior de la rueda. ¿La rapidez angular es creciente o decreciente?

Problemas

10–1 Cantidades angulares

1. (I) ¿Qué valores tienen los siguientes ángulos expresados en radianes: *a*) 45.0°, *b*) 60.0°, *c*) 90.0°, *d*) 360.0° y *e*) 445°? Dé los valores como valores numéricos y como fracciones de π.

2. (I) El Sol subtiende un ángulo de aproximadamente 0.5° medido desde la Tierra a 150 millones de km de distancia. Estime el radio del Sol.

3. (I) Un rayo láser está dirigido hacia la Luna, a 380,000 km de la Tierra. El rayo diverge en un ángulo θ (figura 10-44) de 1.4×10^{-5} rad. ¿Qué diámetro tendrá el punto que proyecta sobre la Luna?

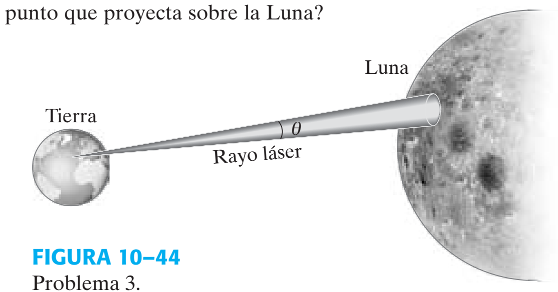


FIGURA 10–44 Problema 3.

4. (I) Las aspas de una licuadora giran a razón de 6500 rpm. Cuando el motor se apaga durante la operación, las aspas frenan hasta llegar al reposo en 4.0 s. ¿Cuál es la aceleración angular conforme frenan las aspas?

5. (II) *a*) Una rueda de molino de 0.35 m de diámetro gira a 2500 rpm. Calcule su velocidad angular en rad/s. *b)* ¿Cuáles son la rapidez lineal y la aceleración de un punto localizado sobre el borde de la rueda de molino?

6. (II) Una bicicleta con llantas de 68 cm de diámetro recorre 7.2 km. ¿Cuántas revoluciones dan las ruedas?

7. (II) Calcule la velocidad angular de *a*) el segundero, *b*) el minutero y *c*) la aguja horaria de un reloj. Dé las respuestas en rad/s. *d*) ¿Cuál es la aceleración angular en cada caso?

8. (II) Un carrusel efectúa una revolución completa en 4.0 segundos (figura 10-45). *a*) ¿Cuál es la rapidez lineal de un niño sentado a 1.2 m del centro? *b*) ¿Cuál es su aceleración (proporcione las componentes)?



FIGURA 10–45 Problema 8.

9. (II) ¿Cuál es la rapidez lineal de un punto *a*) en el ecuador, *b*) en el Círculo Ártico (latitud 66.5° N), y *c*) en una latitud de 45.0° N, debido a la rotación de la Tierra?

10. (II) Calcule la velocidad angular de la Tierra *a*) en su órbita alrededor del Sol y *b*) alrededor de su eje.

11. (II) ¿A qué rapidez (en rpm) debe girar una centrifugadora si una partícula a 7.0 cm del eje de rotación debe experimentar una aceleración de 100,000 *g*?

12. (II) Una rueda de 64.0 cm de diámetro acelera uniformemente, alrededor de su centro, de 130 rpm a 280 rpm en 4.0 segundos. Determine *a*) su aceleración angular y *b*) las componentes tangencial y radial de la aceleración lineal de un punto en el borde de la rueda, 2.0 s después de que empieza a acelerar.

13. (II) Al viajar a la Luna, los astronautas a bordo de la nave espacial *Apolo* se pusieron a girar lentamente para distribuir uniformemente la energía del Sol. Al inicio de su viaje, ellos aceleraron desde una rotación cero hasta una revolución cada minuto, durante un intervalo de 12 minutos. La nave espacial puede considerarse un cilindro con 8.5 m de diámetro. Determine *a*) la aceleración angular, y *b*) las componentes radial y tangencial de la aceleración lineal de un punto sobre la superficie de la nave, 7.0 min después de que comenzó esta aceleración.

14. (II) Una plataforma giratoria de radio R_1 se hace girar mediante un rodillo de goma circular de radio R_2 en contacto con ella en sus extremos exteriores. ¿Cuál es la razón de sus velocidades angulares, ω_1/ω_2?

10–2 Naturaleza vectorial de $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$

15. (II) El eje de una rueda está montado sobre soportes que descansan sobre una mesa giratoria, como se muestra en la figura 10-46. La rueda tiene una velocidad angular $\omega_1 = 44.0$ rad/s con respecto a su eje y la mesa tiene velocidad angular $\omega_2 = 35.0$ rad/s con respecto a un eje vertical. (Note las flechas que indican tales movimientos en la figura.) *a*) ¿Cuáles son los sentidos de $\vec{\omega}_1$ y $\vec{\omega}_2$ en el instante mostrado? *b*) ¿Cuál es la velocidad angular resultante de la rueda, vista por un observador exterior, en el instante mostrado? Dé la magnitud y dirección. *c*) ¿Cuál es la magnitud y la dirección de la aceleración angular de la rueda en el instante mostrado? Considere el eje *z* verticalmente hacia arriba, y la dirección del eje en el momento mostrado como el eje *x* hacia la derecha.

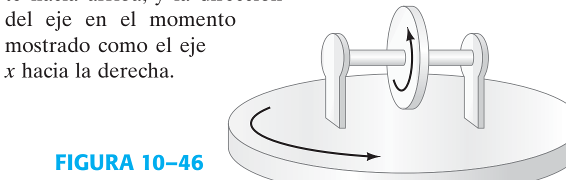


FIGURA 10–46 Problema 15.

10–3 Aceleración angular constante

16. (I) Un motor de automóvil frena desde 3500 rpm hasta 1200 rpm en 2.5 s. Calcule *a*) su aceleración angular, que se supone constante, y *b*) el número total de revoluciones que da el motor en este tiempo.

17. (I) Una centrífuga se acelera uniformemente del reposo a 15,000 rpm en 220 s. ¿Cuántas revoluciones giró en este tiempo?

18. (I) Los pilotos se ponen a prueba para tolerar la tensión que implica volar aviones de gran rapidez en una "centrifugadora humana" giratoria, a la que le toma 1.0 min dar 20 revoluciones completas, antes de alcanzar su rapidez final. *a*) ¿Cuál es su aceleración angular, que se supone constante, *b*) cuál es su rapidez angular final en rpm?

19. (II) Se apaga un ventilador cuando está girando a 850 rev/min. Da 1350 revoluciones antes de llegar a detenerse. *a*) ¿Cuál es la aceleración angular del ventilador, que se supone constante? *b*) ¿Cuánto tiempo le tomó al ventilador llegar al alto total?

20. (II) Usando cálculo, obtenga las ecuaciones cinemáticas angulares 10-9a y 10-9b para una aceleración angular constante. Parta de $\alpha = d\omega/dt$.

21. (II) Una pequeña rueda de hule se usa para impulsar una rueda de alfarería grande, y ambas están montadas de manera que sus bordes circulares se tocan entre sí. Si la rueda pequeña tiene un radio de 2.0 cm y acelera a una tasa de 7.2 rad/s^2 y está en contacto con la rueda grande (radio = 21.0 cm) sin deslizarse, calcule *a*) la aceleración angular de la rueda grande y *b*) el tiempo que le toma a la rueda grande alcanzar su rapidez requerida de 65 rpm.

22. (II) El ángulo que gira una rueda como función del tiempo t está dado por $\theta = 8.5t - 15.0t^2 + 1.6t^4$, donde θ está en radianes y t en segundos. Determine una expresión *a*) para la velocidad angular instantánea ω y *b*) la aceleración angular instantánea α. *c*) Evalúe ω y α en $t = 3.0$ s. *d*) ¿Cuál es la velocidad angular promedio, y *e*) la aceleración angular promedio entre $t = 2.0$ s y $t = 3.0$ s?

23. (II) La aceleración angular de una rueda, en función del tiempo, está dada por $\alpha = 5.0t^2 - 8.5t$, donde α está en rad/s^2 y t está en segundos. Si la rueda parte del reposo ($\theta = 0$, $\omega = 0$, en $t = 0$), determine una expresión para *a*) la velocidad angular ω y *b*) la posición angular θ, ambas en función del tiempo. *c*) Evalúe ω y θ en $t = 2.0$ s.

10–4 Torca

24. (I) Una persona de 62 kg montada en una bicicleta recarga todo su peso sobre cada pedal cuando asciende una colina. Los pedales giran en un círculo con 17 cm de radio. *a*) ¿Cuál es la torca máxima que la persona ejerce? *b*) ¿Cómo podría ejercer más torca?

25. (I) Calcule la torca neta con respecto al eje de la rueda mostrada en la figura 10-47. Suponga que una torca de fricción de 0.40 m · N se opone al movimiento.

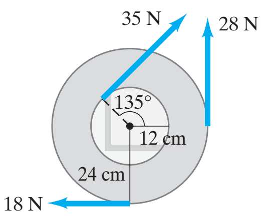


FIGURA 10–47 Problema 25.

26. (II) Una persona ejerce una fuerza horizontal de 32 N sobre el extremo de una puerta de 96 cm de ancho. ¿Cuál es la magnitud de la torca si la fuerza es ejercida *a*) perpendicularmente a la puerta y *b*) a un ángulo de 60.0° sobre la cara de la puerta?

27. (II) Dos bloques, cada uno con masa m, se unen a los extremos de una varilla (cuya masa se puede despreciar) con un pivote en un punto de la varilla como se muestra en la figura 10.48. Inicialmente, la varilla se sostiene en la posición horizontal y luego se suelta. Calcule la magnitud y la dirección de la torca neta sobre este sistema cuando se suelta al principio.



FIGURA 10–48 Problem 27.

28. (II) Una rueda de 27.0 cm de diámetro está restringida a girar en el plano xy, con respecto al eje z, que pasa por su centro. Una fuerza $\vec{\mathbf{F}} = (-31.0\hat{\mathbf{i}} + 43.4\hat{\mathbf{j}})$ N actúa en un punto sobre el borde de la rueda que se encuentra exactamente sobre el eje x en un instante particular. ¿Cuál es la torca con respecto al eje de rotación en ese instante?

29. (II) Los tornillos sobre la cabeza de un cilindro de un motor requieren apretarse a una torca de 75 m · N. Si se usa una llave de 28 cm de largo, ¿qué fuerza perpendicular a la llave debe ejercer el mecánico en su extremo? Si la cabeza hexagonal del tornillo tiene 15 mm de diámetro (figura 10-49), estime la fuerza aplicada cerca de cada uno de los seis puntos por una llave inglesa.



FIGURA 10–49 Problema 29.

30. (II) Determine la torca neta sobre la viga uniforme de 2.0 m de longitud de la figura 10-50. Calcúlela con respecto a *a*) el punto C o CM, y *b*) el punto P en un extremo.

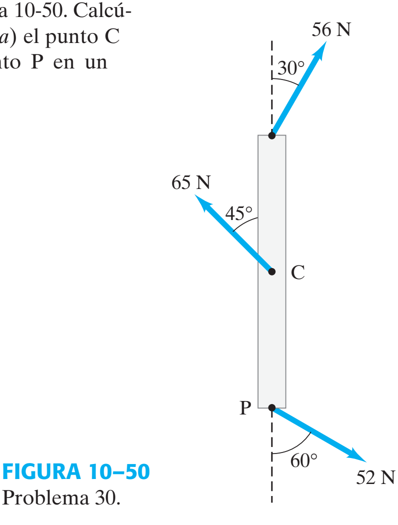


FIGURA 10–50 Problema 30.

10–5 y 10–6 Dinámica rotacional

31. (I) Determine el momento de inercia de una esfera de 10.8 kg y 0.648 m de radio, cuando el eje de rotación pasa por su centro.

32. (I) Calcule el momento de inercia de una rueda de bicicleta de 67 cm de diámetro. La rueda y la llanta tienen una masa combinada de 1.1 kg. La masa del soporte se puede ignorar (¿por qué?).

33. (II) Una alfarera modela un tazón sobre una plataforma circular que gira con rapidez angular constante (figura 10-51). La fuerza de fricción entre sus manos y el barro es de 1.5 N en total. *a*) ¿Cuál es la magnitud de su torca sobre la rueda, si el diámetro del tazón es de 12 cm? *b*) ¿Cuánto tardaría en detenerse la plataforma circular si la única torca que actúa sobre ella se debe a las manos de la alfarera? La velocidad angular inicial de la plataforma es de 1.6 rev/s y el momento de inercia de la plataforma y del tazón combinados es de 0.11 kg · m^2.





FIGURA 10–51 Problema 33.

34. (II) Una molécula de oxígeno consiste en dos átomos de oxígeno cuya masa total es de 5.3×10^{-26} kg y cuyo momento de inercia con respecto a un eje perpendicular a la línea que une los dos átomos, y a la mitad de la distancia entre sí, es de 1.9×10^{-46} kg · m^2. Estime, a partir de estos datos, la distancia efectiva entre los átomos.

35. (II) Un jugador de sóftbol oscila un bate, acelerándolo del reposo a 2.7 rev/s en un tiempo de 0.20 s. Aproxime el bate como una varilla uniforme de 0.95 m de longitud, y calcule la torca que el jugador aplica a uno de sus extremos.

36. (II) Una rueda de molino es un cilindro uniforme con un radio de 8.50 cm y una masa de 0.380 kg. Calcule *a*) su momento de inercia en torno a su centro *y b*) la torca necesaria para acelerarla desde el reposo hasta 1750 rpm en 5.00 s, si se sabe que desacelera desde 1500 rpm hasta el reposo en 55.0 s.

37. (II) Una bola pequeña de 650 g localizada en el extremo de una varilla delgada y ligera se hace girar en un círculo horizontal con 1.2 m de radio. Calcule *a*) el momento de inercia de la bola con respecto al centro del círculo, y *b*) la torca requerida para mantener la bola girando a velocidad angular constante, si la resistencia del aire ejerce una fuerza de 0.020 N sobre la bola. Desprecie el momento de inercia de la varilla y la resistencia del aire sobre ésta.

38. (II) El antebrazo en la figura 10-52 acelera una pelota de 3.6 kg a 7.0 m/s^2 por medio del músculo tríceps, como se muestra. Calcule *a*) la torca necesaria y *b*) la fuerza que debe ejercer el tríceps. Ignore la masa del brazo.

31 cm
Eje de rotación (en el codo)
2.5 cm
Músculo tríceps

FIGURA 10–52 Problemas 38 y 39.

39. (II) Suponga que una pelota de 1.00 kg es lanzada sólo por la acción del antebrazo (figura 10-52), que gira con respecto al codo bajo la acción del tríceps. La pelota es acelerada uniformemente del reposo a 8.5 m/s en 0.35 s, punto donde se suelta. Calcule *a*) la aceleración angular del brazo y *b*) la fuerza requerida del músculo tríceps. Suponga que el antebrazo tiene una masa de 3.7 kg y gira como una varilla uniforme alrededor de un eje en su extremo.

40. (II) Calcule el momento de inercia del conjunto de puntos objetos, mostrados en la figura 10-53 con respecto *a*) al eje vertical, y *b*) al eje horizontal. Suponga que $m = 2.2$ kg, $M = 3.1$ kg y los objetos están conectados por alambres rígidos muy ligeros. El conjunto es rectangular y se divide en dos a la mitad por el eje horizontal. *c*) ¿Con respecto a qué eje será más difícil acelerar este conjunto?

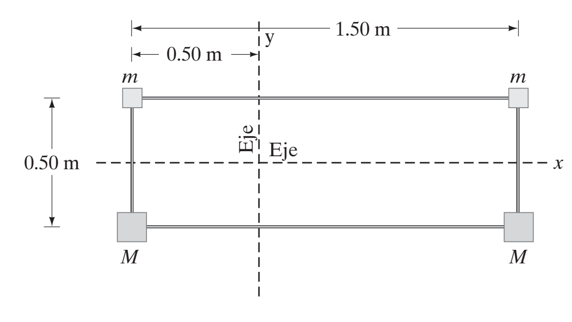


FIGURA 10–53 Problema 40.

41. (II) Un carrusel acelera del reposo a 0.68 rad/s en 24 segundos. Suponiendo que el carrusel es un disco uniforme de 7.0 m de radio y masa de 31,000 kg, calcule la torca neta requerida para acelerarlo.

42. (II) Una esfera sólida de 0.72 m de diámetro puede girarse con respecto a un eje que pasa a través de su centro por una torca de 10.8 m · N, que la acelera uniformemente del reposo hasta 180 revoluciones en 15.0 segundos. ¿Cuál es la masa de la esfera?

43. (II) Suponga que la fuerza F_T en la cuerda que cuelga de la polea del ejemplo 10-9, figura 10-21, está dada por la relación $F_T = 3.00\,t - 0.20\,t^2$ (newtons), donde t está en segundos. Si la polea parte del reposo, ¿cuál será la rapidez lineal de un punto sobre su borde 8.0 s más tarde? Ignore la fricción.

44. (II) Un padre empuja tangencialmente un carrusel pequeño manual y es capaz de acelerarlo, desde el reposo hasta una frecuencia de 15 rpm, en 10.0 s. Suponga que el carrusel es un disco uniforme con radio de 2.5 m y masa de 760 kg, y dos niños (cada una con 25 kg de masa) van sentados cada uno en un borde opuesto. Calcule la torca que se requiere para producir la aceleración, y desprecie la torca de fricción. ¿Qué fuerza se requiere en el borde?

45. (II) Cuatro masas iguales M están separadas a intervalos ℓ iguales, a lo largo de una varilla recta horizontal, cuya masa puede despreciarse. El sistema va a girar con respecto a un eje vertical que pasa por la masa en el extremo izquierdo de la varilla y es perpendicular a ella. *a*) ¿Cuál es el momento de inercia del sistema con respecto a este eje? *b*) ¿Qué fuerza mínima aplicada a la masa más alejada impartirá una aceleración angular α? ¿Cuál será la dirección de esta fuerza?

46. (II) Dos bloques están conectados por una cuerda ligera que pasa sobre una polea de 0.15 m de radio y momento de inercia I. Los bloques se mueven hacia la derecha con una aceleración de 1.00 m/s^2 sobre rampas con superficies sin fricción (véase la figura 10-54). *a*) Dibuje diagramas de cuerpo libre para cada uno de los dos bloques y para la polea. *b*) Determine F_{TA} y F_{TB}, las tensiones en los dos segmentos de la cuerda. *c*) Encuentre la torca neta que actúa sobre la polea y determine su momento de inercia I.

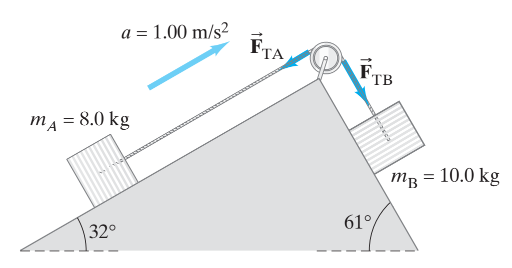


FIGURA 10–54 Problema 46.

47. (II) El aspa de un rotor de helicóptero puede considerarse como una varilla delgada, como se ilustra en la figura 10-55. *a*) Si cada una de las tres aspas del rotor del helicóptero mide 3.75 m de largo y tiene una masa de 135 kg, calcule el momento de inercia de las tres aspas del rotor en torno al eje de rotación. *b*) ¿Cuál es la torca debe aplicar el motor para hacer que las aspas alcancen, desde el reposo, una rapidez de 5.0 rev/s en 8.0 segundos?

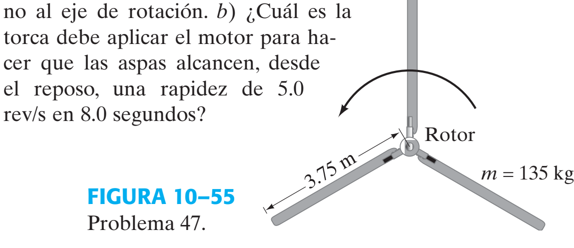


FIGURA 10–55 Problema 47.

48. (II) Un rotor centrífugo que gira a 10,300 rpm se desconecta y al final es llevado uniformemente al reposo por una torca de fricción de 1.20 m · N. Si la masa del rotor es de 3.80 kg y puede considerarse como un cilindro sólido con 0.0710 m de radio, ¿cuántas revoluciones girará el rotor antes de llegar al reposo y cuánto tiempo le tomará esto?

49. (II) Al tratar con momentos de inercia, especialmente de objetos poco usuales o de forma irregular, a veces es conveniente emplear el **radio de giro** k, el cual se define de manera que si toda la masa del objeto estuviera concentrada a esta distancia del eje, el momento de inercia sería el mismo que el del objeto original. Entonces, el momento de inercia de cualquier objeto puede escribirse en términos de su masa M y del radio de giro como $I = Mk^2$. Determine el radio de giro de cada uno de los objetos (aro, cilindro, esfera, etcétera) de la figura 10-20.

50. (II) Para hacer girar un satélite cilíndrico plano uniforme a la tasa correcta, los ingenieros disparan cuatro cohetes tangenciales como se muestra en la figura 10-56. Si el satélite tiene una masa de 3600 kg y un radio de 4.0 m, y los cohetes suman cada uno una masa de 250 kg, ¿cuál será la fuerza constante requerida en cada cohete, si el satélite debe alcanzar 32 rpm en 5.0 min, partiendo del reposo?

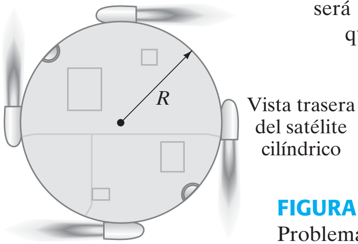


FIGURA 10–56 Problema 50.

51. (III) Una *máquina de Atwood* consiste en dos masas, m_A y m_B, que están conectadas por una cuerda inelástica sin masa que pasa alrededor de una polea, figura 10-57. Si la polea tiene un radio R y momento de inercia I con respecto a su eje, determine la aceleración de las masas m_A y m_B, y compare esto con el caso en que se desprecia el momento de inercia de la polea. [*Sugerencia*: Las tensiones F_{TA} y F_{TB} no son iguales. Analizamos la máquina de Atwood en el ejemplo 4-13, suponiendo que $I = 0$ para la polea].

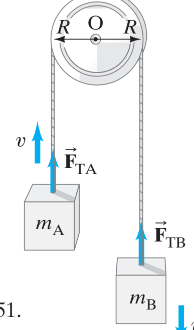


FIGURA 10–57 Problema 51. Máquina de Atwood.

52. (III) Una cuerda que pasa alrededor de una polea tiene una masa de 3.80 kg que cuelga de un extremo y una masa de 3.15 kg que cuelga del otro extremo. La polea es un cilindro sólido uniforme de radio 4.0 cm y masa de 0.80 kg. *a*) Si las chumaceras de la polea no tuvieran fricción, ¿cuál sería la aceleración de las dos masas? *b*) De hecho, se encuentra que si a la masa más pesada se le da una rapidez hacia abajo de 0.20 m/s, alcanzará el reposo en 6.2 s. ¿Cuál es la torca promedio de fricción que actúa sobre la polea?

53. (III) Un lanzador de martillo acelera el martillo (masa = 7.30 kg) desde el reposo en cuatro vueltas completas (revoluciones) y lo suelta con una rapidez de 26.5 m/s. Suponiendo una tasa uniforme de incremento en velocidad angular y una trayectoria circular horizontal con radio de 1.20 m, calcule *a*) la aceleración angular, *b*) la aceleración tangencial, *c*) la aceleración centrípeta justo antes de soltar el martillo, *d*) la fuerza neta ejercida sobre el martillo por el atleta justo antes de soltarlo, y *e*) el ángulo de esta fuerza con respecto al radio del movimiento circular. Ignore el efecto gravitacional.

54. (III) Una varilla delgada de longitud ℓ se encuentra en posición vertical sobre una mesa. La varilla empieza a caer, pero su extremo inferior no se desliza. *a*) Determine la velocidad angular de la varilla en función del ángulo ϕ que ésta forma con la cubierta de la mesa. *b*) ¿Cuál es la rapidez de la punta de la varilla justo antes de que toque la mesa?

10–7 Momento de inercia

55. (I) Use el teorema de los ejes paralelos para demostrar que el momento de inercia de una varilla delgada, con respecto a un eje perpendicular a la varilla en un extremo, es $I = \frac{1}{3}M\ell^2$, considerando que si el eje pasa por el centro, $I = \frac{1}{12}M\ell^2$ (figuras 10-20f y g).

56. (II) Determine el momento de inercia de una puerta de 19 kg de 2.5 m de altura y 1.0 m de ancho que está articulada a lo largo de un lado. Ignore el espesor de la puerta.

57. (II) Dos esferas sólidas uniformes de masa M y radio r_0 están conectadas por una varilla (sin masa) delgada de longitud r_0, de manera que sus centros están a una distancia de $3r_0$. *a*) Determine el momento de inercia de este sistema con respecto a un eje perpendicular a la varilla en su centro. *b*) ¿Cuál sería el error porcentual, si las masas de cada esfera se supusieran concentradas en sus centros y se hiciera un cálculo muy sencillo?

58. (II) Una bola de masa M y radio r_1 en el extremo de una varilla delgada sin masa se hace girar en un círculo horizontal de radio R_0 con respecto a un eje de rotación AB, como se muestra en la figura 10-58. *a*) Considerando que la masa de la bola está concentrada en su centro de masa, calcule su momento de inercia con respecto a AB. *b*) Usando el teorema de los ejes paralelos y considerando el radio finito de la bola, calcule el momento de inercia de la bola con respecto a AB. *c*) Calcule el error porcentual introducido por la aproximación de la masa puntual para $r_1 = 9.0$ cm y $R_0 = 1.0$ m.

FIGURA 10–58 Problema 58.

59. (II) Una rueda delgada de 7.0 kg y radio de 32 cm se carga en un lado con un peso de 1.50 kg, pequeño en tamaño, colocado a 22 cm del centro de la rueda. Calcule *a*) la posición del centro de masa de la rueda cargada y *b*) el momento de inercia con respecto a un eje a través de su centro de masa, perpendicular a su cara.

60. (III) Obtenga la fórmula para el momento de inercia de una varilla delgada uniforme de longitud ℓ con respecto a un eje que pasa por su centro, perpendicular a la varilla (véase la figura 10-20f).

61. (III) *a*) Obtenga la fórmula dada en la figura 10-20h para el momento de inercia de una placa uniforme, plana, rectangular de dimensiones $\ell \times \omega$ con respecto a un eje que pasa por su centro, perpendicular a la placa. *b*) ¿Cuál es el momento de inercia con respecto a cada uno de los ejes que pasan por el centro que son paralelos a los bordes de la placa?

10–8 Energía cinética rotacional

62. (I) El motor de un automóvil desarrolla una torca de 255 m · N a 3750 rpm. ¿Cuántos caballos de potencia tiene el motor?

63. (I) El rotor de una centrífuga tiene un momento de inercia de 4.25×10^{-2} kg · m^2. ¿Cuánta energía se requiere para llevarlo a 9750 rpm desde el reposo?

64. (II) Una plataforma cilíndrica uniforme en rotación, de masa igual a 220 kg y radio de 5.5 m, desacelera pasando de 3.8 rev/s al reposo en 16 s, cuando se desconecta su motor. Estime la salida de potencia del motor (hp) requerida para mantener una rapidez uniforme de 3.8 rev/s.

65. (II) Un carrusel tiene una masa de 1640 kg y un radio de 7.50 m. ¿Cuánto trabajo neto se requiere para acelerarlo desde el reposo hasta una tasa de rotación de 1.00 revolución en 8.00 s? Suponga que se trata de un cilindro sólido.

66. (II) Una varilla uniforme delgada de longitud ℓ y masa M está suspendida libremente de un extremo. Se jala a un lado a un ángulo θ y se suelta. Si la fricción puede despreciarse, ¿cuál es su velocidad angular y la rapidez de su extremo libre, en el punto más bajo de su trayectoria?

67. (II) Dos masas, $m_A = 35.0$ kg y $m_B = 38.0$ kg, están conectadas por una cuerda que cuelga alrededor de una polea (como en la figura 10-59). La polea es un cilindro uniforme de radio 0.381 m y masa de 3.1 kg. Inicialmente m_A está en el piso y m_B descansa 2.5 m arriba del piso. Si se libera el sistema, use la conservación de la energía para determinar la rapidez de m_B justo antes de que ésta toque el piso. Suponga que la chumacera de la polea no tiene fricción.

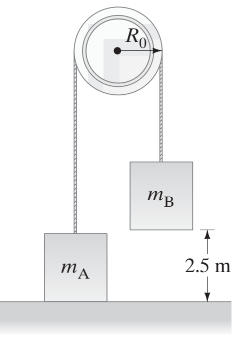


FIGURA 10–59
Problema 67.

68. (III) Una masa de 4.00 kg y otra masa de 3.00 kg están unidas a extremos opuestos de una varilla delgada horizontal de 42.0 cm de largo (figura 10-60). El sistema está girando con rapidez angular $\omega = 5.60$ rad/s con respecto a un eje vertical en el centro de la varilla. Determine *a*) la energía cinética K del sistema, y *b*) la fuerza neta sobre cada masa. *c*) Resuelva de nuevo los incisos *a*) y *b*), suponiendo ahora que el eje pasa por el centro de masa del sistema.

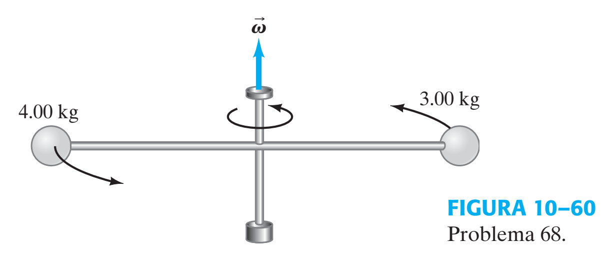


FIGURA 10–60
Problema 68.

69. (III) Un poste de 2.30 m de largo se equilibra verticalmente sobre su extremo. Comienza a caer y su extremo inferior no se desliza. ¿Cuál será la rapidez del extremo superior del poste justo antes de que golpee el suelo? [*Sugerencia:* Use la conservación de la energía].

10–9 Movimiento rotacional más traslacional

70. (I) Calcule la rapidez traslacional de un cilindro cuando llega al pie de una rampa de 7.20 m de altura. Suponga que el cilindro parte del reposo y rueda sin deslizarse.

71. (I) Una bola de bolos (boliche) de masa igual a 7.3 kg y radio de 9.0 cm rueda hacia abajo sin deslizarse por un carril a 3.7 m/s. Calcule su energía cinética total.

72. (I) Estime la energía cinética de la Tierra con respecto al Sol como la suma de dos términos, *a*) aquél debido a su rotación diaria alrededor de su eje, y *b*) aquél debido a su revolución anual alrededor del Sol. [Suponga que la Tierra es una esfera uniforme con masa $= 6.0 \times 10^{24}$ kg, radio $= 6.4 \times 10^6$ m, y que está a 1.5×10^8 km del Sol].

73. (II) Una esfera de radio $r_0 = 24.5$ cm y masa $m = 1.20$ kg parte del reposo y rueda hacia abajo sin deslizamiento sobre una rampa con 30.0° que tiene 10.0 m de largo. *a*) Calcule sus rapideces traslacional y rotacional cuando llega a la parte inferior. *b*) ¿Cuál es la razón entre las energías cinéticas traslacional y rotacional en la parte inferior? Evite colocar valores numéricos hasta el final, de manera que usted pueda contestar: ¿*c*) sus respuestas en *a*) y en *b*) dependen del radio de la esfera o de su masa?

74. (II) Un carrete estrecho pero sólido de cuerda tiene radio R y masa M. Si usted jala de la cuerda de manera que el CM del carrete permanezca suspendido en el aire en el mismo lugar en el que se desenrolla, *a*) ¿qué fuerza debe ejercer usted sobre la cuerda? *b*) ¿Cuánto trabajo ha realizado usted cuando el carrete gira con velocidad angular ω?

75. (II) Una bola de radio r_0 rueda sobre el interior de una vía de radio R_0 (véase la figura 10-61). Si la bola parte del reposo en el borde vertical de la vía, ¿cuál será su rapidez cuando llegue al punto más bajo de ésta, rodando sin deslizarse?

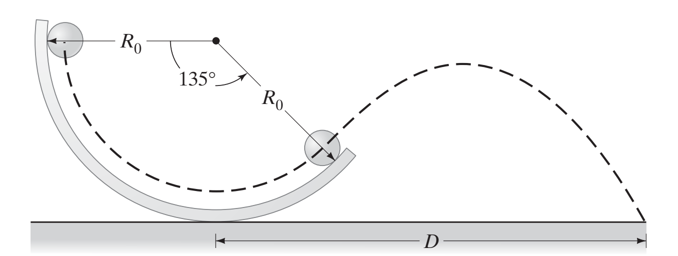


FIGURA 10–61 Problemas 75 y 81.

76. (II) Una bola de hule sólida descansa sobre el piso de un carro de ferrocarril, cuando el carro empieza a moverse con aceleración a. Suponiendo que la bola rueda sin deslizarse, ¿cuál es su aceleración relativa *a*) al carro y *b*) al suelo?

***77.** (II) Una sección de tubo hueco delgado de 0.545 kg, de radio 10.0 cm, partiendo del reposo rueda hacia abajo sobre una rampa inclinada a 17.5° y 5.60 m de longitud. *a*) Si el tubo rueda sin deslizarse, ¿cuál será su rapidez en la base de la rampa? *b*) ¿Cuál será su energía cinética total en la base de la rampa? *c*) ¿Qué valor mínimo debe tener el coeficiente de fricción estática para que el tubo no se patine?

***78.** (II) En el ejemplo 10-20, *a*) ¿qué tan lejos se ha movido la bola a lo largo de la mesa cuando empieza a rodar sin deslizarse? *b*) ¿Cuáles son sus rapideces lineal y rotacional finales?

79. (III) La masa de 1100 kg de un automóvil incluye cuatro neumáticos, cada uno con masa de 35 kg (incluido el rin) y diámetro 0.80 m. Suponga que cada combinación de neumático y rin actúa como un cilindro sólido. *a*) Determine la energía cinética total del automóvil cuando viaja a 95 km/h y *b*) la fracción de la energía cinética en los neumáticos y los rines. *c*) Si el automóvil está inicialmente en reposo y luego es jalado por un camión remolque con una fuerza de 1500 N, ¿cual será la aceleración del auto? Ignore las pérdidas por fricción. *d*) ¿Qué error porcentual se tendría en el inciso *c*) si se desprecia la inercia rotacional de los neumáticos y los rines?

***80.** (III) Una rueda con inercia rotacional $I = \frac{1}{2}MR^2$ con respecto a su eje central se pone a girar con rapidez angular inicial ω_0 y luego se baja al suelo, de manera que toca éste sin rapidez horizontal. Inicialmente se desliza, pero luego comienza a moverse hacia adelante y al final rueda sin deslizarse. *a*) ¿En qué dirección actúa la fricción sobre la rueda deslizante? *b*) ¿Cuánto tiempo se desliza la rueda antes de comenzar a girar sin deslizarse? *c*) ¿Cuál es la rapidez traslacional final de la rueda? [*Sugerencia*: Use $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$, $\Sigma\tau_{cm} = I_{cm}\alpha_{cm}$, y recuerde que sólo cuando se tiene rodamiento sin deslizamiento se cumple que $v_{CM} = \omega R$.]

81. (III) Una pequeña esfera de radio $r_0 = 1.5$ cm rueda sin deslizarse sobre la pista mostrada en la figura 10-61, cuyo radio es $R_0 = 26.0$ cm. La esfera empieza a rodar a una altura R_0 arriba del fondo de la pista. Cuando sale de la pista, después de recorrer un ángulo de 135°, como se muestra, *a*) ¿cuál será su rapidez, y *b*) a qué distancia *D* de la base de la pista tocará la esfera el suelo?

* 10–10 Una esfera rodante desacelera

***82.** (I) Una bola en rodamiento desacelera porque la fuerza normal no pasa exactamente por el CM de la bola, sino que pasa por delante del CM. Usando la figura 10-41, demuestre que la torca que resulta de la fuerza normal ($\tau_N = \ell F_N$ en la figura 10-41) es $\frac{7}{5}$ de la torca debida a la fuerza de fricción, $\tau_{fr} = r_0 F$ donde r_0 es el radio de la bola; es decir, demuestre que $\tau_N = \frac{7}{5}\tau_{fr}$.

Problemas generales

83. Un gran carrete de cuerda está sobre el terreno con el extremo de la cuerda sobre el borde superior del carrete. Una persona toma el extremo de la cuerda y camina una distancia ℓ con él (figura 10-62). El carrete gira detrás de la persona sin deslizarse. ¿Qué longitud de cuerda se desenrolla del carrete? ¿Qué tanto se mueve el CM del carrete?

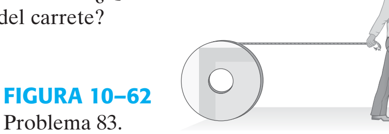


FIGURA 10–62 Problema 83.

84. En un disco compacto (CD) de audio con 12.0 cm de diámetro, se codifican secuencialmente bits digitales de información a lo largo de una trayectoria en espiral hacia fuera. La espiral empieza en un radio $R_1 = 2.5$ cm y continúa su trayectoria espiral hasta un radio $R_2 = 5.8$ cm. Para leer la información digital, un reproductor de CD hace girar el disco de manera que su lector láser escanee a lo largo de la secuencia en espiral de bits, con una rapidez lineal constante de 1.25 m/s. Entonces, el reproductor debe ajustar con precisión la frecuencia rotacional *f* del CD conforme el láser se mueve radialmente hacia fuera. Determine los valores de *f* (en unidades de rpm) cuando el láser se localiza en R_1 y cuando está en R_2.

85. *a*) Un yo-yo está hecho con dos discos sólidos cilíndricos, cada uno de masa 0.050 kg y diámetro de 0.075 m, unidos por un tubo delgado sólido y cilíndrico (concéntrico) de masa 0.0050 kg y diámetro de 0.010 m. Use conservación de la energía para calcular la rapidez lineal del yo-yo, cuando éste alcanza el extremo de su cuerda de 1.0 m de longitud, al soltarse desde el reposo. *b*) ¿Qué fracción de su energía cinética es rotacional?

86. Un ciclista acelera desde el reposo a una tasa de 1.00 m/s^2. ¿Qué tan rápido se estará moviendo un punto, sobre el borde del neumático (diámetro = 68 cm) en la parte superior, después de 2.5 s? [Sugerencia: En algún momento, el punto más bajo del neumático está en contacto con el suelo y en reposo.] Véase la figura 10-63.

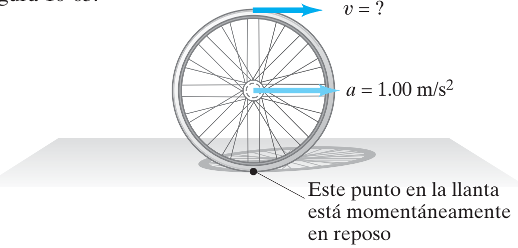


FIGURA 10–63 Problema 86.

87. Suponga que David coloca una piedra de 0.50 kg en una honda de 1.5 m de largo y comienza a dar vuelta a la piedra en un círculo casi horizontal sobre su cabeza, con lo que la acelera desde el reposo hasta una tasa de 85 rpm después de 5.0 s. ¿Cuál será la torca que se requiere para lograr esta hazaña y de dónde proviene la torca?

88. Un esmeril de 1.4 kg en forma de un cilindro uniforme con 0.20 m de radio adquiere una rapidez rotacional de 1800 rev/s a partir del reposo, en un intervalo de 6.0 s bajo aceleración angular constante. Calcule la torca producida por el motor.

89. Engranes de bicicleta. *a*) ¿Cómo está relacionada la velocidad angular ω_R de la rueda trasera con la de los pedales y la estrella (rueda dentada) frontal (ω_F)? Sean N_F y N_R los números de dientes en las estrellas delantera y trasera, respectivamente, figura 10-64. Los dientes están espaciados uniformemente sobre ambas estrellas, y la estrella trasera está firmemente unida a la rueda trasera. *b*) Evalúe la razón ω_R/ω_F cuando las estrellas frontal y posterior tienen 52 y 13 dientes, respectivamente, y *c*) cuando tienen 42 y 28 dientes, respectivamente.

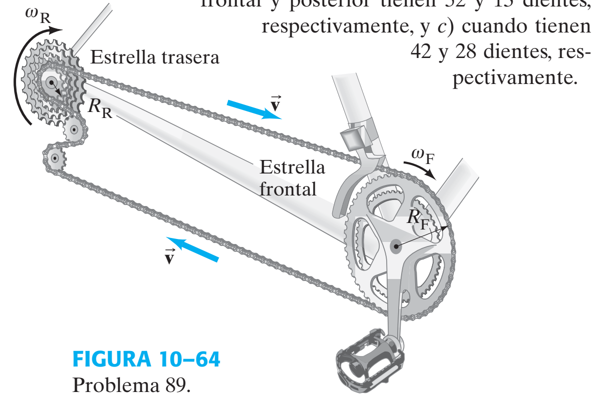


FIGURA 10–64 Problema 89.

90. La figura 10-65 representa una molécula de H_2O. La longitud del enlace O—H es de 0.96 nm, y los enlaces H—O—H forman un ángulo de 104°. Calcule el momento de inercia de la molécula de H_2O, en torno a un eje que pase a través del centro del átomo de oxígeno, *a*) perpendicular al plano de la molécula *y b*) en el plano de la molécula, bisecando los enlaces H—O—H.

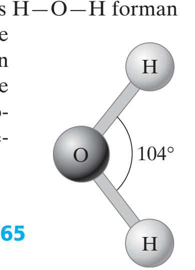


FIGURA 10–65 Problema 90.

91. Una posibilidad para que un automóvil contamine poco es que use la energía almacenada en un volante giratorio pesado. Suponga que tal vehículo tiene una masa total de 1100 kg, que usa un volante cilíndrico uniforme con 1.50 m de diámetro y masa de 240 kg, y que es capaz de viajar 350 km sin necesidad de "recargar" el volante. *a*) Haga suposiciones razonables (fuerza retardadora de fricción promedio = 450 N, veinte periodos de aceleración del reposo a 95 km/h, igual cuesta arriba que cuesta abajo, y que cuesta abajo puede recargarse el volante), y estime la energía total necesaria para almacenarse en el volante. *b*) ¿Cuál es la velocidad angular del volante cuando éste tiene una "carga de energía" completa? c) ¿Cuánto tiempo tomaría a un motor de 150 hp dar al volante una carga de energía completa antes de un viaje?

92. Un cilindro hueco (aro) está rodando sobre una superficie horizontal con rapidez $v = 3.3$ m/s cuando empieza a subir por una pendiente de 15°. *a*) ¿Qué tanto viajará a lo largo de la pendiente? *b*) ¿Cuánto tiempo estará sobre la pendiente antes de volver al fondo de ésta?

93. Una rueda de masa M tiene un radio R. Está situada verticalmente sobre el piso, y queremos ejercer una fuerza horizontal F en su eje, de manera que pueda subir un escalón contra el cual descansa (figura 10-66). El escalón tiene altura h, donde $h < R$. ¿Qué fuerza mínima F se requiere?

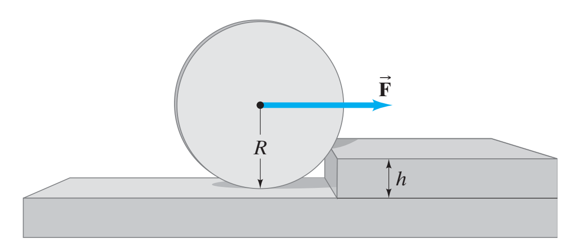


FIGURA 10–66 Problema 93.

94. Una canica de masa m y radio r rueda a lo largo de la lámina rugosa con un doblez en su extremo, como se muestra en la figura 10-67. ¿Cuál es el valor mínimo de la altura vertical h para que la canica alcance el punto más alto del doblez sin separarse de la lámina? *a*) Suponga $r \ll R$; *b*) no haga esta suposición. Desprecie las pérdidas por fricción.

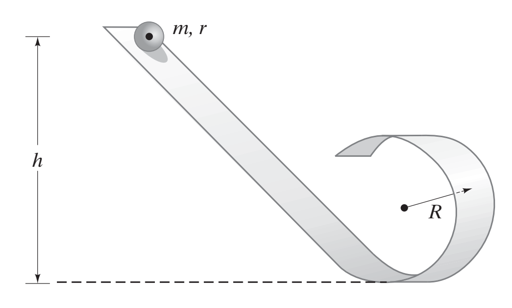


FIGURA 10–67 Problema 94.

95. La densidad lineal de masa (masa por longitud unitaria) de una varilla delgada de longitud ℓ crece uniformemente de λ_0 en un extremo a $3\lambda_0$ en el otro extremo. Determine el momento de inercia, con respecto a un eje perpendicular a la varilla que pasa por su centro geométrico.

96. Si una bola de billar es golpeada en la forma correcta por el taco, la bola rodará sin deslizarse inmediatamente después de perder contacto con el taco. Considere una bola de billar (radio r, masa M) en reposo sobre una mesa de billar horizontal. Un taco ejerce una fuerza horizontal constante F sobre la bola durante un tiempo t, en un punto que está a una altura h por arriba de la superficie de la mesa (véase la figura 10-68). Suponga que el coeficiente de fricción cinética entre la bola y la mesa es μ_k. Determine el valor de h, de manera que la bola ruede sin deslizarse inmediatamente después de perder contacto con el taco.

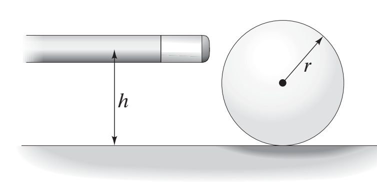


FIGURA 10–68 Problema 96.

97. Si el coeficiente de fricción estática entre neumáticos y pavimento es 0.65, calcule la torca mínima que deba aplicarse al neumático de 66 cm de diámetro de un automóvil de 950 kg, para que las ruedas se patinen mientras el auto acelera. Suponga que cada rueda soporta una porción igual del peso.

98. Una cuerda conectada en un extremo a un bloque que puede deslizarse sobre un plano inclinado tiene su otro extremo enrollado alrededor de un cilindro, que descansa en una depresión en la parte superior del plano, como se muestra en la figura 10-69. Determine la rapidez del bloque después de que haya viajado 1.80 m a lo largo del plano, partiendo del reposo. Suponga *a*) que no hay fricción, *b*) que el coeficiente de fricción entre todas las superficies es $\mu = 0.055$. [*Sugerencia*: En el inciso *b*) determine primero la fuerza normal sobre el cilindro y haga cualquier hipótesis razonable necesaria].

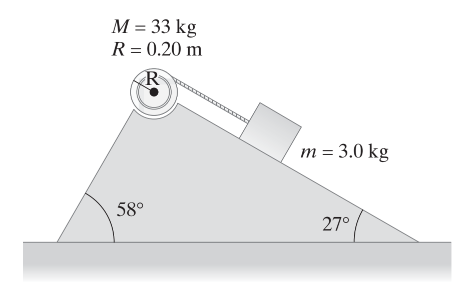


FIGURA 10–69 Problema 98.

99. El radio del rollo de papel mostrado en la figura 10-70 es 7.6 cm y su momento de inercia es $I = 3.3 \times 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. Una fuerza de 2.5 N se ejerce sobre el extremo del rollo durante 1.3 s. El papel no se rompe y empieza a desenrollarse. Una torca constante con fricción de 0.11 m · N actúa sobre el rollo y gradualmente lo detiene. Suponiendo que el espesor del papel es despreciable, calcule *a*) la longitud de papel que se desenrolla durante el tiempo que se aplica la fuerza (1.3 s) y *b*) la longitud de papel que se desenrolla, desde el momento en que la fuerza cesa hasta que el rollo deja de moverse.

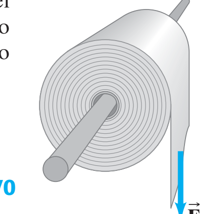


FIGURA 10–70 Problema 99.

100. Un disco sólido uniforme de masa igual a 21.0 kg y radio de 85.0 cm está en reposo sobre una superficie sin fricción. La figura 10-71 muestra una vista desde arriba. Una cuerda se enrolla alrededor del borde del disco y se aplica una fuerza constante de 35.0 N a la cuerda. La cuerda no de desliza sobre el borde. *a*) ¿En qué dirección se mueve el CM? Cuando el disco se ha movido una distancia de 5.5 m, *b*) ¿qué tan rápido se está moviendo? *c*) ¿Qué tan rápido está girando (en radianes por segundo)? *d*) ¿Cuánta cuerda se ha desenrollado alrededor del borde?

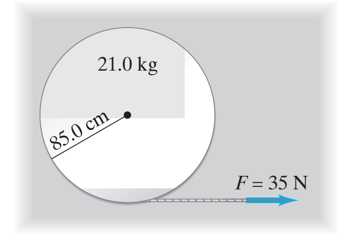


FIGURA 10–71 Problema 108, viendo el disco hacia abajo.

101. Los ciclistas y los motociclistas "hacen caballito", una gran aceleración provoca que las ruedas frontales de sus velocípedos se despegue del suelo. Sea M la masa total del sistema bicicleta más ciclista; sean x y y las distancias horizontal y vertical del CM de este sistema, desde el punto de contacto con el suelo en la rueda trasera (figura 10-72). *a*) Determine la aceleración horizontal a requerida para apenas levantar del suelo la rueda delantera de la bicicleta. *b*) Para minimizar la aceleración necesaria para realizar "el caballito", x debería ser lo más pequeña o lo más grande posible? ¿Y en el caso de y? ¿Cómo debería el ciclista acomodar su cuerpo en la bicicleta para alcanzar esos valores óptimos de x y y? Si $x = 35$ cm y $y = 95$ cm, determine a.

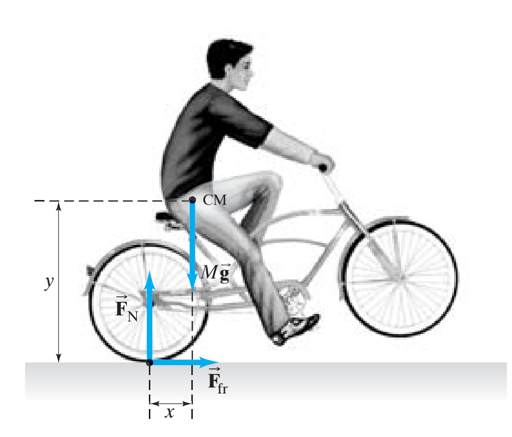


FIGURA 10–72 Problema 101.

102. Una parte importante de una pieza de maquinaria empieza como un disco plano cilíndrico y uniforme de radio R_0 y masa M, al cual se le hace un agujero circular de radio R_1 (figura 10-73). El centro del agujero está a una distancia h del centro del disco. Encuentre el momento de inercia de este disco (con el agujero excéntrico) respecto de un eje que perpendicular que pasa por su CM. [*Sugerencia*: Considere un disco sólido y "reste" el agujero; use el teorema de los ejes paralelos].

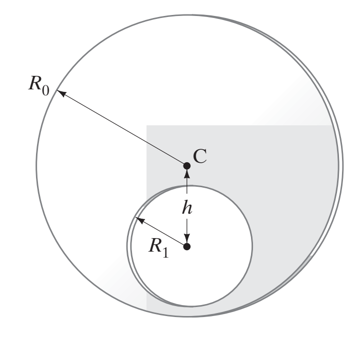


FIGURA 10–73 Problema 102.

103. Una barra delgada uniforme de masa M y longitud ℓ está colocada verticalmente con su extremo sobre una mesa sin fricción. Luego se suelta y se deja caer. Determine la rapidez de su CM justo antes de golpear la mesa (figura 10-74).

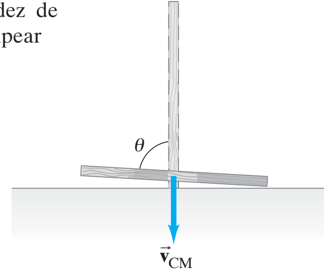


FIGURA 10–74 Problema 103.

* **104.** *a*) Para el cilindro tipo yo-yo del ejemplo 10-19 vimos que la aceleración hacia abajo de su CM era $a = \frac{2}{3}g$. Si parte del reposo, ¿cuál será la velocidad del CM después de que haya caído una distancia h? *b*) Ahora utilice la conservación de la energía para determinar la velocidad del CM del cilindro, después de que cae una distancia h, partiendo del reposo.

* Problemas numéricos/por computadora

* **105.** (II) Determine la torca producida alrededor del soporte A de la estructura rígida mostrada en la figura 10-75, como una función del ángulo de la pierna θ, si una fuerza $F = 500$ N se aplica al punto P perpendicularmente al extremo de la pierna. Grafique los valores de la torca τ en función de θ desde $\theta = 0°$ hasta 90°, en incrementos de 1°.

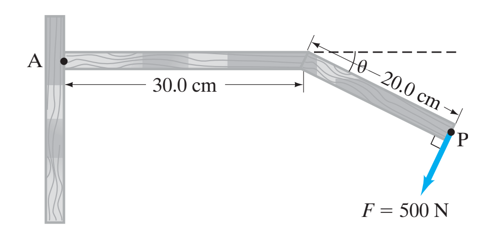


FIGURA 10–75 Problema 105.

* **106.** (II) Utilice la expresión que se obtuvo en el problema 51 para la aceleración de masas en una máquina de Atwood, al investigar en qué punto el momento de inercia de la polea se vuelve despreciable. Suponga $m_A = 0.150$ kg, $m_B = 0.350$ kg y $R = 0.040$ m. *a*) Grafique la aceleración en función del momento de inercia. *b*) Encuentre la aceleración de las masas cuando el momento de inercia llega acero. *c*) usando su grafica para guiarse, en qué valor mínimo de I la aceleración calculada se desvía el 2.0% de la aceleración encontrada en el inciso *b*)? *d*) Si la polea pudiera considerarse como un disco uniforme, encuentre la masa de la polea usando la I encontrada en el inciso *c*)?

Respuestas a los ejercicios

A: $f = 0.076$ Hz; $T = 13$ s.

B: $\vec{F}_A$.

C: Sí; $\frac{1}{12}M\ell^2 + M(\frac{1}{2}\ell)^2 = \frac{1}{3}M\ell^2$.

D: 4×10^{17} J.

E: *c*).

F: $a = \frac{1}{3}g$.

Esta patinadora está haciendo un giro. Cuando sus brazos se extienden horizontalmente, gira menos rápido que cuando los mantiene cerca del eje de rotación. Éste es un ejemplo de la conservación de la cantidad de movimiento angular.

La cantidad de movimiento angular, que estudiaremos en este capítulo, se conserva sólo si no actúa ninguna torca neta sobre el objeto o sistema. De otra forma, la tasa de cambio de la cantidad de movimiento angular es proporcional a la torca neta aplicada, la cual, si es cero, implica que la cantidad de movimiento angular *se conserva*. En este capítulo también examinaremos aspectos más complejos del movimiento de rotación.



CAPÍTULO 11

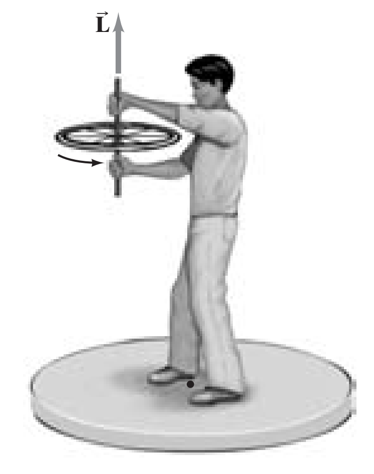
Cantidad de movimiento angular: Rotación general

CONTENIDO

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!

Usted se encuentra de pie sobre una plataforma en reposo, pero que puede girar. Sostiene por el eje una rueda de bicicleta que gira, como se observa en la figura. Luego, voltea la rueda de manera que su eje quede apuntando hacia abajo. ¿Qué sucede entonces?

a) La plataforma comienza a girar en el sentido en el que la rueda de bicicleta giraba originalmente.
b) La plataforma comienza a girar en sentido contrario a la rotación original de la rueda de bicicleta.
c) La plataforma permanece en reposo.
d) La plataforma gira sólo mientras usted da vuelta a la rueda.
e) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.



En el capítulo 10 analizamos la cinemática y dinámica de la rotación de un cuerpo rígido con respecto a un eje cuya dirección permanece fija en un marco inercial de referencia. Analizamos el movimiento en términos del equivalente rotacional de las leyes de Newton (donde la torca juega el papel que la fuerza desempeña en el movimiento traslacional), así como en términos de la energía cinética rotacional.

Para mantener fijo el eje de un cuerpo en rotación, por lo general el cuerpo debe encontrarse restringido por soportes externos (como chumaceras en el extremo de un eje). El movimiento de cuerpos que no están restringidos a moverse con respecto a un eje fijo es más difícil de describir y analizar. El análisis completo del movimiento rotacional general de un cuerpo (o sistema de cuerpos) en el espacio es muy complicado, y en este capítulo sólo veremos algunos aspectos del movimiento rotacional general.

Iniciaremos el capítulo presentando el concepto de *cantidad de movimiento angular*, que es el análogo rotacional de la cantidad de movimiento lineal. Primero nos ocuparemos de la cantidad de movimiento angular y su conservación, en el caso de un objeto que gira alrededor de un eje fijo. Luego, examinaremos la naturaleza vectorial de la torca y la cantidad de movimiento angular. Obtendremos aquí algunos de los teoremas generales y los aplicaremos a ciertos tipos interesantes de movimiento.

11–1 Cantidad de movimiento angular: objetos que giran en torno a un eje fijo

En el capítulo 10 vimos que si empleamos las variables angulares apropiadas, las ecuaciones cinemáticas y dinámicas para el movimiento rotacional son análogas a las que se utilizan para el movimiento lineal ordinario. De igual forma, la cantidad de movimiento lineal, o momento lineal, $p = mv$, tiene un análogo rotacional. Se llama **cantidad de movimiento angular,** o **momento angular**, L, y para un objeto que gira en torno a un eje fijo con velocidad angular ω, se define como

$$L = I\omega, \qquad \textbf{(11–1)}$$

donde I es el momento de inercia respecto del eje fijo. La unidad en el SI para L es kg · m^2/s, y no existe un nombre específico para ésta.

En el capítulo 9 (sección 9-1) vimos que la segunda ley de Newton se expresa no sólo como $\Sigma F = ma$, sino también, de una forma más general, en términos de cantidad de movimiento (ecuación 9-2), $\Sigma F = dp/dt.$ De forma similar, el equivalente rotacional de la segunda ley de Newton, que vimos en las ecuaciones 10-14 y 10-15 como $\Sigma\tau = I\alpha,$ también puede escribirse en términos de cantidad de movimiento angular: puesto que la aceleración angular $\alpha = d\omega/dt$ (ecuación 10-3), entonces $I\alpha = I(d\omega/dt) = d(I\omega)/dt = dL/dt$, de manera que

$$\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}. \qquad \textbf{(11–2)}$$

SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA LA ROTACIÓN

Esta derivación supone que el momento de inercia, I, permanece constante. Sin embargo, la ecuación 11-2 es válida incluso si el momento de inercia cambia, y se aplica también a un sistema de cuerpos en rotación alrededor de un eje fijo, donde $\Sigma\tau$ es la torca neta externa (que se discute en la sección 11-4). La ecuación 11-2 es la segunda ley de Newton para el movimiento de rotación con respecto a un eje fijo, y también es válida para un objeto en movimiento, si su rotación es en torno a un eje que pasa a través de su centro de masa (como en la ecuación 10-15).

Conservación de la cantidad de movimiento angular

La cantidad de movimiento angular, también llamada momento angular es un concepto importante en física porque, en ciertas condiciones, es una cantidad que se conserva. ¿Cuáles son esas condiciones? A partir de la ecuación 11-2 observamos de inmediato que si la torca neta externa $\Sigma\tau$ sobre un objeto (o sistema de objetos) es cero, entonces

$$\frac{dL}{dt} = 0 \quad \text{y} \quad L = I\omega = \text{constante} \qquad [\Sigma\tau = 0]$$

Ésta es la **ley de la conservación de la cantidad de movimiento angular** para un objeto en rotación:

> **La cantidad de movimiento angular total de un objeto que gira permanece constante si la torca neta externa que actúa sobre éste es cero.**

CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

La ley de la conservación de la cantidad de movimiento angular es una de las leyes fundamentales de la física, junto con las leyes de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento lineal.

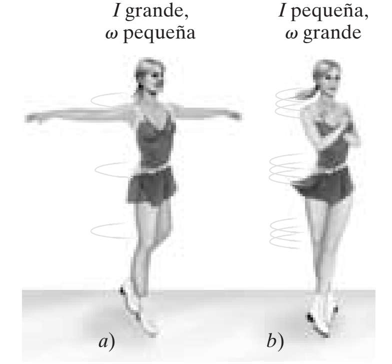


FIGURA 11–1 Una patinadora que realiza un giro sobre el hielo ilustra la conservación de la cantidad de movimiento angular: *a*) I es grande y ω es pequeña; *b*) I es menor, así que ω es mayor.

FIGURA 11–2 Una clavadista gira más rápido cuando sus brazos y piernas están doblados que cuando están extendidos. La cantidad de movimiento angular se conserva.



Cuando la torca neta que actúa sobre un objeto es cero, y éste gira alrededor de un eje fijo o de un eje que pasa por su centro de masa cuya dirección no cambia, podemos escribir

$$I\omega = I_0\omega_0 = \text{constante}$$

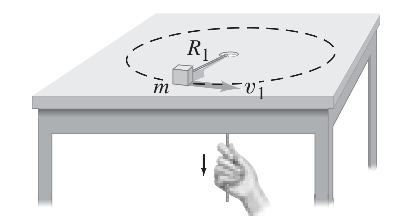
I_0 y ω_0 son, respectivamente, el momento de inercia y la velocidad angular alrededor de un eje en un momento inicial ($t = 0$), e I y ω son sus valores en algún otro momento. Las partes del objeto pueden alterar sus posiciones relativas, de manera que I cambia. Pero entonces ω cambia también y el producto $I\omega$ permanece constante.

Muchos fenómenos interesantes se comprenden a partir de la conservación de la cantidad de movimiento angular. Considere una patinadora que realiza un giro sobre las puntas de sus patines (figura 11-1). Gira a baja rapidez cuando sus brazos están extendidos, pero cuando coloca sus brazos cerca del cuerpo, empieza a girar más rápido. A partir de la definición del momento de inercia, $I = \Sigma mR^2$, es claro que cuando coloca sus brazos más cerca del eje de rotación, R disminuye para sus brazos, de manera que se reduce su momento de inercia. Como la cantidad de movimiento angular $I\omega$ permanece constante (se ignora la pequeña torca debida a la fricción), si I disminuye, entonces la velocidad angular ω debe aumentar. Si la patinadora reduce su momento de inercia en un factor de 2, girará con el doble de velocidad angular.

Un ejemplo similar es la clavadista de la figura 11-2. El impulso cuando brinca del trampolín le da una cantidad de movimiento angular inicial en torno a su centro de masa. Cuando dobla su cuerpo, gira rápidamente una o más veces. Luego estira el cuerpo incrementando su momento de inercia, lo cual reduce la velocidad angular a un pequeño valor, y entra en el agua. El cambio en el momento de inercia desde la posición recta a la posición doblada puede ser un factor tan grande como $3\frac{1}{2}$.

Observe que para que la cantidad de movimiento angular se conserve, la torca neta debe ser cero, pero la fuerza neta no necesariamente tiene que ser cero. La fuerza neta sobre la clavadista en la figura 11-2, por ejemplo, no es cero (la gravedad actúa); sin embargo, la torca neta alrededor de su CM es cero porque la fuerza de gravedad actúa justo en su centro de masa.

FIGURA 11–3 Ejemplo 11–1.



EJEMPLO 11–1 **Un objeto gira en una cuerda de largo variable.** Una pequeña masa m amarrada al extremo de una cuerda gira en círculo sobre una mesa horizontal que no ejerce fricción. El otro extremo de la cuerda pasa a través de un agujero en el centro de la mesa (figura 11-3). Inicialmente, la masa gira con una rapidez de $v_1 = 2.4$ m/s en un círculo de radio $R_1 = 0.80$ m. Luego, se tira de la cuerda lentamente a través del agujero, de manera que el radio se reduce a $R_2 = 0.48$ m. ¿Cuál es ahora la rapidez, v_2, de la masa?

PLANTEAMIENTO No hay torca neta sobre la masa m porque la fuerza ejercida por la cuerda para mantenerla en movimiento circular se ejerce hacia el eje; por lo tanto, el brazo de palanca es cero. Así, podemos aplicar la conservación de la cantidad de movimiento angular.

SOLUCIÓN La conservación de la cantidad de movimiento angular da

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2.$$

Nuestra pequeña masa es esencialmente una partícula cuyo momento de inercia con respecto al agujero es $I = mR^2$ (ecuación 10-11), así que tenemos

$$mR_1^2\omega_1 = mR_2^2\omega_2,$$

o bien,

$$\omega_2 = \omega_1\left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\right).$$

Puesto que $v = R\omega$, podemos escribir

$$v_2 = R_2\omega_2 = R_2\omega_1\left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\right) = R_2\frac{v_1}{R_1}\left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\right) = v_1\frac{R_1}{R_2}$$

$$= (2.4\text{ m/s})\left(\frac{0.80\text{ m}}{0.48\text{ m}}\right) = 4.0\text{ m/s}.$$

La rapidez se incrementa conforme el radio se reduce.

EJEMPLO 11–2 **Embrague.** Un embrague simple consiste en dos placas cilíndricas que se pueden presionar una contra otra, para conectar dos secciones de un eje en una pieza mecánica, según se necesite. Las dos placas tienen masas $M_A = 6.0$ kg y $M_B = 9.0$ kg, con radios iguales $R_0 = 0.60$ m. Inicialmente están separadas (figura 11-4). La placa M_A es acelerada desde el reposo hasta una velocidad angular $\omega_1 = 7.2$ rad/s en un tiempo $\Delta t = 2.0$ s. Calcule *a*) la cantidad de movimiento angular de M_A, y *b*) la torca necesaria para acelerar M_A desde el reposo a ω_1. *c*) Luego, la placa M_B, inicialmente en reposo pero libre para girar sin fricción, se coloca en firme contacto con la placa M_A que gira libremente, y las dos placas giran a una velocidad angular constante ω_2, que es considerablemente menor que ω_1. ¿Por qué sucede esto y cuál es el valor de ω_2?

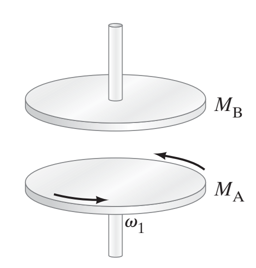


FIGURA 11–4 Ejemplo 11–2.

PLANTEAMIENTO Empleamos la definición de cantidad de movimiento angular $L = I\omega$ (ecuación 11-1) y la segunda ley de Newton rotacional (ecuación 11-2).

SOLUCIÓN *a*) La cantidad de movimiento angular de M_A será

$$L_A = I_A\omega_1 = \tfrac{1}{2}M_A R_0^2\omega_1 = \tfrac{1}{2}(6.0\,\text{kg})(0.60\,\text{m})^2(7.2\,\text{rad/s}) = 7.8\,\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}.$$

b) La placa partió del reposo, de manera que la torca, la cual se supone constante, fue

$$\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{7.8\,\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} - 0}{2.0\,\text{s}} = 3.9\,\text{m}\cdot\text{N}.$$

c) Inicialmente, M_A gira a una ω_1 constante (se ignora la fricción). Cuando la placa B entra en contacto, ¿por qué es menor la rapidez de rotación del empalme? Podría pensarse en términos de la torca que cada una ejerce sobre la otra en virtud del contacto. Pero en términos cuantitativos, es más fácil utilizar la conservación de la cantidad de movimiento angular, puesto que se supone que no hay torcas externas que actúen. Por consiguiente,

cantidad de movimiento angular antes = cantidad de movimiento angular después

$$I_A\omega_1 = (I_A + I_B)\omega_2.$$

Se despeja ω_2 y se obtiene

$$\omega_2 = \left(\frac{I_A}{I_A + I_B}\right)\omega_1 = \left(\frac{M_A}{M_A + M_B}\right)\omega_1 = \left(\frac{6.0\,\text{kg}}{15.0\,\text{kg}}\right)(7.2\,\text{rad/s}) = 2.9\,\text{rad/s}.$$

EJEMPLO 11–3 **ESTIMACIÓN** **Estrella de neutrones.** Los astrónomos detectan estrellas que giran sumamente rápido, conocidas como estrellas de neutrones. Se cree que una estrella de neutrones se forma a partir del núcleo de una estrella de mayor tamaño que se colapsó, como resultado de su propia gravitación, para convertirse en una estrella de radio muy pequeño y elevada densidad. Supongamos que antes de colapsarse, una estrella tiene una masa 2.0 veces más grande que la del Sol, pero su núcleo es del tamaño de éste $(r \approx 7 \times 10^5$ km); además, gira a una frecuencia de 1.0 revolución cada 100 días. Si experimenta un colapso gravitacional para convertirse en una estrella de neutrones de radio de 10 km, ¿cuál sería su frecuencia de rotación? Suponga que la estrella es una esfera uniforme en todo momento y que no pierde masa.



Estrella de neutrones

PLANTEAMIENTO Suponemos que la estrella está aislada (no hay fuerzas externas), de manera que podemos recurrir a la conservación de la cantidad de movimiento angular para este proceso. Utilizamos r para el radio de una esfera, en comparación con R, que se emplea para la distancia a un eje de rotación o para simetría cilíndrica; véase la figura 10-2.

SOLUCIÓN A partir de la conservación de la cantidad de movimiento angular,

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2,$$

donde los subíndices 1 y 2 se refieren a la estrella inicial (normal) y final (de neutrones), respectivamente. Así, suponiendo que no hay pérdida de masa en el proceso,

$$\omega_2 = \left(\frac{I_1}{I_2}\right)\omega_1 = \left(\frac{\frac{2}{5}m_1 r_1^2}{\frac{2}{5}m_2 r_2^2}\right)\omega_1 = \frac{r_1^2}{r_2^2}\omega_1.$$

La frecuencia $f = \omega/2\pi$, así que

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{r_1^2}{r_2^2}f_1$$

$$= \left(\frac{7\times10^5\,\text{km}}{10\,\text{km}}\right)^2\left(\frac{1.0\,\text{rev}}{100\,\text{d}(24\,\text{h/d})(3600\,\text{s/h})}\right) \approx 6\times10^2\,\text{rev/s}.$$

Naturaleza direccional de la cantidad de movimiento angular

La cantidad de movimiento angular es un vector, como veremos después en este capítulo. Por ahora consideremos el sencillo caso en el que un objeto gira alrededor de un eje fijo y el sentido de $\vec{\mathbf{L}}$ está especificado por un signo más o menos, como hicimos también con el movimiento lineal unidimensional en el capítulo 2.

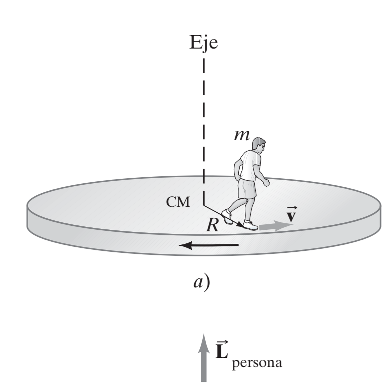


FIGURA 11–5 *a*) Una persona se encuentra sobre una plataforma circular (ambas están inicialmente en reposo); el sujeto comienza a caminar por la orilla con una rapidez v (respecto de la Tierra). La plataforma, que se supone está montada sobre chumaceras libres de fricción, comienza a girar en sentido contrario, de manera que la cantidad de movimiento angular total sigue siendo cero, como se observa en *b*).

Para un objeto simétrico que gira en torno a su eje de simetría (como un cilindro o una rueda), la dirección de la cantidad de movimiento angular† puede tomarse como la dirección de la velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$. Esto es,

$$\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\boldsymbol{\omega}}.$$

Como un ejemplo sencillo, considere una persona de pie y en reposo sobre una plataforma circular que puede girar sin fricción alrededor de un eje que pasa por su centro (esto es, un carrusel simplificado). Si la persona empieza a caminar por la orilla de la plataforma (figura 11-5a), ésta comienza a girar en sentido contrario. ¿Por qué? Una explicación es que los pies de la persona ejercen una fuerza sobre la plataforma. Otra explicación (y éste es el análisis más útil aquí) indica que se trata de un ejemplo de conservación de la cantidad de movimiento angular. Si el sujeto comienza a caminar en sentido antihorario, su cantidad de movimiento angular apuntará hacia arriba paralela al eje de rotación (recuerde cómo se definió el sentido de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ mediante la regla de la mano derecha en la sección 10-2). La magnitud de la cantidad de movimiento angular de la persona será $L = I\omega = \left(mR^2\right)(v/R)$, donde v es la rapidez del sujeto (en relación con la Tierra, no con la plataforma), R es su distancia al eje de rotación, m es su masa, y mR^2 es su momento de inercia, si consideramos a la persona como una partícula (una masa concentrada en un punto). La plataforma gira en sentido contrario, así que su cantidad de movimiento angular apunta hacia abajo. Si la cantidad de movimiento angular total inicial fuera cero (con la persona y la plataforma en reposo), seguirá siendo cero después de que el sujeto comienza a caminar. Esto es, la cantidad de movimiento angular hacia arriba de la persona equilibra la cantidad de movimiento angular hacia abajo de la plataforma (figura 11-5b), de forma que la cantidad de movimiento angular vectorial total sigue siendo cero. Aun cuando la persona ejerza una fuerza (y torca) sobre la plataforma, ésta ejerce una torca igual y opuesta sobre la persona. Así, la torca neta sobre el *sistema* de la persona más la plataforma es cero (ignorando la fricción), y la cantidad de movimiento angular total del sistema permanece constante.

EJEMPLO 11–4 **Corriendo sobre una plataforma circular.** Suponga que una persona de 60 kg está de pie en el borde de una plataforma circular de 6.0 m de diámetro, que está montada sobre chumaceras sin fricción y tiene un momento de inercia de 1800 kg · m². La plataforma se encuentra inicialmente en reposo; sin embargo, cuando la persona comienza a correr con una rapidez de 4.2 m/s (con respecto a la Tierra) por el borde, la plataforma comienza a girar en sentido contrario, como en la figura 11-5. Calcule la velocidad angular de la plataforma.

PLANTEAMIENTO Recurrimos a la conservación de la cantidad de movimiento angular. En un principio, la cantidad de movimiento angular total es cero. Puesto que no hay torca neta, $\vec{\mathbf{L}}$ se conserva y permanece en cero, como en la figura 11-5. La cantidad de movimiento angular de la persona es $L_{\text{per}} = (mR^2)(v/R)$, y la consideramos positiva. La cantidad de movimiento angular de la plataforma es $L_{\text{plat}} = -I\omega$.

SOLUCIÓN La conservación de la cantidad de movimiento angular da

$$L = L_{\text{per}} + L_{\text{plat}}$$

$$0 = mR^2\left(\frac{v}{R}\right) - I\omega.$$

Así que

$$\omega = \frac{mRv}{I} = \frac{(60\,\text{kg})(3.0\,\text{m})(4.2\,\text{m/s})}{1800\,\text{kg}\cdot\text{m}^2} = 0.42\,\text{rad/s}.$$

NOTA La frecuencia de rotación es $f = \omega/2\pi = 0.067$ rev/s y el periodo $T = 1/f = 15$ s por revolución.

†Para situaciones más complejas de objetos que giran en torno a un eje fijo, habrá una componente de $\vec{\mathbf{L}}$ a lo largo de la dirección de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ y su magnitud será igual a $I\vec{\boldsymbol{\omega}}$; sin embargo, también podría haber otras componentes. Si la cantidad de movimiento angular total se conserva, la componente $I\vec{\boldsymbol{\omega}}$ también se conserva. Así que nuestros resultados pueden aplicarse a cualquier rotación con respecto a un eje fijo.

EJEMPLO CONCEPTUAL 11–5 **Rueda de bicicleta que gira.** Su profesor de física está de pie en una plataforma estacionaria y sin fricción mientras sostiene en sus manos una rueda de bicicleta que gira (figura 11-6). ¿Qué sucedería si el profesor de repente voltea la rueda de bicicleta de forma que ésta gire en sentido contrario?

RESPUESTA Consideramos el sistema formado por la plataforma, el profesor y la rueda de bicicleta. Inicialmente, la cantidad de movimiento angular total es $\vec{\mathbf{L}}$ vertical hacia arriba. Esto es igual a la cantidad de movimiento angular del sistema que debe haber después, ya que $\vec{\mathbf{L}}$ se conserva cuando la torca neta es cero. Por lo tanto, si la cantidad de movimiento angular de la rueda después de voltearse es $-\vec{\mathbf{L}}$ hacia abajo, la cantidad de movimiento angular del profesor más la plataforma será $+2\vec{\mathbf{L}}$ hacia arriba. Con seguridad podemos predecir que el profesor comenzará a girar en el mismo sentido en que giraba la rueda en un principio.

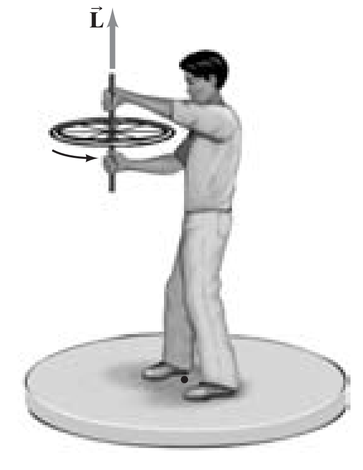


FIGURA 11–6 Ejemplo11–5.

EJERCICIO A En el ejemplo 11-5, ¿qué sucede si el profesor mueve el eje sólo 90° para dejarlo horizontal? *a*) Tendrá el mismo sentido y rapidez que arriba; *b*) el mismo sentido que arriba, pero más lento; *c*) el resultado contrario.

EJERCICIO B Regrese a la pregunta de inicio del capítulo, página 284, y respóndala de nuevo. Intente explicar por qué quizá la contestó de manera diferente la primera vez.

EJERCICIO C Suponga que usted está de pie en la orilla de una gran plataforma que gira libremente. Si camina hacia el centro, *a*) la plataforma se mueve más lentamente; *b*) se mueve más rápidamente; *c*) su velocidad angular permanece constante; *d*) para responder, es necesario conocer la rapidez con que camina.

11–2 Producto cruz vectorial: Torca como vector

Producto cruz vectorial

Para tratar con la naturaleza vectorial de la cantidad de movimiento angular y de la torca en general, necesitaremos el concepto de *producto cruz vectorial* (a menudo llamado simplemente *producto vectorial* o *producto cruz*). En general, el **producto vectorial** o **producto cruz** de dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se define como otro vector $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ *cuya magnitud* es

$$C = |\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}| = AB \operatorname{sen} \theta, \qquad \textbf{(11–3a)}$$

donde θ es el ángulo (< 180°) entre $\vec{\mathbf{A}}$ *y* $\vec{\mathbf{B}}$, *y cuya dirección es perpendicular a* $\vec{\mathbf{A}}$ *y* $\vec{\mathbf{B}}$ *de acuerdo con la regla de la mano derecha* (figura 11-7). El ángulo θ se mide entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ cuando se ponen cola con cola. De acuerdo con la regla de la mano derecha, como se muestra en la figura 11-7, usted orienta la mano derecha de manera que los dedos señalen a lo largo de $\vec{\mathbf{A}}$, y cuando dobla los dedos señalan a lo largo de $\vec{\mathbf{B}}$. Cuando la mano está correctamente orientada de esta manera, el pulgar señalará a lo largo de la dirección de $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$.

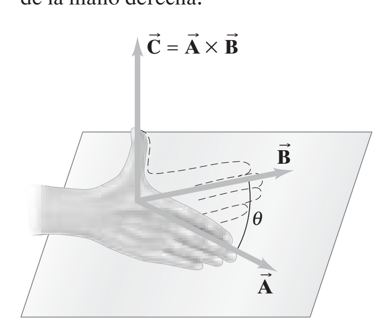
El producto cruz de dos vectores, $\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$, y $\vec{\mathbf{B}} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$, puede escribirse en términos de componentes (véase el problema 26) como

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad \textbf{(11–3b)}$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\mathbf{i}} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\mathbf{j}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\mathbf{k}}. \qquad \textbf{(11–3c)}$$

La ecuación 11-3b se evalúa siguiendo las reglas de los determinantes (para obtener la ecuación 11-3c).

FIGURA 11–7 El vector $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ es perpendicular al plano que contiene a $\vec{\mathbf{A}}$ y a $\vec{\mathbf{B}}$; su sentido está dado por la regla de la mano derecha.



Algunas propiedades del producto cruz son las siguientes:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{A}} = 0 \quad \textbf{(11–4a)}$$

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}} \quad \textbf{(11–4b)}$$

$$\vec{\mathbf{A}} \times (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = (\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}) + (\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}}) \quad \text{[ley distributiva]} \quad \textbf{(11–4c)}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}) = \frac{d\vec{\mathbf{A}}}{dt} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \frac{d\vec{\mathbf{B}}}{dt}. \quad \textbf{(11–4d)}$$

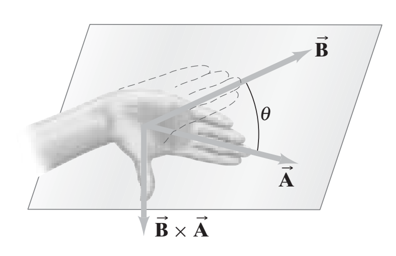
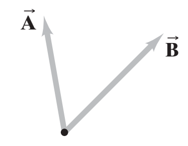


FIGURA 11–8 El vector $\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$ es igual a $-\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$; compare con la figura 11-7.

La ecuación 11-4a se deriva de las ecuaciones 11-3 (ya que $\theta = 0$), al igual que la ecuación 11-4b, puesto que la magnitud de $\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$ es la misma que la de $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$, pero por la regla de la mano derecha, el sentido es opuesto (véase la figura 11-8). Así, el orden de los dos vectores es crucial. Si se cambia el orden, cambia de signo el resultado. Es decir, la ley conmutativa *no* es válida para el producto cruz $(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} \neq \vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}})$, aunque sí lo es para el producto punto de dos vectores y para el producto de escalares. Observe que, en la ecuación 11-4d, el orden de las cantidades en los dos productos a la derecha no debe cambiarse (debido a la ecuación 11-4b).

FIGURA 11–9 Ejercicio D.

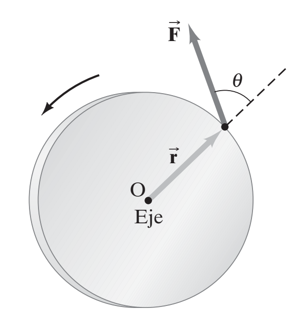


EJERCICIO D Para los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ en el plano de la página como se muestra en la figura 11-9, ¿en qué sentido está (i) $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$, (ii) $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$, (iii) $\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$? *a*) Hacia la página; *b*) hacia fuera de la página; *c*) entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$; *d*) es un escalar y no tiene sentido; e) es cero y carece de sentido.

El vector torca

La torca es un ejemplo de una cantidad que se puede expresar como un producto cruz. Para ver esto, consideremos un ejemplo simple: la rueda delgada de la figura 11-10, que puede girar libremente con respecto a un eje que pasa por su centro en el punto O. Una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ actúa en el borde de la rueda, en un punto cuya posición relativa al centro O está dada por el vector posición $\vec{\mathbf{r}}$ como se muestra en la figura. La fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ tiende a hacer girar la rueda (que se supone inicialmente en reposo) en sentido antihorario, por lo que la velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ señalará hacia afuera de la página, hacia el observador (recuerde la regla de la mano derecha en la sección 10-2). La torca que se debe a $\vec{\mathbf{F}}$ tiende a incrementar $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, por lo que $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ también señala hacia afuera a lo largo del eje de rotación. La relación entre la aceleración angular y la torca que desarrollamos en el capítulo 10 para un cuerpo que gira respecto a un eje fijo es

FIGURA 11–10 La torca producida por la fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}$ (en el plano de la rueda) hace girar a la rueda en sentido antihorario, de manera que $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ y $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ señalan hacia fuera de la página.



$$\Sigma\tau = I\alpha,$$

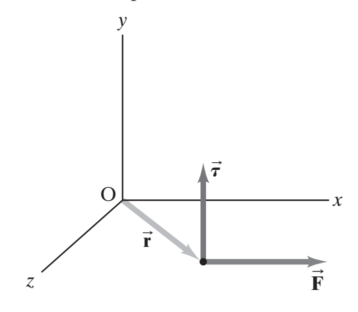
(ecuación 10-14), donde I es el momento de inercia. Esta ecuación escalar es el equivalente rotacional de $\Sigma F = ma$, y quisiéramos hacerla una ecuación vectorial tal como $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ Para el caso de la figura 11-10, debemos hacer que la dirección de $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ señale hacia afuera a lo largo del eje de rotación, ya que $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ $(= d\vec{\boldsymbol{\omega}}/dt)$ así lo hace; y la magnitud de la torca debe ser (véase las ecuaciones 10-10 y la figura 11-10) $\tau = rF_{\perp} = rF \operatorname{sen}\theta$. Podemos lograr esto definiendo el **vector torca** como el producto vectorial de $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}. \quad \textbf{(11–5)}$$

De la definición anterior del producto vectorial (ecuación 11-3a), la magnitud de $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ será $rF \operatorname{sen}\theta$ y la dirección será a lo largo del eje, como se requiere para este caso especial.

Veremos en las secciones 11-3 a 11-5 que si tomamos la ecuación 11-5 como la *definición general de torca*, entonces la relación vectorial $\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}} = I\vec{\boldsymbol{\alpha}}$ será válida en general. Establecemos ahora que la ecuación 11-5 es la definición general de torca. Contiene información sobre la magnitud, la dirección y el sentido. Observe que esta definición involucra al vector posición $\vec{\mathbf{r}}$, por lo que la torca se calcula con respecto a un punto. Podemos elegir ese punto O como sea más conveniente.

FIGURA 11–11 $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$, donde $\vec{\mathbf{r}}$ es el vector posición.



Para una partícula de masa m sobre la cual se aplica una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$, definimos la torca con respecto a un punto O como

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$$

donde $\vec{\mathbf{r}}$ es el vector posición de la partícula respecto al punto O (figura 11-11). Si tenemos un sistema de partículas (que podrían ser las partículas que forman un cuerpo rígido) la torca total $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ sobre el sistema será la suma de las torcas sobre las partículas individuales:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \Sigma(\vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{F}}_i),$$

donde $\vec{\mathbf{r}}_i$ es la posición de la $i^{\text{ésima}}$ partícula y $\vec{\mathbf{F}}_i$ es la fuerza neta sobre la i-ésima partícula.

EJEMPLO 11–6 **El vector torca.** Suponga que el vector $\vec{\mathbf{r}}$ está en el plano xz, como en la figura 11-11 y está dado por $\vec{\mathbf{r}} = (1.2\,\text{m})\hat{\mathbf{i}} + (1.2\,\text{m})\hat{\mathbf{k}}$. Calcule el vector torca $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ si $\vec{\mathbf{F}} = (150\,\text{N})\hat{\mathbf{i}}$.

PLANTEAMIENTO Utilizamos la definición en forma de determinante, ecuación 11-3b.

SOLUCIÓN
$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1.2\,\text{m} & 0 & 1.2\,\text{m} \\ 150\,\text{N} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\hat{\mathbf{i}} + (180\,\text{m}\cdot\text{N})\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}}.$$

La magnitud de τ es entonces 180 m · N y señala a lo largo del eje y positivo.

EJERCICIO E Si $\vec{\mathbf{F}} = 5.0\,\text{N}\,\hat{\mathbf{i}}$ y $\vec{\mathbf{r}} = 2.0\,\text{m}\,\hat{\mathbf{j}}$, ¿cuál es $\vec{\boldsymbol{\tau}}$? *a*) 10 mN, *b*) −10 mN, *c*) 10 mN $\hat{\mathbf{k}}$, *d*) −10 mN $\hat{\mathbf{j}}$, *e*) −10 mN $\hat{\mathbf{k}}$.

11–3 Cantidad de movimiento angular de una partícula

La manera más general de escribir la segunda ley de Newton para el movimiento traslacional de una partícula (o sistema de partículas) es en términos de la cantidad de movimiento lineal $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$ como se da en la ecuación 9-2 (o 9-5):
$$\Sigma\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}.$$
El análogo rotacional de la cantidad de movimiento lineal es la *cantidad de movimiento angular*. Así como la tasa de cambio de $\vec{\mathbf{p}}$ está relacionada con la fuerza neta $\Sigma\vec{\mathbf{F}}$, esperaríamos que la razón de cambio de la cantidad de movimiento angular estuviera relacionada con la torca neta. Vimos en la sección 11-1 que esto es cierto para el caso especial de un cuerpo rígido que gira con respecto a un eje fijo. Ahora veremos que es cierto en general. Consideremos primero sólo una partícula.

Suponga que una partícula de masa m tiene cantidad de movimiento lineal $\vec{\mathbf{p}}$ y vector posición $\vec{\mathbf{r}}$ con respecto al origen O en algún marco de referencia inercial determinado. Entonces, la definición general de la **cantidad de movimiento angular** o **momento lineal** $\vec{\mathbf{L}}$, de la partícula con respecto al punto O es el vector producto cruz de $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$:
$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}. \qquad \text{[partícula]} \qquad \textbf{(11–6)}$$
La cantidad de movimiento angular es un vector.† Su dirección es perpendicular a $\vec{\mathbf{r}}$ y a $\vec{\mathbf{p}}$ de acuerdo con la regla de la mano derecha (figura 11-12). Su magnitud está dada por
$$L = rp\,\text{sen}\,\theta$$
o bien,
$$L = rp_{\perp} = r_{\perp}p$$
donde θ es el ángulo entre $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$ cola con cola y $p_{\perp}(= p\ \text{sen}\ \theta)$ y $r_{\perp}(= r\ \text{sen}\ \theta)$ son las componentes de $\vec{\mathbf{p}}$ y $\vec{\mathbf{r}}$ perpendiculares a $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{p}}$, respectivamente.

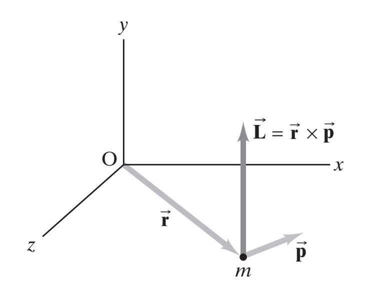


FIGURA 11–12 La cantidad de movimiento angular de una partícula de masa m está dada por $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{r}} \times m\vec{\mathbf{v}}$.

Encontremos ahora la relación entre la cantidad de movimiento angular y la torca para una partícula. Si derivamos $\vec{\mathbf{L}}$ con respecto al tiempo, tenemos
$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}) = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \vec{\mathbf{p}} + \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}.$$
Sin embargo,
$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{v}} \times m\vec{\mathbf{v}} = m(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{v}}) = 0,$$
ya que sen $\theta = 0$ para este caso. Entonces,
$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}.$$
Si $\Sigma\vec{\mathbf{F}}$ representa la fuerza resultante sobre la partícula, entonces en un marco inercial de referencia, $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = d\vec{\mathbf{p}}/dt$ y
$$\vec{\mathbf{r}} \times \Sigma\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{r}} \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}.$$
No obstante, $\vec{\mathbf{r}} \times \Sigma\vec{\mathbf{F}} = \Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}}$ es la torca neta sobre nuestra partícula. Por consiguiente,
$$\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}. \qquad \text{[partícula, marco inercial]} \qquad \textbf{(11–7)}$$
La tasa del cambio de la cantidad de movimiento angular de una partícula es igual a la torca neta que se le aplica. La ecuación 11-7 es el equivalente rotacional de la segunda

†En realidad, un pseudovector; véase la nota al pie de página en la sección 10-2.

ley de Newton para una partícula, escrita en su forma más general. La ecuación 11-7 es válida sólo en un marco de referencia inercial, ya que sólo entonces es válido que $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = d\vec{\mathbf{p}}/dt$, que se usó en la demostración.

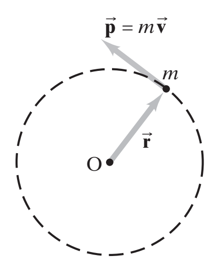


FIGURA 11–13 La cantidad de movimiento angular de una partícula de masa m que gira en un círculo de radio $\vec{\mathbf{r}}$ con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ es $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times m\vec{\mathbf{v}}$ (ejemplo 11-7).

EJEMPLO CONCEPTUAL 11–7 **Cantidad de movimiento angular de una partícula.** Determine la cantidad de movimiento angular de una partícula de masa m que se mueve con rapidez v en un círculo de radio r en sentido antihorario.

RESPUESTA El valor de la cantidad de movimiento angular depende de la selección del punto O. Calculemos $\vec{\mathbf{L}}$ con respecto al centro del círculo, figura 11-13. Entonces $\vec{\mathbf{r}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{p}}$ por lo que $L = |\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}| = rmv$. De acuerdo con la regla de la mano derecha, el sentido de $\vec{\mathbf{L}}$ es perpendicular al plano del círculo, hacia afuera y hacia el observador. Como $v = \omega r$ e $I = mr^2$ para una sola partícula que gira alrededor de un eje a una distancia r, podemos escribir

$$L = mvr = mr^2\omega = I\omega.$$

11–4 Cantidad de movimiento angular y torca para un sistema de partículas: movimiento general

Relación entre cantidad de movimiento angular y torca

Consideremos un sistema de n partículas que tienen cantidad de movimientos angulares $\vec{\mathbf{L}}_1, \vec{\mathbf{L}}_2, \ldots, \vec{\mathbf{L}}_n$. El sistema podría ser un cuerpo rígido o también un ensamble de partículas cuyas posiciones no están fijas entre sí. La cantidad de movimiento angular total $\vec{\mathbf{L}}$ del sistema se define como el vector suma de las cantidades de movimientos angulares de todas las partículas en el sistema:

$$\vec{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{L}}_i. \qquad \textbf{(11–8)}$$

La torca resultante que actúa sobre el sistema es la suma de las torcas netas que actúan sobre todas las partículas:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{net}} = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_i.$$

Esta suma incluye (1) las torcas internas que se deben a las fuerzas internas que las partículas del sistema ejercen unas sobre otras, y (2) las torcas externas que se deben a las fuerzas ejercidas por objetos fuera de nuestro sistema. Por la tercera ley de Newton, la fuerza que cada partícula ejerce sobre otra es igual y opuesta (a lo largo de la misma línea de acción) a la fuerza que la segunda partícula ejerce sobre la primera. Por lo tanto, la suma de todas las torcas internas suma cero, y

$$\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{net}} = \sum_i \vec{\boldsymbol{\tau}}_i = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}}.$$

Ahora obtenemos la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 11-8 y usamos la ecuación 11-7 para cada partícula:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{\mathbf{L}}_i}{dt} = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}}$$

o bien,

SEGUNDA LEY DE NEWTON ROTACIONAL (rotación, sistema de partículas)

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}}. \qquad \text{[Marco inercial de referencia]} \quad \textbf{(11–9a)}$$

Este resultado fundamental establece que la tasa de cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento angular total de un sistema de partículas (o de un cuerpo rígido) es igual a la torca externa resultante que actúa sobre el sistema. Es la equivalente rotacional de la ecuación 9-5, $d\vec{\mathbf{P}}/dt = \Sigma\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$ para el movimiento traslacional. Advierta que $\vec{\mathbf{L}}$ y $\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}}$ deben calcularse con respecto al mismo origen O.

La ecuación 11-9a es válida cuando $\vec{\mathbf{L}}$ y $\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}}$ se calculan con respecto a un punto fijo en un marco de referencia inercial. (En la derivación usamos la ecuación 11-7 que es válida sólo en este caso). La ecuación 11-9a también es válida cuando $\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}}$ y $\vec{\mathbf{L}}$ se calcu-

lan con respecto a un punto que se mueve de manera uniforme en un marco de referencia inercial, puesto que tal punto puede considerarse como el origen de un segundo marco de referencia inercial. *No* es válida en general cuando $\vec{\boldsymbol{\tau}}_{ext}$ y $\vec{\mathbf{L}}$ se calculan con respecto a un punto que está *acelerando*, excepto para un caso especial (y muy importante), que es cuando ese punto es el centro de masa (CM) del sistema:

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_{cm}}{dt} = \sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{cm}. \qquad \text{[aun si está acelerando]} \quad \textbf{(11–9b)}$$

SEGUNDA LEY DE NEWTON (para el CM, aun si está acelerando)

La ecuación 11-9b es válida sin importar cómo se mueve el CM, y $\Sigma\tau_{CM}$ es la torca neta externa calculada con respecto al centro de masa. La derivación se encuentra en el siguiente apartado.

En virtud de la validez de la ecuación 11-9b, hay justificación para describir el movimiento general de un sistema de partículas, como lo hicimos en el capítulo 10, como el movimiento *traslacional* del centro de masa más la *rotación* con respecto al CM. Las ecuaciones 11-9b más la 9-5 $\left(d\vec{\mathbf{P}}_{cm}/dt = \Sigma\vec{\mathbf{F}}_{ext}\right)$ constituyen el enunciado más general de este principio. (Véase también la sección 9-8).

*Obtención de $d\vec{\mathbf{L}}_{cm}/dt = \Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}}_{cm}$

La demostración de la ecuación 11-9b es como sigue. Sea $\vec{\mathbf{r}}_i$ el vector posición de la i-ésima partícula en un marco de referencia inercial, y $\vec{\mathbf{r}}_{cm}$ el vector posición del centro de masa del sistema en este marco de referencia. La posición de la i-ésima partícula con respecto al CM es $\vec{\mathbf{r}}_i^*$ donde (véase la figura 11-14)

$$\vec{\mathbf{r}}_i = \vec{\mathbf{r}}_{cm} + \vec{\mathbf{r}}_i^*.$$

Si multiplicamos cada término por m_i y derivamos esta ecuación, podemos escribir

$$\vec{\mathbf{p}}_i = m_i\frac{d\vec{\mathbf{r}}_i}{dt} = m_i\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{r}}_i^* + \vec{\mathbf{r}}_{cm}\right) = m_i\vec{\mathbf{v}}_i^* + m_i\vec{\mathbf{v}}_{cm} = \vec{\mathbf{p}}_i^* + m_i\vec{\mathbf{v}}_{cm}.$$

La cantidad de movimiento angular con respecto al CM es

$$\vec{\mathbf{L}}_{cm} = \sum_i\left(\vec{\mathbf{r}}_i^* \times \vec{\mathbf{p}}_i^*\right) = \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i^* \times \left(\vec{\mathbf{p}}_i - m_i\vec{\mathbf{v}}_{cm}\right).$$

Entonces, derivando respecto al tiempo, tenemos

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_{cm}}{dt} = \sum_i\left(\frac{d\vec{\mathbf{r}}_i^*}{dt} \times \vec{\mathbf{p}}_i^*\right) + \sum_i\left(\vec{\mathbf{r}}_i^* \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}_i^*}{dt}\right).$$

El primer término a la derecha es $\vec{\mathbf{v}}_i^* \times m\vec{\mathbf{v}}_i^*$ y es igual a cero, ya que $\vec{\mathbf{v}}_i^*$ es paralelo a sí mismo (sen $\theta = 0$). Así,

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_{cm}}{dt} = \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i^* \times \frac{d}{dt}\left(\vec{\mathbf{p}}_i - m_i\vec{\mathbf{v}}_{cm}\right)$$
$$= \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i^* \times \frac{d\vec{\mathbf{p}}_i}{dt} - \left(\sum_i m_i\vec{\mathbf{r}}_i^*\right) \times \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{cm}}{dt}.$$

El segundo término a la derecha es cero ya que, según la ecuación 9-12, $\Sigma m_i\vec{\mathbf{r}}_i^* = M\vec{\mathbf{r}}_{cm}^*$, y $\vec{\mathbf{r}}_{cm}^* = 0$ por definición (la posición del CM está en el origen del marco de referencia CM). Además, por la segunda ley de Newton,

$$\frac{d\vec{\mathbf{p}}_i}{dt} = \vec{\mathbf{F}}_i,$$

donde $\vec{\mathbf{F}}_i$ es la fuerza neta sobre m_i. (Observe que $d\vec{\mathbf{p}}_i^*/dt \neq \vec{\mathbf{F}}_i$ porque el CM puede estar acelerando y la segunda ley de Newton no es válida en un marco de referencia no inercial.) En consecuencia,

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}_{cm}}{dt} = \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i^* \times \vec{\mathbf{F}}_i = \sum_i\left(\vec{\boldsymbol{\tau}}_i\right)_{cm} = \Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}}_{cm},$$

donde $\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}}_{cm}$ es la torca externa resultante sobre todo el sistema, calculada respecto al CM. (Por la tercera ley de Newton, la suma sobre todas las $\vec{\boldsymbol{\tau}}_i$ elimina la torca neta que se debe a fuerzas internas, como vimos en la p. 292). Esta última ecuación es la ecuación 11-9b y esto concluye la demostración.

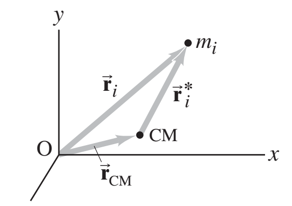


FIGURA 11–14 La posición de m_i en el marco de referencia inercial es $\vec{\mathbf{r}}_i$; con respecto al CM (que podría estar acelerando) es $\vec{\mathbf{r}}_i^*$, donde $\vec{\mathbf{r}}_i = \vec{\mathbf{r}}_i^* + \vec{\mathbf{r}}_{cm}$ y $\vec{\mathbf{r}}_{cm}$ es la posición del CM en el marco de referencia inercial.

Resumen

Para resumir, la relación

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$$

es válida *sólo* cuando $\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{ext}}$ y $\vec{\mathbf{L}}$ se calculan con respecto a (1) el origen de un marco de referencia inercial o (2) el centro de masa de un sistema de partículas (o de un cuerpo rígido).

11–5 Cantidad de movimiento angular y torca para un cuerpo rígido

Consideremos ahora la rotación de un cuerpo rígido con respecto a un eje que tiene una dirección fija en el espacio. Usaremos los principios generales que acabamos de desarrollar.

Calculemos la componente de la cantidad de movimiento angular a lo largo del eje de rotación del cuerpo que se encuentra girando. Llamaremos a esta componente L_ω ya que la velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ señala a lo largo del eje de rotación. Para cada partícula del cuerpo,

$$\vec{\mathbf{L}}_i = \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{p}}_i .$$

Sea ϕ el ángulo entre $\vec{\mathbf{L}}_i$ y el eje de rotación. (Véase la figura 11-15; ϕ *no* es el ángulo entre $\vec{\mathbf{r}}_i$ y $\vec{\mathbf{p}}_i$, que es de 90°). La componente de $\vec{\mathbf{L}}_i$ a lo largo del eje de rotación es

$$L_{i\omega} = r_i p_i \cos\phi = m_i v_i r_i \cos\phi,$$

donde m_i es la masa y v_i la velocidad de la $i^{\text{ésima}}$ partícula. Ahora $v_i = R_i\omega$ donde ω es la velocidad angular del cuerpo y R_i es la distancia perpendicular de m_i al eje de rotación. Además, $R_i = r_i \cos\phi$, como se observa en la figura 11-15, de manera que

$$L_{i\omega} = m_i v_i (r_i \cos\phi) = m_i R_i^2 \omega.$$

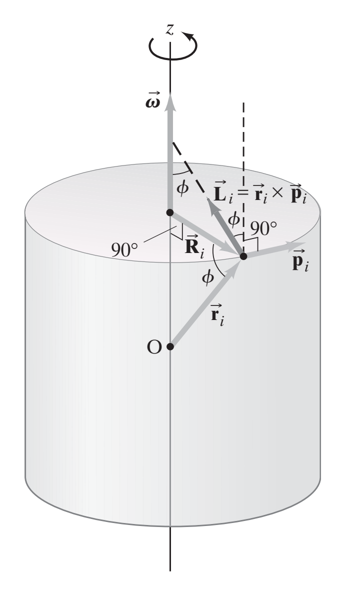


FIGURA 11–15
Cálculo de $L_\omega = L_z = \Sigma L_{iz}$. Observe que $\vec{\mathbf{L}}_i$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{r}}_i$, y $\vec{\mathbf{R}}_i$ es perpendicular al eje z, de forma que los tres ángulos marcados como ϕ son iguales.

Sumamos sobre todas las partículas y obtenemos

$$L_\omega = \sum_i L_{i\omega} = \left(\sum_i m_i R_i^2\right)\omega.$$

Pero $\Sigma m_i R_i^2$ es el momento de inercia I del cuerpo respecto al eje de rotación. Por lo tanto, la componente de la cantidad de movimiento angular total a lo largo del eje de rotación está dada por

$$L_\omega = I\omega. \qquad \textbf{(11–10)}$$

Note que obtenemos la ecuación 11-10 independientemente de dónde elegimos el punto O (para medir $\vec{\mathbf{r}}_i$) siempre que esté sobre el eje de rotación. La ecuación 11-10 es justamente la ecuación 10-1 del capítulo 10, que ahora hemos demostrado a partir de la definición general de la cantidad de movimiento angular.

Si el cuerpo gira con respecto a un eje de simetría que pasa por el CM, entonces L_ω es la única componente de $\vec{\mathbf{L}}$, como veremos ahora. Para cada punto a un lado del eje habrá un punto correspondiente en el lado opuesto. En la figura 11-15 vemos que cada $\vec{\mathbf{L}}_i$ tiene una componente paralela al eje ($L_{i\omega}$) y una componente perpendicular al eje. Las componentes paralelas al eje se suman para cada par de puntos opuestos, pero las componentes perpendiculares al eje para puntos opuestos tendrán la misma magnitud aunque sentido opuesto y, por lo tanto, se cancelarán. Por consiguiente, para un cuerpo que gira con respecto a un eje de simetría, el vector cantidad de movimiento angular es paralelo al eje y podemos escribir

$$\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\boldsymbol{\omega}}, \qquad \text{[eje de rotación = eje de simetría que pasa por el CM]} \qquad \textbf{(11–11)}$$

donde $\vec{\mathbf{L}}$ se mide en relación con el CM.

La relación general entre la cantidad de movimiento angular y la torca está dada por la ecuación 11-9:

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$$

donde $\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}}$ y $\vec{\mathbf{L}}$ se calculan respecto (1) al origen de un marco de referencia inercial, o (2) al CM del sistema. Ésta es una relación vectorial y, por lo tanto, debe ser válida para cada componente. Por consiguiente, para un cuerpo rígido, la componente a lo largo del eje de rotación es

$$\Sigma\tau_{\text{eje}} = \frac{dL_\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha,$$

que es válida para un cuerpo rígido que gira con respecto a un eje fijo respecto al cuerpo. El eje debe (1) estar fijo en un sistema inercial o (2) pasar por el CM del cuerpo. Esto es equivalente a las ecuaciones 10-14 y 10-15, las cuales, como vemos, son casos especiales de la ecuación 11-9, $\Sigma\vec{\tau} = d\vec{\mathbf{L}}/dt$.

EJEMPLO 11–8 Máquina de Atwood. Una *máquina de Atwood* consta de dos masas, m_A y m_B, que están conectadas por una cuerda inelástica con masa insignificante, que pasa sobre una polea (figura 11-16). Si la polea tiene radio R_0 y momento de inercia I respecto a su eje, determine la aceleración de las masas m_A y m_B, y compárela con la que se obtiene cuando el momento de inercia de la polea es despreciable.

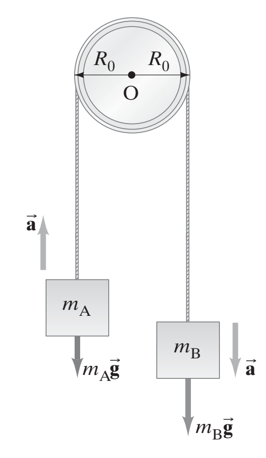


FIGURA 11–16 Máquina de Atwood, ejemplo 11-8. También la vimos en el ejemplo 4-13.

PLANTEAMIENTO Primero determinamos la cantidad de movimiento angular del sistema y aplicamos la segunda ley de Newton, $\tau_{\text{net}} = dL/dt$.

SOLUCIÓN La cantidad de movimiento angular se calcula con respecto a un eje a lo largo del eje que pasa por el centro O de la polea. La polea tiene cantidad de movimiento angular $I\omega$, donde $\omega = v/R_0$ y v es la velocidad de m_A y m_B en cualquier instante. La cantidad de movimiento angular de m_A es $R_0 m_A v$ y la cantidad de movimiento de m_B es $R_0 m_B v$. La cantidad de movimiento angular total es

$$L = (m_A + m_B)vR_0 + I\frac{v}{R_0}.$$

La torca externa sobre el sistema, calculada con respecto al eje O (considerando como positivo el sentido horario), es

$$\tau = m_B gR_0 - m_A gR_0.$$

(La fuerza sobre la polea ejercida por el soporte sobre su eje no da lugar a ninguna torca porque el brazo de palanca es cero). Aplicamos la ecuación 11-9a:

$$\tau = \frac{dL}{dt}$$

$$(m_B - m_A)gR_0 = (m_A + m_B)R_0\frac{dv}{dt} + \frac{I}{R_0}\frac{dv}{dt}.$$

Despejando $a = dv/dt$, obtenemos

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{(m_B - m_A)g}{(m_A + m_B) + I/R_0^2}.$$

Si despreciamos I, $a = (m_B - m_A)g/(m_B + m_A)$ y vemos que el efecto del momento de inercia de la polea es retardar al sistema, que es justamente lo que esperaríamos.

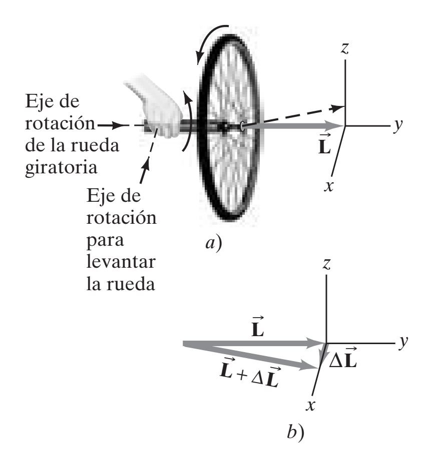
EJEMPLO CONCEPTUAL 11–9 Rueda de bicicleta. Suponga que usted está sosteniendo una rueda de bicicleta por una manija conectada a su eje como en la figura 11-17a. La rueda está girando rápidamente de manera que su cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ señala horizontalmente como se muestra. Ahora usted trata de inclinar repentinamente el eje hacia arriba, como se indica por la línea de rayas en la figura 11-17a (de modo que el CM se mueve verticalmente). Usted esperaría que la rueda subiera (lo cual haría si no estuviera girando), pero inesperadamente ¡ésta se inclina hacia la derecha! Explique por qué.

RESPUESTA Para explicar este aparente extraño comportamiento (usted tiene que hacerlo para creerlo) sólo tenemos que usar la relación $\vec{\tau}_{\text{net}} = d\vec{\mathbf{L}}/dt$. En el corto tiempo Δt, usted ejerce una torca neta (con respecto a un eje que pasa por su muñeca), que apunta a lo largo del eje x perpendicular a $\vec{\mathbf{L}}$. El cambio en $\vec{\mathbf{L}}$ es

$$\Delta\vec{\mathbf{L}} \approx \vec{\tau}_{\text{net}}\,\Delta t;$$

por lo que $\Delta\vec{\mathbf{L}}$ también debe señalar (aproximadamente) a lo largo del eje x, tal como lo hace $\vec{\tau}_{\text{net}}$ (figura 11-17b). La nueva cantidad de movimiento angular, $\vec{\mathbf{L}} + \Delta\vec{\mathbf{L}}$, apunta hacia la derecha, viendo a lo largo del eje de la rueda, como se muestra en la figura 11-17b. Como la cantidad de movimiento angular está dirigida a lo largo del eje de la rueda, vemos que el eje, que ahora está a lo largo de $\vec{\mathbf{L}} + \Delta\vec{\mathbf{L}}$, debe moverse lateralmente hacia la derecha, que es lo que observamos.

FIGURA 11–17 Cuando usted trata de inclinar hacia arriba una rueda de bicicleta que se encuentra girando verticalmente, ésta tiende a desviarse lateralmente.



CUIDADO

$\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\boldsymbol{\omega}}$ no siempre es válida

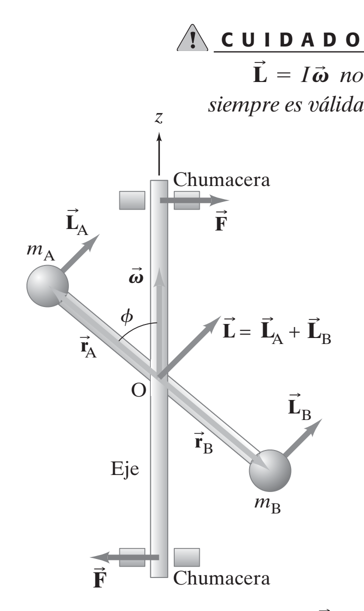


FIGURA 11–18 En este sistema $\vec{\mathbf{L}}$ y $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ no son paralelos. Éste es un ejemplo de desequilibrio rotacional.

Aunque la ecuación 11-11, $\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\boldsymbol{\omega}}$, a menudo es muy útil, no es válida en general si el eje de rotación no está a lo largo de un eje de simetría que pasa por el centro de masa. No obstante, puede demostrarse que todo cuerpo rígido, sin importar su forma, tiene tres "ejes principales" con respecto a los cuales es válida la ecuación 11-11 (no entraremos aquí en detalles). Como ejemplo de un caso en que no es válida la ecuación 11-11, consideremos el cuerpo no simétrico mostrado en la figura 11-18. Consiste en dos masas iguales, m_A y m_B, unidas a los extremos de una varilla rígida (sin masa) que forma un ángulo ϕ con el eje de rotación. Calculamos la cantidad de movimiento angular con respecto al CM en el punto O. En el momento mostrado, m_A se acerca al observador, y m_B se aleja, por lo que $\vec{\mathbf{L}}_A = \vec{\mathbf{r}}_A \times \vec{\mathbf{p}}_A$ y $\vec{\mathbf{L}}_B = \vec{\mathbf{r}}_B \times \vec{\mathbf{p}}_B$ son como se muestra. La cantidad de movimiento angular total es $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{L}}_A + \vec{\mathbf{L}}_B$, que claramente *no* está a lo largo de $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ si $\phi \neq 90°$.

* Desequilibrio rotacional

Vayamos un paso adelante con el sistema mostrado en la figura 11-18, ya que es un buen ejemplo de $\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}} = d\vec{\mathbf{L}}/dt$. Si el sistema gira con velocidad angular constante ω, la magnitud de $\vec{\mathbf{L}}$ no cambiará, pero sí su dirección. Conforme la varilla y las dos masas giran alrededor del eje z, $\vec{\mathbf{L}}$ también gira alrededor del eje. En el momento mostrado en la figura 11-18, $\vec{\mathbf{L}}$ está en el plano del papel. Un tiempo dt después, cuando la varilla ha girado a través de un ángulo, $d\theta = \omega\, dt$, $\vec{\mathbf{L}}$ habrá también girado a través de un ángulo $d\theta$ (permanece perpendicular a la varilla). $\vec{\mathbf{L}}$ tendrá entonces una componente que señala hacia la página. Así entonces, $d\vec{\mathbf{L}}$ señala hacia la página y también $d\vec{\mathbf{L}}/dt$. Como

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt},$$

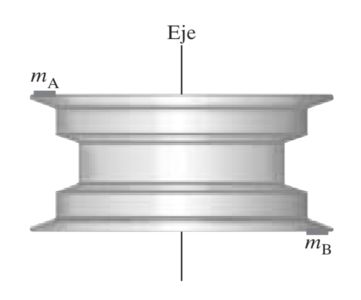
vemos que una torca neta, dirigida hacia la página en el momento mostrado, debe aplicarse al eje sobre el cual está montada la varilla. La torca es proporcionada por chumaceras (u otras restricciones) en los extremos del eje. Las fuerzas $\vec{\mathbf{F}}$ ejercidas por las chumaceras sobre el eje se muestran en la figura 11-18. La dirección de cada fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ gira como lo hace el sistema, siempre en el plano de $\vec{\mathbf{L}}$ y $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ para este sistema. Si la torca que se debe a esas fuerzas no estuviera presente, el sistema no giraría con respecto al eje fijo, como se desea.



FÍSICA APLICADA

Balanceo de las ruedas de un automóvil

FIGURA 11–19 Rin desbalanceado de un automóvil



El eje tiende a moverse en la dirección de $\vec{\mathbf{F}}$ y tiende entonces a oscilar conforme gira. Esto tiene muchas aplicaciones, como en el caso de las vibraciones que se sienten en un automóvil cuyas ruedas no están balanceadas. Considere una rueda de automóvil que es simétrica, excepto por una masa adicional m_A sobre un borde y una masa igual m_B opuesta a la primera sobre el otro borde, como se muestra en la figura 11-19. A causa de la falta de simetría de m_A y m_B, las chumaceras de las ruedas tendrían que ejercer una fuerza perpendicular al eje en todo momento para mantener las ruedas en rotación, como en la figura 11-18. Las chumaceras se desgastarían excesivamente y los ocupantes del automóvil percibirían las oscilaciones de las ruedas. Cuando las ruedas están balanceadas, giran uniformemente sin oscilar. De ahí la importancia del "balanceo dinámico" de las ruedas y los neumáticos de un automóvil. La rueda de la figura 11-19 estaría *estáticamente* bien balanceada. Si se agregan las masas iguales m_C y m_D de forma simétrica, debajo de m_A y arriba de m_B, la rueda también estará balanceada dinámicamente ($\vec{\mathbf{L}}$ será paralela a $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, y $\vec{\boldsymbol{\tau}}_{ext} = 0$).

EJEMPLO 11–10 **Torca sobre un sistema desequilibrado.** Determine la magnitud de la torca neta τ_{net} necesaria para mantener girando el sistema en la figura 11-18.

PLANTEAMIENTO La figura 11-20 es una vista del vector cantidad de movimiento angular, mirando hacia abajo a lo largo del eje de rotación (eje z) del objeto dibujado en la figura 11-18, conforme gira. $L \cos\phi$ es la componente de $\vec{\mathbf{L}}$ perpendicular al eje (que apunta hacia la derecha en la figura 11-18). Se determina dL a partir de la figura 11-20 y utilizamos $\tau_{net} = dL/dt$.

SOLUCIÓN En un tiempo dt, $\vec{\mathbf{L}}$ cambia una cantidad (figura 11-20 y ecuación 10-2b)

$$dL = (L\cos\phi)\,d\theta = L\cos\phi\,\omega\,dt,$$

donde $\omega = d\theta/dt$. Por lo tanto,

$$\tau_{\text{net}} = \frac{dL}{dt} = \omega L\cos\phi.$$

Ahora, $L = L_A + L_B = r_A m_A v_A + r_B m_B v_B = r_A m_A(\omega\, r_A \text{ sen } \phi) + r_B m_B(\omega r_B \text{ sen } \phi) = (m_A r_A^2 + m_B r_B^2)\,\omega \text{ sen } \phi$. Como $I = (m_A r_A^2 + m_B r_B^2)\text{ sen}^2\,\phi$ es el momento de inercia con respecto al eje de rotación, entonces $L = I\omega/\text{sen }\phi$. Por lo tanto,

$$\tau_{\text{net}} = \omega L\cos\phi = \left(m_A r_A^2 + m_B r_B^2\right)\omega^2 \text{ sen }\phi\cos\phi = I\omega^2/\tan\phi.$$

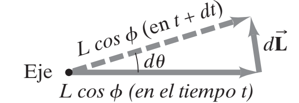


FIGURA 11–20 Vector cantidad de movimiento angular visto hacia abajo a lo largo del eje de rotación del sistema de la figura 11-18, conforme gira durante un tiempo dt.

La situación de la figura 11-18 ilustra la utilidad de la naturaleza vectorial de la torca y de la cantidad de movimiento angular. Si hubiéramos considerado sólo las componentes de la cantidad de movimiento angular y de la torca a lo largo del eje de rotación, no podríamos haber calculado la torca que se debe a las chumaceras (ya que las fuerzas $\vec{\mathbf{F}}$ actúan en el eje y, por lo tanto, no producen ninguna torca a lo largo de ese eje.) Usando el concepto del vector cantidad de movimiento angular, tenemos un procedimiento mucho más poderoso para comprender y resolver problemas.

11–6 Conservación de la cantidad de movimiento angular

En el capítulo 9 vimos que la forma más general de la segunda ley de Newton para el movimiento traslacional de una partícula o sistema de partículas es

$$\sum \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{\mathbf{P}}}{dt},$$

donde $\vec{\mathbf{P}}$ es la cantidad de movimiento (lineal), definido como $m\vec{\mathbf{v}}$ para una partícula, o$M\vec{\mathbf{v}}_{\text{cm}}$ para un sistema de partículas de masa total M cuyo CM se mueve con velocidad $\vec{\mathbf{v}}_{\text{cm}}$ y $\Sigma\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}}$ es la fuerza neta externa que actúa sobre la partícula o sistema. Esta relación es válida sólo en un marco inercial de referencia.

En este capítulo hemos encontrado una relación similar para describir la rotación general de un sistema de partículas (incluyendo cuerpos rígidos):

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt},$$

donde $\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}}$ es la torca neta externa que actúa sobre el sistema, y $\vec{\mathbf{L}}$ es la cantidad de movimiento angular total. Esta relación es válida cuando $\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}}$ y $\vec{\mathbf{L}}$ se calculan con respecto a un punto fijo en un marco de referencia inercial, o con respecto al CM del sistema.

Para el movimiento traslacional, si la fuerza neta sobre el sistema es cero, $d\vec{\mathbf{P}}/dt = 0$, por lo que la cantidad de movimiento lineal total del sistema permanece constante. Ésta es la ley de conservación de la cantidad de movimiento lineal. Para el movimiento de rotación, si la torca neta sobre el sistema es cero, tenemos

$$\frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{\mathbf{L}} = \text{constante} \qquad \left[\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}} = 0\right] \quad \textbf{(11–12)}$$

En palabras:

> **La cantidad de movimiento angular total de un sistema permanece constante si la torca neta externa que actúa sobre el sistema es cero.**

CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

Ésta es la **ley de la conservación de la cantidad de movimiento angular** o **momento angular** en forma vectorial. Junto con las leyes de la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento lineal (y otras que veremos después) es una de las grandes leyes de la física. En la sección 11-1 ya vimos algunos ejemplos de esta importante ley aplicada al caso especial de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo. Aquí la tenemos en forma general y la usaremos en ejemplos interesantes.

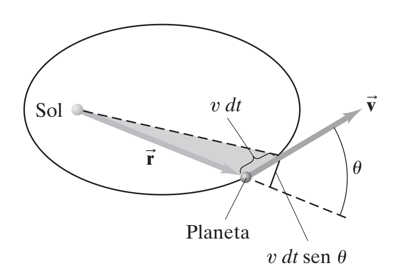


FIGURA 11–21 Segunda ley de Kepler del movimiento planetario (ejemplo 11-11).

EJEMPLO 11–11 Obtención de la segunda ley de Kepler. La segunda ley de Kepler establece que cada planeta se mueve de manera que una línea del Sol al planeta barre áreas iguales en tiempos iguales (sección 6-5). Use la ley de la conservación de la cantidad de movimiento angular para demostrarlo.

PLANTEAMIENTO Con la ayuda de la figura 11-21 se determina la cantidad de movimiento angular de un planeta en términos del área barrida.

SOLUCIÓN El planeta se mueve en una elipse como se muestra en la figura 11-21. En un tiempo dt, el planeta se mueve una distancia $v\,dt$ y barre una área dA igual al área de un triángulo de base r y altura $v\,dt$ sen θ (se muestra exagerada en la figura 11-21). Por lo tanto,

$$dA = \tfrac{1}{2}(r)(v\,dt\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

y

$$\frac{dA}{dt} = \tfrac{1}{2}rv\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

La magnitud de la cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ respecto al Sol es

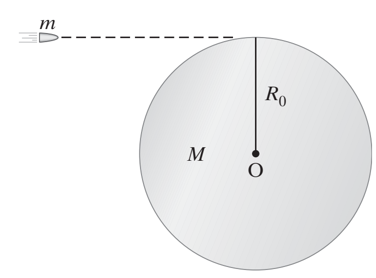
$$L = |\vec{\mathbf{r}} \times m\vec{\mathbf{v}}| = mrv\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

por lo que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m}L.$$

Pero $L =$ constante, ya que la fuerza gravitacional $\vec{\mathbf{F}}$ está dirigida hacia el Sol y la torca que produce es cero (despreciamos la atracción de los otros planetas). Por lo tanto, $dA/dt =$ constante, que es lo que queríamos demostrar.

FIGURA 11–22 La bala golpea y se queda incrustada en el borde del cilindro (ejemplo 11-12).



EJEMPLO 11–12 Una bala golpea el borde de un cilindro. Una bala de masa m que se mueve con velocidad v golpea y se queda incrustada en el borde de un cilindro de masa M y radio R_0, como se muestra en la figura 11-22. El cilindro, inicialmente en reposo, comienza a girar alrededor de su eje de simetría, que permanece fijo en el espacio. Suponiendo que no hay torca debido a la fricción, ¿cuál es la velocidad angular del cilindro después de la colisión? ¿Se conserva la energía cinética?

PLANTEAMIENTO Consideramos la bala y el cilindro como nuestro sistema, sobre el cual no hay una torca neta externa. Podemos entonces usar la conservación de la cantidad de movimiento angular, y calculamos todas las cantidades de movimiento angular con respecto al centro O del cilindro.

SOLUCIÓN Inicialmente, como el cilindro está en reposo, la cantidad de movimiento angular total es sólo la de la bala:

$$L = |\vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}| = R_0 mv,$$

ya que R_0 es la distancia perpendicular desde $\vec{\mathbf{p}}$ hasta el punto O. Después de la colisión, el cilindro gira $\left(I_{\mathrm{cil}} = \tfrac{1}{2}MR_0^2\right)$ con la bala $(I_b = Mr_0^2)$ incrustada en él con velocidad angular ω.

$$L = I\omega = \left(I_{\mathrm{cil}} + mR_0^2\right)\omega = \left(\tfrac{1}{2}M + m\right)R_0^2\,\omega.$$

Por consiguiente, como la cantidad de movimiento angular se conserva, ω es

$$\omega = \frac{L}{\left(\frac{1}{2}M + m\right)R_0^2} = \frac{mvR_0}{\left(\frac{1}{2}M + m\right)R_0^2} = \frac{mv}{\left(\frac{1}{2}M + m\right)R_0}.$$

La cantidad de movimiento angular se conserva en esta colisión, pero la energía cinética no:

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{f}} - K_{\mathrm{i}} &= \tfrac{1}{2}I_{\mathrm{cil}}\,\omega^2 + \tfrac{1}{2}\left(mR_0^2\right)\omega^2 - \tfrac{1}{2}mv^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}MR_0^2\right)\omega^2 + \tfrac{1}{2}\left(mR_0^2\right)\omega^2 - \tfrac{1}{2}mv^2 \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}M + m\right)\left(\frac{mv}{\frac{1}{2}M + m}\right)^2 - \tfrac{1}{2}mv^2 \\ &= -\frac{mM}{2M + 4m}v^2, \end{aligned}$$

que es menor que cero. Por consiguiente, $K_{\mathrm{f}} < K_i$. Esta energía se transforma en energía térmica como resultado de la colisión inelástica.

* 11–7 El trompo y el giroscopio



Un trompo en rotación

El movimiento de un trompo que gira rápidamente, o de un giróscopo, es un ejemplo interesante del movimiento rotacional y del uso de la ecuación vectorial

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}.$$

Considere un trompo simétrico de masa M que gira rápidamente con respecto a su eje de simetría, como en la figura 11-23. El trompo está balanceado sobre su punta en el punto O en un marco de referencia inercial. Si el eje del trompo forma un ángulo ϕ con la vertical (eje z), cuando se libera el trompo con cuidado, su eje se moverá describiendo un cono con respecto a la vertical, como se muestra con las líneas punteadas en la figura 11-23. Este tipo de movimiento, en el que una torca produce un cambio en la dirección del eje de rotación, se llama **precesión**. La razón a la que el eje de rotación se mueve respecto al eje vertical (z) se llama velocidad angular de precesión, Ω (letra omega mayúscula). Tratemos ahora de comprender las razones de este movimiento y calculemos Ω.

Si el trompo no estuviera girando, al ser liberado, caería inmediatamente al suelo por la acción de la gravedad. El aparente misterio de un trompo es que cuando está girando, no cae inmediatamente al suelo sino que realiza una precesión, moviéndose lateralmente. Sin embargo, esto no es realmente tan misterioso, si lo examinamos desde el punto de vista de la cantidad de movimiento angular y la torca, que calculamos con respecto al punto O. Cuando el trompo está girando con velocidad angular ω con respecto a su eje de simetría, tiene una cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ dirigido a lo largo de su eje, como se muestra en la figura 11-23. (Hay también una cantidad de movimiento angular que se debe a la precesión, de manera que $\vec{\mathbf{L}}$ total no está exactamente a lo largo del eje del trompo; pero si $\Omega \ll \omega$, como sucede con frecuencia, podemos ignorar esto.) Ahora, para cambiar la cantidad de movimiento angular, se requiere una torca. Si no se aplicara ninguna torca al trompo, $\vec{\mathbf{L}}$ permanecería constante en magnitud y dirección; el trompo no caería ni precesaría. Pero la más ligera fuerza lateral generaría una torca neta respecto a O, igual a $\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{net}} = \vec{\mathbf{r}} \times M\vec{\mathbf{g}}$, donde $\vec{\mathbf{r}}$ es el vector posición del centro de masa del trompo con respecto a O, y M es la masa del trompo. La dirección de $\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{net}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{r}}$ y a $M\vec{\mathbf{g}}$ y por la regla de la mano derecha está, como se observa en la figura 11-23, en el plano horizontal (xy). El cambio de $\vec{\mathbf{L}}$ en un tiempo dt es

$$d\vec{\mathbf{L}} = \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{net}}\, dt,$$

que es perpendicular a $\vec{\mathbf{L}}$ y horizontal (paralelo a $\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{net}}$), como se muestra en la figura 11-23. Como $d\vec{\mathbf{L}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{L}}$, la magnitud de $\vec{\mathbf{L}}$ no cambia, sólo su dirección. Como $\vec{\mathbf{L}}$ señala a lo largo del eje del trompo, vemos que este eje se mueve hacia la derecha en la figura 11-23. Es decir, el extremo superior del eje del trompo se mueve en una dirección horizontal perpendicular a $\vec{\mathbf{L}}$. Esto explica por qué el trompo precesa en vez de caer. El vector $\vec{\mathbf{L}}$ y el eje del trompo se mueven juntos en un círculo horizontal. Al hacerlo así, $\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{net}}$ y $d\vec{\mathbf{L}}$ giran también manteniéndose horizontales y perpendiculares a $\vec{\mathbf{L}}$.

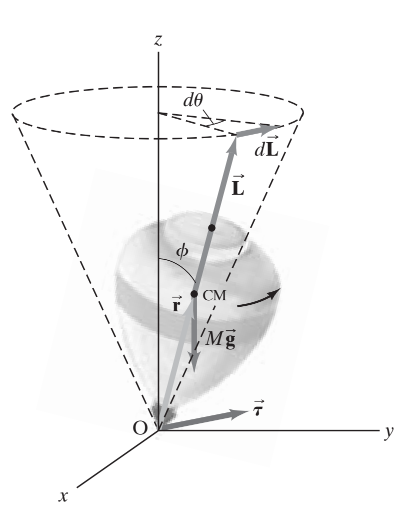


FIGURA 11–23 Trompo en rotación.

Para determinar Ω, vemos de la figura 11-23 que el ángulo $d\theta$ (que está en un plano horizontal) está relacionado con dL por

$$dL = L \operatorname{sen}\phi\, d\theta,$$

ya que $\vec{\mathbf{L}}$ forma un ángulo ϕ con el eje z. La velocidad angular de precesión es $\Omega = d\theta/dt$, que es igual a (puesto que $d\theta = dL/L \operatorname{sen}\phi$)

$$\Omega = \frac{1}{L \operatorname{sen}\phi}\frac{dL}{dt} = \frac{\tau}{L \operatorname{sen}\phi}. \qquad \text{[trompo en rotación]} \quad \textbf{(11–13a)}$$

Pero $\tau_{\text{net}} = |\vec{\mathbf{r}} \times M\vec{\mathbf{g}}| = rMg \operatorname{sen}\phi$ [porque $\operatorname{sen}(\pi - \phi) = \operatorname{sen}\phi$] por lo que podemos escribir

$$\Omega = \frac{Mgr}{L}. \qquad \text{[trompo en rotación]} \quad \textbf{(11–13b)}$$

La razón de precesión no depende entonces del ángulo ϕ, aunque es inversamente proporcional a la cantidad de movimiento angular del trompo. Cuanto más rápido gire el trompo, mayor será L y más lenta será la precesión del trompo.

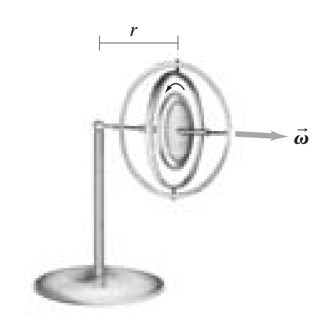


FIGURA 11–24 Un giróscopo de juguete.

A partir de la ecuación 11-1 (o de la 11-11) podemos escribir $L = I\omega$, donde I y ω son el momento de inercia y la velocidad angular del trompo que gira en torno a su eje. Luego, la ecuación 11-13b para la velocidad angular de precesión del trompo se convierte en

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega}. \tag{11–13c}$$

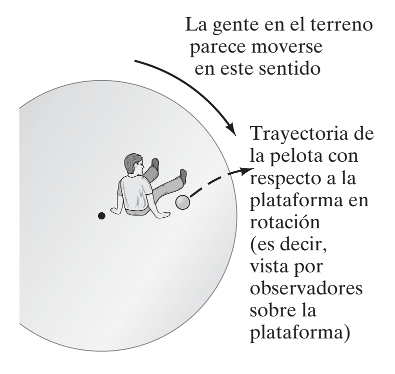
Las ecuaciones 11-13 también se aplican al giróscopo de juguete, que consiste en una rueda que gira rápidamente y está montada sobre un eje (figura 11-24). Un extremo del eje descansa en un soporte. El otro extremo está libre y efectuará precesión al igual que un trompo si su velocidad angular "de giro" ω es grande en comparación con la tasa de precesión ($\omega \gg \Omega$). Conforme ω disminuye por la fricción y la resistencia del aire, el giróscopo comenzará a caer, al igual que el trompo.

* 11–8 Marcos de referencia en rotación: fuerzas inerciales

Marcos de referencia inerciales y no inerciales

Hasta ahora hemos examinado el movimiento de cuerpos, incluido el movimiento circular y rotacional, desde el exterior, como observadores fijos a la Tierra. A veces es conveniente colocarse (en teoría, no físicamente) en un marco de referencia que esté girando. Examinemos el movimiento de objetos desde el punto de vista, o marco de referencia, de personas sentadas sobre una plataforma en rotación, tal como un carrusel. Les parece como si el resto del mundo girara alrededor de *ellas*. Pero centremos nuestra atención en lo que observan cuando colocan una pelota de tenis sobre el piso de la plataforma en rotación, que suponemos sin fricción. Si ellas ponen la pelota suavemente en la plataforma sin darle ningún empuje, observarán que la pelota acelera a partir del reposo y se mueve hacia fuera, como se ilustra en la figura 11-25a. De acuerdo con la primera ley de Newton, un objeto inicialmente en reposo debe permanecer así si no actúa ninguna fuerza sobre él. Pero, de acuerdo con los observadores sobre la plataforma giratoria, la pelota comienza a moverse cuando no se le aplica ninguna fuerza. Para los observadores en un marco de referencia inercial, todo esto es muy claro: la pelota tiene una velocidad inicial cuando se libera (porque la plataforma se está moviendo), y simplemente continúa moviéndose en una trayectoria de línea recta, como se indica en la figura 11-25b, de acuerdo con la primera ley de Newton.

FIGURA 11–25 Trayectoria de una pelota soltada en un carrusel en movimiento, *a*) en el marco de referencia del carrusel y *b*) en un marco de referencia inercial.



a) Marco de referencia giratorio



b) Marco de referencia inercial

¿Pero que pasa con el marco de referencia de los observadores sobre la plataforma en rotación? Puesto que la pelota se mueve sin que ninguna fuerza neta actúe sobre ella, la primera ley de Newton o ley de la inercia, no es válida en este marco de referencia en rotación. Por esta razón, tal marco se llama **marco de referencia no inercial**. Un **marco de referencia inercial** (como vimos en el capítulo 4) es aquél en que es válida la ley de la inercia o la primera ley de Newton, así como la segunda y tercera leyes. En un marco de referencia no inercial, como la plataforma anterior, la segunda ley de Newton no es válida tampoco. Por ejemplo, en la situación descrita antes, no hay una fuerza neta sobre la pelota; sin embargo, con respecto a la plataforma giratoria, la pelota acelera.

Fuerzas ficticias (fuerzas inerciales)

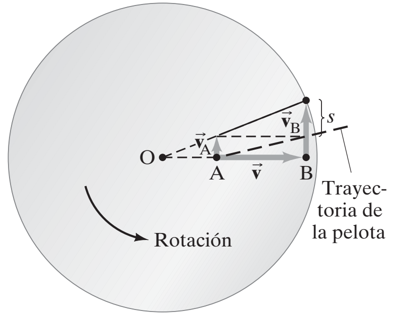
Como las leyes de Newton no son válidas cuando las observaciones se hacen con respecto a un marco de referencia giratorio, el cálculo del movimiento puede ser complicado. Sin embargo, aún podemos utilizar las leyes de Newton en tal marco de referencia si nos valemos de un truco. La pelota sobre la plataforma en movimiento de la figura 11-25a se mueve hacia fuera cuando se libera (aun cuando ninguna fuerza actúe en realidad sobre ella). El truco consiste en escribir la ecuación $\Sigma F = ma$ como si una fuerza igual a mv^2/r (o $m\omega^2 r$) estuviera actuando radialmente hacia afuera sobre el objeto, además de alguna otra fuerza que estuviera actuando. Esta fuerza adicional, que podría designarse como "fuerza centrífuga", puesto que *parece* actuar hacia afuera, se llama **fuerza ficticia** o **pseudofuerza**. Es una pseudofuerza ("pseudo" significa "falsa") porque no hay ningún objeto físico que la ejerza. Además, cuando se ve desde un marco de referencia inercial, el efecto no existe. Hemos inventado esta pseudofuerza para realizar los cálculos en un marco de referencia no inercial usando la segunda ley de Newton, $\Sigma F = ma$. El observador en el marco no inercial de la figura 11-25a usa la segunda ley de Newton para el movimiento hacia afuera de la pelota, suponiendo que una pseudofuerza igual a mv^2/r *actúa* sobre ella. Tales pseudofuerzas se llaman también **fuerzas inerciales**, ya que surgen sólo porque el marco de referencia no es inercial.

La Tierra misma gira sobre su eje. Así que, en sentido estricto, las leyes de Newton no son válidas sobre la Tierra. Sin embargo, el efecto de la rotación de la Tierra generalmente es tan pequeño que puede despreciarse, aunque sí afecta el movimiento de grandes masas de aire y corrientes oceánicas. A causa de la rotación de la Tierra, el material de la Tierra está ligeramente más concentrado en el ecuador. La Tierra no es entonces una esfera perfecta, sino que está ligeramente abombada en el ecuador con respecto a los polos.

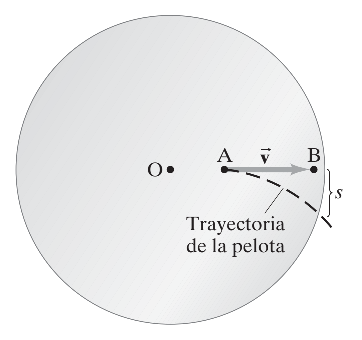
* 11–9 El efecto Coriolis

En un marco de referencia que gira con rapidez angular constante ω (con respecto a un sistema inercial), existe otra pseudofuerza conocida como *fuerza de Coriolis*, que actúa sobre un cuerpo en un marco de referencia en rotación, sólo si el cuerpo se está moviendo con respecto a ese marco de referencia, y actúa desviando lateralmente al cuerpo. Esto también es un efecto del marco de referencia no inercial en rotación y, por consiguiente, se le llama *fuerza inercial*. También afecta el clima.

Para ver cómo surge la fuerza de Coriolis, considere dos personas, A y B, en reposo sobre una plataforma que gira con rapidez angular ω, como se muestra en la figura 11-26a. Los sujetos están situados a distancias r_A y r_B del eje de rotación (en O). La mujer en A lanza una pelota con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ (en su marco de referencia) radialmente hacia afuera, hacia el hombre en B situado en el borde exterior de la plataforma. En la figura 11-26a, vemos la situación desde un marco de referencia inercial. Inicialmente, la pelota tiene no sólo la velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ radial hacia afuera, sino también una velocidad tangencial $\vec{\mathbf{v}}_A$ debido a la rotación de la plataforma. Ahora, la ecuación 10-4 nos dice que $v_A = r_A\omega$, donde r_A es la distancia radial de la mujer desde el eje de rotación en O. Si el hombre en B tuviera esta misma velocidad v_A, la pelota llegaría a él perfectamente. Pero su rapidez es $v_B = r_B\omega$, la cual es mayor que v_A porque $r_B > r_A$. Entonces, cuando la pelota llega al borde exterior de la plataforma, pasa por un punto por el que el hombre en B ya pasó, porque su rapidez en esa dirección es mayor que la de la pelota. Así que esta última pasa detrás de él.



a) Marco de referencia inercial



b) Marco de referencia en rotación

FIGURA 11–26 Origen del efecto Coriolis. Observando hacia abajo una plataforma que gira, *a)* vista desde un marco de referencia inercial, que no gira; y *b*) vista desde una plataforma en rotación como marco de referencia.

La figura 11-26b muestra la situación vista desde la plataforma giratoria como marco de referencia. Tanto A como B están en reposo, y la pelota es lanzada con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ hacia B; sin embargo, la pelota se desvía hacia la derecha como se muestra y pasa detrás de B, como se describió antes. Éste no es un efecto de fuerza centrífuga, pues este último actúa radialmente hacia afuera. Más bien, este efecto actúa lateralmente, perpendicularmente a $\vec{\mathbf{v}}$, y se llama **aceleración de Coriolis**; se dice que se debe a la fuerza de Coriolis, la cual es una fuerza inercial ficticia. Su explicación, vista desde un sistema inercial, se expuso líneas arriba: se trata de un efecto de estar en un sistema en rotación, donde un punto más alejado del eje de rotación tiene una velocidad lineal mayor. Por otra parte, cuando se observa desde el sistema en rotación, podemos describir el movimiento mediante la segunda ley de Newton, $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$, si agregamos un término de "pseudofuerza" correspondiente al efecto Coriolis.

Determinemos la magnitud de la aceleración de Coriolis para el caso simple descrito arriba. (Suponemos que v es grande y las distancias cortas, por lo que podemos despreciar la gravedad). Hacemos el cálculo desde el marco de referencia inercial (figura 11-26a). La pelota se mueve radialmente hacia afuera una distancia $r_B - r_A$ con rapidez v en un tiempo t dado por

$$r_B - r_A = vt.$$

Durante este tiempo, la pelota se mueve lateralmente una distancia s_A dada por

$$s_A = v_A t.$$

El hombre en B, en este tiempo t, se mueve una distancia

$$s_B = v_B t.$$

Por lo tanto, la pelota pasa detrás de él a una distancia s (figura 11-26a) dada por

$$s = s_B - s_A = (v_B - v_A)t.$$

Vimos antes que $v_A = r_A\omega$ y $v_B = r_B\omega$, por lo que

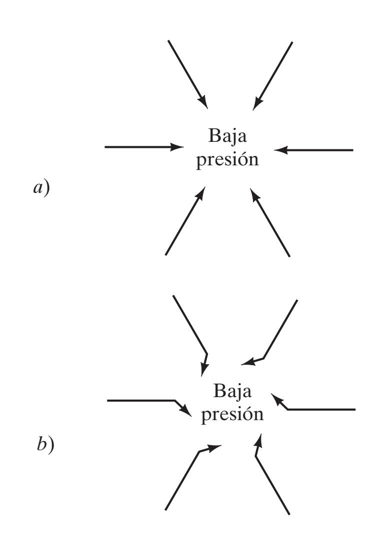
$$s = (r_B - r_A)\omega t.$$

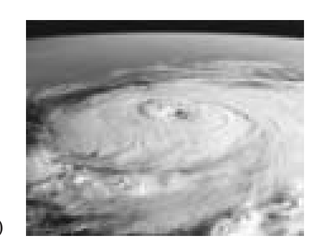
Sustituimos $r_B - r_A = v_t$ (véase arriba) y obtenemos

$$s = \omega v t^2. \qquad \textbf{(11–14)}$$

Esta misma s es igual al desplazamiento lateral visto desde el sistema no inercial en rotación (figura 11-26b).

FIGURA 11–27 *a*) Los vientos (masa de aire en movimiento) fluirían directamente hacia una zona de baja presión si la Tierra no girara. *b*) y *c*) Como resultado de la rotación de la Tierra, los vientos se desvían hacia la derecha en el hemisferio norte (figura 11-26), como si actuara una fuerza ficticia (la fuerza de Coriolis).





Vemos inmediatamente que la ecuación 11-14 corresponde a un movimiento con aceleración constante, pues como vimos en el capítulo 2 (ecuación 2-12b), $y = \frac{1}{2}at^2$ para una aceleración constante (con velocidad inicial nula en la dirección y). Si escribimos la ecuación 11-14 en la forma $s = \frac{1}{2}a_{\text{Cor}}t^2$, vemos que la aceleración de Coriolis a_{Cor} es

$$a_{\text{Cor}} = 2\omega v. \tag{11–15}$$

Esta relación es válida para cualquier velocidad en el plano de rotación perpendicular al eje de rotación† (en la figura 11-26, el eje que pasa por el punto O perpendicular a la página).

Como la Tierra gira, el efecto Coriolis tiene algunas manifestaciones interesantes sobre ella. Afecta el movimiento de las masas de aire y por ello tiene influencia sobre el clima. En ausencia del efecto Coriolis, el aire se precipitaría directamente hacia una región de baja presión, como se muestra en la figura 11-27a. Sin embargo, por el efecto Coriolis los vientos se desvían hacia la derecha en el hemisferio norte (figura 11-27b), ya que la Tierra gira de oeste a este. Se tiene entonces una tendencia antihoraria en el patrón del viento alrededor de una zona de baja presión. Lo inverso es cierto en el hemisferio sur. Por eso los ciclones giran en sentido antihorario en el hemisferio norte y en sentido horario en el hemisferio sur. El mismo efecto explica los vientos alisios del este cerca del ecuador: cualquier viento dirigido al sur hacia el ecuador se desviará hacia el oeste (es decir, como si viniera del este).

El efecto Coriolis también actúa sobre un cuerpo que cae. Un cuerpo liberado desde la parte superior de una torre alta no tocará el suelo directamente abajo del punto de liberación, sino que se desviará ligeramente hacia el este. Desde un marco de referencia inercial, esto sucede porque la parte superior de la torre gira con la Tierra a una rapidez ligeramente mayor en comparación con la base de la torre.

†La aceleración de Coriolis se puede escribir en general en términos del producto cruz como $\vec{\mathbf{a}}_{\text{Cor}} = -2\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}$ donde $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ tiene dirección a lo largo del eje de rotación; su magnitud es $a_{\text{Cor}} = 2wv_{\perp}$ donde $v_{\perp}$ es la componente de la velocidad perpendicular al eje de rotación.

Resumen

La **cantidad de movimiento angular,** o **momento angular,** $\vec{\mathbf{L}}$ de un cuerpo rígido que gira en torno a un eje fijo está dada por

$$L = I\omega. \tag{11–1}$$

La segunda ley de Newton, en términos de la cantidad de movimiento angular, es

$$\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}. \tag{11–2}$$

Si la torca neta sobre un objeto es cero, $dL/dt = 0$, de manera que $L =$ constante. Ésta es la **ley de la conservación de la cantidad de movimiento angular**.

El **producto vectorial** o **producto cruz** de dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ es otro vector $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ cuya magnitud es AB sen θ y cuya dirección es perpendicular a $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ de acuerdo con la regla de la mano derecha.

La **torca** $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ debida a una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ es una cantidad vectorial y siempre se calcula con respecto a algún punto O (el origen de un sistema coordenado) como sigue:

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}, \tag{11–5}$$

donde $\vec{\mathbf{r}}$ es el vector de posición del punto donde actúa la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$.

La cantidad de movimiento angular también es un vector. Para una partícula con cantidad de movimiento lineal $\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$, la cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ con respecto a un origen O, es

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}, \tag{11–6}$$

donde $\vec{\mathbf{r}}$ es el vector de posición de la partícula con respecto al punto O en cualquier instante. La torca neta $\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}}$ sobre una partícula está relacionada con su cantidad de movimiento angular por

$$\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}. \tag{11–7}$$

Para un sistema de partículas, la cantidad de movimiento angular total $\vec{\mathbf{L}} = \Sigma\vec{\mathbf{L}}_i$. La cantidad de movimiento angular total del sistema está relacionada con la torca neta total $\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}}$ sobre el sistema mediante.

$$\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}. \tag{11–9}$$

Esta última relación vectorial es el equivalente rotacional de la segunda ley de Newton. Es válida cuando $\vec{\mathbf{L}}$ y $\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}}$ se calculan con respecto a un origen (1) fijo en un sistema de referencia inercial o (2) situado en el CM del sistema. Para un cuerpo rígido en rotación con respecto a un eje fijo, la componente de la cantidad de movimiento angular respecto al eje de rotación está dada por $L_{\omega} = I\omega$. Si un cuerpo gira alrededor de un eje de simetría, entonces la relación vectorial $\vec{\mathbf{L}} = I\vec{\boldsymbol{\omega}}$ es válida, aunque esto no es válido en general.

Si la torca neta total sobre un sistema es cero, entonces el vector cantidad de movimiento angular total $\vec{\mathbf{L}}$ permanece constante. Ésta es la **ley de la conservación de la cantidad de movimiento angular**, de gran importancia en física. Se aplica al vector $\vec{\mathbf{L}}$ y por lo tanto a cada una de sus componentes.

Preguntas

1. Si hubiera una gran migración de gente hacia el ecuador de la Tierra, la duración del día *a*) sería mayor a causa de la conservación de la cantidad de movimiento angular; *b*) sería menor a causa de la conservación de la cantidad de movimiento angular; *c*) sería menor por la conservación de la energía; *d*) sería mayor por la conservación de la energía; o *e*) permanecería sin cambios.
2. ¿La clavadista de la figura 11-2 podría realizar un salto mortal sin tener rotación inicial al abandonar el trampolín?
3. Suponga que usted está sentado sobre un banco giratorio, mientras sostiene una masa de 2 kg en cada uno de sus brazos extendidos. Si de repente deja caer las masas, ¿su velocidad angular aumentará, disminuirá o permanecerá igual? Explique por qué.
4. Cuando un motociclista realiza un "caballito" y pisa el acelerador a fondo, (de manera que la rueda trasera se patine), ¿por qué se eleva la parte delantera del vehículo?
5. Suponga que está de pie en la orilla de una gran plataforma que gira libremente. ¿Qué sucede si usted camina hacia el centro?
6. Un *shortstop* puede saltar en el aire para atrapar una pelota y lanzarla rápidamente. Al lanzar la pelota, la parte superior de su cuerpo gira. Si observamos con atención, notaremos que sus caderas y piernas giran en sentido contrario (figura 11-28). Explique por qué.



FIGURA 11–28 Pregunta 6. Un *shortstop* lanza la pelota mientras está en el aire.

7. Si todas las componentes de los vectores $\vec{\mathbf{V}}_1$ y $\vec{\mathbf{V}}_2$ invirtieran su sentido, ¿cómo se vería afectado $\vec{\mathbf{V}}_1 \times \vec{\mathbf{V}}_2$?
8. Indique las cuatro condiciones que podrían hacer $\vec{\mathbf{V}}_1 \times \vec{\mathbf{V}}_2 = 0$.
9. Una fuerza $\vec{\mathbf{F}} = F\hat{\mathbf{j}}$ se aplica a un cuerpo en una posición $\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ donde el origen está en el CM. ¿La torca con respecto al CM depende de *x*? ¿De *y*? ¿O de *z*?
10. Una partícula se mueve con rapidez constante a lo largo de una línea recta. ¿Cómo cambia con el tiempo su cantidad de movimiento angular, calculada con respecto a un punto dado que no esté situado sobre su trayectoria?
11. Si la fuerza neta sobre un sistema es cero, ¿la torca neta también es cero? Si la torca neta sobre un sistema es cero, ¿la fuerza neta es igual a cero? Dé ejemplos.
12. Explique cómo logra un niño en un columpio que éste oscile más alto.
13. Describa la torca requerida para que la persona de la figura 11-17 incline el eje de la rueda en rotación directamente hacia arriba sin desviarla hacia un lado.
14. Una astronauta flota libremente en un ambiente de ingravidez. Describa cómo la astronauta puede mover sus extremidades para *a*) girar su cuerpo de arriba hacia abajo y *b*) girar su cuerpo lateralmente.
15. Con base en la ley de la conservación de la cantidad de movimiento angular, explique por qué un helicóptero debe tener más de un rotor (o hélice). Indique una o más formas en que el segundo rotor puede operar para mantener estable el helicóptero.
16. Una rueda está girando libremente con respecto a un eje vertical con velocidad angular constante. Pequeñas partes de la rueda se aflojan y se desprenden. ¿Cómo afecta esto la rapidez de rotación de la rueda? ¿Se conserva la cantidad de movimiento angular? ¿Se conserva la energía cinética? Explique.
17. Considere las siguientes cantidades vectoriales: desplazamiento, velocidad, aceleración, cantidad de movimiento lineal, cantidad de movimiento angular, torca. *a*) ¿Cuáles de éstas son independientes de la elección del origen de coordenadas? (Considere diferentes puntos como origen que estén en reposo entre sí). *b*) ¿Cuáles son independientes de la velocidad del sistema coordenado?
18. ¿Cómo efectúa un automóvil una vuelta hacia la derecha? ¿De dónde proviene la torca necesaria para cambiar la cantidad de movimiento angular?

* 19. El eje de la Tierra efectúa una precesión con un periodo de aproximadamente 25,000 años. Esto se parece mucho a la precesión de un trompo. Explique cómo el ensanchamiento del ecuador de la Tierra da lugar a una torca ejercida por el Sol y la Luna sobre la Tierra; véase la figura 11-29, que está dibujada para el solsticio de invierno (21 de diciembre). ¿Con respecto a qué eje esperaría usted que efectuara la precesión el eje de rotación de la Tierra como resultado de la torca debida al Sol? ¿Existe la torca tres meses después? Explique.

FIGURA 11–29 Pregunta 19. (No está a escala).

* 20. ¿Por qué en la mayoría de los sitios de la Tierra una plomada no cuelga precisamente en la dirección del centro de la Tierra?

* 21. En un marco de referencia en rotación, la primera y segunda leyes de Newton resultan útiles, si suponemos que actúa una pseudofuerza igual a $m\omega^2 r$. ¿Qué efecto tiene esta suposición sobre la validez de la tercera ley de Newton?

* 22. En la batalla de las islas Malvinas en 1914, los disparos de los cañones británicos cayeron inicialmente lejos de los blancos porque sus cálculos estaban basados en batallas navales realizadas en el hemisferio norte. Las Malvinas están en el hemisferio sur. Explique el origen del problema.

Problemas

11–1 Cantidad de movimiento angular

1. (I) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular de una pelota de 0.210 kg que gira en el extremo de una delgada cuerda, describiendo un círculo de 1.35 m de radio, con una rapidez angular de 10.4 rad/s?
2. (I) *a*) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular de una rueda de molino de 2.8 kg, cuyo radio mide 18 cm cuando gira a 1300 rpm? *b*) ¿Qué torca se requiere para detenerla en 6.0 s?

3. (II) Una persona está de pie, con las manos a los costados, sobre el eje de una plataforma que gira a razón de 0.90 rev/s. Si alza sus brazos para dejarlos en una posición horizontal (figura 11-30), la rapidez de rotación disminuye a 0.70 rev/s. *a*) ¿Por qué? *b*) ¿En qué factor cambia su momento de inercia?

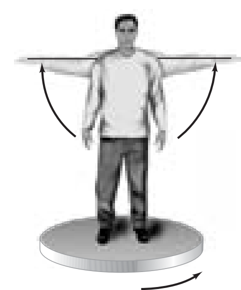


FIGURA 11–30
Problema 3.

4. (II) Una patinadora artística puede aumentar su tasa de rotación desde una tasa inicial de 1.0 rev cada 1.5 s hasta una tasa final de 2.5 rev/s. Si su momento de inercia inicial era de 4.6 $kg \cdot m^2$, ¿cuál es su momento de inercia final? ¿Cómo logra físicamente este cambio?

5. (II) Una clavadista (como la de la figura 11-2) puede reducir su momento de inercia en un factor de 3.5 cuando cambia de la posición extendida a la posición doblada. Si hace 2.0 rotaciones en 1.5 s cuando está en la posición doblada, ¿cuál será su rapidez angular (rev/s) cuando está en la posición extendida?

6. (II) Una varilla horizontal uniforme de masa M y longitud ℓ gira con velocidad angular ω con respecto a un eje vertical que pasa por su centro. Cada extremo de la varilla tiene amarrado una pequeña masa m. Determine la cantidad de movimiento angular del sistema alrededor del eje.

7. (II) Determine la cantidad de movimiento angular de la Tierra *a*) alrededor de su eje de rotación (suponga que la Tierra es una esfera uniforme), y *b*) en su órbita alrededor del Sol (considere a la Tierra como una partícula que gira en torno al Sol). La Tierra tiene una masa $= 6.0 \times 10^{24}$ kg y un radio $= 6.4 \times 10^6$ m, y se encuentra a 1.5×10^8 km del Sol.

8. (II) *a*) ¿Cuál es la cantidad de movimiento angular de una patinadora artística que gira a 2.8 rev/s con sus brazos cerca del cuerpo, suponiendo que ella es un cilindro uniforme con una altura de 1.5 m, un radio de 15 cm y una masa de 48 kg? *b*) ¿Qué torca se requiere para frenarla completamente en 5.0 s, suponiendo que *no* mueve sus brazos?

9. (II) Una persona está de pie sobre una plataforma, inicialmente en reposo, pero que puede girar libremente sin fricción. El momento de inercia de la persona más la plataforma es I_P. La persona sostiene una rueda de bicicleta que gira y tiene su eje horizontal. La rueda tiene un momento de inercia I_W (Wheel) y una velocidad angular ω_W. ¿Cuál será la velocidad angular ω_P de la plataforma, si la persona mueve el eje de la rueda de manera que éste apunte *a*) verticalmente hacia arriba, *b*) a 60° con respecto a la vertical, *c*) verticalmente hacia abajo? *d*) ¿Cuál será ω_P si el sujeto se estira y detiene la detiene en el inciso *a*)?

10. (II) Un disco uniforme gira a 3.7 rev/s alrededor de un eje vertical que no ejerce fricción. Una varilla que no gira, de la misma masa que el disco y cuya longitud es igual al diámetro de éste, se deja caer sobre el disco que gira libremente (figura 11-31). Después del impacto, ambos giran juntos alrededor del eje con sus centros superpuestos. ¿Cuál es la frecuencia angular en rev/s de la combinación?

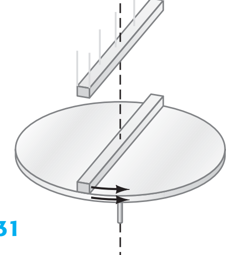


FIGURA 11–31
Problema 10.

11. (II) Una persona de 75 kg está de pie en el centro de un carrusel que gira, cuyo radio mide 3.0 m y su momento de inercia es de 920 $kg \cdot m^2$. La plataforma gira sin fricción con velocidad angular de 0.95 rad/s. La persona camina sobre una trayectoria radial hacia la orilla de la plataforma. *a*) Calcule la velocidad angular del carrusel cuando la persona llega a la orilla. *b*) Calcule la energía cinética rotacional del sistema formado por la plataforma y la persona, antes y después de que ésta camine.

12. (II) Un torno de cerámica gira alrededor de un eje vertical que pasa por su centro con una frecuencia de 1.5 rev/s. El torno puede considerarse un disco uniforme con masa de 5.0 kg y diámetro de 0.40 m. Un artesano lanza un trozo de arcilla de 2.6 kg, con forma aproximada de un disco plano de 8.0 cm de radio, hacia el centro del torno en movimiento. ¿Cuál es la frecuencia del torno después de que la arcilla se adhiere a ella?

13. (II) Un carrusel de 4.2 m de diámetro gira libremente con velocidad angular de 0.80 rad/s. Su momento de inercia total es de 1760 $kg \cdot m^2$. Cuatro personas están de pie sobre el piso, cada una con masa de 65 kg, y de repente suben a la orilla del carrusel. ¿Cuál es ahora la velocidad angular del carrusel? ¿Y si las personas estuvieran sobre él inicialmente y luego saltaran hacia afuera en dirección radial (en relación con el carrusel)?

14. (II) Una mujer de masa m está de pie en la orilla de una plataforma cilíndrica sólida de masa M y radio R. En $t = 0$, la plataforma gira sin fricción, con velocidad angular ω_0 respecto de un eje vertical que pasa por su centro, y la mujer comienza a caminar con rapidez v, en relación con la plataforma, hacia el centro de ésta. *a*) Determine la velocidad angular del sistema como una función del tiempo. *b*) ¿Cuál será la velocidad angular cuando la mujer llega al centro?

15. (II) Un disco cilíndrico, que no gira y cuyo momento de inercia es I, se deja caer sobre un disco idéntico pero que gira con una rapidez angular ω. Suponiendo que no hay torcas externas sobre el sistema, ¿cuál es la rapidez angular final común de los dos discos?

16. (II) Suponga que nuestro Sol finalmente se colapsa para convertirse en una enana blanca y pierde la mitad de su masa en el proceso y su radio es apenas el 1.0% del que tenía originalmente. Suponiendo que la masa perdida no se lleva consigo cantidad de movimiento angular, ¿cuál sería la nueva tasa de rotación del Sol? (Considere que el periodo actual del Sol es de 30 días). ¿Cuál sería su energía cinética final en términos de su energía cinética inicial?

17. (III) Los huracanes tienen vientos de 120 km/h en la parte externa de sus brazos. Realice una estimación de *a*) la energía y *b*) la cantidad de movimiento angular de un huracán así, considerándolo como un cilindro uniforme de aire (densidad 1.3 kg/m^3) que gira de manera rígida, con radio es de 85 km y altura de 4.5 km.

18. (III) Un asteroide de masa 1.0×10^5 kg viaja con una rapidez de 35 km/s en relación con la Tierra y choca con ella tangencialmente en el ecuador, siguiendo la dirección de la rotación de nuestro planeta. Utilice la cantidad de movimiento angular para estimar el cambio porcentual en la rapidez angular de la Tierra como resultado de la colisión.

19. (III) Suponga que una persona de 65 kg está de pie en la orilla de un carrusel de 6.5 m de diámetro, el cual está montado sobre chumaceras sin fricción; su momento de inercia es de 1850 $kg \cdot m^2$. El carrusel está en reposo inicialmente, pero cuando la persona comienza a correr con una rapidez de 3.8 m/s (*con respecto al carrusel*) por la orilla, el carrusel comienza a girar en sentido contrario. Calcule la velocidad angular del carrusel.

11–2 Producto cruz vectorial y torca

20. (I) Si el vector $\vec{\mathbf{A}}$ apunta a lo largo del eje x negativo y el vector $\vec{\mathbf{B}}$ a lo largo del eje z positivo, ¿cuál es la dirección de *a*) $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ y *b*) $\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$? *c*) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ y de $\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$?

21. (I) Demuestre que *a*) $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0$, *b*) $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}$, $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}}$, y $\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}$.

22. (I) Las direcciones de los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ están dadas más abajo para varios casos. Para cada caso, establezca la dirección de $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$. *a*) $\vec{\mathbf{A}}$ apunta al este, $\vec{\mathbf{B}}$ apunta al sur. *b*) $\vec{\mathbf{A}}$ apunta al este, $\vec{\mathbf{B}}$ apunta en línea recta hacia abajo. *c*) $\vec{\mathbf{A}}$ apunta hacia arriba, $\vec{\mathbf{B}}$ apunta al norte. *d*) $\vec{\mathbf{A}}$ apunta hacia arriba, $\vec{\mathbf{B}}$ apunta hacia abajo.

23. (II) ¿Cuál es el ángulo θ entre dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, si $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}| = \vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$?

24. (II) Una partícula está localizada en $\vec{\mathbf{r}} = (4.0\hat{\mathbf{i}} + 3.5\hat{\mathbf{j}} + 6.0\hat{\mathbf{k}})$ m. Una fuerza $\vec{\mathbf{F}} = (9.0\hat{\mathbf{j}} - 4.0\hat{\mathbf{k}})$ N actúa sobre ella. ¿Cuál es la torca, calculada con respecto al origen?

25. (II) Considere una partícula de un cuerpo rígido que gira con respecto a un eje fijo. Muestre que las componentes vectoriales tangencial y radial de la aceleración lineal son:

$$\vec{\mathbf{a}}_{\tan} = \vec{\boldsymbol{\alpha}} \times \vec{\mathbf{r}} \quad \text{y} \quad \vec{\mathbf{a}}_{\mathrm{R}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{v}}.$$

26. (II) *a*) Muestre que el producto cruz de dos vectores, $\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$ es

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\mathbf{i}} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\mathbf{j}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\mathbf{k}}.$$

b) Luego muestre que el producto cruz puede escribirse

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix},$$

donde usamos las reglas para evaluar un determinante. (Note, sin embargo, que éste no es realmente un determinante, sino una ayuda nemotécnica).

27. (II) Un ingeniero estima que en las condiciones climatológicas más adversas esperadas, la fuerza total sobre el letrero de la figura 11-32 será $\vec{\mathbf{F}} = (\&2.4\hat{\mathbf{i}} - 4.1\hat{\mathbf{j}})$ kN, actuando en el CM. ¿Qué torca ejerce esta fuerza respecto a la base O?

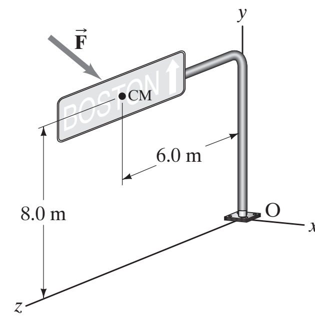


FIGURA 11–32 Problema 27.

28. (II) El origen de un sistema coordenado está en el centro de una rueda que gira en el plano xy con respecto a un eje paralelo al eje z. Una fuerza $F = 215$ N actúa en el plano xy, formando un ángulo de +33.0° con el eje x, en el punto $x = 28.0$ cm, $y = 33.5$ cm. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la torca producida por esta fuerza con respecto al eje?

29. (II) Use el resultado del problema 26 para determinar *a*) el producto vectorial $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ y *b*) el ángulo entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ si $\vec{\mathbf{A}} = 5.4\hat{\mathbf{i}} - 3.5\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = -8.5\hat{\mathbf{i}} + 5.6\hat{\mathbf{j}} + 2.0\hat{\mathbf{k}}$.

30. (III) Demuestre que la velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ de cualquier punto en un cuerpo que gira con velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ respecto a un eje fijo puede escribirse

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}$$

donde $\vec{\mathbf{r}}$ es el vector posición del punto, con respecto a un origen O localizado sobre el eje de rotación. ¿Puede O estar en cualquier parte sobre el eje de rotación? ¿Se cumple que $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}$ si O se encuentra en un punto que *no* está sobre el eje de rotación?

31. (III) Sean $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{C}}$ tres vectores; suponemos que no todos están en el mismo plano. Demuestre que $\vec{\mathbf{A}} \cdot (\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{B}} \cdot (\vec{\mathbf{C}} \times \vec{\mathbf{A}}) = \vec{\mathbf{C}} \cdot (\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}})$.

11–3 Cantidad de movimiento angular de una partícula

32. (I) ¿Cuáles son las componentes x, y y z de la cantidad de movimiento angular de una partícula situada en $\vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ cuya cantidad de movimiento lineal es $\vec{\mathbf{p}} = p_x\hat{\mathbf{i}} + p_y\hat{\mathbf{j}} + p_z\hat{\mathbf{k}}$?

33. (I) Demuestre que la energía cinética K de una partícula de masa m, que se mueve en una trayectoria circular, es $K = L^2/2I$, donde L es su cantidad de movimiento angular e I es su momento de inercia con respecto al centro del círculo.

34. (I) Calcule la cantidad de movimiento angular de una partícula de masa m que se mueve con velocidad constante v para dos casos (véase la figura 11-33): *a*) respecto al origen O, y *b*) respecto a O′.

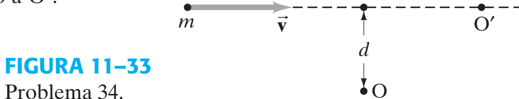


FIGURA 11–33 Problema 34.

35. (II) Dos partículas idénticas tienen cantidades de movimiento lineal iguales pero opuestas, $\vec{\mathbf{p}}$ y $-\vec{\mathbf{p}}$, pero no viajan a lo largo de la misma línea. Demuestre que la cantidad de movimiento angular total de este sistema no depende de la elección del origen de coordenadas.

36. (II) Determine la cantidad de movimiento angular de una partícula de 75 g con respecto al origen de coordenadas, cuando la partícula está en $x = 4.4$ m, $y = -6.0$ m, y tiene velocidad $v = (3.2\hat{\mathbf{i}} - 8.0\hat{\mathbf{k}})$ m/s.

37. (II) Una partícula está en la posición $(x, y, z) = (1.0, 2.0, 3.0)$ m y viaja con una velocidad vectorial $(-5.0, +2.8, -3.1)$ m/s. Su masa es de 3.8 kg. ¿Cuál será su cantidad de movimiento angular vectorial con respecto al origen?

11–4 y 11–5 Cantidad de movimiento angular y torca: movimiento general; objetos rígidos

38. (II) Una máquina Atwood (figura 11-16) consiste en dos masas, $m_{\mathrm{A}} = 7.0$ kg y $m_{\mathrm{B}} = 8.2$ kg, conectadas por una cuerda que pasa sobre una polea que puede girar libremente alrededor de un eje fijo que pasa por su CM. La polea es un cilindro sólido de radio $R_0 = 0.40$ m y masa 0.80 kg. *a*) Determine la aceleración a de cada masa, *b*) ¿Qué porcentaje de error en a se tendría si el momento de inercia de la polea se despreciara? Ignore la fricción en las chumaceras de la polea.

39. (II) Cuatro partículas idénticas de masa m están montadas a intervalos iguales sobre una varilla delgada de longitud ℓ y masa M, con una masa en cada extremo de la varilla. Si el sistema se hace girar con velocidad angular ω con respecto a un eje perpendicular a la varilla que pasa por una de las masas en los extremos, determine *a*) la energía cinética y *b*) la cantidad de movimiento angular del sistema.

40. (II) Dos varillas ligeras de 24 cm de longitud están montadas perpendicularmente a un eje y a 180° entre sí (figura 11-34). En el extremo de cada varilla se tiene una masa de 480 g. Las varillas están separadas 42 cm a lo largo del eje. El eje gira a 4.5 rad/s. *a*) ¿Cuál es la componente de la cantidad de movimiento angular total a lo largo del eje? *b*) ¿Qué ángulo forma el vector cantidad de movimiento angular con el eje? [*Sugerencia*: Recuerde que el vector cantidad de movimiento angular debe calcularse respecto al *mismo punto* para *ambas* masas, que podría ser el CM].

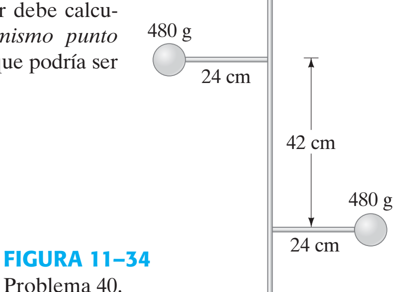


FIGURA 11–34
Problema 40.

41. (II) La figura 11-35 muestra dos masas conectadas por una cuerda que pasa sobre una polea de radio R_0 y momento de inercia I. La masa M_A se desliza sobre una superficie sin fricción, y M_B cuelga libremente. Obtenga una expresión para *a*) la cantidad de movimiento angular del sistema con respecto al eje de la polea, en función de la rapidez v de las masas M_A o M_B, y *b*) la aceleración de las masas.

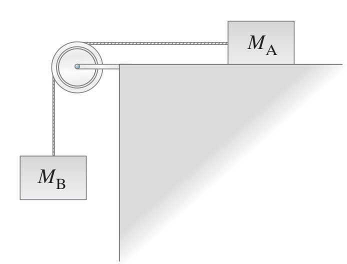


FIGURA 11–35
Problema 41.

42. (III) Una varilla delgada de longitud ℓ y masa M gira alrededor de un eje vertical que pasa por su centro con velocidad angular ω. La varilla forma un ángulo ϕ con el eje de rotación. Determine la magnitud y dirección de $\vec{\mathbf{L}}$.

43. (III) Demuestre que la cantidad de movimiento angular total $\vec{\mathbf{L}} = \Sigma \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{p}}_i$ de un sistema de partículas con respecto al origen de un marco de referencia inercial puede escribirse como la suma de la cantidad de movimiento angular respecto al CM, $\vec{\mathbf{L}}^*$ (cantidad de movimiento angular de rotación), más la cantidad de movimiento angular del CM respecto al origen (cantidad de movimiento angular orbital): $\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{L}}^* + \vec{\mathbf{r}}_{cm} \times M\vec{\mathbf{v}}_{cm}$. [*Sugerencia*: Véase la deducción de la ecuación 11-9b].

*__44.__ (III) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ ejercida por cada chumacera en la figura 11-18 (ejemplo 11-10)? Las chumaceras están a una distancia d del punto O. Desprecie los efectos de la gravedad.

*__45.__ (III) Suponga en la figura 11-18 que $m_B = 0$; es decir, sólo una masa, m_A, está presente. Si las chumaceras están cada una a una distancia d del punto O, determine las fuerzas F_A y F_B en las chumaceras superior e inferior, respectivamente. [*Sugerencia*: Elija un origen diferente al punto O de la figura 11-18, tal que $\vec{\mathbf{L}}$ sea paralela a $\vec{\boldsymbol{\omega}}$. Ignore los efectos de la gravedad].

*__46.__ (III) Para el sistema mostrado en la figura 11-18, suponga que $m_A = m_B = 0.60$ kg, $r_A = r_B = 0.30$m, y que la distancia entre las chumaceras es de 0.23 m. ¿Cuál será la fuerza que cada chumacera debe ejercer sobre el eje si $\phi = 34.0°$ y $\omega = 11.0$ rad/s?

11–6 Conservación de la cantidad de movimiento angular

47. (II) Una varilla delgada de masa M y longitud ℓ está suspendida verticalmente de un pivote sin fricción en su extremo superior. Una masa m de arcilla que viaja horizontalmente con rapidez v golpea la varilla en su CM y se queda adherida a ella. ¿Cuánto oscila la parte inferior de la varilla?

48. (II) Una varilla uniforme de 1.0 m de largo con una masa total de 270 g tiene un pivote en su centro. Se dispara una bala de 3.0 g que atraviesa la varilla a la mitad entre el pivote y un extremo (figura 11-36). La bala se acerca a 250 m/s y sale a 140 m/s. ¿Con qué rapidez angular gira la varilla después de la colisión?

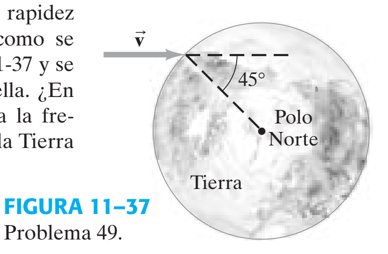


FIGURA 11–36
Problemas 48 y 83.

49. (II) Suponga que un meteorito de 5.8×10^{10} kg golpea la Tierra en el ecuador con una rapidez $v = 2.2 \times 10^4$ m/s, como se muestra en la figura 11-37 y se queda incrustado en ella. ¿En qué factor se afectaría la frecuencia rotacional de la Tierra (1 rev/día)?

FIGURA 11–37
Problema 49.

50. (III) Una viga de 230 kg y 2.7 m de longitud se desliza a lo ancho por el hielo con rapidez de 18 m/s (figura 11-38). Un hombre de 65 kg en reposo la toma por un extremo y se sostiene de ella; tanto él como la viga empiezan a girar sobre el hielo. Suponga un movimiento sin fricción. *a*) ¿Qué tan rápido se mueve el centro de masa del sistema después de la colisión? *b*) ¿Con qué velocidad angular gira el sistema con respecto a su CM?

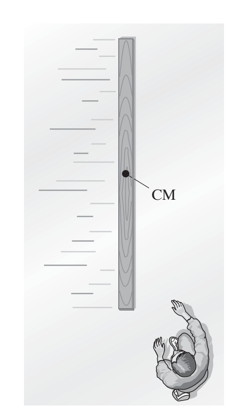


FIGURA 11–38
Problema 50.

51. (III) Una varilla delgada de masa M y longitud ℓ descansa sobre una mesa sin fricción, y es golpeada en un punto a $\ell/4$ de su CM por una bola de arcilla de masa m, que se mueve con rapidez v (figura 11-39). La bola se adhiere a la varilla. Determine el movimiento traslacional y rotacional de la varilla después de la colisión.

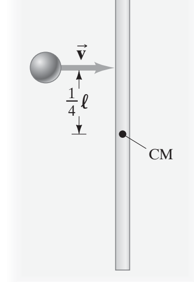


FIGURA 11–39
Problemas 51 y 84.

52. (III) Sobre una mesa de billar horizontal, se encuentra una bola inicialmente en reposo en el punto O. La bola es golpeada de manera que pierde contacto con el taco con una rapidez de su centro de masa v_0 y un "giro opuesto" con rapidez angular ω_0 (véase la figura 11-40). Una fuerza de fricción cinética actúa sobre la bola conforme ésta se derrapa sobre la mesa. *a*) Explique por qué la cantidad de movimiento angular de la bola se conserva con respecto al punto O. *b*) Usando la conservación de la cantidad de movimiento angular, encuentre la rapidez angular crítica ω_C, tal que si $\omega_0 = \omega_C$, la fricción cinética llevará a la pelota a un alto total (en oposición a un alto momentáneo). *c*) Si ω_0 es un 10% menor que ω_C, es decir, $\omega_0 = 0.90\,\omega_C$, determine la velocidad del CM de la bola, v_{CM}, cuando comienza a rodar sin deslizarse. *d*) Si ω_0 es 10% mayor que ω_C, es decir, $\omega_0 = 1.10\,\omega_C$, determine la velocidad del centro de masa v_{CM} cuando la bola comienza a rodar sin deslizarse. [*Sugerencia:* Considere que la bola tiene dos tipos de cantidad de movimiento angular: el primero se debe a la rapidez lineal v_{CM} de su CM en relación con el punto O; el segundo se debe al giro con velocidad angular ω respecto de su CM. La L total de la bola respecto al punto O es la suma de estas cantidades de movimiento angular].

FIGURA 11–40 Problema 52.

*11–7 El trompo y el giróscopo

*__53.__ (II) Un trompo de 220 g que gira a 15 rev/s forma un ángulo de 25° con la vertical y realiza una precesión a razón de 1.00 rev cada 6.5 segundos. Si su CM está 3.5 cm de su punta a lo largo de su eje de simetría, ¿cuál es el momento de inercia del trompo?

*__54.__ (II) Un giróscopo de juguete consiste en un disco de 170 g con radio de 5.5 cm montado en el centro de un eje de 21 cm de largo (figura 11-41). El giróscopo gira a 45 rev/s. Un extremo del eje descansa sobre un poste y el otro efectúa una precesión horizontal con respecto al poste como se indica. *a*) ¿Cuánto tardará el giróscopo en precesar una revolución completa? *b*) Si todas las dimensiones del giróscopo se duplican (radio = 11 cm, eje = 42 cm), ¿cuánto tardará ahora en precesar una revolución completa?

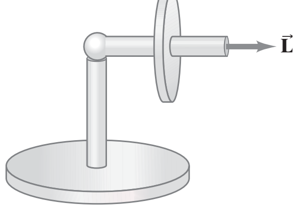


FIGURA 11–41 Una rueda, que gira alrededor de un eje horizontal soportado en un extremo, realiza un movimiento de precesión. Problemas 54, 55 y 56.

*__55.__ (II) Suponga que la rueda sólida de la figura 11-41 tiene una masa de 300 g y gira a 85 rad/s; tiene un radio de 6.0 cm y está montada en el centro de un eje horizontal delgado de 25 cm de longitud. ¿Cuál es la velocidad angular de precesión del eje?

*__56.__ (II) Si una masa igual a la mitad de la masa de la rueda en el problema 55 se coloca en el extremo libre del eje, ¿cuál será ahora la rapidez angular de precesión? Considere el tamaño de la masa adicional como insignificante.

*__57.__ (II) Una rueda de bicicleta de 65 cm de diámetro y masa m gira en torno a su eje; dos manijas de madera de 20 cm de largo, una a cada lado de la rueda, actúan como eje. Se amarra una cuerda a un pequeño gancho en el extremo de una de las manijas y luego se hace girar la rueda con un leve golpe de la mano. Cuando se libera la rueda en movimiento, la rueda adquiere un movimiento de precesión con respecto al eje vertical definido por la cuerda, en vez de caer al suelo (como sucedería si no estuviera girando). Estime la tasa y la dirección de la precesión, si la rueda gira en sentido antihorario a 2.0 rev/s y su eje permanece horizontal.

*11–8 Marcos de referencia en rotación

*__58.__ (II) Si se permite que una planta crezca sobre una plataforma giratoria, crecerá inclinada según un ángulo, apuntando hacia adentro. Calcule cuál será este ángulo (colóquese en el marco giratorio) en términos de g, r y ω. ¿Por qué crece hacia adentro y no hacia afuera?

*__59.__ (III) Sea $\vec{\mathbf{g}}'$ la aceleración efectiva de la gravedad en un punto sobre la Tierra en rotación, igual a la suma vectorial del valor "verdadero" $\vec{\mathbf{g}}$ más el efecto del marco de referencia rotacional (término $m\omega^2 r$). Véase la figura 11-42. Determine la magnitud y dirección de $\vec{\mathbf{g}}'$ con respecto a una línea radial desde el centro de la Tierra *a*) en el Polo Norte, *b*) a una latitud 45.0° norte y *c*) en el ecuador. Considere que la Tierra es esférica y suponga que g es constante e igual a 9.80 m/s^2 (si ω fuera cero).

FIGURA 11–42 Problema 59.

*11–9 Efecto Coriolis

*__60.__ (II) Suponga que el hombre situado en el punto B en la figura 11-26 lanza la pelota hacia la mujer en situada en el punto A. *a*) ¿En qué dirección se desvía la pelota, desde el punto de vista del sistema no inercial? *b*) Obtenga una fórmula para la magnitud de la desviación y la aceleración (de Coriolis) en este caso.

*__61.__ (II) ¿Para qué direcciones de la velocidad el efecto Coriolis es igual a cero, sobre un cuerpo que se mueve en el ecuador de la Tierra?

*__62.__ (III) Podemos alterar las ecuaciones 11-14 y 11-15 para utilizarlas en la Tierra, si consideramos sólo la componente $\vec{\mathbf{v}}$ perpendicular de al eje de rotación. En la figura 11-43 se observa que ésta es $v \cos \lambda$ para un cuerpo que cae verticalmente, donde λ es la latitud del lugar en la Tierra. Si se deja caer verticalmente una esfera de plomo desde una torre de 110 m de alto en Florencia, Italia (latitud = 44°), ¿qué tan lejos de la base de la torre se desvía por la fuerza de Coriolis?

FIGURA 11–43 Problema 62. Un cuerpo de masa m cae verticalmente a la Tierra a una latitud λ.

*__63.__ (III) Una hormiga se desplaza con rapidez constante a lo largo de uno de los rayos de una rueda horizontal que gira con velocidad angular constante ω con respecto a un eje vertical. Escriba una ecuación vectorial para todas las fuerzas (incluidas las fuerzas inerciales) que actúan sobre la hormiga. Tome el eje x a lo largo del rayo, el eje y perpendicular al rayo señalando hacia la izquierda de la hormiga, y el eje z verticalmente hacia arriba. La rueda gira en sentido antihorario vista desde arriba.

Problema generales

64. Una cuerda delgada está enrollada alrededor de un aro cilíndrico de radio R y masa M. Un extremo de la cuerda está fijo y se permite que el aro caiga verticalmente, partiendo del reposo, conforme la cuerda se desenrolla. *a*) Determine la cantidad de movimiento angular del aro con respecto a su CM como función del tiempo. *b*) ¿Cuál es la tensión en la cuerda como función del tiempo?

65. Una partícula de masa 1.00 kg se mueve con velocidad $\vec{\mathbf{v}} = (7.0\hat{\mathbf{i}} + 6.0\hat{\mathbf{j}})$ m/s. *a*) Encuentre la cantidad de movimiento angular $\vec{\mathbf{L}}$ con respecto al origen, cuando la partícula está en $\vec{\mathbf{r}} = (2.0\hat{\mathbf{j}} + 4.0\hat{\mathbf{k}})$ m. *b*) En la posición $\vec{\mathbf{r}}$ se aplica una fuerza $\vec{\mathbf{F}} = 4.0\,\text{N}\hat{\mathbf{i}}$ a la partícula. Encuentre la torca respecto del el origen.

66. Un carrusel con un momento de inercia de 1260 kg · m² y radio de 2.5 m gira sin fricción a 1.70 rad/s. Una niña junto al carrusel, quien inicialmente está de pie y sin moverse, salta a la orilla de la plataforma en línea recta hacia el eje de rotación haciendo que la plataforma disminuya su rapidez a 1.25 rad/s. ¿Cuál es la masa de la niña?

67. ¿Por qué los vehículos todoterreno (SUV) y los autobuses altos y estrechos son propensos a sufrir volcaduras? Considere un vehículo que toma una curva de radio R sobre un camino plano. Justo cuando va a volcarse, los neumáticos que quedan en la parte interna de la curva están a punto de despegarse del suelo, de manera que las fuerzas de fricción y normal sobre esos dos neumáticos son cero. La fuerza normal total en los neumáticos externos es F_N y la fuerza de fricción total es F_{fr}. Suponga que el vehículo no se derrapa. *a*) Los analistas definen un factor de estabilidad estática SSF = $w/2h$, donde el "ancho de rodada" w es la distancia entre dos neumáticos en el mismo eje, y h es la altura del CM con respecto al suelo. Demuestre que la rapidez crítica de volcadura es

$$v_C = \sqrt{Rg\left(\frac{w}{2h}\right)}.$$

[*Sugerencia:* Considere las torcas con respecto al eje que pasa por el centro de masa del SUV, paralelas a su dirección de movimiento]. *b*) Determine la razón de los radios (mínimos posibles) de las curvas de carretera (planas) para un automóvil típico de pasajeros con SSF = 1.40 y para un SUV con SSF = 1.05 a una rapidez de 90 km/h.

68. Un asteroide esférico con radio $r = 123$ m y masa $M = 2.25 \times 10^{10}$ kg gira en torno a un eje a cuatro revoluciones por día. Una nave "remolque" se une al polo sur del asteroide (definido por su eje de rotación) y enciende su motor, aplicando una fuerza F tangencialmente a la superficie del asteroide, como se ilustra en la figura 11-44. Si F = 265 N, ¿cuánto tiempo tardará el remolque en hacer girar el eje de rotación del asteroide a través de un ángulo de 10.0° utilizando este método?

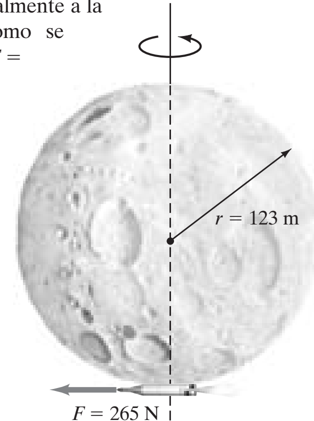


FIGURA 11–44 Problema 68.

69. La posición como función del tiempo de un objeto puntual que se mueve con sentido antihorario sobre una circunferencia de radio R en el plano xy con rapidez constante v está dada por

$$\vec{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{i}}\,R\cos\omega t + \hat{\mathbf{j}}\,R\,\text{sien}\,\omega t$$

donde la constante $\omega = v/R$. Determine la velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ y la velocidad angular $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ de este objeto, y luego demuestre que los tres vectores obedecen la relación $\vec{\mathbf{v}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\mathbf{r}}$.

70. La posición de una partícula con masa m que viaja en una trayectoria helicoidal (véase la figura 11-45) está dada por

$$\vec{\mathbf{r}} = R\cos\left(\frac{2\pi z}{d}\right)\hat{\mathbf{i}} + R\,\text{sen}\left(\frac{2\pi z}{d}\right)\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

donde R y d son el radio y la distancia de separación de la hélice, respectivamente, y z depende del tiempo como $z = v_z t$, donde v_z es la componente (constante) de velocidad en la dirección z. Determine la cantidad de movimiento angular como función del tiempo $\vec{\mathbf{L}}$ de la partícula con respecto al origen.

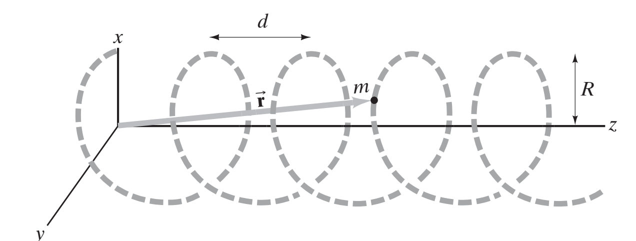


FIGURA 11–45 Problema 70.

71. Un niño juega haciendo rodar un neumático a lo largo de una calle recta y horizontal. El neumático tiene 8.0 kg de masa, radio de 0.32 m y momento de inercia con respecto a su eje central de simetría de 0.83 kg · m². El niño empuja el neumático con una rapidez de 2.1 m/s y observa que éste se inclina 12° a la derecha (figura 11-46). *a*) ¿Cómo afectará la torca resultante el movimiento posterior del neumático? *b*) Compare el cambio en la cantidad de movimiento angular causado por esta torca en 0.20 s con la magnitud original de la cantidad de movimiento angular.

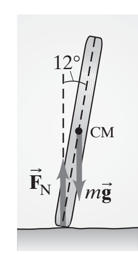


FIGURA 11–46 Problema 71.

72. Una persona de 70 kg está de pie sobre una pequeña plataforma en rotación con los brazos extendidos. *a*) Estime el momento de inercia de la persona empleando las siguientes aproximaciones: el cuerpo (incluyendo la cabeza y las piernas) es un cilindro de 60 kg, 12 cm de radio y 1.70 m de alto; cada brazo se considera como una varilla delgada de 5.0 kg y 60 cm de largo, unida al cilindro. *b*) Utilizando las mismas aproximaciones, estime el momento de inercia cuando los brazos están a los costados del sujeto. *c*) Si tarda 1.5 s en completar una revolución cuando los brazos de la persona están extendidos, ¿cuánto tiempo tardará en rotar cuando los brazos están a los costados? Ignore el momento de inercia de la plataforma ligera. *d*) Determine el cambio en la energía cinética cuando la persona levanta los brazos desde los costados a la posición horizontal. *e*) Con base en su respuesta en *d*), ¿esperaría que fuera más fácil o más difícil levantar los brazos cuando se está girando o cuando se está en reposo?

73. El agua mueve una rueda hidráulica (o turbina) de radio R = 3.0 m, como se ilustra en la figura 11-47. El agua entra con una rapidez v_1 = 7.0 m/s y sale de la rueda con una rapidez v_2 = 3.8 m/s. *a*) Si pasan 85 kg de agua por segundo, ¿cuál es la razón por la que el agua entrega cantidad de movimiento angular a la rueda? *b*) ¿Cuál es la torca que el agua ejerce sobre la rueda? *c*) Si el agua ocasiona que la rueda efectúe una revolución cada 5.5 s, ¿cuánta potencia se suministra a la rueda?

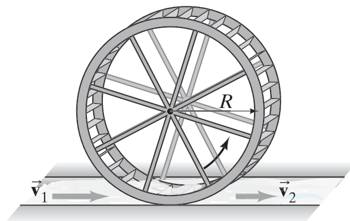


FIGURA 11–47 Problema 73.

74. La Luna gira alrededor de la Tierra de tal forma que siempre muestra el mismo lado a nuestro planeta. Determine la razón entre la cantidad de movimiento angular "rotacional" de la Luna (en torno a su propio eje) y su cantidad de movimiento angular "orbital". (En el último caso, considere a la Luna como una partícula que gira alrededor de la Tierra).

75. Una partícula de masa m acelera uniformemente conforme se mueve en sentido antihorario sobre la circunferencia de un círculo de radio R:

$$\vec{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{i}}\, R\cos\theta + \hat{\mathbf{j}}\, R \operatorname{sen}\theta$$

con $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$, donde las constantes ω_0 y α son la velocidad angular inicial y la aceleración angular, respectivamente. Determine la aceleración tangencial del objeto $\vec{\mathbf{a}}$ y determine la torca que actúa sobre el objeto utilizando *a*) $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$, *b*) $\vec{\boldsymbol{\tau}} = I\vec{\boldsymbol{\alpha}}$.

76. Un proyectil con masa m es lanzado desde la tierra y sigue una trayectoria dada por

$$\vec{\mathbf{r}} = (v_{x0}t)\hat{\mathbf{i}} + \left(v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2\right)\hat{\mathbf{j}}$$

donde v_{x0} y v_{y0} son las velocidades iniciales en las direcciones x y y, respectivamente, y g es la aceleración debida a la gravedad. La posición de lanzamiento es el origen. Determine la torca que actúa sobre el proyectil con respecto del origen utilizando *a*) $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$, *b*) $\vec{\boldsymbol{\tau}} = d\vec{\mathbf{L}}/dt$.

77. La mayor parte de la masa de nuestro Sistema Solar está contenida en el Sol, mientras que los planetas poseen casi toda la cantidad de movimiento angular del sistema. Esta observación desempeña un papel clave en las teorías que intentan explicar la formación de nuestro Sistema Solar. Estime la fracción de la cantidad de movimiento angular total del Sistema Solar que poseen los planetas, utilizando un modelo simplificado que incluya sólo los grandes planetas exteriores con la mayor cantidad de movimiento angular. El Sol en el centro (con masa de 1.99×10^{30} kg y radio de 6.96×10^8 m) gira sobre su propio eje una vez cada 25 días; los planetas Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno describen órbitas casi circulares alrededor del Sol (sus datos orbitales aparecen en la siguiente tabla). Ignore el giro de cada planeta sobre su propio eje.

Planeta	Distancia media a partir del Sol ($\times 10^6$ km)	Periodo orbital (años terrestres)	Masa ($\times 10^{25}$ kg)
Júpiter	778	11.9	190
Saturno	1427	29.5	56.8
Urano	2870	84.0	8.68
Neptuno	4500	165	10.2

78. Un ciclista que viaja con rapidez v = 9.2 m/s sobre un camino plano está tomando una curva de radio r = 12 m. Las fuerzas que actúan sobre el ciclista y la bicicleta son la fuerza normal ($\vec{\mathbf{F}}_N$) y la fuerza de fricción ($\vec{\mathbf{F}}_{fr}$) ejercida por el camino sobre los neumáticos y $m\vec{\mathbf{g}}$, el peso total del ciclista y la bicicleta. Ignore la pequeña masa de las ruedas. *a*) Explique con detalle por qué el ángulo θ que la bicicleta forma con la vertical (figura 11-48) está dado por $\tan\theta = F_{fr}/F_N$ si el ciclista debe permanecer en equilibrio. *b*) Calcule θ para los valores dados. [*Sugerencia*: Considere el movimiento traslacional "circular" de la bicicleta y el ciclista]. *c*) Si el coeficiente de fricción estática entre los neumáticos y el camino es μ_s = 0.65, ¿cuál es el radio mínimo posible para tomar la vuelta?

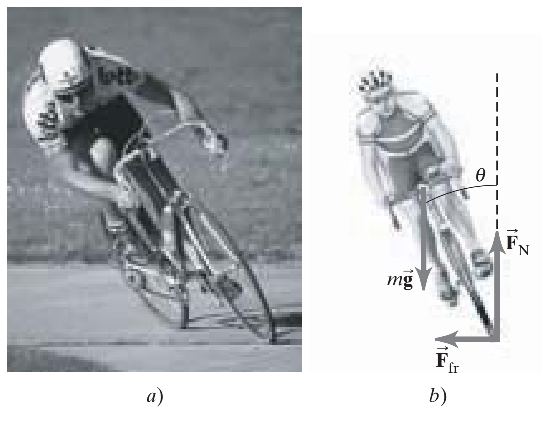


FIGURA 11–48 Problema 78.

79. Los patinadores sobre hielo que participan en competencias a menudo realizan saltos sencillos, dobles y triples en los que giran $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, y $3\frac{1}{2}$ revoluciones, respectivamente, en torno a un eje vertical mientras están en el aire. Para todos esos saltos, un patinador permanece en el aire durante 0.70 s. Suponga que una patinadora abandona el suelo en una posición "abierta" (por ejemplo, con los brazos extendidos) con momento de inercia I_0, frecuencia rotacional f_0 = 1.2 rev/s, y que mantiene esta posición durante 0.10 s. Luego, adopta una posición "cerrada" (con los brazos cerca del tronco) con momento de inercia I, adquiriendo una frecuencia rotacional f, que mantiene durante 0.50 s. Finalmente, la patinadora regresa de inmediato a la posición "abierta" por 0.10 s hasta que toca la pista (véase la figura 11-49). *a*) ¿Por qué la cantidad de movimiento angular se conserva durante el salto de la patinadora? Ignore la resistencia del aire. *b*) Determine la frecuencia rotacional mínima f durante la parte intermedia del salto para que la patinadora complete exitosamente el salto sencillo y triple. *c*) Demuestre que, de acuerdo con este modelo, un patinador debe ser capaz de reducir su momento de inercia a mitad del salto en un factor de 2 y 5 para completar un salto sencillo y triple, respectivamente.

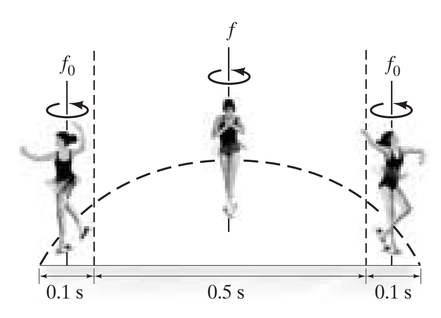


FIGURA 11–49 Problema 79.

80. Una torre de transmisión de radio tiene una masa de 80 kg y 12 m de altura. La torre está anclada al terreno mediante una junta flexible en su base y además está sostenida por tres cables a 120° entre sí (figura 11-50). En un análisis de fallas potenciales, un ingeniero mecánico tiene que determinar el comportamiento de la torre cuando uno de los cables se rompa. La torre caería alejándose del cable roto, girando respecto a su base. Determine la rapidez de la parte superior de la torre en función del ángulo de rotación θ. Comience su análisis con la ecuación de la dinámica rotacional del movimiento $d\vec{\mathbf{L}}/dt = \vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{net}}$. Considere que la torre es una varilla delgada y alta.

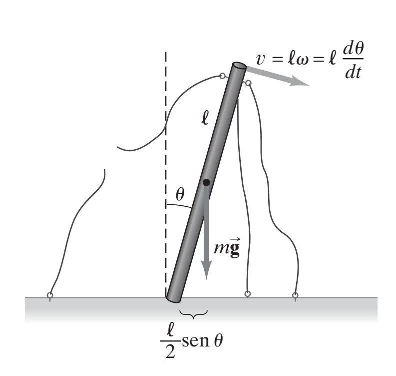


FIGURA 11–50 Problema 80.

81. Suponga que una estrella del tamaño de nuestro Sol, pero con una masa 8.0 veces mayor, gira con una rapidez de 1.0 revolución cada 9.0 días. Si sufriera colapso gravitacional y se convirtiera en una estrella de neutrones con radio de 12 km, perdiendo $\frac{3}{4}$ de su masa en el proceso, ¿cuál sería su rapidez rotacional? Suponga que la estrella es en todo momento una esfera uniforme. Suponga también que la masa arrojada lleva consigo *a*) cero cantidad de movimiento angular, *b*) su porción proporcional $\left(\frac{3}{4}\right)$ de la cantidad de movimiento angular inicial.

82. El centro de percusión de un bate de béisbol es el punto en que puede pegarse a una pelota con un esfuerzo casi nulo para transmitir energía. Un análisis cuidadoso de la dinámica del béisbol indica que este punto especial se localiza en el punto en que una fuerza aplicada generaría una rotación pura del bate con respecto al punto donde se sujeta el bate (al mango). Determine la posición del centro de percusión del bate de la figura 11-51. La densidad lineal de masa del bate está dada aproximadamente por $(0.61 + 3.3x^2)$ kg/m, donde x está en metros a partir del extremo que sirve de mango. El bate completo mide 0.84 m de largo. El punto de rotación deseado debe estar a 5.0 cm desde el extremo en que se sostiene el bate. [*Sugerencia*: Identifique el CM del bate].

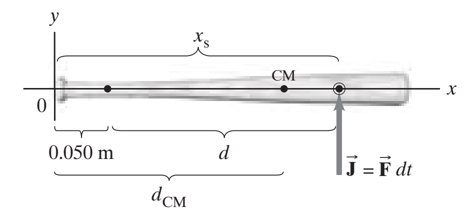


FIGURA 11–51 Problema 82.

* Problemas numéricos/por computadora

*__83.__ (II) Una vara uniforme de 1.00 m de largo con una masa total de 330 g tiene un pivote en su centro. Se dispara una bala de 3.0 g que la atraviesa a una distancia x desde el pivote. La bala se aproxima a 250 m/s y sale a 140 m/s (figura 11-36). *a*) Determine una expresión para la rapidez angular de la vara que queda girando después de la colisión como una función de x. *b*) Trace una gráfica de la rapidez angular como una función de x, desde $x = 0$ a $x = 0.50$ m.

*__84.__ (III) La figura 11-39 muestra una varilla delgada de masa M y longitud ℓ que se encuentra sobre una mesa sin fricción. La varilla es golpeada a una distancia x de su CM por un trozo de arcilla de masa m que se mueve con rapidez v y la arcilla queda adherida a la varilla. *a*) Determine una fórmula para el movimiento de rotación del sistema después de la colisión. *b*) Trace una gráfica del movimiento de rotación del sistema como una función de x, desde $x = 0$ a $x = \ell/2$, con valores de $M = 450$ g, $m = 15$ g, $\ell = 1.20$ m y $v = 12$ m/s. *c*) ¿El movimiento traslacional depende de x? Explique su respuesta.

Respuestas a los ejercicios

A: *b*).

B: *a*).

C: *b*).

D: (i) *d*); (ii) *a*); (iii) *b*).

E: *e*).



Nuestro ambiente construido por completo, desde modernos puentes hasta rascacielos, ha requerido que los ingenieros y arquitectos determinen las fuerzas y los esfuerzos dentro de tales estructuras. El objetivo es mantener estas estructuras en estado estable, es decir, que no estén en movimiento y, sobre todo, evitar su colapso.

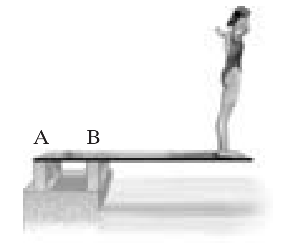
CONTENIDO

CAPÍTULO 12

Equilibrio estático: Elasticidad y fractura

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!
El trampolín que se muestra está sostenido por dos apoyos en A y B. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera con respecto a las fuerzas ejercidas *sobre* el trampolín en A y B?

a) $\vec{\mathbf{F}}_A$ es hacia abajo, $\vec{\mathbf{F}}_B$ hacia arriba y F_B es mayor que F_A.
b) Ambas fuerzas son hacia arriba y F_B es mayor que F_A.
c) $\vec{\mathbf{F}}_A$ es hacia abajo, $\vec{\mathbf{F}}_B$ hacia arriba y F_A es mayor que F_B.
d) Ambas fuerzas son hacia abajo y aproximadamente iguales.
e) $\vec{\mathbf{F}}_B$ es hacia abajo, $\vec{\mathbf{F}}_A$ hacia arriba y ambas son iguales.



En este capítulo estudiaremos un caso especial en la mecánica: cuando la fuerza neta y la torca neta sobre un objeto, o sistema de objetos, son ambas cero. En esta situación tanto la aceleración lineal como la aceleración angular del objeto o del sistema de objetos son cero. El objeto está en reposo, o su centro de masa se mueve con velocidad constante. Nos interesará principalmente el primer caso, cuando el objeto o los objetos están en reposo.

Veremos cómo determinar las fuerzas (y las torcas) que actúan dentro de una estructura. Saber con precisión dónde y cómo actúan tales fuerzas puede ser muy importante para edificios, puentes y otras estructuras, así como en el cuerpo humano.

La **estática** se ocupa del cálculo de las fuerzas que actúan sobre y dentro de estructuras que están en *equilibrio*. La determinación de tales fuerzas, que se estudia en la primera parte de este capítulo, permite entonces conocer con precisión si las estructuras pueden sostener fuerzas (cargas) sin sufrir deformación significativa o fractura, ya que cualquier material se curvará o romperá si se le aplica demasiada fuerza (figura 12-1).



FIGURA 12–1 Un paso elevado se colapsa en un hotel de Kansas City en 1981. En el ejemplo 12-9 se considera cómo un sencillo cálculo de física pudo haber prevenido la trágica pérdida de más de 100 vidas.

12–1 Las condiciones para el equilibrio

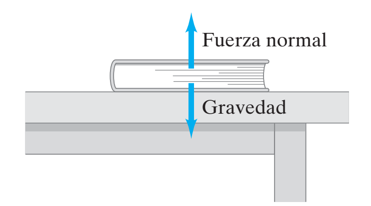


FIGURA 12–2 El libro está en equilibrio, por lo que la fuerza neta sobre él es cero.

En nuestra experiencia los objetos están sujetos por lo menos a una fuerza que actúa sobre ellos (la gravedad), y si están en reposo, entonces debe haber también otras fuerzas actuando sobre ellos, de modo que la fuerza neta sea cero. En un libro en reposo sobre una mesa, por ejemplo, hay dos fuerzas que actúan sobre él: la fuerza de la gravedad hacia abajo y la fuerza normal que ejerce la mesa hacia arriba sobre el libro (figura 12-2). Como el libro está en reposo, la segunda ley de Newton nos indica que la fuerza neta sobre él es cero. La fuerza hacia arriba ejercida por la mesa, por lo tanto, debe ser igual en magnitud que la fuerza de gravedad que actúa hacia abajo sobre el libro. Se dice que este objeto está en **equilibrio** ("fuerzas iguales" en latín) bajo la acción de esas dos fuerzas.

No confunda las dos fuerzas en la figura 12-2 con las fuerzas iguales y opuestas de la tercera ley de Newton, que actúan sobre diferentes objetos; aquí ambas fuerzas actúan sobre el mismo objeto (el libro) y suman cero.

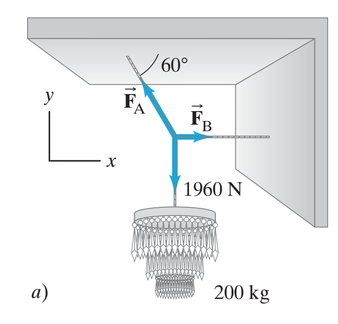
Primera condición de equilibrio

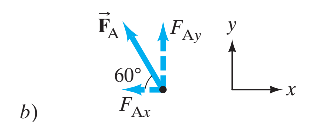
Para que un objeto esté en reposo, la segunda ley de Newton nos dice que la suma de las fuerzas que actúan sobre él debe ser cero. Puesto que la fuerza es un vector, cada una de las componentes de la fuerza neta debe ser cero. En consecuencia, una condición para el equilibrio es que

$$\Sigma F_x = 0, \qquad \Sigma F_y = 0, \qquad \Sigma F_z = 0. \tag{12–1}$$

Trataremos principalmente con fuerzas que actúan en un plano (coplanares), así que por lo general sólo necesitaremos las componentes x y y. Debemos recordar que, si la componente de una fuerza particular apunta a lo largo de los ejes negativos x o y, debe tener signo negativo. A las ecuaciones 12-1 se les llama **primera condición de equilibrio**.

FIGURA 12–3 Ejemplo 12–1.





EJEMPLO 12–1 **Tensión en las cuerdas de un candelabro.** Calcule las tensiones $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$ en las dos cuerdas que están conectadas a la cuerda vertical que soporta el candelabro de 200 kg en la figura 12-3. Ignore la masa de las cuerdas.

PLANTEAMIENTO Necesitamos un diagrama de cuerpo libre, ¿pero para cuál objeto? Si elegimos el candelabro, la cuerda que lo sostiene debe ejercer una fuerza igual a su peso $mg = (200\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2) = 1960\text{ N}$. Pero las fuerzas $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$ no están involucradas. En cambio, elijamos como nuestro objeto de estudio el punto donde se unen las tres cuerdas (podría ser un nudo). El respectivo diagrama de cuerpo libre se presenta en la figura 12-3a. Las tres fuerzas $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$, y la tensión en la cuerda vertical (igual al peso de 200 kg del candelabro) actúan en el punto donde se unen las tres cuerdas. Para este punto de unión escribimos $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$, ya que este problema está dispuesto en dos dimensiones. Se conocen las direcciones $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$ pues la tensión en una cuerda puede ser sólo a lo largo de ésta: en cualquier otra dirección ocasionarían que la cuerda se doble, como vimos en el capítulo 4. Nuestras incógnitas, entonces, son las magnitudes F_A y F_B.

SOLUCIÓN Primero descomponemos $\vec{F}_A$ en sus componentes horizontal (x) y vertical (y). Aunque no conocemos el valor de F_A, podemos escribir (véase la figura 12.3b) $F_{Ax} = -F_A \cos 60°$ y $F_{Ay} = F_A \operatorname{sen} 60°$. $\vec{F}_B$ tiene sólo una componente x. En la dirección vertical, tenemos la fuerza hacia abajo ejercida por la cuerda vertical que es igual al peso del candelabro $= (200\text{ kg})(g)$ y la componente vertical de $\vec{F}_A$ hacia arriba:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F_A \operatorname{sen} 60° - (200\text{ kg})(g) = 0$$

por lo que

$$F_A = \frac{(200\text{ kg})g}{\operatorname{sen} 60°} = (231\text{ kg})g = 2260\text{ N}.$$

En la dirección horizontal, con $\Sigma F_x = 0$,

$$\Sigma F_x = F_B - F_A \cos 60° = 0.$$

Entonces,

$$F_B = F_A \cos 60° = (231\text{ kg})(g)(0.500) = (115\text{ kg})g = 1130\text{ N}.$$

Las magnitudes de $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_B$ determinan la resistencia de la cuerda o el alambre que debe usarse. En este caso, el alambre debe ser capaz de resistir más de 230 kg.

EJERCICIO A En el ejemplo 12-1, F_A tiene que ser más grande que el peso del candelabro mg. ¿Por qué?

La segunda condición para el equilibrio

Aunque las ecuaciones 12-1 son una condición necesaria para que un objeto esté en equilibrio, no siempre son una condición suficiente. La figura 12-4 muestra un objeto sobre el cual la fuerza neta es cero. Aunque las dos fuerzas designadas $\vec{\mathbf{F}}$ se suman y dan una fuerza neta cero sobre el objeto, originan una torca neta que hará girar al objeto. De acuerdo con la ecuación 10-14, $\Sigma\tau = I\alpha$, vemos que si un objeto va a permanecer en reposo, la torca neta que se le aplica (calculada con respecto a *cualquier* eje) debe ser cero. Así, tenemos la **segunda condición de equilibrio**: que la suma de las torcas que actúen sobre el objeto, calculada con respecto a cualquier eje, sea cero:

$$\Sigma\tau = 0. \qquad \textbf{(12–2)}$$

Esta condición garantizará que la aceleración angular a con respecto a cualquier punto será cero. Si el cuerpo no está girando inicialmente ($\omega = 0$), no comenzará a girar. Las ecuaciones 12-1 y 12-2 son los únicos requisitos para que un objeto esté en equilibrio.

Consideraremos principalmente casos en que todas las fuerzas actúan en un plano (que llamamos el plano xy). En tales casos la torca se calcula con respecto a un eje que es perpendicular al plano xy. *La elección de este eje es arbitraria*. Si el objeto está en reposo, $\Sigma\tau = 0$ con respecto a cualquier eje. Por lo tanto, podemos seleccionar cualquier eje que haga más fácil nuestro cálculo. Una vez que se elige el eje, todas las torcas deben calcularse con respecto a ese eje.

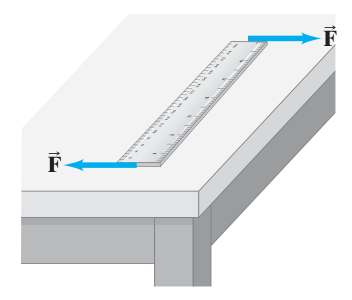


FIGURA 12–4 Aunque la fuerza neta sobre ella es cero, la regla se moverá (girará). Un par de fuerzas iguales que actúan en sentido opuesto, pero en diferentes puntos sobre un objeto (como se muestra aquí) se llama *par*.

CUIDADO

La elección del eje para $\Sigma\tau = 0$ es arbitraria. Todas las torcas deben calcularse con respecto al mismo eje.

EJEMPLO CONCEPTUAL 12–2 **Una palanca.** La barra en la figura 12-5 se usa como palanca para mover una roca grande. La pequeña roca mostrada en la figura actúa como un fulcro (punto de apoyo). La fuerza F_P requerida en el extremo largo de la barra puede ser mucho más pequeña que el peso mg de la roca, ya que son las *torcas* las que equilibran la rotación con respecto al punto de apoyo. Sin embargo, si la palanca no es suficiente y la roca no se mueve, ¿cuáles son las dos formas de incrementar la palanca?

RESPUESTA Una manera de incrementar el brazo de palanca de la fuerza F_P consiste en insertar un tubo sobre el extremo de la barra, empujando así con un brazo de palanca más largo. Una segunda forma es mover el punto de apoyo más cerca de la roca; esto puede cambiar el brazo de palanca largo R sólo un poco; sin embargo, puede cambiar en forma importante el brazo de palanca corto r en una buena fracción y modificar por lo tanto, la razón de R/r. Para hacer palanca sobre la roca, la torca debida a F_P debe por lo menos equilibrar la torca debida a mg, por lo que $mgr = F_P R$ y

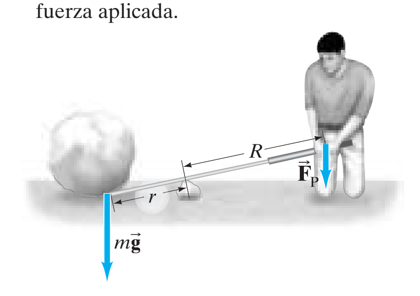
$$\frac{r}{R} = \frac{F_P}{mg}.$$

Con una r más pequeña, el peso mg puede equilibrarse con una menor fuerza F_P. El cociente de la fuerza de carga entre la fuerza aplicada ($= mg/F_P$ aquí) es la **ventaja mecánica** del sistema y, en este caso, es igual a R/r. Una palanca es una "máquina simple". En el ejemplo 4-14 del capítulo 4 analizamos otra máquina simple: la polea.

FÍSICA APLICADA

La palanca

FIGURA 12–5 Ejemplo 12-2. Una palanca puede "multiplicar" la fuerza aplicada.



EJERCICIO B Por sencillez escribimos la ecuación del ejemplo 12-2 como si la palanca fuera perpendicular a las fuerzas. ¿La ecuación sería válida incluso para una palanca a un ángulo como el que se muestra en la figura 12-5?

12–2 Resolución de problemas de estática

Este tema de la estática es importante porque nos permite calcular ciertas fuerzas sobre (o dentro) de una estructura cuando algunas de las fuerzas sobre ella ya se conocen. Principalmente consideraremos situaciones en que todas las fuerzas actúan en un plano, de manera que podemos tener dos ecuaciones de fuerza (componentes x y y) y una ecuación de torca, para un total de tres ecuaciones. Desde luego, quizá no sea necesario utilizar las tres ecuaciones. Cuando se usa la ecuación de torca, generalmente, se considera que una torca que tiende a hacer girar el objeto en sentido antihorario es positiva; en tanto que una torca que tiende a girarlo en sentido horario se considera negativa. (Sin embargo, la convención opuesta también es correcta).



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

$\tau > 0$ sentido antihorario
$\tau < 0$ sentido horario

Una de las fuerzas que actúa sobre los objetos es la fuerza de gravedad. Como vimos en la sección 9-8 podemos considerar la fuerza de gravedad que actúa en el centro de gravedad (CG) o en el centro de masa (CM), que para fines prácticos son el mismo punto. Para objetos simétricos uniformes, el CG está en el centro geométrico. Para objetos más complicados, el CG se puede determinar como se vio en la sección 9-8.

No hay un solo procedimiento para resolver problemas de estática; sin embargo, el siguiente procedimiento puede ser útil.

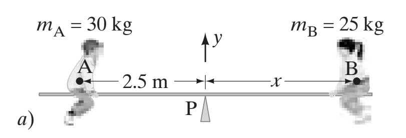
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Estática

1. Considere un solo cuerpo a la vez y haga un **diagrama de cuerpo libre** cuidadoso de él, mostrando todas las fuerzas que actúen sobre el objeto, así como la gravedad y los puntos en que actúan cada una de las fuerzas. Si no está seguro de la dirección de una fuerza, elija una dirección. Si la dirección verdadera es opuesta, su cálculo final dará un resultado con un signo menos.
2. Elija un **sistema coordenado** conveniente y descomponga las fuerzas en sus componentes.
3. Usando letras para representar las incógnitas, escriba las **ecuaciones de equilibrio** para las **fuerzas**:
$$\Sigma F_x = 0 \quad \text{y} \quad \Sigma F_y = 0,$$
suponiendo que todas las fuerzas actúan en un plano.
4. Para la **ecuación de torca**,
$$\Sigma \tau = 0,$$
elija cualquier eje perpendicular al plano xy que ayude a hacer el cálculo más fácilmente. (Por ejemplo, usted puede reducir el número de incógnitas en la ecuación resultante eligiendo el eje de manera que una de las fuerzas desconocidas pase por el eje; esta fuerza tendrá entonces un brazo de palanca cero y generará una torca cero, por lo que no aparecerá en la ecuación de torca). Ponga cuidadosa atención en la determinación correcta del brazo de palanca para cada fuerza. Dé a cada torca un signo + o un signo − que indique su dirección. Si a las torcas que tienden a hacer girar el objeto en sentido antihorario, por ejemplo, se les considera positivas, entonces las torcas que tienden a hacerlo girar en sentido horario serán negativas.
5. **Despeje** las incógnitas en estas ecuaciones. Tres ecuaciones permiten un máximo de tres incógnitas por despejar; éstas pueden ser fuerzas, distancias o incluso ángulos.

FÍSICA APLICADA

Equilibrio de un sube y baja



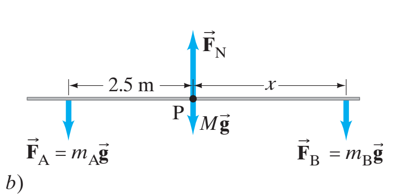


FIGURA 12–6 *a*) Ejemplo 12-3, dos niños sobre un sube y baja. *b*) Diagrama de cuerpo libre de la tabla.

EJEMPLO 12–3 Equilibrio de un sube y baja. Una tabla de masa $M = 2.0$ kg sirve como sube y baja para dos niños, como se indica en la figura 12-6a. El niño A tiene una masa de 30 kg y se sienta a 2.5 m del punto pivote, P (su centro de gravedad está a 2.5 m del pivote). ¿A qué distancia x del pivote se debe sentar la niña B, de 25 kg de masa, para equilibrar el sube y baja? Considere que la tabla es uniforme y que está centrada sobre el pivote.

PLANTEAMIENTO Seguimos explícitamente los pasos del recuadro de Estrategia de resolución de problemas anterior.

SOLUCIÓN

1. **Diagrama de cuerpo libre.** Elegimos la tabla como nuestro objeto y se considera que está horizontal. Su diagrama de cuerpo libre se ilustra en la figura 12-6b. Las fuerzas que actúan sobre la tabla son las fuerzas que cada niño ejerce hacia abajo sobre ella, $\vec{\mathbf{F}}_A$ y $\vec{\mathbf{F}}_B$, la fuerza ascendente del pivote $\vec{\mathbf{F}}_N$, y la fuerza de gravedad sobre la tabla $(= M\vec{\mathbf{g}})$ que actúa en el centro de la tabla uniforme.
2. **Sistema coordenado.** Elegimos y como vertical, con el sentido positivo hacia arriba, y x horizontal hacia la derecha, con origen en el pivote.
3. **Ecuación de fuerza.** Todas las fuerzas están en la dirección y (vertical), así que
$$\Sigma F_y = 0$$
$$F_N - m_A g - m_B g - Mg = 0,$$
donde $F_A = m_A g$ y $F_B = m_B g$ porque cada niño está en equilibrio cuando el sube y baja está equilibrado.
4. **Ecuación de torca.** Calculamos la torca en torno a un eje que pase a través de la tabla en el punto pivote, P. Entonces, los brazos de palanca para F_N y para el peso de la tabla son cero, y aportarán torca cero en torno al punto P. Por ello, la ecuación de torcas sólo incluirá las fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_A$ y $\vec{\mathbf{F}}_B$, que son iguales a los pesos de los niños. La torca ejercida por cada niño será mg por el brazo de palanca apropiado, que aquí es la distancia de cada niño desde el punto pivote. En consecuencia, la ecuación de torca es
$$\Sigma \tau = 0$$
$$m_A g(2.5\,\text{m}) - m_B g x + Mg(0\,\text{m}) + F_N(0\,\text{m}) = 0$$
o bien,
$$m_A g(2.5\,\text{m}) - m_B g x = 0,$$
donde se eliminaron dos términos porque sus brazos de palanca eran cero.

5. Despejar. Al despejar *x en* la ecuación de torca se obtiene

$$x = \frac{m_A}{m_B}(2.5\,\text{m}) = \frac{30\,\text{kg}}{25\,\text{kg}}(2.5\,\text{m}) = 3.0\,\text{m}.$$

Para equilibrar el sube y baja, la niña B se debe sentar de modo que su CM esté a 3.0 m del punto pivote. Esto tiene sentido: como ella es más ligera, debe sentarse más lejos del pivote que el niño, que es más pesado, para proporcionar la misma torca.

EJERCICIO C No necesitamos utilizar la ecuación de fuerzas para resolver el ejemplo 12-3 por nuestra elección del eje de giro. Use la ecuación de fuerza para encontrar la fuerza ejercida por el pivote.

FÍSICA APLICADA

Voladizo

La figura 12-7 muestra una viga uniforme que se extiende más allá de su soporte como un trampolín. Tal viga se llama **voladizo**. Las fuerzas que actúan sobre la viga en esta figura son aquellas debidas a los soportes, $\vec{\mathbf{F}}_A$ y $\vec{\mathbf{F}}_B$, y la fuerza de gravedad que actúa en el CG, a 5.0 m a la derecha del soporte derecho. Si usted sigue el procedimiento del último ejemplo para calcular F_A y F_B, suponiendo que apuntan hacia arriba como se muestra en la figura 12-7, encontrará que F_A resulta negativa. Si la viga tiene una masa de 1200 kg y un peso $mg = 12{,}000$ N, entonces $F_B = 15{,}000$ N y $F_A = -3000$ N (véase el problema 9). Siempre que una fuerza desconocida resulta negativa, ello tan sólo significa que la fuerza en realidad apunta en sentido contrario al que usted supuso. Así, en la figura 12-7, $\vec{\mathbf{F}}_A$ en realidad apunta hacia abajo. Con un pequeño análisis debería ser claro que el soporte izquierdo debe jalar hacia abajo sobre la viga (mediante pernos, tornillos, sujetadores y/o pegamento), para que la viga esté en equilibrio; de otra manera, la suma de las torcas con respecto al CM (o con respecto al punto donde actúa $\vec{\mathbf{F}}_B$) no podría ser cero.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Si una fuerza resulta negativa su sentido es opuesto al considerado inicialmente

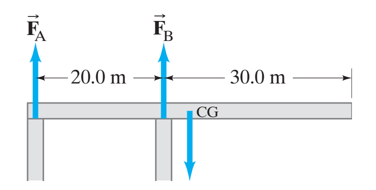


FIGURA 12–7 Un voladizo. Los vectores de fuerza que se muestran son hipotéticos: las direcciones reales pueden ser opuestas a las direcciones mostradas.

EJERCICIO D Regrese a la pregunta de inicio de capítulo, p. 311, y respóndala de nuevo. Intente explicar porque usted quizás la contestó diferente la primera vez.

FÍSICA APLICADA

Fuerza en músculos y articulaciones

EJEMPLO 12–4 Fuerza ejercida por el bíceps. ¿Cuál es la fuerza que debe ejercer el bíceps cuando una pelota de 5.0 kg se sostiene en la mano *a*) con el brazo horizontal como en la figura 12-8a, y *b*) cuando el brazo está a un ángulo de 45° como en la figura 12-8b? El bíceps se conecta con el antebrazo mediante un tendón unido a 5.0 cm de la articulación del codo. Suponga que la masa del antebrazo y la mano juntas es de 2.0 kg y que su CG está localizado como se muestra.

PLANTEAMIENTO El diagrama de cuerpo libre para el antebrazo se muestra en la figura 12-8; las fuerzas son los pesos del brazo y de la pelota, la fuerza hacia arriba $\vec{\mathbf{F}}_M$ ejercida por el músculo bíceps y una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_J$ ejercida en el codo por el hueso de la parte superior del brazo (se supone que todas las fuerzas actúan verticalmente). Queremos encontrar la magnitud de $\vec{\mathbf{F}}_M$, lo que conseguimos más fácilmente usando la ecuación de torca y eligiendo nuestro eje que pasa por el codo de manera que $\vec{\mathbf{F}}_J$ contribuya con torca cero:

SOLUCIÓN *a*) Calculamos las torcas con respecto al punto donde actúa $\vec{\mathbf{F}}_J$ en la figura 12-8a. La ecuación $\Sigma\tau = 0$ da

$$(0.050\,\text{m})F_M - (0.15\,\text{m})(2.0\,\text{kg})g - (0.35\,\text{m})(5.0\,\text{kg})g = 0.$$

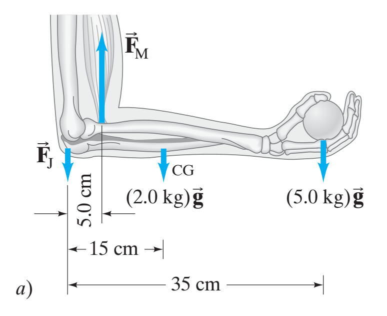
Despejamos F_M:

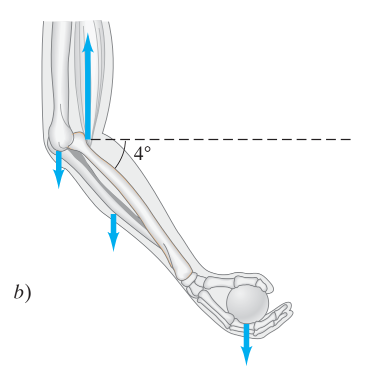
$$F_M = \frac{(0.15\,\text{m})(2.0\,\text{kg})g + (0.35\,\text{m})(5.0\,\text{kg})g}{0.050\,\text{m}} = (41\,\text{kg})g = 400\,\text{N}.$$

b) El brazo de la palanca, calculado con respecto al codo, se reduce por el factor cos 45° en las tres fuerzas. Nuestra ecuación de torca se verá como la de arriba, excepto que cada término tendrá un su brazo de palanca reducido por el mismo factor, que se cancelará. Se obtendrá el mismo resultado, $F_M = 400$ N.

NOTA La fuerza requerida por el bíceps (400 N) es bastante grande en comparación con el peso del objeto levantado ($= mg = 49$ N). De hecho, los músculos y las articulaciones del cuerpo están generalmente sometidos a fuerzas muy grandes.

FIGURA 12–8 Ejemplo 12–4.





EJERCICIO E ¿Cuánta masa podría sostener la persona del ejemplo 12-4 con la mano con una fuerza de bíceps de 450 N, si el tendón se colocara a 6.0 cm del codo, en vez de a 5.0 cm?

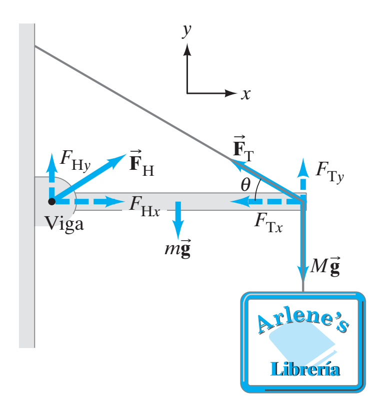


FIGURA 12–9 Ejemplo 12–5.

Nuestro próximo ejemplo incluye una viga unida a una pared mediante una bisagra y que está soportada por un cable o una cuerda (figura 12-9). Es importante recordar que un cable flexible puede soportar una fuerza sólo a lo largo de su longitud. (Si hubiera una componente de fuerza perpendicular al cable, éste se doblaría debido a su flexibilidad). Sin embargo, para un dispositivo rígido, como la bisagra en la figura 12-9, la fuerza puede tener cualquier dirección y podemos conocer ésta sólo después de resolver el problema. Se supone que la bisagra es pequeña y lisa, por lo que no ejerce torca interna (con respecto al eje central) sobre la viga.

EJEMPLO 12–5 **Viga soportada por una bisagra y un cable.** Una viga uniforme, de 2.20 m de longitud y masa $m = 25.0$ kg, está soportada por una pequeña bisagra fija una pared, como se muestra en la figura 12-9. La viga se mantiene en posición horizontal mediante un cable que forma un ángulo $\theta = 30.0°$. La viga soporta un letrero de masa $M = 28.0$ kg suspendido de su extremo. Determine las componentes de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_H$ que ejerce la bisagra (sin fricción) sobre la viga, y la tensión F_T en el cable de soporte.

PLANTEAMIENTO La figura 12-9 es el diagrama de cuerpo libre de la viga, que muestra todas las fuerzas que actúan sobre ésta; muestra también las componentes de $\vec{\mathbf{F}}_T$ y una producción de $\vec{\mathbf{F}}_H$. Tenemos tres incógnitas, F_{Hx}, F_{Hy} y F_T (se nos da q), por lo que necesitaremos las tres ecuaciones $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma\tau = 0$.

SOLUCIÓN La suma de las fuerzas en la dirección vertical (y) es

$$\Sigma F_y = 0$$
$$F_{Hy} + F_{Ty} - mg - Mg = 0. \qquad \textbf{(i)}$$

En la dirección horizontal (x), la suma de las fuerzas es

$$\Sigma F_x = 0$$
$$F_{Hx} - F_{Tx} = 0. \qquad \textbf{(ii)}$$

Para la ecuación de torca, elegimos el eje en el punto donde actúan $\vec{\mathbf{F}}_T$ y $M\vec{\mathbf{g}}$ (de manera que nuestra ecuación contiene entonces sólo una incógnita, F_{Hy}); elegimos las torcas que tienden a hacer girar la viga en sentido antihorario como positivas. El peso mg de la viga (uniforme) actúa en su centro, por lo que tenemos:

$$\Sigma\tau = 0$$
$$-(F_{Hy})(2.20\,\text{m}) + mg(1.10\,\text{m}) = 0.$$

Despejamos F_{Hy}:

$$F_{Hy} = \left(\frac{1.10\,\text{m}}{2.20\,\text{m}}\right)mg = (0.500)(25.0\,\text{kg})(9.80\,\text{m/s}^2) = 123\,\text{N}. \qquad \textbf{(iii)}$$

Luego, como la tensión $\vec{\mathbf{F}}_T$ en el cable actúa a lo largo de éste ($\theta = 30.0°$), a partir de la figura 12-9 vemos que $\tan\theta = F_{Ty}/F_{Tx}$, o

$$F_{Ty} = F_{Tx}\tan\theta = F_{Tx}(\tan 30.0°) = 0.577\,F_{Tx}. \qquad \textbf{(iv)}$$

De la ecuación (i), obtenemos

$$F_{Ty} = (m + M)g - F_{Hy} = (53.0\,\text{kg})(9.80\,\text{m/s}^2) - 123\,\text{N} = 396\,\text{N};$$

Las ecuaciones (iv) y (ii) proporcionan

$$F_{Tx} = F_{Ty}/0.577 = 687\,\text{N};$$
$$F_{Hx} = F_{Tx} = 687\,\text{N}.$$

Las componentes de $\vec{\mathbf{F}}_H$ son $F_{Hy} = 123$ N y $F_{Hx} = 687$ N. La tensión en el cable es $F_T = \sqrt{F_{Tx}^2 + F_{Ty}^2} = 793$ N.

Solución alterna Observemos el efecto de elegir un eje diferente para calcular las torcas, como un eje a través de la bisagra. Entonces el brazo de palanca para F_H es cero, y la ecuación de torca ($\Sigma\tau = 0$) se convierte en

$$-mg(1.10\,\text{m}) - Mg(2.20\,\text{m}) + F_{Ty}(2.20\,\text{m}) = 0.$$

Al despejar F_{Ty} se encuentra

$$F_{Ty} = \frac{m}{2}g + Mg = (12.5\,\text{kg} + 28.0\,\text{kg})(9.80\,\text{m/s}^2) = 397\,\text{N}.$$

Obtenemos el mismo resultado, dentro de la precisión de nuestras cifras significativas.

NOTA No importa cuál eje elijamos para $\Sigma\tau = 0$. Utilizar un segundo eje sirve como comprobación.

EJEMPLO 12–6 **Escalera.** Una escalera de 5.0 m está apoyada contra una pared en un punto a 4.0 m por arriba del piso de cemento, como se muestra en la figura 12-10. La escalera es uniforme y tiene una masa $m = 12.0$ kg. Suponiendo que la pared no tiene fricción (pero el piso sí la tiene), determine las fuerzas ejercidas sobre la escalera por el piso y por la pared.

PLANTEAMIENTO La figura 12-10 muestra el diagrama de cuerpo libre para la escalera, mostrando todas las fuerzas que actúan sobre ella. Como la pared no tiene fricción, sólo puede ejercer una fuerza perpendicular a la pared, y designamos esta fuerza como $\vec{\mathbf{F}}_W$. El piso de cemento ejerce una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_C$ que tiene componentes de fuerza tanto horizontal como vertical: F_{Cx} tiene fricción y F_{Cy} es la fuerza normal. Finalmente, la gravedad ejerce una fuerza $mg = (12.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 118$ N sobre la escalera en su punto medio, ya que ésta es uniforme.

SOLUCIÓN De nuevo utilizamos las condiciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$, $\Sigma\tau = 0$. Necesitaremos las tres ya que hay tres incógnitas: F_W, F_{Cx} y F_{Cy}. La componente y de la ecuación de fuerza es

$$\Sigma F_y = F_{Cy} - mg = 0,$$

por lo que inmediatamente tenemos

$$F_{Cy} = mg = 118 \text{ N}.$$

La componente x de la ecuación de fuerza es

$$\Sigma F_x = F_{Cx} - F_W = 0.$$

Para determinar F_{Cx} y F_w, necesitamos la ecuación de las torcas. Si elegimos calcular las torcas con respecto al punto donde la escalera toca el piso de cemento, entonces $\vec{\mathbf{F}}_C$, que actúa en este punto, tendrá un brazo de palanca de cero y, por lo tanto, no entrará en la ecuación. La escalera toca el piso a una distancia $x_0 = \sqrt{(5.0 \text{ m})^2 - (4.0 \text{ m})^2} = 3.0 \text{ m}$ de la pared (triángulo rectángulo, $c^2 = a^2 + b^2$).
El brazo de palanca para mg es la mitad de esto, o 1.5 m, y el brazo de palanca para F_w es 4.0 m, figura 12-10. Obtenemos

$$\Sigma\tau = (4.0 \text{ m})F_W - (1.5 \text{ m})mg = 0.$$

Entonces,

$$F_W = \frac{(1.5 \text{ m})(12.0 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{4.0 \text{ m}} = 44 \text{ N}.$$

Luego, de la componente x de la ecuación de fuerza,

$$F_{Cx} = F_W = 44 \text{ N}.$$

Como las componentes de $\vec{\mathbf{F}}_C$ son $F_{Cx} = 44$ N y $F_{Cy} = 118$ N,

$$F_C = \sqrt{(44 \text{ N})^2 + (118 \text{ N})^2} = 126 \text{ N} \approx 130 \text{ N}$$

(redondeando a dos cifras significativas) y actúa a un ángulo con respecto al piso de

$$\theta = \tan^{-1}(118 \text{ N}/44 \text{ N}) = 70°.$$

NOTA La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_C$ *no* tiene que actuar a lo largo de la dirección de la escalera, ya que ésta es rígida, y no flexible como una cuerda o un cable.

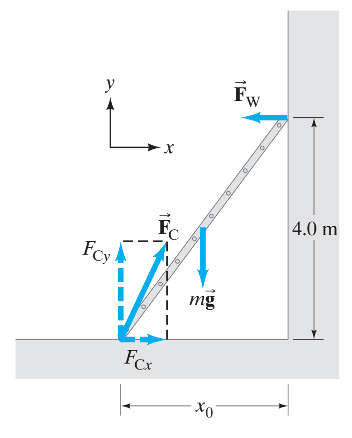


FIGURA 12–10 Una escalera apoyada contra una pared. Ejemplo 12-6.

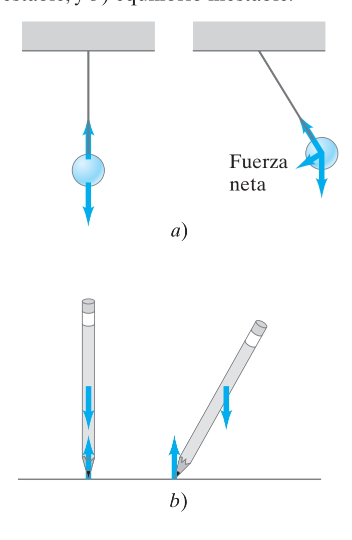
EJERCICIO F ¿Por qué es razonable ignorar la fricción a lo largo de la pared, pero no lo es ignorarla a lo largo del piso?

12–3 Estabilidad y equilibrio

Si no es perturbado, un objeto en equilibrio estático, no sufrirá ninguna aceleración traslacional ni rotacional, pues la suma de todas las fuerzas y la suma de todas las torcas que actúan sobre él son cero. Sin embargo, si el objeto se desplaza ligeramente, son posibles tres situaciones diferentes: (1) el objeto regresa a su posición original, en cuyo caso se dice que está en **equilibrio estable**; (2) el objeto se mueve alejándose de su posición original, en cuyo caso se dice que está en **equilibrio inestable**; o (3) el objeto permanece en su nueva posición, en cuyo caso se dice que está en **equilibrio neutro**.

Considere los siguientes ejemplos. Una bola suspendida libremente de una cuerda está en equilibrio estable: si es desplazada hacia un lado, regresará a su posición original (figura 12-11a) debido a la torca y a la fuerza neta ejercidas sobre ella. Por otro lado, un lápiz de punta está en equilibrio inestable. Si su CG está directamente sobre su punta (figura 12-11b), la fuerza neta y torca neta serán cero. No obstante, si es desplazado aun muy ligeramente, digamos por una pequeña vibración o por una tenue corriente de aire, habrá sobre él una torca y caerá en la dirección del desplazamiento original. Finalmente, un ejemplo de un objeto en equilibrio neutro es una esfera que descansa sobre una mesa horizontal. Si se coloca ligeramente hacia un lado, permanecerá en su nueva posición: ninguna torca neta actuará sobre ella.

FIGURA 12–11 *a*) Equilibrio estable, y *b*) equilibrio inestable.



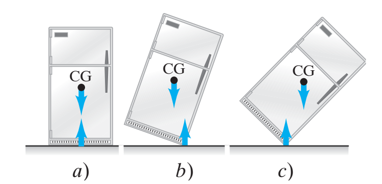
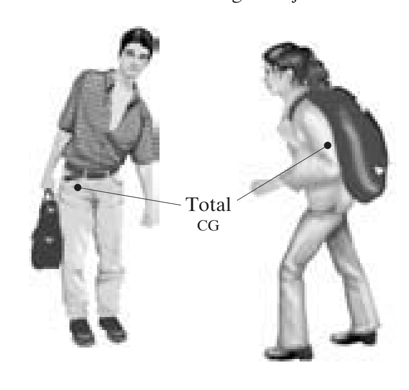


FIGURA 12–12 Equilibrio de un refrigerador que descansa sobre una superficie plana.

En la mayoría de las situaciones, como en el diseño de estructuras y en el trabajo con el cuerpo humano, estamos interesados en mantener un equilibrio estable. En general, un objeto cuyo centro de gravedad (CG) está debajo de su punto de apoyo, como el caso de una bola sobre un resorte, estará en equilibrio estable. Si el CG está arriba de la base de apoyo, tenemos una situación más complicada. Considere un refrigerador vertical (figura 12-12a). Si se inclina ligeramente, regresará a su posición original debido a la torca sobre él, como se muestra en la figura 12-12b. Pero si se inclina demasiado, figura 12-12c, caerá. El punto crítico se alcanza cuando el CG se desplaza más allá del punto pivote. Cuando el CG está en un lado, la torca jala el objeto hacia su base de apoyo original, figura 12-12b. Si el objeto se inclina más allá, el CG sobre pasa el punto pivote y la torca provoca que el objeto se voltee, figura 12-12c. En general, *un objeto cuyo centro de gravedad está arriba de su base de apoyo permanecerá estable, si una línea vertical proyectada hacia abajo desde el* CG *cae dentro de la base de apoyo*. Esto es debido a que la fuerza normal hacia arriba sobre el objeto (que equilibra la gravedad) sólo puede ejercerse dentro del área de contacto, de manera que si la fuerza de gravedad actúa más allá de esta área, actuará una torca neta para volcar el objeto.

La estabilidad puede entonces ser relativa. Un ladrillo que descansa sobre su cara más amplia es más estable que uno que descansa sobre su extremo, ya que se requerirá mayor esfuerzo para volcar aquél. En el caso extremo del lápiz en la figura 12-11b, la base es prácticamente un punto y la perturbación más ligera lo volcará. En general, cuanto mayor sea la base y más bajo esté el CG, más estable será el objeto.

FIGURA 12–13 Los seres humanos ajustan sus posturas para alcanzar la estabilidad cuando cargan objetos.



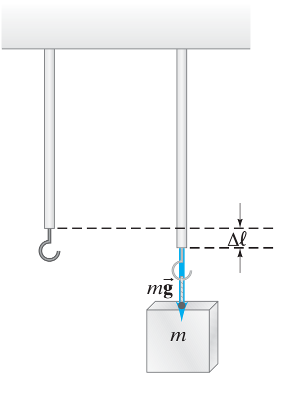
De esta manera, los seres humanos son menos estables que los mamíferos de cuatro patas, que no sólo tienen una mayor base de apoyo debido a sus cuatro patas, sino que además tienen un centro de gravedad más bajo. Al caminar y efectuar otros tipos de movimiento, una persona continuamente desplaza su cuerpo de forma que su CG esté sobre los pies, aunque en un adulto normal esto no requiera de un acto consciente. Incluso un movimiento tan simple como inclinarse, requiere mover la cadera hacia atrás de manera que el CG permanezca sobre los pies y este reposicionamiento lo hacemos sin pensar. Para comprobarlo, colóquese de espalda con los talones contra una pared e intente tocarse los dedos de los pies. Usted no será capaz de hacerlo sin caerse. Las personas que llevan cargas pesadas ajustan automáticamente su postura de modo que el CG de la masa total esté sobre los pies, figura 12-13.

12–4 Elasticidad: Esfuerzo y deformación unitaria

En la primera parte de este capítulo estudiamos cómo calcular las fuerzas sobre objetos en equilibrio. En esta sección estudiaremos los efectos de dichas fuerzas: para cualquier objeto que cambia de forma bajo la acción de fuerzas aplicadas. Si las fuerzas son suficientemente grandes, el objeto se romperá o *fracturará*, como vimos en la sección 12-5.

Elasticidad y la ley de Hooke

FIGURA 12–14 Ley de Hooke; $\Delta\ell \propto$ fuerza aplicada.



Si se ejerce una fuerza sobre un objeto, como la varilla de metal suspendida verticalmente que se muestra en la figura 12-14, la longitud del objeto cambia. Si la cantidad de alargamiento $\Delta\ell$ es pequeña comparada con la longitud del objeto, los experimentos muestran que $\Delta\ell$ es proporcional a la fuerza ejercida sobre el objeto. Como vimos en la sección 7-3, esta proporcionalidad puede escribirse como una ecuación:

$$F = k\,\Delta\ell. \qquad \textbf{(12–3)}$$

Aquí F representa la fuerza de empuje sobre el objeto, $\Delta\ell$ es el cambio de longitud y k es una constante de proporcionalidad. La ecuación 12-3, que en ocasiones se llama **ley de Hooke**† en honor a Robert Hooke (1635-1703), quien primero la notó, es válida para casi cualquier material sólido (desde el acero hasta el hueso); pero sólo hasta cierto punto. Si la fuerza es demasiado grande, el objeto se alarga excesivamente y al final se romperá.

La figura 12-15 muestra una gráfica típica de alargamiento versus fuerza aplicada. Hasta un punto llamado **límite proporcional**, la ecuación 12-3 es una buena aproximación para muchos materiales comunes y la curva es una línea recta. Más allá de este

†El término "ley" aplicado a esta relación no es realmente adecuado, ya que se trata sólo de una aproximación y además se refiere sólo a un conjunto limitado de fenómenos. La mayoría de los físicos prefieren reservar la palabra "ley" para aquellas relaciones que son más profundas, de mayor alcance y precisas, como las leyes de Newton del movimiento o las leyes de la conservación de la energía.

punto la gráfica se desvía de la línea recta y no hay relación simple entre F y $\Delta\Sigma\ell$. Sin embargo, hasta un punto más adelante de la curva llamado **límite elástico**, el objeto regresará a su longitud original si se retira la fuerza aplicada. La región del origen al límite elástico se llama *región elástica*. Si el objeto es alargado más allá del límite elástico, entra a la *región plástica*: no regresa a su longitud original al retirar la fuerza externa, sino que queda deformado permanentemente (como un clip sujetapapeles doblado). El alargamiento máximo se alcanza en el *punto de ruptura*. La fuerza máxima que se puede aplicar sin ruptura se llama **resistencia a la rotura** del material (en realidad fuerza por área unitaria, como veremos en la sección 12-5).

FIGURA 12–15 Fuerza aplicada *versus* alargamiento para un metal típico sometido a tensión.

Modulo de Young

La cantidad de alargamiento de un objeto, como la varilla mostrada en la figura 12-14, depende no sólo de la fuerza aplicada, sino también del material de que esté hecha la varilla y de sus dimensiones. Esto es, la constante k en la ecuación 12-3 puede escribirse en términos de tales factores.

Si comparamos varillas hechas del mismo material pero de diferentes longitudes y áreas transversales, se encuentra que para la misma fuerza aplicada, la cantidad de alargamiento (de nuevo supuesta pequeña en comparación con la longitud total) es proporcional a la longitud original e inversamente proporcional al área de la sección transversal. Es decir, cuanto más largo sea el objeto, mayor será el alargamiento para una fuerza dada; y cuanto más ancho sea, menos se alargará. Todo esto puede combinarse con la ecuación 12-3 para dar

$$\Delta\ell = \frac{1}{E}\frac{F}{A}\ell_0, \qquad \textbf{(12–4)}$$

donde ℓ_0 es la longitud original del objeto, A es el área transversal, y $\Delta\ell$ es el cambio de longitud debido a la fuerza aplicada F. E es una constante de proporcionalidad† conocida como **módulo elástico**, o **módulo de Young**, y su valor depende sólo del material. El valor del módulo de Young para varios materiales está dado en la tabla 12-1 (el módulo de corte y el módulo volumétrico de esta tabla se analizarán mas adelante). Como E es una propiedad que depende sólo del material y es independiente del tamaño del objeto o de su forma, la ecuación 12-4 es más útil para cálculos prácticos que la ecuación 12-3.

†El hecho de que E esté en el denominador, de manera que $1/E$ es la constante de proporcionalidad real, es tan sólo una convención. Cuando reescribimos la ecuación 12-4 para obtener la ecuación 12-5, E está en el numerador.

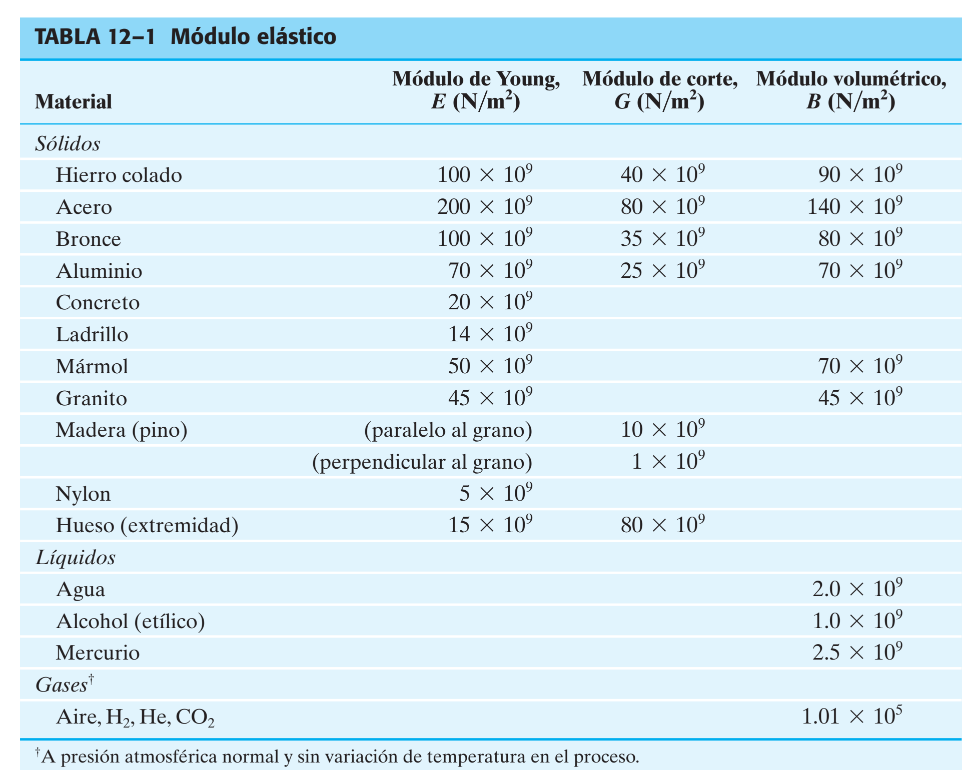


TABLA 12–1 Módulo elástico

Material	Módulo de Young, E (N/m^2)	Módulo de corte, G (N/m^2)	Módulo volumétrico, B (N/m^2)
Sólidos			
Hierro colado	100×10^9	40×10^9	90×10^9
Acero	200×10^9	80×10^9	140×10^9
Bronce	100×10^9	35×10^9	80×10^9
Aluminio	70×10^9	25×10^9	70×10^9
Concreto	20×10^9		
Ladrillo	14×10^9		
Mármol	50×10^9		70×10^9
Granito	45×10^9		45×10^9
Madera (pino)	(paralelo al grano)	10×10^9	
	(perpendicular al grano)	1×10^9	
Nylon	5×10^9		
Hueso (extremidad)	15×10^9	80×10^9	
Líquidos			
Agua			2.0×10^9
Alcohol (etílico)			1.0×10^9
Mercurio			2.5×10^9
Gases†			
Aire, H_2, He, CO_2			1.01×10^5

†A presión atmosférica normal y sin variación de temperatura en el proceso.

EJEMPLO 12–7 **Tensión en un alambre de piano.** Un alambre de acero para piano de 1.60 m de largo tiene un diámetro de 0.20 cm. ¿Qué tan grande es la tensión en el alambre si se alarga 0.25 cm al estirarlo?

PLANTEAMIENTO Suponemos que la ley de Hooke es válida y la usamos en la forma de la ecuación 12-4, encontrando E para acero en la tabla 12-1.

SOLUCIÓN Despejamos F en la ecuación 12-4 y notamos que el área del alambre es $A = \pi r^2 = (3.14)(0.0010\text{ m})^2 = 3.14 \times 10^{-6}\text{ m}^2$. Entonces,

$$F = E\frac{\Delta \ell}{\ell_0}A = \left(2.0 \times 10^{11}\text{ N/m}^2\right)\left(\frac{0.0025\text{ m}}{1.60\text{ m}}\right)\left(3.14 \times 10^{-6}\text{ m}^2\right) = 980\text{ N}.$$

NOTA La fuerte tensión en todos los alambres de un piano debe ser soportada por un marco muy resistente.

EJERCICIO G Dos alambres de acero tienen la misma longitud y están bajo la misma tensión. Sin embargo, el alambre A tiene dos veces el diámetro del alambre B. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera? *a*) El alambre B se estira dos veces más que el alambre A. *b*) El alambre B se estira cuatro veces más que el alambre A. *c*) El alambre A se estira dos veces más que el alambre B. *d*) El alambre A se estira cuatro veces más que el alambre B. *e*) Ambos alambres se estiran lo mismo.

Esfuerzo y deformación unitaria

De la ecuación 12-4 vemos que el cambio en longitud de un objeto es directamente proporcional al producto de la longitud del objeto ℓ_0 y la fuerza por área unitaria F/A aplicada a ella. Es práctica general definir la fuerza por unidad de área como el **esfuerzo:**

$$\text{esfuerzo} = \frac{\text{fuerza}}{\text{área}} = \frac{F}{A},$$

que tiene unidades SI de N/m^2. También, la **deformación unitaria** se define como la razón del cambio en longitud respecto de la longitud original:

$$\text{deformación unitaria} = \frac{\text{cambio en longitud}}{\text{longitud original}} = \frac{\Delta\ell}{\ell_0},$$

y no tiene dimensiones (sin unidades). La deformación unitaria es el cambio fraccional en longitud de un objeto y es una medida de cuánto se ha deformado la varilla. El esfuerzo es aplicado por agentes externos; mientras que la deformación unitaria es la respuesta del material al esfuerzo. La ecuación 12-4 se puede reescribir como

$$\frac{F}{A} = E\frac{\Delta\ell}{\ell_0} \tag{12–5}$$

o bien,

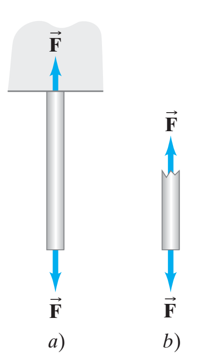
$$E = \frac{F/A}{\Delta\ell/\ell_0} = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación unitaria}}.$$

Vemos entonces que la deformación unitaria es directamente proporcional al esfuerzo en la región (elástica) lineal de la figura 12-15.

Tensión, compresión y esfuerzo de corte

Se dice que la varilla mostrada en la figura 12-16a está sometida a *tensión* o a **esfuerzo de tensión**. No sólo hay una fuerza que jala hacia abajo en el extremo inferior de la varilla, sino que la varilla está en equilibrio, sabemos que el soporte en la parte superior está ejerciendo una fuerza igual hacia arriba,[†] sobre el extremo superior de la varilla, figura 12-16a. De hecho, este esfuerzo de tensión existe a lo largo de todo el material. Por ejemplo, considere la mitad inferior de una varilla suspendida como se muestra en la figura 12-16b. Esta mitad inferior está en equilibrio, por lo que debe haber una fuerza hacia arriba sobre ella que equilibre la fuerza hacia abajo en su extremo inferior. ¿Qué ejerce esta fuerza hacia arriba? Debe ser la parte superior de la varilla. Vemos entonces que las fuerzas externas aplicadas a un objeto dan lugar a fuerzas internas, o a esfuerzos, dentro del material mismo.

FIGURA 12–16 Esfuerzos que existen *dentro* del material.



[†] O una fuerza mayor si el peso de la varilla no puede ignorarse en comparación con F.

La deformación o deformación unitaria debida al esfuerzo de tensión es sólo un tipo de esfuerzo al que pueden estar sometidos los materiales. Hay otros dos tipos comunes de esfuerzo: de compresión y de corte. El **esfuerzo de compresión** es el opuesto exacto al de tensión. En vez de estirarse, el material se comprime: las fuerzas actúan internamente sobre el objeto. Las columnas que soportan un peso, como las columnas de un templo griego (figura 12-17) están sometidas a esfuerzos de compresión. Las ecuaciones 12-4 y 12-5 se aplican tanto a compresión como a tensión, y los valores del módulo E son usualmente los mismos.



FIGURA 12–17 Este templo griego (en Agrigento, Sicilia) fue construido hace 2500 años y muestra la construcción con postes y vigas. Las columnas están bajo compresión.

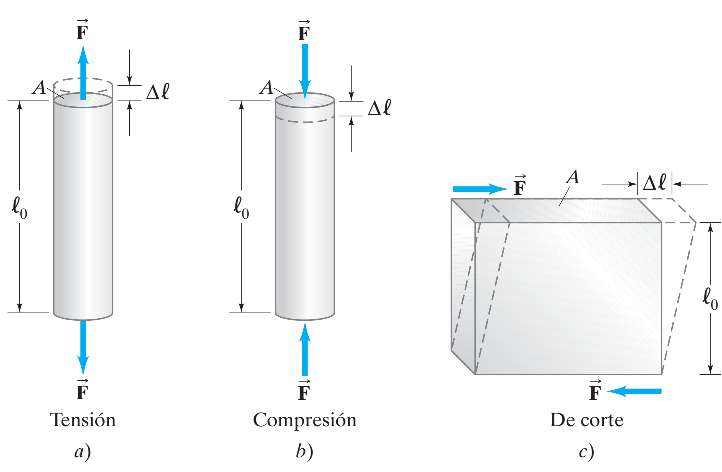


FIGURA 12–18 Los tres tipos de esfuerzo para objetos rígidos. *a*) Tensión *b*) Compresión *c*) De corte

La figura 12-18 compara los esfuerzos de tensión y compresión, así como el tercer tipo, o sea, el esfuerzo de corte. Un objeto sometido a **esfuerzo de corte** tiene fuerzas iguales y opuestas aplicadas *sobre* sus caras opuestas. Un ejemplo es un libro o un ladrillo, firmemente unido a una mesa, sobre el cual se ejerce una fuerza paralela a la superficie de la mesa. La mesa ejerce una fuerza igual y opuesta a lo largo de la superficie inferior del objeto. Aunque las dimensiones del objeto no cambian considerablemente, la forma del objeto sí cambia, como se muestra en la figura 12-18c. Una ecuación similar a la 12-4 se puede usar para calcular la deformación unitaria por corte:

$$\Delta\ell = \frac{1}{G}\frac{F}{A}\ell_0, \qquad \textbf{(12–6)}$$

pero $\Delta\ell$, ℓ_0 y A deben volver a interpretarse como se indica en la figura 12-18c. Advierta que A es el área de la superficie *paralela* a la fuerza aplicada (y no perpendicular como en el caso de tensión y compresión), y $\Delta\ell$ es *perpendicular* a ℓ_0. La constante de proporcionalidad G se llama **módulo de corte** y generalmente su valor está entre un medio y un tercio del valor del módulo de Young E (véase la tabla 12-1). La figura 12-19 ilustra por qué $\Delta\ell \propto \ell_0$: el libro más grueso se desplaza más con el mismo esfuerzo cortante.

FIGURA 12–19 El libro más grueso *a*) se desplaza más que el libro más delgado *b*) con la misma fuerza de corte aplicada.



a)



b)

Cambio de volumen: Módulo volumétrico

Si un objeto está sometido a fuerzas hacia adentro por todos lados, su volumen disminuirá. Una situación común es un objeto sumergido en un fluido; en este caso, el fluido ejerce una presión sobre el objeto en todas direcciones, como lo veremos en el capítulo 13. La *presión* se define como fuerza por unidad de área y, por ello, es equivalente al esfuerzo. Para esta situación el cambio de volumen, ΔV, es proporcional al volumen original V_0 y al cambio en la presión ΔP. Obtenemos así una relación en la misma forma que la ecuación 12-4, pero con una constante de proporcionalidad llamada el **módulo volumétrico** B:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{1}{B}\Delta P \qquad \textbf{(12–7)}$$

o bien,

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V_0}.$$

El signo menos significa que el volumen *disminuye* si la presión aumenta.

Los valores del módulo volumétrico están dados en la tabla 12-1. Como los líquidos y los gases no tienen una forma fija, sólo el módulo volumétrico se aplica a ellos, y no el módulo de corte o el módulo de Young.

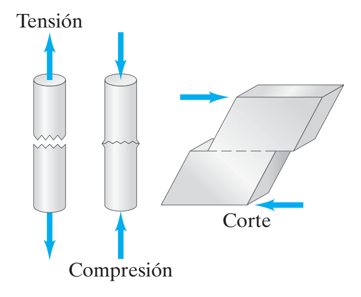


FIGURA 12–20 Fractura como resultado de los tres tipos de esfuerzo.

12–5 Fractura

Si el esfuerzo sobre un objeto sólido es demasiado grande, el objeto se fractura o se rompe, figura 12-20. La tabla 12-2 indica las resistencias a la rotura por tensión, compresión y corte para diversos materiales. Esos valores dan la fuerza máxima por unidad de área, o esfuerzo, que un objeto puede resistir bajo cada uno de esos tres tipos de esfuerzo, para diversos materiales. Sin embargo, son sólo valores representativos y el valor real para un espécimen dado puede diferir considerablemente. Por lo tanto, es necesario incluir un *factor de seguridad* que puede variar entre 3 y 10 o más, es decir, los esfuerzos reales sobre una estructura no deben exceder de un décimo a un tercio de los valores dados en la tabla. Usted puede encontrar tablas de "esfuerzos permisibles" donde se han incluido ya los factores de seguridad apropiados.

TABLA 12–2 Resistencias a la rotura de materiales (fuerza/área)

Material		Resistencia a tensión (N/m^2)	Resistencia a la compresión (N/m^2)	Resistencia al corte (N/m^2)
Hierro colado		170×10^6	550×10^6	170×10^6
Acero		500×10^6	500×10^6	250×10^6
Bronce		250×10^6	250×10^6	200×10^6
Aluminio		200×10^6	200×10^6	200×10^6
Concreto		2×10^6	20×10^6	2×10^6
Ladrillo			35×10^6	
Mármol			80×10^6	
Granito			170×10^6	
Madera (pino)	(paralelo al grano)	40×10^6	35×10^6	5×10^6
	(perpendicular al grano)		10×10^6	
Nylon		500×10^6		
Hueso (extremidad)		130×10^6	170×10^6	

EJEMPLO 12–8 ESTIMACIÓN **Rompimiento de la cuerda de piano.** La cuerda de acero del piano de la que se habló en el ejemplo 12-7 medía 1.60 m de longitud y 0.20 cm de diámetro. ¿Aproximadamente qué fuerza de tensión la rompería?

PLANTEAMIENTO Sea el esfuerzo de tensión F/A igual a la resistencia a la tensión del acero indicada en la tabla 12-2.

SOLUCIÓN El área de la cuerda es $A = \pi r^2$, donde $r = 0.10\text{ cm} = 1.0 \times 10^{-3}$ m. La tabla 12-2 nos dice

$$\frac{F}{A} = 500 \times 10^6\,\text{N/m}^2,$$

de modo que la cuerda probablemente se romperá si la fuerza excede

$$F = \left(500 \times 10^6\,\text{N/m}^2\right)(\pi)\left(1.0 \times 10^{-3}\,\text{m}\right)^2 = 1600\,\text{N}.$$

Como se observa en la tabla 12-2, el concreto (como la piedra y el ladrillo) es razonablemente fuerte bajo compresión, aunque extremadamente débil bajo tensión. El concreto puede entonces usarse para columnas verticales sometidas a compresión; sin embargo, es de poco valor como viga ya que no puede resistir las fuerzas de tensión que resultan de inevitable pandeo (flexión) de la parte inferior de la viga (figura 12-21).

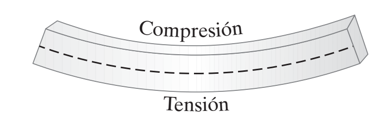


FIGURA 12–21 Una viga se flexiona, un poco por lo menos, (mostrada aquí exageradamente), aun bajo su propio peso. La viga cambia entonces de forma de manera que su parte superior queda comprimida y la porción inferior queda tensionada (alargada). Aparecen también esfuerzos de corte dentro de la viga.

El *concreto reforzado*, en el cual se insertan varillas de hierro en el concreto, es mucho más fuerte (figura 12-22). Más fuerte aún es el *concreto presforzado*, que también contiene varillas de hierro o una malla de alambre; sin embargo, durante el colado del concreto, las varillas o el alambre se mantienen bajo tensión. Después de que el concreto fragua, se libera la tensión en el acero, sometiendo el concreto a compresión. La cantidad de esfuerzo de compresión es cuidadosamente predeterminada, de manera que cuando se aplican cargas a la viga, tales esfuerzos reducen la compresión en el borde inferior, pero nunca ponen al concreto en tensión.



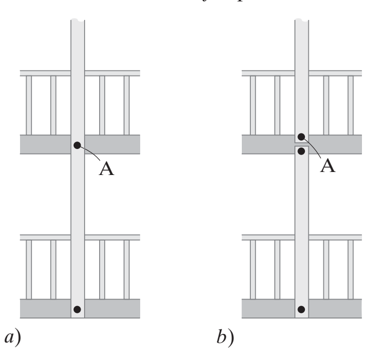
FIGURA 12–22 Varillas de acero alrededor de las cuales se vierte concreto para lograr resistencia.

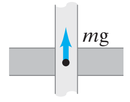
EJEMPLO CONCEPTUAL 12–9 **Una sustitución trágica.** Dos pasillos, uno arriba del otro, están suspendidos de varillas verticales, unidas al techo de un alto lobby de hotel, como se muestra en la figura 12-23a. El diseño original indicaba varillas sencillas de 14 m de longitud, pero cuando tales varillas largas ocasionaron problemas en su instalación, se decidió reemplazar cada varilla por dos más cortas, como se muestra (esquemáticamente) en la figura 12-23b. Determine la fuerza neta ejercida por las varillas sobre el pasador de apoyo A (supuestos del mismo tamaño) para cada diseño. Suponga que cada varilla vertical soporta una masa m de cada pasillo.

RESPUESTA La sola varilla vertical larga en la figura 12-23a ejerce una fuerza hacia arriba de magnitud mg sobre el pasador A para soportar la masa m del pasillo superior. ¿Por qué? Porque el pasador está en equilibrio y la otra fuerza que equilibra a ésta es la fuerza hacia abajo mg ejercida sobre él por el pasillo superior (figura 12-23c). Se tiene entonces un esfuerzo de corte sobre el pasador, ya que la varilla jala hacia arriba sobre un extremo del pasador y el pasillo jala hacia abajo sobre el otro extremo. La situación en que dos varillas más cortas soportan los pasillos (figura 12-23b) se muestra en la figura 12-23d, en la que sólo se muestran las conexiones del pasillo superior. La varilla inferior ejerce una fuerza mg hacia abajo sobre el pasador inferior de los dos pasadores porque éste soporta el pasillo inferior. La varilla superior ejerce una fuerza de 2 mg sobre el pasador superior (pasador A) porque la varilla superior soporta *ambos* pasillos. Vemos entonces que cuando los constructores sustituyeron dos varillas más cortas por una sola larga, se *duplicó* el esfuerzo en el pasador A. Lo que tal vez pareció una simple sustitución, de hecho, condujo a un trágico colapso en 1981 (figura 12-1) con una pérdida de más de 100 vidas humanas. El tener intuición por la física y ser capaz de efectuar cálculos sencillos basados en esa disciplina, puede tener una gran influencia, literalmente, sobre la vida de la gente.

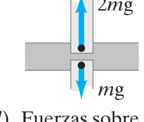
FÍSICA APLICADA
Un colapso trágico

FIGURA 12–23 Ejemplo 12–9.





c) Fuerza sobre el pasador A ejercida por la varilla vertical



d) Fuerzas sobre los pasadores en A ejercidas por las varillas verticales

EJEMPLO 12–10 **Fuerza cortante sobre una viga.** Una viga uniforme de pino, de 3.6 m de largo y sección transversal de 9.5 cm × 14 cm, descansa sobre dos soportes cerca de sus extremos, como se muestra en la figura 12-24. La masa de la viga es de 25 kg y está cargada por dos soportes de techo verticales, cada uno en los tercios del claro. ¿Qué fuerza máxima F_L puede ejercer cada uno de los soportes del techo, sin hacer fallar por corte la viga de pino en sus soportes? Use un factor de seguridad de 5.0.

PLANTEAMIENTO La simetría presente facilita nuestros cálculos. Primero encontramos la resistencia al corte del pino en la tabla 12-2 y usamos el factor de seguridad de 5.0 para obtener F a partir de $F/A \leq \frac{1}{5}$ (resistencia al corte). Luego usamos $\Sigma\tau = 0$ para encontrar F_L.

SOLUCIÓN Cada soporte ejerce una fuerza hacia arriba F (hay simetría), cuyo valor máximo puede ser (véase la tabla 12-2).

$$F = \frac{1}{5}A(5 \times 10^6\,\mathrm{N/m^2}) = \frac{1}{5}(0.095\,\mathrm{m})(0.14\,\mathrm{m})(5 \times 10^6\,\mathrm{N/m^2}) = 13{,}000\,\mathrm{N}.$$

Para determinar la fuerza máxima de carga F_L, calculamos la torca con respecto al extremo izquierdo de la viga (considerando el sentido antihorario como positivo)

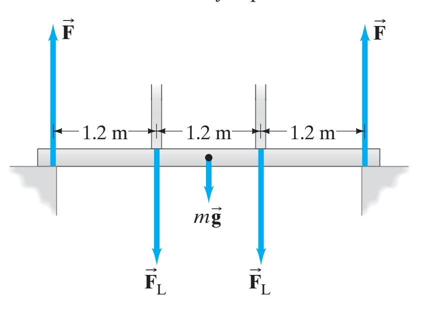
$$\Sigma\tau = -F_L(1.2\,\mathrm{m}) - (25\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/s^2})(1.8\,\mathrm{m}) - F_L(2.4\,\mathrm{m}) + F(3.6\,\mathrm{m}) = 0$$

por lo que cada uno de los dos soportes de techo puede ejercer

$$F_L = \frac{(13{,}000\,\mathrm{N})(3.6\,\mathrm{m}) - (250\,\mathrm{N})(1.8\,\mathrm{m})}{(1.2 + 2.4)} = 13{,}000\,\mathrm{N}.$$

La masa total de techo que la viga puede soportar es (2)(13,000 N)/(9.8 m/s^2) = 2600 kg.

FIGURA 12–24 Ejemplo 12–10.



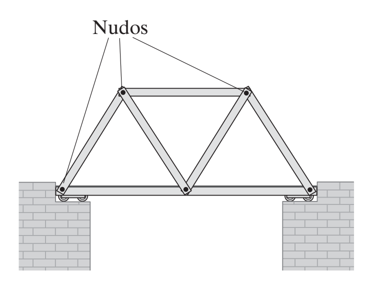


FIGURA 12–25 Una armadura de puente.

*12–6 Armaduras y puentes

Una viga usada para salvar un amplio espacio, como en el caso de un puente, está sometida a fuertes esfuerzos de los tres tipos que vimos en la figura 12-21: compresión, tensión y cortante. Un dispositivo de ingeniería básica para soportar grandes claros es la *armadura*, un ejemplo de la cual se muestra en la figura 12-25. Las armaduras de madera para puentes fueron diseñadas inicialmente por el gran arquitecto Andrea Palladio (1518-1580), quien es famoso por su diseño de edificios públicos y casas de campo. Con la introducción del acero en el siglo XIX se empezaron a usar armaduras mucho más resistentes, aunque las armaduras de madera se siguieron usando para soportar los techos de casas y cabañas en la montaña (figura 12-26).

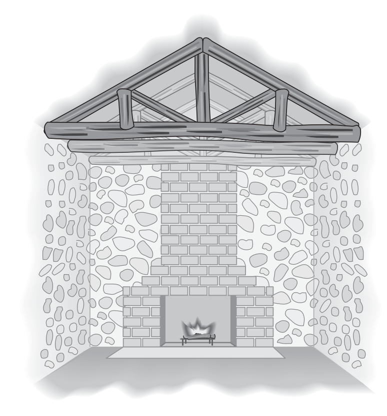
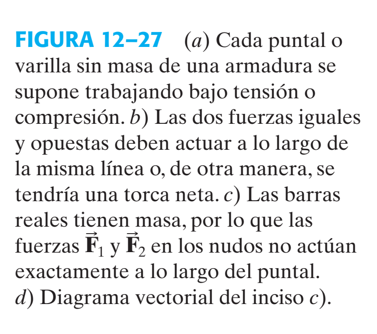


FIGURA 12–26 Una armadura de techo.

Básicamente, una **armadura** es una estructura de varillas o puntales unidos en sus extremos por pasadores o remaches, siempre dispuestos formando triángulos. (Los triángulos son relativamente estables en comparación con los rectángulos, que fácilmente se convierten en paralelogramos bajo fuerzas laterales y después se colapsan). El lugar donde los puntales se unen por medio de un pasador se llama **nudo** o **nodo**.

Se supone comúnmente que los puntales de una armadura trabajan a compresión o tensión puras, es decir, las fuerzas actúan a lo largo del eje longitudinal de cada puntal, figura 12-27a. Esto es un caso ideal, y es válido sólo si un puntal no tiene masa y no soporta peso a lo largo de su longitud, en cuyo caso sólo actúan dos fuerzas sobre el puntal, en los extremos, como se muestra en la figura 12-27a. Si el puntal está en equilibrio, esas dos fuerzas deben ser iguales y en sentidos opuestos $\left(\Sigma\vec{\mathbf{F}} = 0\right)$. Pero, ¿no podrían formar un ángulo como en la figura 12-27b? No, porque entonces $\Sigma\vec{\boldsymbol{\tau}}$ no podría ser cero. Las dos fuerzas *deben* actuar a lo largo del puntal para que éste quede en equilibrio. Pero en un caso real de un puntal con masa, se tienen tres fuerzas sobre éste, como se indica en la figura 12-27c, y $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$ no actúan a lo largo del puntal; el diagrama de vectores en la figura 12-27d muestra que $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 + m\vec{\mathbf{g}} = 0$. ¿Puede usted ver porqué $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$ apuntan *por arriba* del puntal? (Tome $\Sigma\tau$ con respecto a cada extremo).



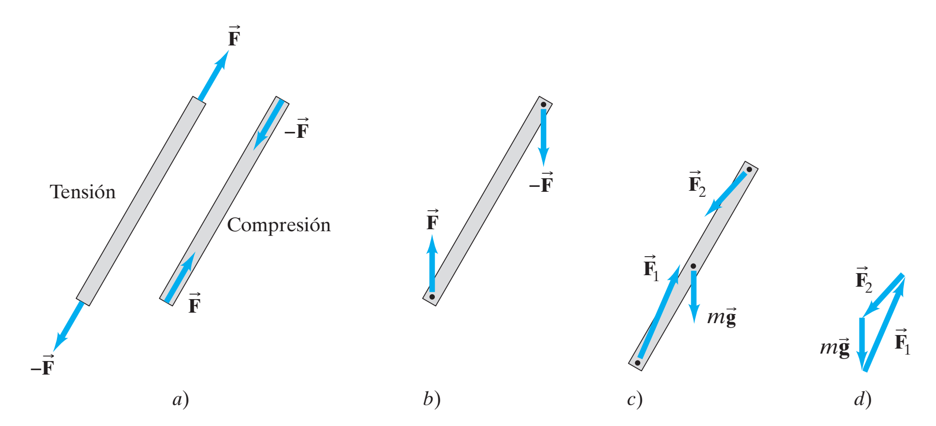


FIGURA 12–27 (*a*) Cada puntal o varilla sin masa de una armadura se supone trabajando bajo tensión o compresión. *b*) Las dos fuerzas iguales y opuestas deben actuar a lo largo de la misma línea o, de otra manera, se tendría una torca neta. *c*) Las barras reales tienen masa, por lo que las fuerzas $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$ en los nudos no actúan exactamente a lo largo del puntal. *d*) Diagrama vectorial del inciso *c*).

Considere de nuevo la viga simple en el ejemplo 12-5, figura 12-9. La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{H}}$ en el pasador *no* es a lo largo de la viga, pero actúa según un ángulo hacia arriba. Si esta viga no tuviera masa, vemos de la ecuación (iii) en el ejemplo 12-5 con $m = 0$, que $F_{\mathrm{H}y} = 0$ y entonces $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{H}}$ actuaría a lo largo de la viga.

La hipótesis de que las fuerzas en cada puntal de una armadura actúan sólo a lo largo de los puntales es, sin embargo, muy útil cuando las cargas actúan sólo en los nudos y son mucho mayores que el peso de los puntales mismos.

EJEMPLO 12–11 **Una armadura de puente.** Determine la tensión o compresión en cada uno de los puntales de la armadura del puente de la figura 12-28a. El puente tiene 64 m de largo y soporta una losa uniforme de camino de concreto, cuya masa total es de 1.40×10^6 kg. Use el **método de los nudos**, que implica (1) dibujar un diagrama de cuerpo libre de la armadura en conjunto, y (2) dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada uno de los nudos, uno a la vez, y haciendo $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = 0$ en cada pasador. Ignore la masa de los puntales. Suponga que todos los triángulos son equiláteros.


FÍSICA APLICADA
La armadura de un puente

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Método de los nudos

PLANTEAMIENTO Cualquier puente tiene dos armaduras, una a cada lado del camino. Considere sólo una armadura, figura 12-28a, que soportará la mitad del peso de la losa del camino. Esto es, nuestra armadura soporta una masa total $M = 7.0 \times 10^5$ kg. Primero dibujamos un diagrama de cuerpo libre de toda la armadura, que suponemos descansando sobre soportes en cada extremo que ejercen fuerzas hacia arriba $\vec{\mathbf{F}}_1$ y $\vec{\mathbf{F}}_2$, figura 12-28b. Suponemos que la masa de la losa del camino actúa por completo en el centro, sobre el pasador *C*, como se indica. Por simetría vemos que cada uno de los soportes extremos carga la mitad del peso [o determine una ecuación de torca relativa, digamos, respecto del punto A: $(F_2)(\ell) - Mg(\ell/2) = 0$], por lo que

$$F_1 = F_2 = \tfrac{1}{2}Mg.$$

SOLUCIÓN Veamos ahora el pasador A y apliquemos a él $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = 0$. Rotulamos las fuerzas sobre el pasador A debido a la carga en cada barra o puntal con dos subíndices: $\vec{\mathbf{F}}_{AB}$ es la fuerza ejercida por el puntal (barra) AB y $\vec{\mathbf{F}}_{AC}$ es la fuerza ejercida por la puntal (barra) AC. $\vec{\mathbf{F}}_{AB}$ y $\vec{\mathbf{F}}_{AC}$ actúan a lo largo de sus puntales respectivos; sin embargo, al no saber si las barras están a compresión o a tensión, podríamos dibujar cuatro diagramas de cuerpo libre diferentes, como se muestra en la figura 12-28c. Sólo el de la izquierda podría dar $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = 0$, por lo que inmediatamente conocemos los sentidos de $\vec{\mathbf{F}}_{AB}$ y $\vec{\mathbf{F}}_{AC}$.† Estas fuerzas actúan sobre el pasador. La fuerza que el pasador A ejerce sobre el puntal AB es opuesta en dirección a $\vec{\mathbf{F}}_{AB}$ (tercera ley de Newton), por lo que el puntal AB está en compresión y el AC está en tensión. Calculemos ahora las magnitudes de $\vec{\mathbf{F}}_{AB}$ y $\vec{\mathbf{F}}_{AC}$. En el pasador A:

$$\Sigma F_x = F_{AC} - F_{AB}\cos 60° = 0$$
$$\Sigma F_y = F_1 - F_{AB}\,\text{sen}\,60° = 0.$$

Se tiene entonces,

$$F_{AB} = \frac{F_1}{\text{sen}\,60°} = \frac{\frac{1}{2}Mg}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}Mg,$$

que es igual a $(7.0 \times 10^5\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2)/\sqrt{3} = 4.0 \times 10^6\,\text{N}$; y

$$F_{AC} = F_{AB}\cos 60° = \frac{1}{2\sqrt{3}}Mg.$$

A continuación nos fijamos en el pasador B, cuyo diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 12-28d. [Convénzase de que si $\vec{\mathbf{F}}_{BD}$ o $\vec{\mathbf{F}}_{BC}$ tuvieran sentido opuesto, $\Sigma\vec{\mathbf{F}}$ no podría ser cero; note que $\vec{\mathbf{F}}_{BA} = -\vec{\mathbf{F}}_{AB}$ (y $F_{BA} = F_{AB}$) porque ahora estamos en el extremo opuesto del puntal AB]. Vemos que BC está a tensión y BD está a compresión. (Recuerde que las fuerzas sobre las barras son opuestas a las fuerzas mostradas que actúan sobre el pasador). Hacemos $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = 0$:

$$\Sigma F_x = F_{BA}\cos 60° + F_{BC}\cos 60° - F_{BD} = 0$$
$$\Sigma F_y = F_{BA}\,\text{sen}\,60° - F_{BC}\,\text{sen}\,60° = 0.$$

Entonces como $F_{BA} = F_{AB}$ tenemos

$$F_{BC} = F_{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}Mg,$$

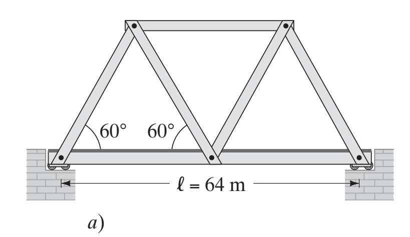
y

$$F_{BD} = F_{AB}\cos 60° + F_{BC}\cos 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}Mg\left(\tfrac{1}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}Mg\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}Mg.$$

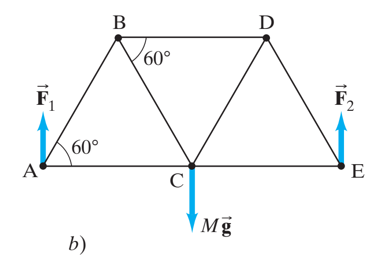
La solución está completa. Por simetría, $F_{DE} = F_{AB}$, $F_{CE} = F_{AC}$, y $F_{CD} = F_{BC}$.

NOTA Como verificación, calculamos ΣF_x y ΣF_y para el pasador C y vemos que efectivamente suman cero. La figura 12-28e muestra el diagrama de cuerpo libre.

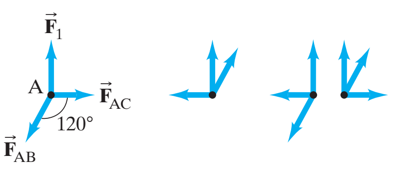
†Si elegimos el sentido de una fuerza en un diagrama opuesto al sentido verdadero, obtendremos un signo menos.



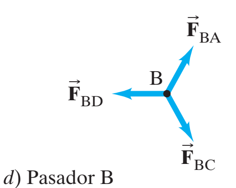
a)



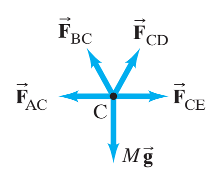
b)



c) Pasador A (diferentes suposiciones)



d) Pasador B



e) Pasador C

FIGURA 12–28 Ejemplo 12-11. *a*) Una armadura de puente. Diagramas de cuerpo libre: *b*) para toda la armadura, *c*) para el pasador A (diferentes suposiciones), *d*) para el pasador B y *e*) para el pasador C.

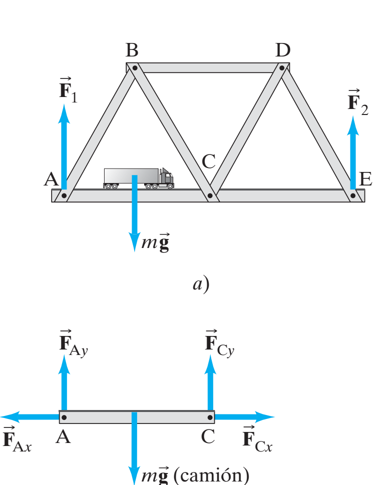


FIGURA 12–29 *a*) Armadura con un camión de masa m en el centro del puntal AC. *b*) Fuerza sobre el puntal AC.

El ejemplo 12-11 consideró la carga de la losa del camino en el centro geométrico C. Consideremos ahora una fuerte carga como la de un camión pesado, soportada por el puntal AC en su punto medio, como se muestra en la figura 12-29a. El puntal AC se flexiona bajo esta carga, lo cual nos indica que hay un esfuerzo al corte en el puntal AC. La figura 12-29b muestra las fuerzas ejercidas sobre el puntal AC; el peso del camión, $m\vec{g}$, y las fuerzas $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_C$ que ejercen los pasadores A y C sobre el puntal. [Advierta que $\vec{F}_1$ no aparece porque es una fuerza (ejercida por soportes externos) que actúa sobre el pasador A, no sobre el puntal AC.] Las fuerzas que los pasadores A y C ejercen sobre el puntal AC no actuarán sólo a lo largo del puntal, sino que tendrán también componentes verticales, perpendiculares al puntal, creando esfuerzos cortantes para equilibrar el peso del camión, $m\vec{g}$, Los otros puntales, que no tienen peso, permanecen bajo tensión o compresión pura. Los problemas 53 y 54 tratan esta situación, y un paso inicial en su resolución consiste en calcular las fuerzas $\vec{F}_A$ y $\vec{F}_C$ usando ecuaciones de torca para el puntal.

Para puentes muy grandes, las armaduras son muy pesadas. Una solución es construir puentes colgantes con la carga sostenida por cables relativamente ligeros sometidos a tensión, que soportan el camino por medio de cables verticales cercanamente espaciados, como se muestra en la figura 12-30 y en la foto en la primera página de este capítulo.

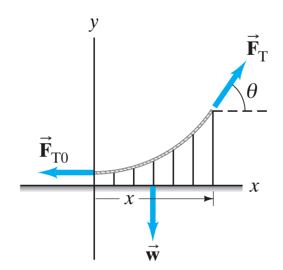


Puente colgante



FIGURA 12–30 Puente colgante.

FIGURA 12–31 Ejemplo 12–12.



EJEMPLO 12–12 **Puente colgante.** Determine la forma del cable entre las dos torres de un puente colgante (figura 12-30), suponiendo que el peso de la superficie del camino está soportada uniformemente a lo largo de su longitud. Ignore el peso del cable.

PLANTEAMIENTO Hacemos $x = 0$, $y = 0$ en el centro del claro, como se indica en la figura 12-31. Sea $\vec{F}_{T0}$ la tensión en el cable en $x = 0$; ésta actúa horizontalmente como se muestra. Sea F_T la tensión en el cable en algún otro lugar donde la coordenada horizontal es x, como se indica. Esta sección del cable soporta una porción de la superficie del camino cuyo peso w es proporcional a la distancia x, ya que la superficie del camino se supone uniforme; esto es,

$$w = \lambda x$$

donde λ es el peso por longitud unitaria.

SOLUCIÓN Consideramos ahora $\Sigma\vec{F} = 0$:

$$\Sigma F_x = F_T \cos\theta - F_{T0} = 0$$

$$\Sigma F_y = F_T \operatorname{sen}\theta - w = 0.$$

Dividimos estas dos ecuaciones,

$$\tan\theta = \frac{w}{F_{T0}} = \frac{\lambda x}{F_{T0}}.$$

La pendiente de nuestra curva (el cable) en cualquier punto es

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta$$

o bien,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda}{F_{T0}}x.$$

Integramos esto:

$$\int dy = \frac{\lambda}{F_{T0}}\int x\,dx$$

$$y = Ax^2 + B$$

donde hacemos $A = \lambda/F_{T0}$ y B es una constante de integración. Ésta es justamente la ecuación de una parábola.

NOTA Los puentes reales tienen cables con masa, por lo que los cables cuelgan sólo aproximadamente como una parábola, si bien a menudo siguen una curva muy parecida.

*12–7 Arcos y domos

Hay varias formas que los ingenieros y arquitectos usan para salvar claros: vigas, armaduras y los puentes colgantes. En esta sección veremos arcos y domos.

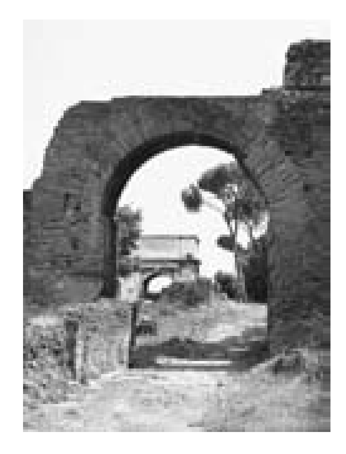


FIGURA 12–32 Arcos circulares en foro romano. El de la parte posterior es el Arco de Tito.



FIGURA 12–33 Un arco se usó aquí para salvar una barranca en la costa de California.



FÍSICA APLICADA

Arquitectura: Vigas, arcos y domos

El **arco** semicircular (figuras 12-32 y 12-33) fue introducido por los antiguos romanos hace 2000 años. Aparte de su belleza estética, fue una enorme innovación tecnológica. La ventaja del arco "verdadero" o semicircular es que, si está bien diseñado, sus piedras en forma de cuña experimentan esfuerzos que son principalmente de compresión, aun cuando estén soportando una carga grande como la pared y el techo de una catedral. Como las piedras se fuerzan a oprimirse entre sí, están trabajando principalmente bajo compresión (véase la figura 12-34). Sin embargo, note que el arco transfiere a los soportes fuerzas tanto horizontales como verticales. Un arco redondo que consiste en muchas piedras bien formadas puede salvar un claro bastante ancho. Sin embargo, fue necesario utilizar considerables contrafuertes en los lados para soportar las componentes horizontales de las fuerzas.

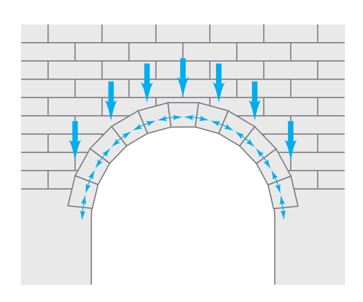
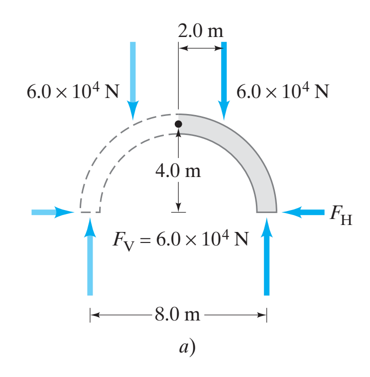


FIGURA 12–34 Las piedras en un arco circular (véase la figura 12-32) trabajan principalmente bajo compresión.

El arco apuntado empezó a usarse alrededor del año 1100 d.C. y se convirtió en el sello característico de las grandes catedrales góticas. Fue también una importante innovación técnica que se usó primero para soportar cargas pesadas como la torre de una catedral, y como el arco central. Aparentemente, los constructores se dieron cuenta de que, debido a lo empinado del arco apuntado, las fuerzas debidas al peso por arriba podían "bajarse" de manera más vertical, por lo que se necesitaría menos la acción de los contrafuertes horizontales. El arco apuntado reduce la carga sobre las paredes y así podía tenerse mayor apertura y luz. La menor acción necesaria de los contrafuertes fue proporcionada en el exterior por atractivos contrafuertes volantes (figura 12-35).



FIGURA 12–35 Contrafuertes volantes (catedral de Norte Dame, en París).



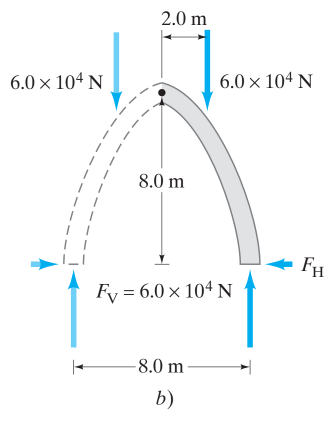


FIGURA 12–36 *a*) Fuerzas en un arco redondo, comparadas *b*) con las de un arco apuntado.

Hacer un análisis exacto de un arco de piedra es bastante difícil en la práctica. Pero si hacemos algunas hipótesis simplificadoras, demostraríamos por qué la componente horizontal de la fuerza en la base es menor para un arco apuntado, que para uno circular. La figura 12-36 muestra un arco redondo y un arco apuntado, cada uno con 8.0 m de claro. La altura del arco redondo es entonces de 4.0 m, mientras que la del arco apuntado es mayor y se ha elegido igual a 8.0 m. Cada arco soporta un peso de 12.0×10^4 N ($= 12{,}000\text{ kg} \times g$) que, por simplicidad, hemos dividido en dos partes (cada una de 6.0×10^4 N) actuando sobre las dos mitades de cada arco, como se muestra. Para que el sistema esté en equilibrio, cada uno de los soportes debe ejercer una fuerza hacia arriba de 6.0×10^4 N. Por equilibrio rotacional, cada soporte ejerce también una fuerza horizontal F_H en la base del arco, y es ésta la que queremos calcular. Nos enfocamos sólo en la mitad derecha de cada arco. Hacemos igual a cero la torca total calculada con respecto al vértice del arco, debido a las fuerzas ejercidas sobre esa mitad del arco. Para el arco redondo, la ecuación de torca ($\Sigma\tau = 0$) es (véase la figura 12-36a)

$$(4.0\text{ m})(6.0 \times 10^4\text{ N}) - (2.0\text{ m})(6.0 \times 10^4\text{ N}) - (4.0\text{ m})(F_H) = 0.$$

Entonces $F_H = 3.0 \times 10^4$ N para el arco redondo. En cambio, para el arco apuntado, la ecuación de torca es (véase la figura 12-36b)

$$(4.0\text{ m})(6.0 \times 10^4\text{ N}) - (2.0\text{ m})(6.0 \times 10^4\text{ N}) - (8.0\text{ m})(F_H) = 0.$$

Despejando, encontramos que $F_H = 1.5 \times 10^4$ N, ¡que es sólo la mitad que para el arco redondo! De este cálculo podemos ver que la fuerza horizontal de soporte requerida para un arco apuntado es menor, dado que el arco es más alto y se tiene, por lo tanto, un brazo de palanca más grande para esta fuerza. Ciertamente, cuanto más empinado sea el arco, menor será la componente horizontal de la fuerza necesaria y, por consiguiente, más vertical será la fuerza ejercida en la base del arco.

Mientras que un arco salva un claro bidimensional, un **domo**, que es básicamente un arco girado alrededor de un eje vertical, salva un espacio tridimensional. Los romanos construyeron los primeros domos grandes. Su forma era hemisférica y algunos todavía están de pie, como el del Panteón en Roma (figura 12-37), construido hace 2000 años.



FIGURA 12–37 Interior del Panteón en Roma, construido hace casi 2000 años. Esta imagen, que ilustra la gran cúpula y su abertura central que permite la entrada de la luz, fue pintada por Panini alrededor de 1740. Las fotografías no captan su grandeza como lo hace esta pintura.



FIGURA 12–38 The skyline of Florence, showing Brunelleschi's dome on the cathedral.

Catorce siglos más tarde, comenzó a construirse una nueva catedral en Florencia. Debía tener un domo de 43 m para rivalizar con el del Panteón, cuya construcción seguía siendo un misterio. La nueva cúpula tenía que descansar sobre un "tambor" sin empalmes externos. Filippo Brunelleschi (1377-1446) diseñó un domo en contra (figura 12-38), pues un domo en punta, al igual que un arco en punta, ejerce un menor empuje lateral contra su base. Un domo como un arco, no es estable, sino hasta que todas las piedras están en su lugar. Para soportar domos más pequeños durante la construcción, se usaron marcos de madera. Pero ningún árbol era lo suficientemente grande, ni lo suficientemente fuerte, como para abarcar el espacio requerido de 43 m. Brunelleschi decidió intentar construir el domo en capas horizontales, cada una enlazada a la anterior, manteniéndola en su lugar hasta que la última piedra del círculo fuera colocada. Cada anillo cerrado era lo suficientemente fuerte para soportar la siguiente capa. ¡Fue una hazaña sorprendente! Sólo en el siglo XX se construyeron domos mayores; actualmente el más grande es el superdomo en Nueva Orleans, terminado en 1975, cuyo diámetro es de 200 m, está hecho de armaduras de acero y concreto.

Resumen

Se dice que un cuerpo en reposo está en **equilibrio**. La disciplina que se ocupa de la determinación de las fuerzas dentro de una estructura en reposo se llama **estática**.

Las dos condiciones necesarias para que un cuerpo esté en equilibrio son (1) la suma vectorial de todas las fuerzas sobre él tiene que ser cero, y (2) la suma de todas las torcas (calculadas con respecto a cualquier eje arbitrario) también debe ser cero. Para un problema en dos dimensiones, escribimos:

$$\Sigma F_x = 0, \qquad \Sigma F_y = 0, \qquad \Sigma \tau = 0. \qquad \textbf{(12–1, 12–2)}$$

Al resolver problemas de estática es importante aplicar las condiciones de equilibrio a sólo un objeto a la vez.

Se dice que un objeto en equilibrio estático está en *a*) **equilibrio estable**, *b*) **equilibrio inestable**, o *c*) **equilibrio neutro**, dependiendo de si un ligero desplazamiento conduce a *a*) un regreso a la posición original, *b*) alejarse de l a posición original, o *c*) al reposo en la nueva posición. Se dice también que un objeto en equilibrio estable está **balanceado**.

La **ley de Hooke** se aplica a muchos sólidos elásticos, y establece que el cambio en la longitud de un objeto es proporcional a la fuerza aplicada:

$$F = k\,\Delta\ell. \qquad \textbf{(12–3)}$$

ISi la fuerza es muy grande, el objeto excederá su **límite elástico**, lo cual significa que no volverá a su forma original cuando se retira la fuerza perturbadora. Si la fuerza es aún mayor, puede excederse la **resistencia a la rotura** del material y el objeto se **fracturará**. La fuerza por unidad de área que actúa sobre un objeto se llama **esfuerzo** (stress) y el cambio fraccional resultante en longitud se denomina **deformación unitaria** (strain). El esfuerzo sobre un objeto está presente dentro del objeto y puede ser de tres tipos: **compresión, tensión y corte**. El cociente del esfuerzo respecto de la deformación unitaria se llama **módulo elástico** del material. El **módulo de Young** se aplica a la compresión y a la tensión; y el **módulo de corte**, al corte; el **módulo volumétrico** se aplica a un objeto cuyo volumen cambia como resultado de la presión que actúa sobre todos los lados. Los tres módulos son constantes para un material dado al deformarlo dentro de la región elástica.

Preguntas

1. Describa varias situaciones en las cuales un objeto no esté en equilibrio, aun cuando la fuerza neta sobre él sea cero.

2. Un saltador de *bungee* alcanza momentáneamente el reposo en el fondo de su salto, antes de que vuelva rebotado hacia arriba. En ese momento, ¿está en equilibrio el saltador de *bungee*? Explique.

3. Usted puede encontrar el centro de gravedad de una vara de un metro manteniéndola horizontalmente sobre los dedos índices, y luego acercándolos lentamente entre sí. Primero la barra se deslizará sobre un dedo, y luego sobre el otro; sin embargo, al final los dedos se encontrarán en el CG. ¿A qué se debe esto?

4. La báscula de su doctor tiene una pesa deslizable para equilibrar el peso de usted, figura 12-39. Evidentemente tales pesas son mucho más ligeras que usted. ¿Cómo ocurre esto?

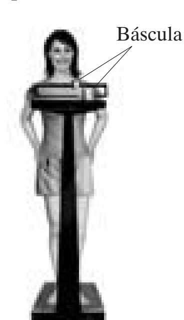


FIGURA 12–39 Pregunta 4.

5. En la figura 12-40a se muestra un muro de retención del suelo. La tierra, particularmente cuando está húmeda, puede ejercer una fuerza *F* considerable sobre el muro. *a*) ¿Qué fuerza produce la torca que mantiene vertical el muro? *b*) Explique por qué es menos probable que se vuelque el muro de retención en la figura 12-40b, que el de la figura 12-40a.

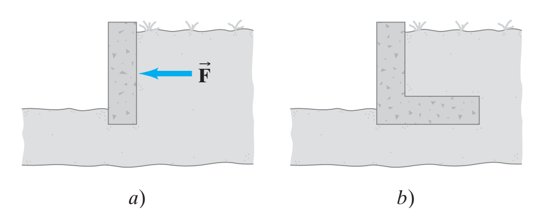


FIGURA 12–40 Pregunta 5.

6. ¿La suma de las torcas sobre un objeto puede ser cero, mientras que la fuerza neta sobre ese objeto sea diferente de cero? Explique su respuesta.

7. Una escalera, inclinada contra una pared, forma un ángulo de 60° con el suelo. ¿Cuándo es más probable que resbale: cuando una persona está sobre ella cerca de su parte superior o cuando está cerca de la base? Explique.

8. Una vara uniforme de un metro apoyada en la marca de 25 cm está en equilibrio cuando una roca de 1 kg se cuelga en el extremo de 0 cm, como se indica en la figura 12-41. ¿La masa de la vara es mayor, igual o menor que la masa de la roca? Explique su razonamiento.

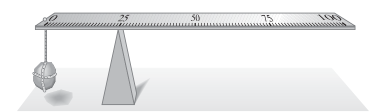


FIGURA 12–41 Pregunta 8.

9. ¿Por qué usted tiende a inclinarse hacia atrás cuando carga un objeto pesado con sus brazos?

10. La figura 12-42 muestra un cono. Explique cómo tenderlo sobre una mesa plana, de manera que esté *a*) en equilibrio estable, *b*) en equilibrio inestable, *c*) en equilibrio neutro.

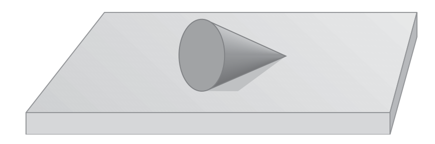


FIGURA 12–42 Pregunta 10.

11. Colóquese usted frente al borde de una puerta abierta. Ponga sus pies, uno a cada lado de la puerta con la nariz y el abdomen tocando el borde de la puerta. Trate de elevarse sobre las puntas de los pies. ¿Por qué no puede hacerlo?

12. ¿Por qué no es posible sentarse derecho en una silla y levantarse sin inclinarse primero hacia adelante?

13. ¿Por qué es más difícil sentarse y levantarse cuando las rodillas están dobladas, que cuando las piernas están estiradas?

14. ¿Cuál de la configuración de ladrillos, *a*) o *b*) de la figura 12-43 es más probable que sea estable? ¿Por qué?

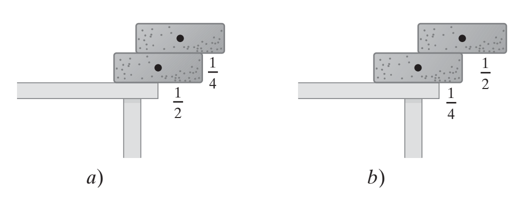


FIGURA 12–43 Pregunta 14. Los puntos indican el CG de cada ladrillo. Las fracciones $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$ indican qué porción de cada ladrillo está colgando más allá de su soporte.

15. Nombre los tipos de equilibrio para cada posición de la bola en la figura 12-44.

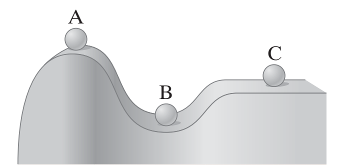


FIGURA 12–44 Pregunta 15.

16. ¿El módulo de Young para una cuerda de *bungee* es menor o mayor que el de una soga ordinaria?

17. Examine cómo unas tijeras cortan un cartón. ¿Está justificado el nombre de "cortadoras"? Explique su respuesta.

18. Los materiales como el concreto ordinario y la piedra son muy débiles bajo tensión o corte. ¿Sería aconsejable usar tales materiales para cualquiera de los soportes del voladizo que se ilustra en la figura 12-7? Si es así, ¿cuál es? Explique su respuesta.

Problemas

12–1 y 12–2 Equilibrio

1. (I) Se aplican tres fuerzas a un árbol joven, como se muestra en la figura 12-45, para estabilizarlo. Si $\vec{\mathbf{F}}_A = 385$ N y $\vec{\mathbf{F}}_B = 475$ N, encuentre $\vec{\mathbf{F}}_C$ en magnitud y dirección.

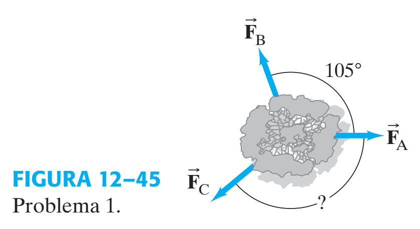


FIGURA 12–45 Problema 1.

2. (I) Aproximadamente, ¿qué tanta fuerza F_M debe ejercer el músculo extensor en el antebrazo sobre el brazo para sostener una bala de gimnasia de 7.3 kg (figura 12-46)? Suponga que el brazo tiene una masa de 2.3 kg y que su CG está a 12.0 cm desde el codo.

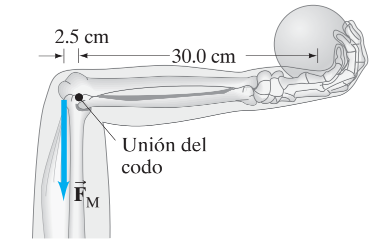


FIGURA 12–46 Problema 2.

3. (I) Calcule la masa m necesaria para suspender la pierna mostrada en la figura 12-47. Suponga que la pierna (con el yeso) tiene una masa de 15.0 kg y que su CG está a 35.0 cm de la articulación de la cadera; el cabestrillo está a 78.0 cm de la articulación de la cadera.

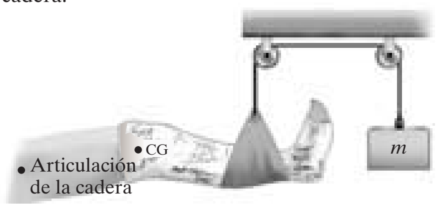


FIGURA 12–47 Problema 3.

4. (I) Una grúa torre (figura 12-48a) siempre debe estar cuidadosamente equilibrada de manera que no haya una torca neta que tienda a voltearla. Una grúa en particular en el sitio de una construcción está a punto de levantar una unidad de aire acondicionado de 2800 kg. Las dimensiones de la grúa se indican en la figura 12-48b. *a*) ¿Dónde debe colocarse el contrapeso de 9500 kg, cuando la carga se levanta desde el suelo? (Note que el contrapeso usualmente se mueve en forma automática mediante sensores y motores para compensar precisamente la carga). *b*) Determine la carga máxima que puede ser levantada con este contrapeso, cuando éste se coloca en el punto extremo. Ignore la masa de la viga.



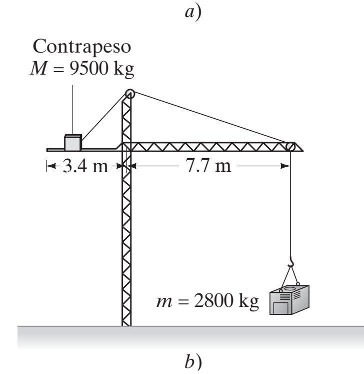


FIGURA 12–48 Problema 4.

5. (II) Calcule las fuerzas F_A y F_B que ejercen los soportes A y B sobre el trampolín de la figura 12-49 cuando una persona de 52 kg está parada en su extremo libre. *a*) Ignore el peso de la tabla. *b*) Tome en cuenta la masa de 28 kg de la tabla. Suponga que el CG de la tabla está en su centro.

FIGURA 12–49 Problema 5.

6. (II) Dos cuerdas soportan un candelabro tal como se muestra en la figura 12-3, excepto que la cuerda superior forma un ángulo de 45° con el techo. Si cada una de las cuerdas puede soportar una fuerza de 1660 N sin romperse, ¿cuál es el peso máximo del candelabro que puede soportarse?

7. (II) Los dos árboles en la figura 12-50 están apartados 6.6 m entre sí. Un excursionista intenta levantar su mochila para que quede lejos del alcance de los osos. Calcule la magnitud de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ que debe ejercer una persona para sostener un paquete de 19 kg, de manera que a partir de su posición horizontal la cuerda se flexione en su punto medio *a*) 1.5 m, *b*) 0.15 m.

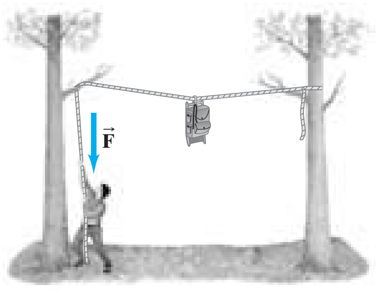


FIGURA 12–50 Problemas 7 y 83.

8. (II) Una viga horizontal de 110 kg está soportada en cada extremo. Un piano de 320 kg descansa a la cuarta parte de la distancia entre los extremos. ¿Cuál es la fuerza vertical sobre cada uno de los soportes?

9. (II) Calcule F_A y F_B para el voladizo uniforme de la figura 12-7, cuya masa es de 1200 kg.

10. (II) Un adulto de 75 kg está sentado en un extremo de una tabla de 9.0 m y en el otro extremo está sentado su hijo de 25 kg. *a*) ¿Dónde debería colocarse el pivote de manera que la tabla (desprecie su masa) quede balanceada? *b*) Encuentre el punto pivote, si la tabla es uniforme y tiene una masa de 15 kg.

11. (II) Encuentre la tensión en las dos cuerdas mostradas en la figura 12-51. Ignore la masa de las cuerdas, y suponga que el ángulo θ es de 33° y la masa *m* es de 190 kg.

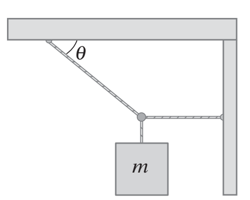


FIGURA 12–51 Problema 11.

12. (II) Encuentre la tensión en los dos alambres que soportan el semáforo de la figura 12-52.

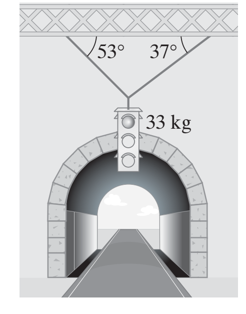


FIGURA 12–52 Problema 12.

13. (II) ¿Qué tan cerca del borde de la mesa de 24.0 kg mostrada en la figura 12-53 puede sentarse una persona de 66.0 kg sin volcarla?

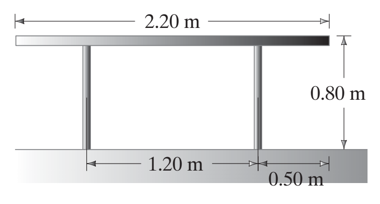


FIGURA 12–53 Problema 13.

14. (II) La fuerza requerida para sacar el corcho de una botella de vino está en un intervalo de 200 a 400 N. En la figura 12-54 se muestra un sacacorchos común. ¿Qué intervalo de fuerzas *F* se requiere para abrir una botella de vino con este dispositivo.

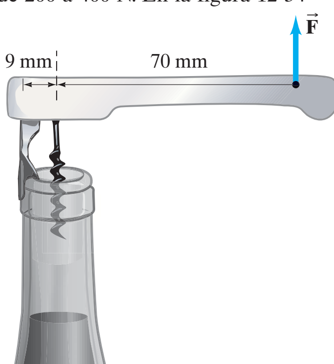


FIGURA 12–54 Problema 14.

15. (II) Calcule F_A y F_B para la viga que se representa en la figura 12-55. Las fuerzas descendentes representan los pesos de maquinaria sobre la viga. Suponga que la viga es uniforme y tiene una masa de 280 kg.

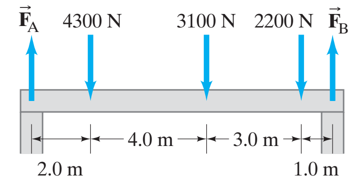


FIGURA 12–55 Problema 15.

16. (II) *a*) Calcule la fuerza F_M requerida por el músculo "deltoides" para mantener estirado el brazo mostrado en la figura 12-56. La masa total del brazo es 3.3 kg. *b*) Calcule la magnitud de la fuerza F_J ejercida por la articulación del hombro sobre la parte superior del brazo y el ángulo (con la horizontal) en que actúa.

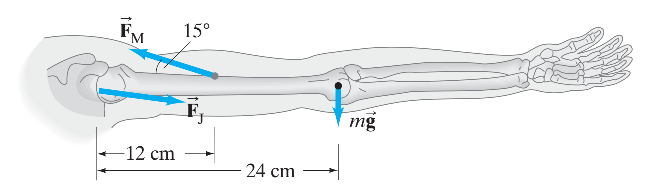


FIGURA 12–56 Problemas 16 y 17.

17. (II) Suponga que la mano en el problema 16 sostiene una masa de 8.5 kg. ¿Qué fuerza F_M se requiere en el músculo deltoides, suponiendo que la masa está a 52 cm de la articulación del hombro?

18. (II) Tres niños están tratando de balancearse en un sube y baja, que consiste en una roca que actúa como fulcro en el centro, y en una tabla muy ligera de 3.2 m de longitud (figura 12-57). Dos niños están ya en los extremos. El niño A tiene una masa de 45 kg y el niño B una masa de 35 kg. ¿Dónde debe colocarse la niña C, cuya masa es de 25 kg, para equilibrar el sube y baja?

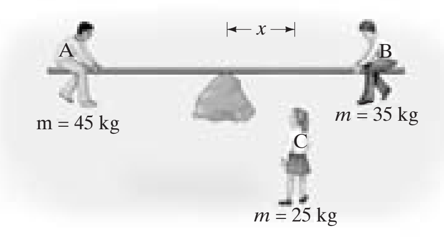


FIGURA 12–57 Problema 18.

19. (II) El tendón de Aquiles está unido a la parte posterior del pie, como se muestra en la figura 12-58. Estime la tensión F_T en el tendón de Aquiles (que jala hacia arriba), y la fuerza F_B (hacia abajo) ejercida por el hueso de la pierna inferior sobre el pie, cuando una persona se eleva ligeramente sobre la parte delantera de la planta del pie. Suponga que la persona tiene una masa de 72 kg y que D es el doble de d.

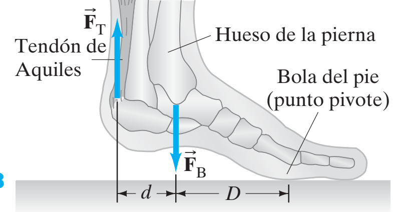


FIGURA 12–58 Problema 19.

20. (II) El letrero de una tienda pesa 215 N y está soportado por una viga uniforme de 155 N como se muestra en la figura 12-59. Encuentre la tensión en el alambre, así como las fuerzas horizontal y vertical ejercidas por la bisagra (ideal) sobre la viga.

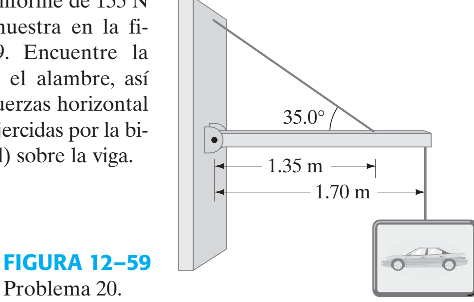


FIGURA 12–59 Problema 20.

21. (II) Un semáforo cuelga de una estructura como se muestra en la figura 12-60. El poste AB uniforme de aluminio tiene 7.20 m de longitud y una masa de 12.0 kg. La masa del semáforo es de 21.5 kg. Determine *a*) la tensión en el cable CD horizontal sin masa, así como *b*) las componentes vertical y horizontal de la fuerza ejercida por el pivote A sobre el poste de aluminio.

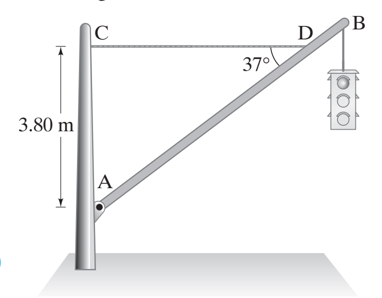


FIGURA 12–60 Problema 21.

22. (II) Una viga uniforme de acero tiene una masa de 940 kg. Sobre ella descansa la mitad de una viga idéntica, como se muestra en la figura 12-61. ¿Cuál es la fuerza vertical de soporte en cada extremo?

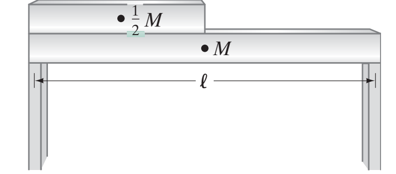


FIGURA 12–61 Problema 22.

23. (II) Dos cables tensadores van de la parte superior de un poste de 2.6 m de altura que soporta una red de volibol. Los dos cables están anclados al suelo a 2.0 m entre sí y a 2.0 m del poste (figura 12-62). La tensión en cada alambre es de 115 N. ¿Cuál es la tensión en la red, supuesta horizontal y unida a la parte superior del poste?

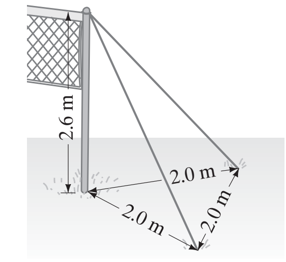


FIGURA 12–62 Problema 23.

24. (II) Una tabla grande de 62.0 kg se inclina a 45° contra el borde de la puerta de un granero que tiene 2.6 m de ancho. ¿Qué tan grande debe ser la fuerza horizontal que una persona detrás de la puerta ejerza (en el borde) para abrirla? Suponga que la fricción entre la puerta y la tabla es despreciable, pero que la tabla está firmemente apoyada contra el suelo.

25. (II) Resuelva de nuevo el problema 24 suponiendo ahora que el coeficiente de fricción entre la tabla y la puerta es de 0.45.

26. (II) Una sábana de 0.75 kg cuelga de una cuerda sin masa, como se indica en la figura 12-63. La cuerda a cada lado de la sábana forma un ángulo de 3.5° con la horizontal. Calcule la tensión en la cuerda a cada lado de la sábana. ¿Por qué es mucho mayor la tensión que el peso de la sábana?

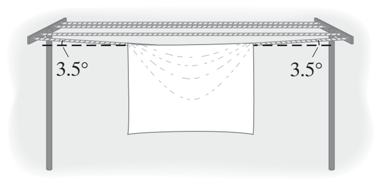


FIGURA 12–63 Problema 26.

27. (II) Una varilla uniforme AB de longitud 5.0 m y masa $M = 3.8$ kg está articulada en A y es mantenida en equilibrio por una cuerda ligera, como se muestra en la figura 12-64. Una carga $W = 22$ N cuelga de la varilla a una distancia x, de manera que la tensión en la cuerda es de 85 N. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la varilla. *b*) Determine las fuerzas vertical y horizontal que ejerce la bisagra sobre la varilla. *c*) Determine x con la ecuación de torca apropiada.

FIGURA 12–64 Problema 27.

28. (III) Una persona de 56.0 kg está de pie a 2.0 m de la parte inferior de la escalera mostrada en la figura 12-65. Determine *a*) la tensión en la varilla horizontal que se encuentra a la mitad de la escalera, *b*) la fuerza normal que ejerce el suelo a cada lado de la escalera, y *c*) la fuerza (magnitud y dirección) que el lado izquierdo de la escalera ejerce sobre el lado derecho en la bisagra en la parte superior. Desprecie la masa de la escalera y suponga que el suelo no tiene fricción. [*Sugerencia*: Considere los diagramas de cuerpo libre para cada sección de la escalera].

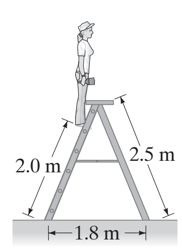


FIGURA 12–65 Problema 28.

29. (III) Una puerta de 2.30 m de altura y 1.30 m de ancho tiene una masa de 13.0 kg. Una bisagra a 0.40 m de la parte superior y otra a 0.40 m del fondo soportan cada una la mitad del peso de la puerta (figura 12-66). Suponga que el centro de gravedad está en el centro geométrico de la puerta, y determine las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por cada bisagra sobre la puerta.

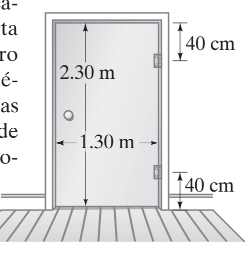


FIGURA 12–66 Problema 29.

30. (III) Un cajón cúbico de lado $s = 2.0$ m tiene su CG a 18 cm por arriba de su centro geométrico. ¿Qué tan inclinada puede estar una rampa sobre la que el cajón pueda descansar sin volcarse? ¿Qué tan inclinada podría estar la rampa para que el cajón se deslice sobre ella con rapidez constante sin volcarse? [*Sugerencia*: La fuerza normal actuaría en la esquina inferior].

31. (III) Un refrigerador es aproximadamente un sólido rectangular uniforme de 1.9 m de alto, 1.0 m de ancho y 0.75 m de profundidad. Si está colocado en forma vertical en un camión con su ancho de 1.0 m en la dirección del movimiento, y si el refrigerador no puede deslizarse sobre el camión, ¿qué tan rápido puede acelerar el camión sin que el refrigerador se voltee? [*Sugerencia*: La fuerza normal actuaría en una esquina].

32. (III) Una escalera uniforme de masa m y longitud ℓ se apoya con un ángulo θ contra una pared sin fricción, figura 12-67. Si el coeficiente de fricción estática entre la escalera y el suelo es μ_s, determine una expresión para el ángulo mínimo al cual la escalera no se deslizará

FIGURA 12–67
Problema 32.

12–3 Estabilidad y equilibrio

33. (II) La Torre Inclinada de Pisa tiene 55 m de altura y aproximadamente 7.0 m de diámetro. La parte superior está desviada 4.5 m del centro. ¿La torre está en equilibrio estable? Si es así, ¿cuánto más podría inclinarse antes de volverse inestable? Suponga que la torre tiene composición uniforme.

12–4 Elasticidad; esfuerzo y deformación unitaria

34. (I) Una cuerda de nylon de una raqueta de tenis está bajo una tensión de 275 N. Si su diámetro es de 1.00 mm, ¿cuánto está alargada a partir de su longitud natural (sin tensión) de 30.0 cm?

35. (I) Una columna de mármol con área transversal de 1.4 m^2 soporta una masa de 25,000 kg. *a*) ¿Cuál es el esfuerzo dentro de la columna? *b*) ¿Cuál es la deformación unitaria?

36. (I) ¿Cuánto se acorta la columna del problema anterior, si la columna tiene 8.6 m de altura?

37. (I) Un señalamiento (masa = 1700 kg) cuelga del final de una viga de acero en posición vertical con 0.012 m^2 de área transversal. *a*) ¿Cuál es el esfuerzo dentro de la viga? *b)* ¿Cuál es la deformación unitaria en la viga? *c*) Si la viga mide 9.50 m de longitud, ¿de cuánto será su alargamiento? (Ignore la masa de la viga misma).

38. (II) ¿Cuánta presión se necesita para comprimir el volumen de un bloque de hierro en un 0.10%? Exprese la respuesta en N/m^2 y compárela con la presión atmosférica (1.0×10^5 N/m^2).

39. (II) Se encontró que un tendón de 15 cm de longitud se estira 3.7 mm con una fuerza de 13.4 N. El tendón era aproximadamente redondo con un diámetro promedio de 8.5 mm. Calcule el módulo de Young de este tendón.

40. (II) A profundidades de 2000 m en el mar, la presión es aproximadamente 200 veces la presión atmosférica (1 atm = 1.0×10^5 N/m^2). ¿En qué porcentaje cambia el espacio interior del volumen de una batiesfera de acero a tal profundidad?

41. (III) Un viga horizontal está empotrada en la pared frontal de una tienda. Un letrero de 6.1 kg cuelga de la viga en un punto a 2.2 m de la pared (figura 12-68). *a*) ¿Cuánto vale la torca debido a este letrero calculada con respecto al punto en que la viga toca a la pared? *b*) Para que la viga no se caiga, debe haber otra torca ejercida sobre ella para equilibrarla. ¿Qué ejerce esta torca? Use un diagrama para demostrar cómo debe actuar esta torca. *c*) Analice si los esfuerzos de compresión, tensión y/o cortante juegan un papel en el inciso *b*).

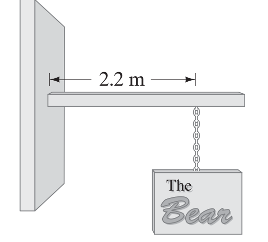


FIGURA 12–68
Problema 41.

12–5 Fractura

42. (I) El fémur de la pierna humana tiene una sección transversal efectiva mínima de aproximadamente 3.0 cm^2 ($= 3.0 \times 10^{-4}$ m^2). ¿Cuánta fuerza de compresión puede resistir antes de fracturarse?

43. (II) *a*) ¿Cuál es la tensión máxima posible en una cuerda de nylon de 1.00 mm de diámetro en una raqueta de tenis? *b*) Si se quieren cuerdas más tensas, ¿qué haría usted para prevenir su rotura: usar cuerdas más delgadas o más gruesas? ¿Por qué? ¿Qué ocasiona que las cuerdas se rompan cuando son golpeadas por la pelota?

44. (II) Si una fuerza de compresión de 3.3×10^4 N es ejercida sobre el extremo de un hueso de 22 cm de largo con sección transversal de 3.6 cm^2, ¿*a*) se romperá el hueso, y (*b*) si no se rompe, cuánto se acortará?

45. (II) *a*) ¿Cuál es el área transversal mínima requerida en un cable vertical de acero del que cuelga un candelabro de 270 kg? Suponga un factor de seguridad de 7.0. *b*) Si el cable tiene 7.5 m de longitud, ¿cuánto se alargará?

46. (II) Suponga que los soportes del voladizo mostrado en la figura 12-69 (m = 2900 kg) están hechos de madera. Calcule el área transversal mínima requerida en cada uno, suponiendo un factor de seguridad de 9.0.

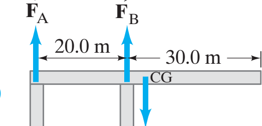


FIGURA 12–69
Problema 46.

47. (II) Un perno de acero se utiliza para conectar dos placas de acero. El perno debe resistir fuerzas de corte de hasta aproximadamente 3300 N. Calcule el diámetro mínimo para el perno, con base en un factor de seguridad de 7.0.

48. (III) Un cable de acero debe soportar un elevador cuya masa total (cargado) no debe exceder de 3100 kg. Si la aceleración máxima del elevador es 1.2 m/s^2, calcule el diámetro requerido para el cable, suponiendo un factor de seguridad de 8.0.

* 12–6 Armaduras y puentes

***49.** (II) Una carga pesada Mg = 66.0 kN cuelga en el punto E de la armadura en voladizo mostrada en la figura 12-70. *a*) Use la ecuación de torcas para la armadura en conjunto para determinar la tensión F_T en el cable de soporte, y luego determine la fuerza $\vec{F}_A$ sobre la armadura en el pasador A. *b*) Determine la fuerza axial en cada barra de la armadura. Ignore el peso de las barras, que es pequeño comparado con la carga.

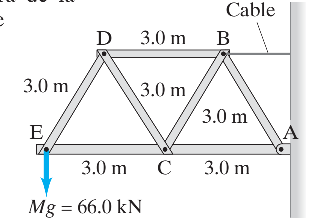


FIGURA 12–70
Problema 49.

***50.** (II) La figura 12-71 muestra una armadura simple que soporta una carga en el centro (C) de 1.35×10^4 N. *a*) Calcule la fuerza sobre cada barra (o puntal) en los pasadores, A, B, C, D, y *b*) determine si las barras están a tensión o a compresión. Ignore sus masas.

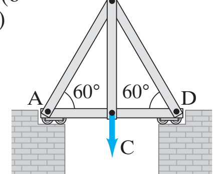


FIGURA 12–71
Problema 50.

***51.** (II) *a*) ¿Qué área transversal mínima deben tener las barras de la armadura del ejemplo 12-11 si todas ellas son de acero (y el mismo tamaño), usando un factor de seguridad de 7.0? *b*) Si en cualquier momento el puente puede soportar 60 camiones con masa promedio de 1.3×10^4 kg, estime de nuevo el área necesaria en las barras de la armadura.

*52. (II) Considere de nuevo el ejemplo 12-11 pero esta vez suponga que el camino está soportado uniformemente, de manera que la mitad de su masa M (= 7.0 × 10^5 kg) actúa en el centro y un cuarto de M actúa en cada soporte extremo (considere que el puente tiene dos claros, AC y CE, por lo que el pasador central soporta los dos extremos de claro). Calcule la magnitud de la fuerza en cada barra de la armadura y compárela con el ejemplo 12-11.

*53. (III) La armadura mostrada en la figura 12-72 soporta un puente de ferrocarril. Determine las fuerzas de compresión o tensión en cada miembro (puntal), si una locomotora de tren de 53 ton (1 ton = 10^3 kg) está detenida en el punto medio del miembro izquierdo. Ignore las masas de los rieles y de la armadura, y use sólo la mitad de la masa del tren porque se tienen dos armaduras (una en cada lado del tren). Suponga que todos los triángulos son equiláteros. [*Sugerencia*: Véase la figura 12-29].

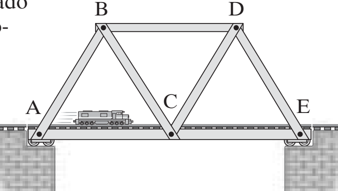


FIGURA 12–72 Problema 53.

*54. (III) Suponga que en el ejemplo 12-11, un camión de 23 ton (m = 23 × 10^3 kg) tiene su CM localizado a 22 m desde el extremo izquierdo del puente (punto A). Determine la magnitud de la fuerza y el tipo de esfuerzo en cada miembro (puntal). [*Sugerencia*: Véase la figura 12-29].

*55. (III) En la "armadura Pratt" mostrada en la figura 12-73, determine la fuerza sobre cada miembro y diga si la fuerza es de tensión o de compresión. Suponga que la armadura está cargada como se muestra, y dé los resultados en términos de F. Todos los miembros de la armadura tienen una longitud a.

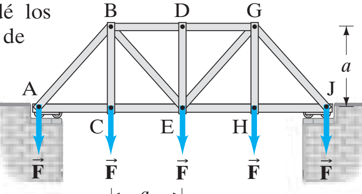


FIGURA 12–73 Problema 55.

*12–7 Arcos y domos

*56. (II) ¿Qué tan alto debe ser un arco apuntado para que salve un claro de 8.0 m y ejerza un tercio de la fuerza horizontal en su base de la que ejercería un arco circular?

Problemas generales

57. El móvil de la figura 12-74 está en equilibrio. El objeto B tiene una masa de 0.748 kg. Determine las masas de los objetos A, C y D. (Ignore los pesos de las barras transversales).

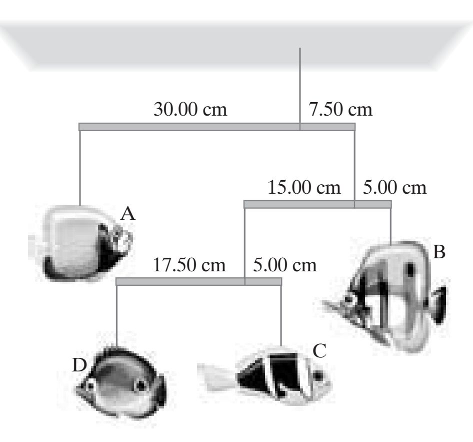


FIGURA 12–74 Problema 57.

58. Un alambre muy tenso tiene 36 m de longitud. Se comba 2.1 m cuando se coloca en su centro un equilibrista de 60.0 kg. ¿Cuál es la tensión en el alambre? ¿Es posible incrementar la tensión en el alambre para que no se combe?

59. ¿Qué fuerza F mínima horizontal se requiere para jalar una rueda de radio R y masa M sobre un escalón de altura h, como se muestra en la figura 12-75 ($R > h$)? *a*) Suponga que la fuerza es aplicada en el borde superior como se indica. *b*) Suponga ahora que la fuerza se aplica en el centro de la rueda.

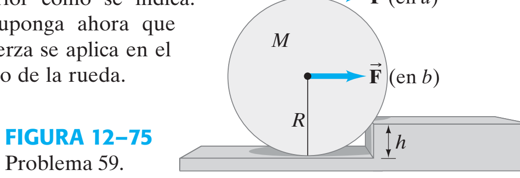
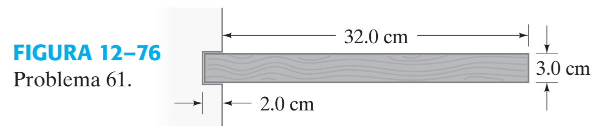


FIGURA 12–75 Problema 59.

60. Una mesa redonda de 28 kg está soportada por tres patas, situadas a distancias iguales sobre el borde. ¿Qué masa mínima, colocada en el borde de la mesa, ocasionará que ésta se voltee?

61. Cuando una repisa de madera, de 6.6 kg de masa, se fija dentro de una rendija en un soporte vertical, como se muestra en la figura 12-76, el soporte ejerce una torca sobre la repisa. *a*) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la repisa, si se supone que existen tres fuerzas verticales (dos ejercidas por la rendija de soporte; explique por qué). Luego calcule *b*) las magnitudes de las tres fuerzas y *c*) la torca ejercida por el soporte (en torno al extremo izquierdo de la repisa).

FIGURA 12–76 Problema 61.



62. Se está planeando construir un edificio de 50 pisos de altura. El edificio tendrá 180.0 m de alto con una base de 46.0 m por 76.0 m. Su masa total será de aproximadamente 1.8 × 10^7 kg y su peso será de cerca de 1.8 × 10^8 N. Suponga que un viento de 200 km/h ejerce una fuerza de 950 N/m^2 sobre la cara de 76.0 m de ancho (figura 12-77). Calcule la torca con respecto al punto pivote potencial en el borde posterior del edificio (donde actúa $\vec{F}_E$ en la figura 12-77), y determine si el edificio se volcará. Suponga que la fuerza total del viento actúa a la mitad de la altura de la cara del edificio, y que éste no está anclado en cimientos. [*Sugerencia*: $\vec{F}_E$ en la figura 12-77 representa la fuerza que la Tierra ejerce sobre el edificio, en el momento en que el edificio empieza justamente a volcarse].

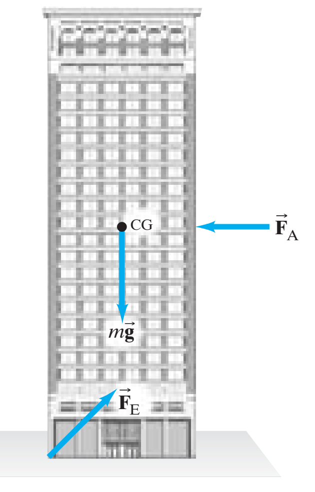


FIGURA 12–77 Fuerza sobre un edificio sometido al viento ($\vec{F}_A$), y a la gravedad ($m\vec{g}$), y la fuerza $\vec{F}_E$ es la fuerza sobre el edificio debida a la Tierra en el momento en que el edificio está a punto de volcarse. Problema 62.

63. El centro de gravedad de un camión cargado depende de la distribución de su carga. Si un camión tiene 4.0 m de altura y 2.4 m de ancho, y su CG está a 2.2 m por arriba del pavimento, ¿con qué inclinación con respecto al camino puede el camión estacionarse sin volcarse lateralmente (figura 12-78)?

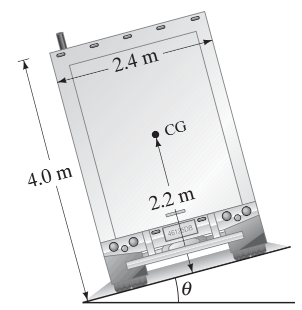


FIGURA 12–78 Problema 63.

64. En la figura 12-79, considere la sección derecha (la más al norte) del puente Golden Gate, que tiene una longitud $d_1 = 343$ m. Suponga que el CG de este claro está a la mitad entre la torre y el ancla. Determine F_{T1} y F_{T2} (que actúan en el cable más al norte) en términos de mg, el peso del claro más al norte, y calcule la altura h de la torre necesaria para tener equilibrio. Suponga que el camino está soportado sólo por los cables principales, y desprecie la masa de éstos y de los cables verticales. [*Sugerencia*: F_{T3} no actúa sobre esta sección].

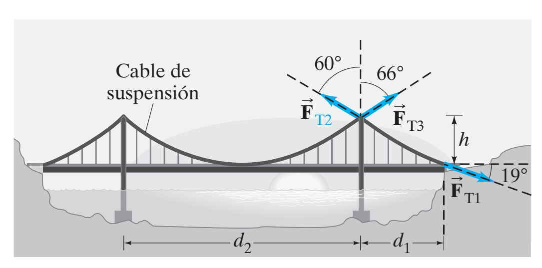


FIGURA 12–79 Problemas 64 y 65.

65. Suponga que un puente colgante de un solo claro, como el Golden Gate, tiene la configuración indicada en la figura 12-79. Suponga que el camino es uniforme sobre la longitud del puente y que cada segmento del cable de suspensión proporciona el único soporte para el camino que está directamente debajo de él. Los extremos del cable están anclados sólo al terreno y no al camino. ¿Cuál debe ser la razón de d_2 a d_1 para que el cable de suspensión ejerza una fuerza neta horizontal nula sobre las torres? Desprecie la masa de los cables y el hecho de que el camino no es precisamente horizontal.

66. Cuando una masa de 25 kg se cuelga a la mitad de un alambre recto fijo de aluminio, el alambre se pandea y forma un ángulo de 12° con la horizontal, como se indica en la figura 12-80. Determine el radio del alambre.

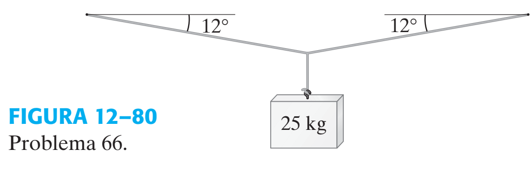


FIGURA 12–80 Problema 66.

67. Las fuerzas que actúan sobre un avión de 77,000 kg que vuela con velocidad constante se muestran en la figura 12-81. El empuje del motor, $F_T = 5.0 \times 10^5$ N, actúa sobre una línea a 1.6 m debajo del CM. Determine la fuerza de arrastre F_D y la distancia a la que actúa esta fuerza por arriba el CM. Suponga que $\vec{F}_D$ y $\vec{F}_T$ son horizontales. ($\vec{F}_L$ es la fuerza de sustentación sobre el ala).

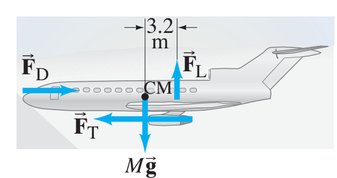


FIGURA 12–81 Problema 67.

68. Un cable uniforme flexible de acero de peso mg está suspendido entre dos puntos con igual elevación, como se muestra en la figura 12-82, donde $\theta = 56°$. Determine la tensión en el cable *a*) en su punto más bajo, y *b*) en los puntos de soporte. *c*) ¿Cuál es la dirección y sentido de la fuerza de tensión en cada caso?

FIGURA 12–82 Problema 68.

69. Una viga uniforme de 20.0 m de largo y peso de 650 N está soportada sobre los muros A y B, como se muestra en la figura 12-83. *a*) Encuentre el peso máximo que una persona puede tener para caminar hasta extremo D sin volcar la viga. Encuentre las fuerzas que ejercen los muros A y B sobre la viga, cuando la persona está de pie: *b*) en D; *c*) en un punto 2.0 m a la derecha de B; *d*) 2.0 m a la derecha de A.

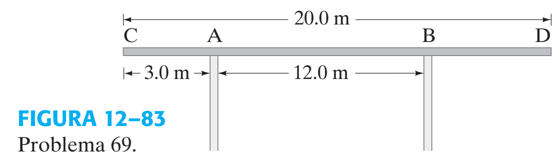


FIGURA 12–83 Problema 69.

70. Un cubo de lado ℓ descansa sobre un piso rugoso. Está sometido a una fuerza horizontal uniforme, F, ejercida a una distancia h por arriba del piso, como se indica en la figura 12-84. Si se incrementa F, el cubo empezará a deslizarse o empezará a volcarse. Determine el coeficiente de fricción estática m_s para que *a*) el bloque se deslice antes de volcarse, *b*) ¿el bloque empiece a volcarse? [*Sugerencia*: ¿Dónde actúa la fuerza normal sobre el cubo, cuando empieza a volcarse?].

FIGURA 12–84 Problema 70.

71. Un pintor de 65.0 kg está sobre un andamio uniforme de 25 kg, soportado desde arriba por cuerdas (figura 12-85). Una cubeta de pintura de 4.0 kg está a un lado, como se ilustra en la figura. ¿Puede el pintor caminar con seguridad hacia ambos extremo del andamio? Si no, ¿qué extremo(s) es peligroso y qué tan cerca del extremo puede aproximarse el pintor con seguridad?

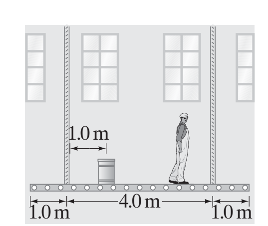


FIGURA 12–85 Problema 71.

72. Un hombre que hace "lagartijas" se detiene en la posición mostrada en la figura 12-86. Su masa es $m = 68$ kg. Determine la fuerza normal que ejerce el suelo sobre *a*) cada mano; *b*) cada pie.

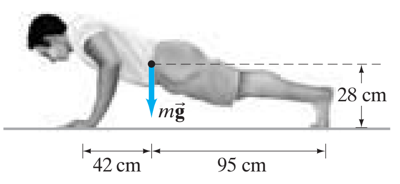


FIGURA 12–86 Problema 72.

73. Una esfera de 23 kg descansa entre dos planos suaves, como se observa en la figura 12-87. Determine la magnitud de la fuerza que cada plano ejerce sobre la esfera.

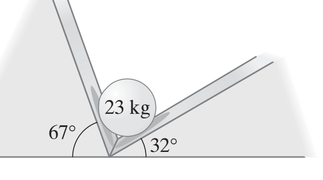


FIGURA 12–87 Problema 73.

74. Una bola de 15.0 kg está colgada del techo mediante una cuerda A. La cuerda B jala a la bola hacia abajo y hacia un lado. Si el ángulo de A con la vertical es de 22° y si B forma un ángulo de 53° con la vertical (figura 12-88), encuentre las tensiones en las cuerdas A y B.

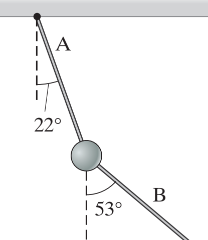


FIGURA 12–88 Problema 74.

75. Se sabe de paracaidistas cuyos paracaídas no se abrieron, sobrevivieron al caer en una gruesa capa de nieve. Suponga que un paracaidista de 75 kg toca el suelo con un área de impacto de 0.30 m^2 a una velocidad de 55 m/s y que la resistencia a la rotura del tejido humano es de $5 \times 10^5\ \mathrm{N/m}^2$. Suponga que la persona alcanza el reposo en 1.0 m de nieve. Demuestre que la persona puede salir ilesa.

76. Un alambre de acero de 2.3 mm de diámetro se estira en un 0.030%, cuando una masa se suspende de él. ¿Cuál es el valor de la masa suspendida?

77. Un remolque de 2500 kg está unido a un camión estacionario en el punto B (figura 12-89). Determine la fuerza normal que ejerce el camino sobre las llantas traseras en A, y la fuerza vertical que ejerce el soporte B sobre el remolque.

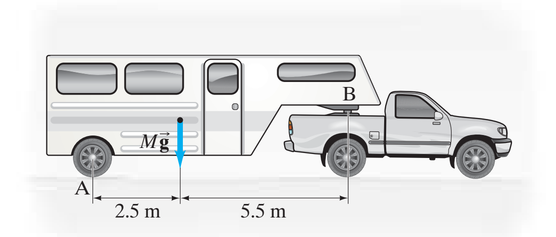


FIGURA 12–89 Problema 77.

78. El techo de un salón de 9.0 m × 10.0 m en una escuela tiene una masa total de 13,600 kg. El techo va a ser soportado por pies derechos verticales de "2 × 4s" (en realidad de 4.0 cm × 9.0 cm) a lo largo de los lados de 10.0 m. ¿Cuántos soportes se requieren a cada lado y a qué distancia deben estar uno de otro? Considere sólo la compresión y suponga un factor de seguridad de 12.

79. Un objeto de 25 kg es elevado al jalar los extremos de una cuerda de nylon de 1.15 mm de diámetro, que pasa alrededor de dos poleas a 3.00 m de alto y que están separadas 4.0 m, como se ilustra en la figura 12-90. ¿A qué altura sobre el suelo estará el objeto cuando la cuerda se rompa?

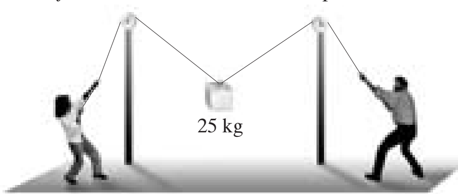


FIGURA 12–90 Problema 79.

80. Una escalera de 6.0 m de longitud y masa de 16.0 kg está apoyada contra una pared lisa (de modo que la fuerza ejercida por la pared, $\vec{\mathbf{F}}_W$, es perpendicular a la pared). La escalera forma un ángulo de 20.0° con la pared vertical y el suelo es rugoso. Determine cuál debe ser el coeficiente de fricción estática en la base de la escalera, si ésta no debe deslizarse cuando una persona de 76.0 kg está parada a tres cuartas partes hacia arriba de la escalera.

81. Existe una altura máxima para una columna vertical uniforme, hecha de cualquier material, que puede soportarse a sí misma sin pandearse, y que es independiente del área transversal (¿por qué?). Calcule esta altura para *a*) acero (densidad de $7.8 \times 10^3\ \mathrm{kg/m}^3$), y *b*) granito (densidad de $2.7 \times 10^3\ \mathrm{kg/m}^3$).

82. Una locomotora de 95,000 kg empieza a cruzar un puente de 280 m de largo en el tiempo $t = 0$. El puente es una viga uniforme de 23,000 kg de masa y el tren viaja a 80.0 km/h constantes. ¿Cuáles son las magnitudes de las fuerzas verticales $F_A(t)$ y $F_B(t)$ sobre los dos soportes extremos, escritas como funciones del tiempo, durante el paso del tren?

83. Una mochila de 23.0 kg está suspendido a la mitad entre dos árboles por una cuerda ligera, como se observa en la figura 12-50. Un oso agarra el paquete y lo jala verticalmente hacia abajo con una fuerza constante, de manera que cada sección de la cuerda forma un ángulo de 27° hacia abajo con la horizontal. Inicialmente, antes de que jale el oso, el ángulo era de 15°; cuando el oso jala, la tensión en la cuerda es el doble del valor inicial. Calcule la fuerza que el oso está ejerciendo sobre la mochila.

84. Una viga uniforme de masa *M* y longitud ℓ está montada sobre una bisagra (ideal) en un muro, como se muestra en la figura 12-91. La viga se mantiene en posición horizontal mediante un alambre que forma un ángulo θ como se muestra. Una masa *m* se coloca sobre la viga a una distancia *x* del muro y esta distancia puede variarse. Determine, en función de *x*, *a*) la tensión en el alambre y *b*) las componentes de la fuerza ejercida por la viga sobre la bisagra.

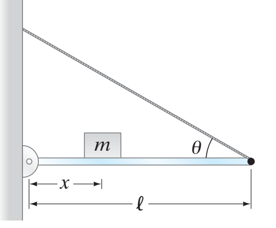


FIGURA 12–91 Problema 84.

85. Dos vigas idénticas uniformes se apoyan simétricamente entre sí (figura 12-92) sobre un piso con el cual tienen un coeficiente de fricción $\mu_s = 0.50$. ¿Cuál es el ángulo mínimo que las vigas pueden formar con el piso sin caerse?

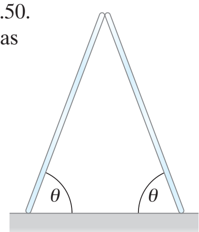


FIGURA 12–92 Problema 85.

86. Si la masa máxima *m* que una persona puede sostener en una mano cuando el brazo está colocado a un ángulo de 105° en el codo es de 35 kg, como se muestra en la figura 12-93, ¿cuál será la fuerza máxima $F_{\text{máx}}$ que el bíceps ejerce sobre el antebrazo? Suponga que el antebrazo y la mano tienen una masa total de 2.0 kg con un CG que está a 15 cm del codo, y que el bíceps se une a 5.0 cm del codo.

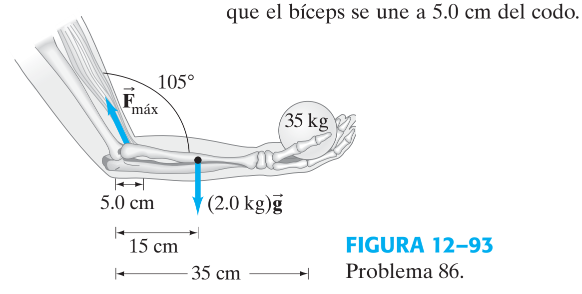
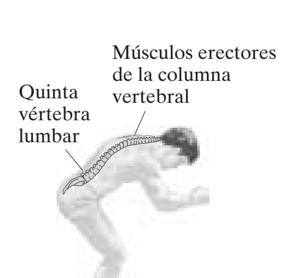
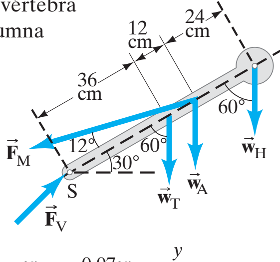


FIGURA 12–93 Problema 86.

87. (*a*) Estime la magnitud de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_M$ que los músculos ejercen sobre la espalda para apoyar la parte superior del cuerpo, cuando una persona se inclina hacia delante. Utilice el modelo de la figura 12-94b. *b*) Estime la magnitud y la dirección de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_V$ que actúa sobre la quinta vértebra lumbar (ejercida por la columna vertebral inferior).





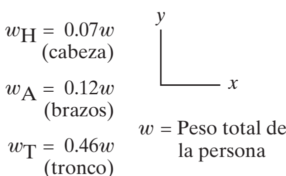


FIGURA 12–94 Problema 87.

88. Una varilla de un marco cuadrado mostrado en la figura 12-95 contiene un "templador" que al girarse somete a la barra a tensión o a compresión. Si el templador somete a la varilla AB a una fuerza de compresión F, determine las fuerzas generadas en las otras varillas. Desprecie la masa de las varillas y suponga que las barras diagonales se cruzan libremente en el centro sin fricción. [*Sugerencia*: Aproveche la simetría de la situación].

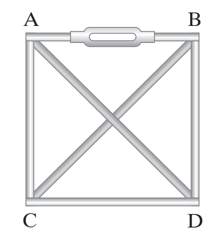


FIGURA 12–95 Problema 88.

89. Una barra de acero de radio $R = 15$ cm y longitud ℓ_0 permanece vertical sobre una superficie sólida. Un hombre de 65 kg escala hasta lo alto de la barra. *a*) Determine la disminución porcentual de la longitud de la barra. *b*) Cuando se comprime un metal, cada uno de los átomos de su masa se mueve más cerca de sus átomos vecinos, en exactamente la misma cantidad fraccional. Si en general en el acero los átomos están separados a 2.0×10^{-10} m, ¿en qué distancia tiene que cambiar este espaciamiento interatómico para generar la fuerza normal requerida para sostener al hombre? [*Nota*: Los átomos colindantes se repelen entre sí, y tal repulsión influye en la fuerza normal observada].

90. Un mecánico quiere levantar el motor de 280 kg de su auto. El plan es estirar una cuerda verticalmente del motor a la rama de un árbol situada a 6.0 m de altura, y luego regresarla al parachoques (figura 12-96). Cuando el mecánico sube a una escalera y jala horizontalmente de la cuerda en su punto medio, el motor se eleva saliendo del auto. *a*) ¿Qué fuerza debe ejercer el mecánico para sostener el motor a 0.50 m por arriba de su posición normal? *b*) ¿Cuál es la ventaja mecánica del sistema?

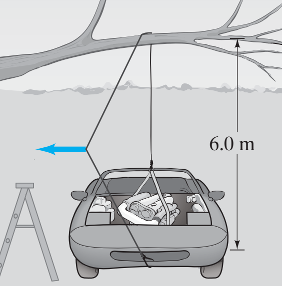


FIGURA 12–96 Problema 90.

91. Un cajón de 2.0 m de altura y con una base cuadrada de 1.0 m se mueve sobre una superficie rugosa, como se indica en la figura 12-97. El cajón uniforme pesa 250 N y tiene un coeficiente de fricción estática con el piso de 0.60. ¿Qué fuerza mínima debe ejercerse sobre el cajón para hacerlo deslizarse? ¿Cuál es la altura máxima h por encima del piso a la que esta fuerza podría aplicarse sin volcar el cajón? Note que conforme el cajón se vuelca, la fuerza normal y la fuerza de fricción actúan en la esquina inferior.

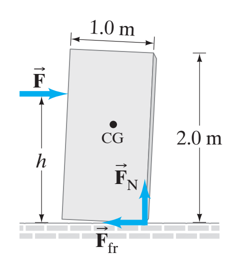


FIGURA 12–97 Problema 91.

92. Usted va en un barco pirata y se le obliga a caminar por el tablón (figura 12-98). Usted se encuentra parado sobre el punto marcado con C. El tablón está clavado sobre la cubierta en el punto A, y descansa sobre un fulcro a 0.75 m de A. El centro de masa del tablón uniforme se localiza en el punto B. Su masa es de 65 kg y la masa del tablón es de 45 kg. ¿Cuál es la fuerza mínima hacia abajo que deben ejercer los clavos sobre el tablón para mantenerlo en su sitio?

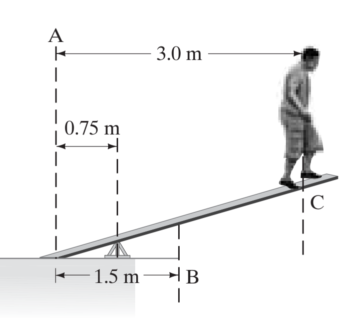


FIGURA 12–98 Problema 92.

93. Una esfera uniforme de peso mg y radio r_0 está atada a una pared mediante una cuerda de longitud ℓ. La cuerda está unida a la pared a una distancia h por arriba del punto de contacto de la esfera, como se muestra en la figura 12-99. La cuerda forma un ángulo θ con respecto a la pared y no está en línea con el centro de la esfera. El coeficiente de fricción estática entre la pared y la esfera es μ. *a*) Determine el valor de la fuerza de fricción sobre la esfera debida a la pared. [*Sugerencia*: Una buena selección del eje facilitará este cálculo]. *b*) Suponga que la esfera está a punto de deslizarse. Obtenga una expresión para μ en términos de h y θ.

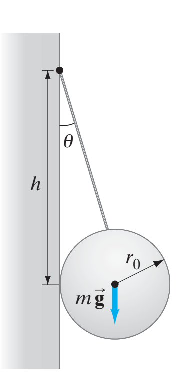


FIGURA 12–99 Problema 93.

***94.** Use el método de los nudos o juntas para determinar la fuerza en cada barra de la armadura de la figura 12-100. Indique si cada barra está en tensión o compresión.

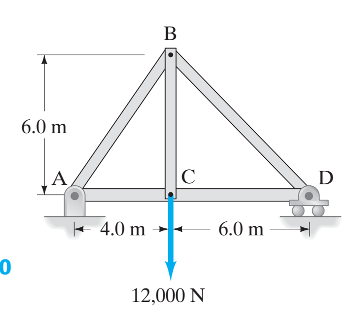


FIGURA 12–100 Problema 94.

95. Una escalera uniforme de masa m y longitud ℓ se inclina en un ángulo θ contra un muro, figura 12-101. Los coeficientes de fricción estática entre la escalera y el suelo y entre la escalera y el muro son μ_G (ground) y μ_W (wall), respectivamente. La escalera estará a punto de deslizarse cuando la fuerza de fricción estática debida al suelo y la fuerza de fricción estática debida al muro alcancen ambas sus valores máximos. *a*) Muestre que la escalera permanecerá estable si $\theta \geq \theta_{\text{mín}}$, donde el ángulo mínimo $\theta_{\text{mín}}$ está dado por

$$\tan\theta_{\text{mín}} = \frac{1}{2\mu_G}(1 - \mu_G\mu_W).$$

b) Los "problemas de la escalera inclinada" a menudo se analizan desde la suposición irrealista de que el muro no ejerce fricción (véase el ejemplo 12-6). Usted desea investigar la magnitud del error introducido al considerar el muro sin fricción, cuando en verdad tiene fricción. Usando la relación encontrada en el inciso *a*), calcule el valor verdadero de $\theta_{\text{mín}}$ para un muro con fricción, tomando $\mu_G = \mu_W$ 0.40. Luego, determine el valor aproximado de $\theta_{\text{mín}}$ para el modelo del "muro sin fricción" considerando $\mu_G = 0.40$ y $\mu_W = 0$. Por último, determine la desviación porcentual del valor aproximado de $\theta_{\text{mín}}$ a partir de este valor verdadero.

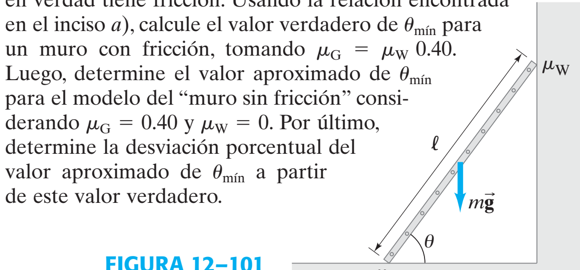


FIGURA 12–101 Problema 95.

96. En una técnica para escalar montañas, (llamada pase de tirolesa) se sujeta una cuerda en ambos extremos (a rocas o árboles fuertes) a través de un acantilado, y luego un escalador recorre la cuerda unido mediante una esliga, como en la figura 12-102. Esta técnica genera enormes fuerzas en la cuerda y en las sujeciones, por lo que una comprensión básica de la física es importante para la seguridad. Una cuerda común para escalar puede experimentar una fuerza de tensión de quizá 29 kN antes de romperse, y generalmente se recomienda un "factor de seguridad" de 10. La longitud de la cuerda utilizada con esta técnica debe permitir algo de "combamiento" para permanecer en el intervalo de seguridad recomendado. Considere un escalador de 75 kg en el centro de la tirolesa, librando un claro de 25 m. *a*) Para estar dentro del intervalo de seguridad recomendado, ¿qué distancia mínima x debe flexionarse la cuerda? *b*) Si en la técnica mencionada la cuerda se coloca de manera incorrecta de forma que sólo se flexione en un cuarto de la distancia encontrada en *a*), determine la tensión en la cuerda. ¿Se romperá la cuerda?

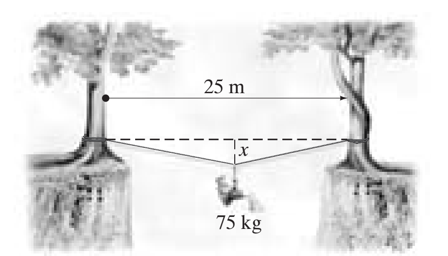


FIGURA 12–102 Problema 96.

*Problemas numéricos/por computadora

*__97.__ (III) Un cilindro de metal tiene un diámetro original de 1.00 cm y una longitud de 5.00 cm. Se desarrolló una prueba de tensión sobre la muestra y los datos se presentan en la siguiente tabla. *a*) Grafique el esfuerzo sobre la muestra versus la deformación. *b*) Considerando sólo la región elástica, encuentre la pendiente de la recta de mejor ajuste y determine el módulo elástico del metal.

Carga (kN)	Alargamiento (cm)
0	0
1.50	0.0005
4.60	0.0015
8.00	0.0025
11.00	0.0035
11.70	0.0050
11.80	0.0080
12.00	0.0200
16.60	0.0400
20.00	0.1000
21.50	0.2800
19.50	0.4000
18.50	0.4600

*__98.__ (III) Dos resortes, unidos por una cuerda, están conectados como se muestra en la figura 12-103. La longitud AB es de 4.0 cm y AC = BC. La constante de cada resorte es $k = 20.0$ N/m. Una fuerza F actúa hacia abajo sobre la cuerda en C. Grafique θ en función de F desde $\theta = 0$ hasta 75°, suponiendo que los resortes no se estiran en $\theta = 0$.

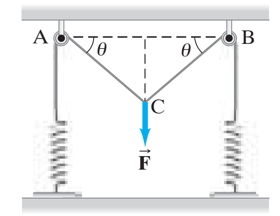


FIGURA 12–103 Problema 98.

Respuestas a los ejercicios

A: F_A también tiene una componente para equilibrar la fuerza F_B de los lados.

B: Sí, cos θ (ángulo de la barra con el suelo) aparece en ambos lados y se cancela.

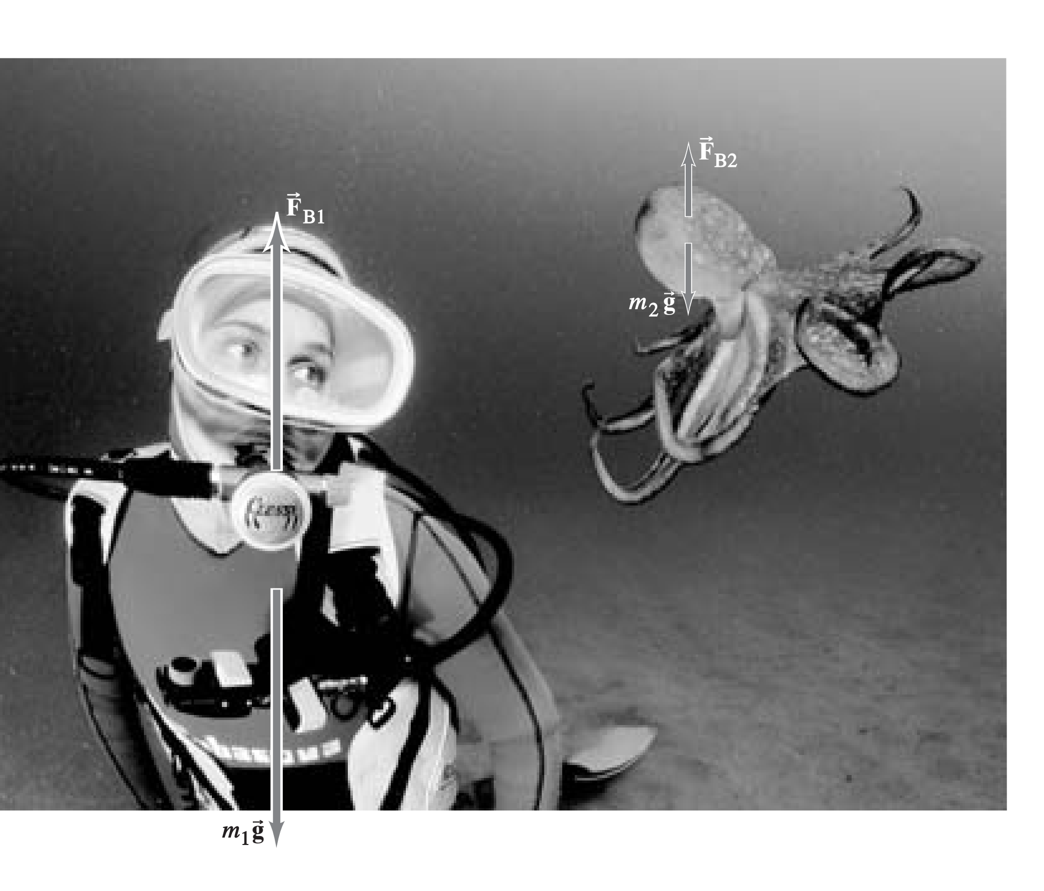
C: $F_N = m_A g + m_B g + Mg = 560$ N.

D: *a*).

E: 7.0 kg.

F: La fricción estática en el piso de cemento ($= F_{Cx}$) es fundamental, o de otra manera la escalera se deslizaría. En la parte superior, la escalera puede moverse y ajustarse, por lo que ahí no necesitaríamos ni esperaríamos una fuerza de fricción estática fuerte.

G: *b*).



Bajo el agua, los buzos y los animales marinos experimentan una fuerza de flotación o de flotabilidad ($\vec{F}_B$) que casi equilibra sus pesos $m\vec{g}$. La fuerza de flotación es igual al peso del volumen de líquido desplazado (principio de Arquímedes) y surge porque la presión aumenta con la profundidad en el fluido. Los animales marinos tienen una densidad muy cercana a la del agua, por lo que sus pesos casi igualan a la fuerza de flotación. Los seres humanos tienen una densidad ligeramente menor que la del agua, por lo que pueden flotar.

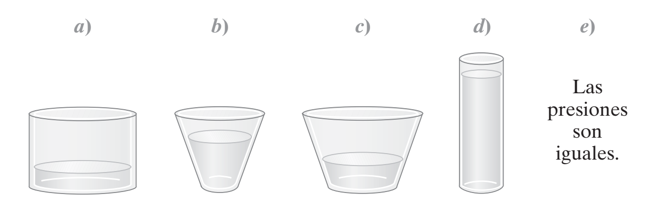
Cuando los líquidos fluyen, ocurren efectos interesantes porque la presión en el fluido es menor donde la velocidad es mayor (principio de Bernoulli).

CAPÍTULO 13

Fluidos

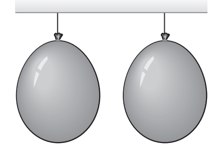
PREGUNTAS DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!

1. ¿Cuál contenedor tiene la mayor presión en el fondo? Suponga que todos tienen el mismo volumen de agua.



2. Dos globos están amarrados y cuelgan de manera que sus extremos más cercanos están a 3 cm entre sí. Si usted sopla entre los globos (no *sobre* los globos, sino en el espacio entre ellos), ¿qué sucede?

a) Nada.
b) Los globos se acercarán entre sí.
c) Los globos se alejarán entre sí.



CONTENIDO

En capítulos anteriores consideramos objetos sólidos y suponíamos que su forma se conservaba, excepto por la pequeña cantidad de deformación elástica. En ocasiones tratamos los objetos como partículas puntuales. Ahora vamos a ocuparnos de materiales que son muy deformables y pueden fluir. Tales "fluidos" incluyen a los líquidos y a los gases. Examinaremos los fluidos tanto en reposo (estática de fluidos) como en movimiento (dinámica de fluidos).

13–1 Fases de la materia

Los tres **estados** o **fases** de la materia son: sólido, líquido y gaseoso. Podemos distinguir esas tres fases como sigue. Un **sólido** mantiene una forma y un tamaño estables; aun cuando se aplique una gran fuerza a un sólido, éste no cambia fácilmente de forma o de volumen. Un **líquido** no mantiene una forma fija (toma la forma del recipiente que lo contiene); sin embargo, al igual que un sólido, no es fácilmente compresible y su volumen puede modificarse sólo por una fuerza muy grande. Un **gas** no tiene ni forma ni volumen fijos, sino que se expande hasta llenar el recipiente que lo contiene. Por ejemplo, cuando se bombea aire a un neumático de automóvil, el aire no se acumula en el fondo del neumático como lo haría un líquido, sino que se dispersa llenando todo el volumen del neumático. Los líquidos y gases no mantienen una forma estable, ya que tienen la capacidad de fluir; por ello se les conoce en conjunto como **fluidos**.

La división de la materia en tres fases no siempre es una tarea sencilla. Por ejemplo, ¿cómo debe clasificarse la mantequilla? Más aún, es posible distinguir una cuarta fase de la materia, la fase **plasma**, que se presenta sólo a muy altas temperaturas y consiste en átomos ionizados (electrones separados de los núcleos). Algunos científicos creen que los llamados coloides (suspensiones de diminutas partículas en un líquido) también deberían considerarse una fase de la materia. Los **cristales líquidos**, que se utilizan en pantallas de TV, computadoras, calculadoras y relojes digitales, podrían considerarse una fase de la materia intermedia entre sólidos y líquidos. Sin embargo, para nuestros fines, centraremos nuestra atención fundamentalmente en las tres fases más comunes de la materia.

TABLA 13–1
Densidades de sustancias†

Sustancia	Densidad, ρ (kg/m^3)
Sólidos	
Aluminio	2.70×10^3
Hierro y acero	7.8×10^3
Cobre	8.9×10^3
Plomo	11.3×10^3
Oro	19.3×10^3
Concreto	2.3×10^3
Granito	2.7×10^3
Madera (común)	$0.3 - 0.9 \times 10^3$
Vidrio (común)	$2.4 - 2.8 \times 10^3$
Hielo (H_2O)	0.917×10^3
Hueso	$1.7 - 2.0 \times 10^3$
Líquidos	
Agua (4°C)	1.00×10^3
Sangre, plasma	1.03×10^3
Sangre entera	1.05×10^3
Agua salada	1.025×10^3
Mercurio	13.6×10^3
Alcohol etílico	0.79×10^3
Gasolina	0.68×10^3
Gases	
Aire	1.29
Helio	0.179
Dióxido de carbono	1.98
Vapor (agua, 100°C)	0.598

†Las densidades están dadas para 0°C y una presión de 1 atm, a menos que se especifiquen otras condiciones.

13–2 Densidad y gravedad específica

Se dice a veces que el hierro es "más pesado" que la madera. En realidad, esto no es cierto ya que un tronco grande de madera, sin duda, pesa más que una aguja de hierro. Lo que deberíamos decir es que el hierro es más *denso* que la madera.

La **densidad** ρ de una sustancia (ρ es la letra griega "rho" minúscula) se define como masa por unidad de volumen:

$$\rho = \frac{m}{V}, \qquad \textbf{(13–1)}$$

donde m es la masa de una muestra de la sustancia y V su volumen. La densidad es una propiedad característica de cualquier sustancia pura. Los objetos hechos de una sustancia en estado puro, como el oro, pueden tener cualquier tamaño o masa, aunque su densidad siempre será la misma.

A veces emplearemos el concepto de densidad (ecuación 13-1) para denotar la masa de un objeto como

$$m = \rho V,$$

y el peso de un objeto como

$$mg = \rho V g.$$

La unidad del SI para la densidad es kg/m^3. En ocasiones las densidades están dadas en g/cm^3. Observe que 1 kg/m^3 = 1000 g/(100 cm)^3 = 10^3 g/10^6 cm^3 = 10^{-3} g/cm^3, por lo que una densidad expresada en g/cm^3 debe multiplicarse por 1000 para dar el resultado en kg/m^3. Así, la densidad del aluminio es ρ = 2.70 g/cm^3, que es igual a 2700 kg/m^3. Las densidades de varias sustancias se presentan en la tabla 13-1. La tabla especifica temperatura y presión porque éstas afectan la densidad de las sustancias (aunque el efecto es pequeño para líquidos y sólidos). Observe que el aire es aproximadamente 1000 veces menos denso que el agua.

EJEMPLO 13–1 Dados el volumen y la densidad, encuentre la masa. ¿Cuál es la masa de una bola sólida de hierro de radio igual a 18 cm?

PLANTEAMIENTO Primero se utiliza la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (véase la tabla al final del libro) para obtener el volumen de una esfera. Luego, la ecuación 13-1 y la tabla 13-1 nos dan la masa m.

SOLUCIÓN El volumen de cualquier esfera es

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}(3.14)(0.18\text{ m})^3 = 0.024\text{ m}^3.$$

A partir de la tabla 13-1, se sabe que la densidad del hierro es $\rho = 7800\text{ kg/m}^3$, por lo que la ecuación 13-1 da

$$m = \rho V = \left(7800\text{ kg/m}^3\right)\left(0.024\text{ m}^3\right) = 190\text{ kg}.$$

La **gravedad específica** de una sustancia se define como la razón de la densidad de esa sustancia a la densidad del agua a 4.0°C. La gravedad específica (abreviada GE) es un número sin dimensiones o unidades. Como la densidad del agua es $1.00\text{ g/cm}^3 = 1.00 \times 10^3\text{ kg/m}^3$, la gravedad específica de cualquier sustancia será igual numéricamente a su densidad expresada en g/cm^3, o 10^{-3} veces su densidad especificada en kg/m^3. Por ejemplo (véase la tabla 13-1), la gravedad específica del plomo es 11.3 y el del alcohol es 0.79.

Los conceptos de densidad y de gravedad específica son especialmente útiles en el estudio de los fluidos porque no siempre se trata con volúmenes o masas fijos.

13–3 Presión en fluidos

La presión y la fuerza están relacionadas; sin embargo, no son lo mismo. La **presión** se define como fuerza por área unitaria, donde la fuerza F se entiende como la magnitud de la fuerza que actúa perpendicularmente a la superficie de área A:

$$\text{presión} = P = \frac{F}{A}. \tag{13–2}$$

Aunque la fuerza es un vector, la presión es un escalar. La presión sólo tiene magnitud. La unidad del SI para presión es N/m^2. Esta unidad tiene el nombre oficial de **pascal** (Pa), en honor de Blaise Pascal (véase la sección 13-5); $1\text{ Pa} = 1\text{ N/m}^2$. Sin embargo, por sencillez, en general usaremos N/m^2. Otras unidades que también se emplean son dina/cm^2, lb/in.^2 (abreviada a veces como "psi"). Encontraremos luego otras unidades y veremos las conversiones entre ellas en la sección 13-6 (véase también la tabla al inicio del libro).



La presión es un escalar, no un vector

EJEMPLO 13–2 Cálculo de presión. Los pies de una persona de 60 kg cubren un área de 500 cm^2. *a*) Determine la presión que ejercen los dos pies sobre el suelo. *b*) Si la persona se para sobre un pie, ¿cuál será la presión debajo de éste?

PLANTEAMIENTO Suponga que la persona está en reposo. El suelo la empuja con una fuerza igual a su peso mg, y ella ejerce una fuerza mg sobre el suelo donde sus pies (o pie) hacen contacto. Como $1\text{ cm}^2 = (10^{-2}\text{ m})^2 = 10^{-4}\text{ m}^2$, por lo tanto, $500\text{ cm}^2 = 0.050\text{ m}^2$.

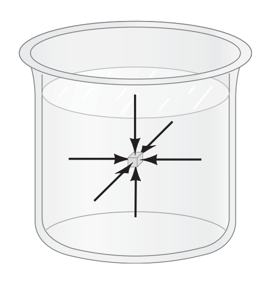
SOLUCIÓN *a*) La presión que ejercen los pies sobre el suelo es

$$P = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{(60\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)}{(0.050\text{ m}^2)} = 12 \times 10^3\text{ N/m}^2.$$

b) Si la persona está parada sobre un solo pie, la fuerza es la misma; sin embargo, el área se reduce a la mitad, por lo que la presión se duplica: $24 \times 10^3\text{ N/m}^2$.

El concepto de presión es particularmente útil al tratar con fluidos. Es un hecho experimental que *un fluido ejerce una presión en todas direcciones*. Esto es algo que conocen muy bien los nadadores y clavadistas, quienes sienten la presión del agua en todo su cuerpo. En cualquier profundidad de un fluido en reposo, la presión es la misma en todas direcciones a una profundidad dada. Para ver por qué, examinemos el diminuto cubo de fluido (figura 13-1), el cual es tan pequeño que podemos considerarlo un punto e ignorar la fuerza de gravedad sobre él. La presión sobre uno de sus lados debe ser igual a la presión sobre el lado opuesto. Si esto no fuera cierto, se tendría una fuerza neta sobre el cubo y éste comenzaría a moverse. Si el fluido no está fluyendo, entonces las presiones deben ser iguales.

FIGURA 13–1 La presión es la misma en todas direcciones en un fluido que permanece estático a una profundidad dada; si no fuera así, el fluido empezaría a moverse.



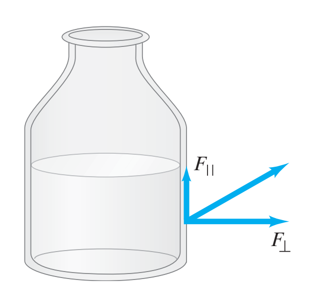


FIGURA 13–2 Si hubiera una componente de la fuerza paralela a la superficie sólida del recipiente, el líquido se movería en respuesta a ella. Para un líquido en reposo, $F_{\parallel} = 0$.

FIGURA 13–3 Cálculo de la presión a una profundidad h en un líquido.

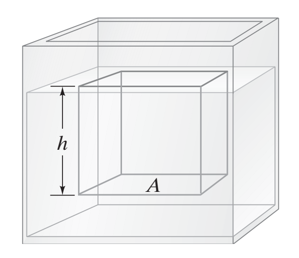
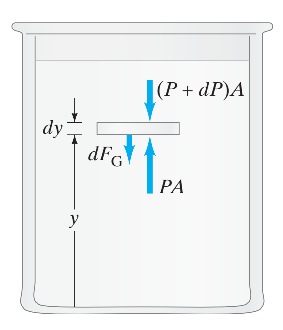


FIGURA 13–4 Fuerzas sobre un volumen en forma de placa delgada de fluido para determinar la presión P a una altura y en el fluido.



Para un fluido en reposo, la fuerza que se debe a la presión del fluido siempre actúa *perpendicularmente* a cualquier superficie sólida con la que esté en contacto. Si hubiera una componente de la fuerza paralela a la superficie, como se ilustra en la figura 13-2, entonces, de acuerdo con la tercera ley de Newton, la superficie sólida ejercería una fuerza de regreso sobre el fluido que también tendría una componente paralela a la superficie, lo que ocasionaría que éste fluyera, en contradicción con nuestra suposición de que el fluido está en reposo. Por lo tanto, la fuerza debida a la presión siempre es perpendicular a la superficie.

Calculemos ahora cuantitativamente cómo varía con la profundidad la presión en un líquido de densidad uniforme. Consideremos un punto que está a una profundidad h por debajo de la superficie del líquido (es decir, la superficie está a una altura h por arriba de este punto), como se muestra en la figura 13-3. La presión debida al líquido a esta profundidad h es provocada por el peso de la columna de líquido encima de él. Así, la fuerza debida al peso del líquido que actúa sobre el área A es $F = mg = (\rho V)g = \rho Ahg$, donde Ah es el volumen de la columna de líquido, ρ es la densidad del líquido (que se supone constante) y g es la aceleración de la gravedad. Por lo tanto, la presión P debida al peso del líquido es

$$P = \frac{F}{A} = \frac{\rho Ahg}{A}$$

$$P = \rho gh. \qquad \text{[líquido]} \quad \mathbf{(13–3)}$$

Advierta que el área A no afecta la presión a una profundidad dada. La presión del fluido es directamente proporcional a la densidad del líquido y a la profundidad dentro de éste. En general, la presión dentro de un líquido uniforme es la misma a profundidades iguales.

EJERCICIO A Regrese a la pregunta 1 al inicio del capítulo, página 339, y respóndala de nuevo. Intente explicar por qué quizá la contestó de manera diferente la primera vez.

La ecuación 13-3 nos dice cuál es la presión a una profundidad h en el líquido, que se debe a este último. Sin embargo, ¿qué sucede si se ejerce una presión adicional en la superficie del líquido, como la presión de la atmósfera o la de un pistón que empuja hacia abajo? ¿Y qué sucede si la densidad del fluido no es constante? Los gases son bastante compresibles y por ello sus densidades varían considerablemente con la profundidad; los líquidos también pueden comprimirse, aunque a menudo podemos despreciar la variación de su densidad. (Una excepción es en las profundidades del océano, donde el gran peso del agua la comprime considerablemente e incrementa su densidad.) Para cubrir éstos y otros casos, nos ocuparemos ahora del caso general de determinar cómo varía la presión en un fluido con la profundidad.

Consideremos cualquier fluido y determinemos la presión a cualquier altura y, por arriba de algún punto de referencia† (como el lecho del océano o el fondo de un tanque o de una alberca), como se muestra en la figura 13-4. Dentro de este fluido, a la altura y, consideramos un pequeño volumen en forma de placa delgada, cuya área es A y cuyo espesor infinitesimal es dy, como se indica. Sea P la presión que actúa hacia arriba sobre su superficie inferior (a la altura y). La presión que actúa hacia abajo sobre la superficie superior de la pequeña placa (a la altura $y + dy$) se designa como $P + dP$. La presión del fluido que actúa sobre la placa ejerce entonces una fuerza igual a PA hacia arriba y una fuerza $(P + dP)A$ hacia abajo. La otra fuerza que actúa verticalmente sobre la placa es la fuerza (infinitesimal) de gravedad dF_G, que sobre la placa de masa dm es

$$dF_G = (dm)g = \rho g\, dV = \rho gA\, dy,$$

donde ρ es la densidad del fluido a la altura y. Como se supone que el fluido está en reposo, la placa está en equilibrio de manera que la fuerza neta sobre ella debe ser cero. Por lo tanto, tenemos

$$PA - (P + dP)A - \rho gA\, dy = 0,$$

que al simplificar toma la forma

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g. \qquad \mathbf{(13–4)}$$

Esta relación nos dice cómo varía la presión dentro del fluido con la altura con respecto a cualquier punto de referencia. El signo menos indica que la presión disminuye con un incremento de la altura; o que la presión aumenta con la profundidad (altura reducida).

†Ahora estamos midiendo la y positiva hacia arriba, a la inversa de como lo hicimos para obtener la ecuación 13-3, donde medíamos la profundidad (es decir, y positiva hacia abajo).

Si la presión a una altura y_1 en el fluido es P_1 y a una altura y_2 es P_2, entonces podemos integrar la ecuación 13-4 para obtener

$$\int_{P_1}^{P_2} dP = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g\, dy$$

$$P_2 - P_1 = -\int_{y_1}^{y_2} \rho g\, dy, \qquad \textbf{(13–5)}$$

donde suponemos que ρ es una función de la altura y: $\rho = \rho\,(y)$. Ésta es una relación general y ahora la aplicaremos a dos casos especiales: (1) la presión en líquidos de densidad uniforme y (2) variaciones de presión en la atmósfera de la Tierra.

Para líquidos en los que puede despreciarse cualquier variación en la densidad, ρ = constante y la ecuación 13-5 se integra fácilmente:

$$P_2 - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1). \qquad \textbf{(13–6a)}$$

Para la situación común de un líquido en un recipiente abierto, como el agua en un vaso, una alberca, un lago o el océano, se tiene una superficie libre en la parte superior. En tal caso es conveniente medir las distancias desde esta superficie superior. Es decir, llamamos h a la *profundidad* en el líquido, donde $h = y_2 - y_1$, como se observa en la figura 13-5. Si y_2 es la posición de la superficie superior, entonces P_2 representa la presión atmosférica, P_0, en la superficie libre. Entonces, de la ecuación 13-6a, la presión $P(= P_1)$ a una profundidad h en el fluido es

$$P = P_0 + \rho g h. \qquad [h \text{ es la profundidad en el líquido}] \qquad \textbf{(13–6b)}$$

Observe que la ecuación 13-6b es simplemente la presión del líquido (ecuación 13-3) más la presión P_0 debida a la atmósfera.

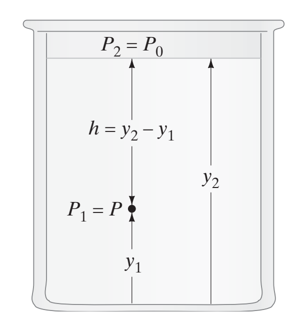


FIGURA 13–5 La presión a una profundidad $h = (y_2 - y_1)$ en un líquido de densidad ρ es $P = P_0 + \rho g h$, donde P_0 es la presión externa en la superficie superior del líquido.

EJEMPLO 13–3 Presión en un grifo. La superficie del agua en un tanque de almacenamiento está 30 m por arriba de un grifo de agua en la cocina de una casa (figura 13-6). Calcule la diferencia en la presión del agua entre el grifo y la superficie del agua en el tanque.

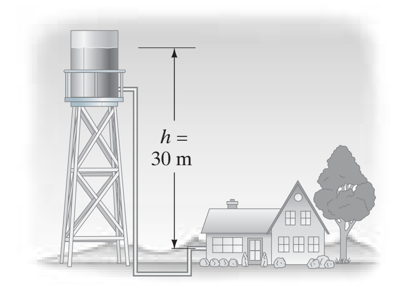
PLANTEAMIENTO El agua es prácticamente incompresible, así que ρ es constante incluso para h = 30 m y cuando podemos utilizar la ecuación 13-6b. Sólo importa h; podemos ignorar la "ruta" del tubo y sus codos.

SOLUCIÓN Suponemos que la presión atmosférica en la superficie del agua en el tanque de almacenamiento es la misma que en el agua que sale por el grifo. La diferencia de presión entre el grifo y la superficie del agua en el tanque es

$$\Delta P = \rho g h = (1.0 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3})(9.8\,\mathrm{m/s^2})(30\,\mathrm{m}) = 2.9 \times 10^5\,\mathrm{N/m^2}.$$

NOTA La altura h se llama a veces **carga de presión**. En este ejemplo, la carga del agua en el grifo es de 30 m. Los diferentes diámetros del tanque y del grifo no afectan el resultado, sólo la presión lo afecta.

FIGURA 13–6 Ejemplo 13–3.



EJEMPLO 13–4 Fuerza en la ventana de un acuario. Calcule la fuerza debida a la presión del agua que se ejerce sobre la ventana de observación de un acuario de 1.0 m × 3.0 m, cuyo borde superior está a 1.0 m debajo de la superficie del agua (figura 13-7).

PLANTEAMIENTO A una profundidad h, la presión debida al agua está dada por la ecuación 13-6b. Divida la ventana en franjas horizontales de longitud $\ell = 3.0$ m y grosor dy, como se ilustra en la figura 13-7. Elegimos un sistema de coordenadas con $y = 0$ en la superficie del agua, donde y es positiva hacia abajo. (De esta manera, el signo menos en la ecuación 13-6a se vuelve positivo, o bien, usamos la ecuación 13-6b con $y = h$). La fuerza debida a la presión del agua sobre cada franja es $dF = PdA = \rho g y \ell dy$.

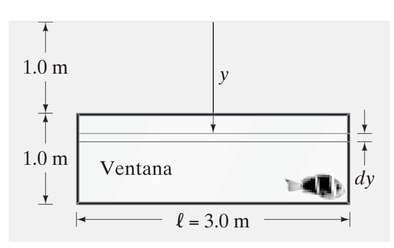
SOLUCIÓN La fuerza total sobe la ventana está dada por la integral:

$$\int_{y_1 = 1.0\,\mathrm{m}}^{y_2 = 2.0\,\mathrm{m}} \rho g y \ell\, dy = \tfrac{1}{2}\rho g \ell\left(y_2^2 - y_1^2\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}(1000\,\mathrm{kg/m^3})(9.8\,\mathrm{m/s^2})(3.0\,\mathrm{m})\left[(2.0\,\mathrm{m})^2 - (1.0\,\mathrm{m})^2\right] = 44{,}000\,\mathrm{N}.$$

NOTA Para verificar la respuesta, es conveniente hacer una estimación: multiplique el área de la ventana (3.0 m^2) por la presión en la mitad de la ventana (h = 1.5 m) utilizando la ecuación 13-3, $P = \rho g h = (1000\,\mathrm{kg/m^3})(9.8\,\mathrm{m/s^2})(1.5\,\mathrm{m}) \approx 1.5 \times 10^4\,\mathrm{N/m^2}$. De manera que $F = PA \approx (1.5 \times 10^4\,\mathrm{N/m^2})(3.0\,\mathrm{m})(1.0\,\mathrm{m}) \approx 4.5 \times 10^4\,\mathrm{N}$. ¡Bien!

FIGURA 13–7 Ejemplo 13–4.



EJERCICIO B Una presa sirve para contener un lago que tiene 85 m de profundidad junto a la presa. Si el lago mide 20 km de largo, ¿qué tanto más ancha debería ser la presa en comparación con el ancho que se necesitaría si el lago fuera más pequeño, de tan sólo 1.0 km de largo?

Apliquemos ahora la ecuación 13-4 o la 13-5 a los gases. La densidad de los gases normalmente es muy pequeña, por lo que la diferencia de presión a diferentes alturas se ignora si $y_2 - y_1$ no es grande (por eso, en el ejemplo 13-2 pudimos ignorar la diferencia en la presión del aire entre el grifo y la parte superior del tanque de almacenamiento). Para la mayoría de los recipientes ordinarios de gas, podemos suponer que la presión es la misma en todas partes. Sin embargo, si $y_2 - y_1$ es muy grande, no podemos hacer esta suposición. Un ejemplo interesante es la atmósfera de la Tierra, cuya presión aproximada al nivel del mar es de $1.013 \times 10^5\ \mathrm{N/m^2}$ y disminuye lentamente con la altitud.

EJEMPLO 13–5 **Efecto de la altitud sobre la presión atmosférica.** *a*) Determine la variación de la presión en la atmósfera de la Tierra en función de la altitud y, sobre el nivel del mar, suponiendo g constante y que la densidad del aire es proporcional a la presión. (Esta última suposición no es exacta, en parte porque la temperatura y otros efectos del clima atmosférico son importantes.) *b*) ¿A qué altitud la presión del aire es igual a la mitad de la presión al nivel del mar?

PLANTEAMIENTO Comenzamos con la ecuación 13-4 y la integramos a partir de la superficie de la Tierra, donde $y = 0$ y $P = P_0$, hasta la altitud y a la presión P. En *b*) elegimos $P = \frac{1}{2}P_0$.

SOLUCIÓN *a*) Suponemos que ρ es proporcional a P, por lo que podemos escribir

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{P}{P_0},$$

donde $P_0 = 1.013 \times 10^5\ \mathrm{N/m^2}$ es la presión atmosférica al nivel del mar y $\rho_0 = 1.29\ \mathrm{kg/m^3}$ es la densidad del aire al nivel del mar a 0°C (tabla 13-1). Del cambio diferencial en la presión con la altitud (ecuación 13-4), tenemos

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g = -P\left(\frac{\rho_0}{P_0}\right)g,$$

por lo que

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0}{P_0}g\,dy.$$

Integramos esto a partir de $y = 0$ (superficie de la Tierra) y $P = P_0$, a la altitud y donde la presión es P:

$$\int_{P_0}^{P}\frac{dP}{P} = -\frac{\rho_0}{P_0}g\int_0^y dy$$

$$\ln\frac{P}{P_0} = -\frac{\rho_0}{P_0}gy,$$

puesto que $\ln P - \ln P_0 = \ln(P/P_0)$. Entonces

$$P = P_0 e^{-(\rho_0 g/P_0)y}.$$

Así, con base en nuestras suposiciones, encontramos que la presión del aire en nuestra atmósfera disminuye exponencialmente con la altitud.

NOTA La atmósfera no tiene una clara superficie superior, por lo que no hay un punto natural desde el cual se pueda medir su profundidad, como se hace con un líquido.

b) La constante $(\rho_0 g/P_0)$ tiene el valor

$$\frac{\rho_0 g}{P_0} = \frac{(1.29\ \mathrm{kg/m^3})(9.80\ \mathrm{m/s^2})}{(1.013 \times 10^5\ \mathrm{N/m^2})} = 1.25 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^{-1}}.$$

Entonces, cuando hacemos $P = \frac{1}{2}P_0$ en la expresión derivada en *a*), obtenemos

$$\tfrac{1}{2} = e^{-(1.25\times10^{-4}\ \mathrm{m^{-1}})y}$$

o bien, tomando los logaritmos naturales de ambos lados,

$$\ln\tfrac{1}{2} = (-1.25 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^{-1}})y$$

Así que (recordamos que $\ln\frac{1}{2} = -\ln 2$, apéndice A-7, ecuación ii)

$$y = (\ln 2.00)/(1.25 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^{-1}}) = 5550\ \mathrm{m}.$$

A una elevación de aproximadamente 5500 m (unos 18,000 pies), la presión atmosférica disminuye a la mitad de su valor al nivel del mar. No es sorprendente entonces que los alpinistas usen a menudo tanques de oxígeno a muy grandes altitudes.

13–4 Presión atmosférica y presión manométrica

Presión atmosférica

La presión del aire en un punto determinado de la Tierra varía ligeramente de acuerdo con el clima atmosférico. Al nivel del mar la presión de la atmósfera, en promedio, es igual a $1.013 \times 10^5\ \mathrm{N/m^2}$ (o $14.7\ \mathrm{lb/in.^2}$). Este valor se usa para definir una unidad de presión comúnmente usada, la **atmósfera** (abreviada atm):

$$1\ \mathrm{atm} = 1.013 \times 10^5\ \mathrm{N/m^2} = 101.3\ \mathrm{kPa}.$$

Otra unidad de presión empleada con frecuencia (en meteorología y en mapas del tiempo) es el **bar**, que se define como

$$1\ \mathrm{bar} = 1.000 \times 10^5\ \mathrm{N/m^2}.$$

Así, la presión atmosférica estándar es ligeramente mayor que 1 bar.

FÍSICA APLICADA
Presión sobre las células vivas

La presión que se debe al peso de la atmósfera se ejerce sobre todos los objetos inmersos en este gran mar de aire, incluidos nuestros cuerpos. ¿Cómo resiste un cuerpo humano la enorme presión sobre su superficie? La respuesta es que las células vivas mantienen una presión interna que equilibra la presión externa, de igual forma como la presión interna de un globo casi iguala a la presión externa de la atmósfera. Un neumático, gracias a su rigidez, puede mantener presiones internas mucho mayores que la presión externa.

EJEMPLO CONCEPTUAL 13–6 **Un dedo retiene el agua en una pajilla.** Usted introduce una pajilla de longitud ℓ en un vaso largo de vidrio con agua. Luego, coloca un dedo de forma que tape el extremo superior de la pajilla, atrapando algo de aire por encima del agua e impidiendo que el aire entre o salga; después, saca la pajilla del agua. La pajilla retiene casi toda el agua (véase la figura 13-8a). El aire en el espacio entre el dedo y el límite superior del agua, ¿tendrá una presión mayor, igual o menor que la presión atmosférica P_0 que hay afuera de la pajilla?

RESPUESTA Considere las fuerzas sobre la columna de agua (figura 13-8b). La presión atmosférica afuera de la pajilla empuja hacia arriba el agua en la parte inferior de la misma, la gravedad tira del agua hacia abajo, y la presión de aire dentro de la parte superior de la pajilla empuja el agua hacia abajo. Como el agua está en equilibrio, la fuerza ascendente que se debe a la presión atmosférica P_0 tiene que equilibrar las dos fuerzas descendentes. Esto es posible sólo si la presión del aire dentro de la pajilla es *menor* que la presión atmosférica afuera de la pajilla. (Cuando en un principio de retira la pajilla del vaso de agua, un poco del líquido sale de ella por la parte inferior; así se incrementa el volumen del aire atrapado y se reduce su densidad y presión).

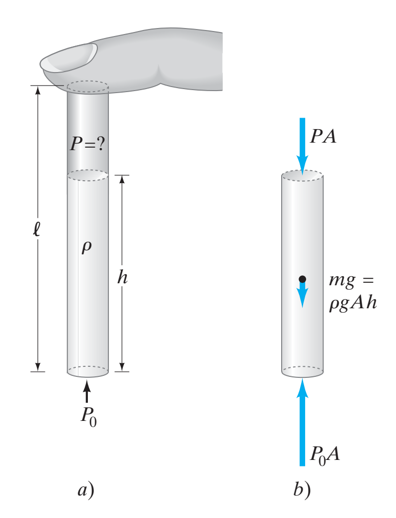


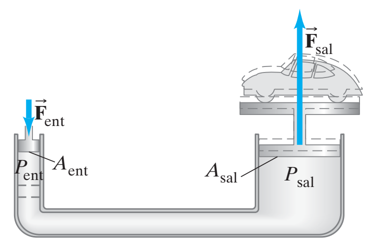
FIGURA 13–8 Ejemplo 13–6.

Presión manométrica

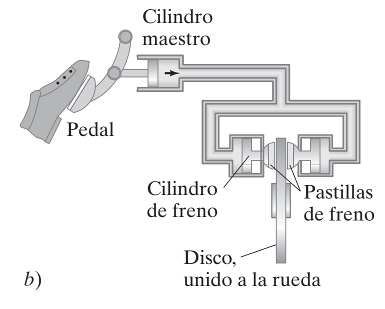
Es importante notar que los manómetros para neumáticos, y de otros tipos, registran la presión por encima de la presión atmosférica, llamada **presión manométrica**. Así, para obtener la **presión absoluta** P, se debe sumar la presión atmosférica P_0 a la presión manométrica P_G:

$$P = P_0 + P_G.$$

Si un manómetro para neumáticos registra 220 kPa, la presión absoluta dentro del neumático es 220 kPa + 101 kPa = 321 kPa. Esto equivale a 3.2 atm (2.2 atm de presión manométrica).




a)



b)

FIGURA 13–9 Aplicaciones del principio de Pascal: *a*) elevador hidráulico; *b*) frenos hidráulicos en un automóvil.


FÍSICA APLICADA
Elevador hidráulico


FÍSICA APLICADA
Frenos hidráulicos

13–5 Principio de Pascal

La atmósfera de la Tierra ejerce presión sobre todos los objetos con los que está en contacto, incluyendo otros fluidos. La presión externa que actúa sobre un fluido se transmite por todo ese fluido. Por ejemplo, de acuerdo con la ecuación 13-3, la presión que se debe al agua a una profundidad de 100 m por debajo de la superficie de un lago es $P = \rho g h = (1000\ \text{kg/m}^3)(9.8\ \text{m/s}^2)(100\ \text{m}) = 9.8 \times 10^5\ \text{N/m}^2$, o 9.7 atm. Sin embargo, la presión total en ese punto se debe a la presión del agua más la presión del aire por arriba de ella. Por consiguiente, la presión total (si el lago está cerca del nivel del mar) es 9.7 atm + 1.0 atm = 10.7 atm. Éste es un solo ejemplo de un principio general atribuido al filósofo y científico francés Blaise Pascal (1623-1662). El **principio de Pascal** establece que si se aplica una *presión externa a un fluido confinado, la presión en cada puntos del fluido se incrementa en la misma cantidad*.

Varios dispositivos prácticos se basan en el principio de Pascal. Un ejemplo es el elevador hidráulico, ilustrado en la figura 13-9a, en el que se emplea una pequeña fuerza para ejercer una gran fuerza haciendo el área del pistón de salida mayor que el área del pistón de entrada. Para ver cómo funciona este dispositivo, supongamos que los pistones de entrada y salida están a la misma altura (por lo menos aproximadamente). La fuerza externa de entrada F_{ent}, por el principio de Pascal, incrementa la presión en la misma cantidad en todo el fluido, por lo tanto, al mismo nivel (véase la figura 13-9a).

$$P_{\text{sal}} = P_{\text{ent}}$$

donde las cantidades de entrada están representadas por el subíndice "ent" y las de salida por "sal." Así,

$$\frac{F_{\text{sal}}}{A_{\text{sal}}} = \frac{F_{\text{ent}}}{A_{\text{ent}}},$$

o bien,

$$\frac{F_{\text{sal}}}{F_{\text{ent}}} = \frac{A_{\text{sal}}}{A_{\text{ent}}}.$$

La cantidad $F_{\text{sal}}/F_{\text{ent}}$ constituye la **ventaja mecánica** del elevador hidráulico y es igual a la razón de las áreas. Por ejemplo, si el área del pistón de salida es 20 veces la del cilindro de entrada, la fuerza se multiplica por un factor de 20. Así, una fuerza de 200 lb podría levantar un automóvil de 4000 lb.

La figura 13-9b ilustra el sistema de frenos de un automóvil. Cuando el conductor pisa el pedal de freno, la presión en el cilindro maestro se incrementa. Este aumento de presión se registra en todo el líquido de frenos, empujando así las pastillas de freno contra el disco que está unido a las ruedas del auto.

13–6 Medición de la presión: Manómetros y barómetros

Se han inventado muchos dispositivos para medir la presión, algunos de los cuales se ilustran en la figura 13-10. El más sencillo es el *manómetro* de tubo abierto (figura 13-10a), que es un tubo en forma de U parcialmente lleno con un líquido como mercurio o agua. La presión P que se mide está relacionada con la diferencia en altura Δh de los dos niveles del líquido por la relación

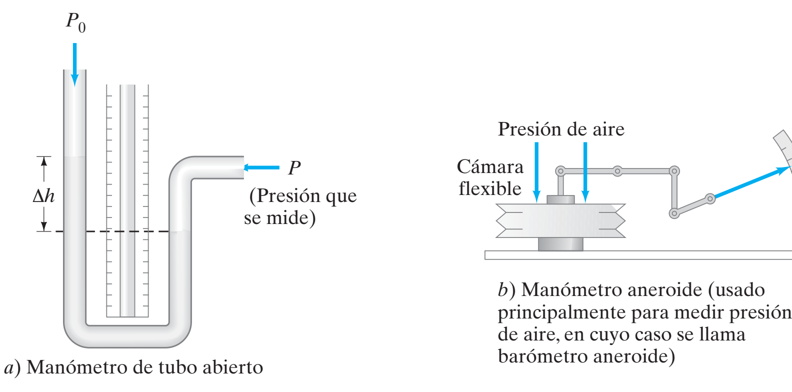
$$P = P_0 + \rho g\,\Delta h,$$

donde P_0 es la presión atmosférica (que actúa sobre la parte superior del fluido en el tubo izquierdo), y ρ es la densidad del líquido. Note que la cantidad $\rho g\,\Delta h$ es la presión manométrica, es decir, la cantidad en que P excede a la presión atmosférica P_0. Si el líquido en la columna izquierda tuviera menor altura que en la columna derecha, esto indicaría que P es menor que la presión atmosférica (y Δh sería negativa).

En vez de calcular el producto $\rho g\,\Delta h$, es común especificar sólo el cambio en la altura Δh. De hecho, las presiones se especifican a veces como "milímetros de mercurio" (mm-Hg) o como "mm de agua" (mm-H_2O). La unidad mm-Hg equivale a una presión de 133 N/m^2, ya que $\rho g\,\Delta h$ para 1 mm = 1.0×10^{-3} m de mercurio da

$$\rho g\,\Delta h = \left(13.6 \times 10^3\ \text{kg/m}^3\right)\left(9.80\ \text{m/s}^2\right)\left(1.00 \times 10^{-3}\ \text{m}\right) = 1.33 \times 10^2\ \text{N/m}^2.$$

La unidad mm-Hg también se llama **torr**, en honor de Evangelista Torricelli (1608-1647), el discípulo de Galileo que inventó el barómetro (véase la siguiente página). Los facto-



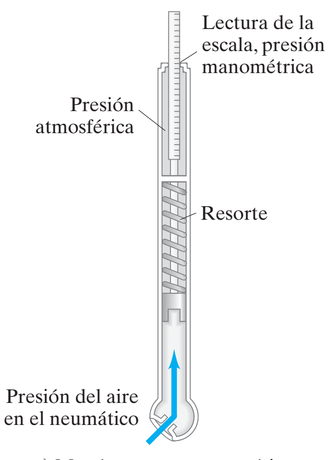


FIGURA 13–10 Manómetros: *a*) manómetro de tubo abierto, *b*) manómetro aneroide y *c*) manómetro común para neumáticos.

res de conversión entre las diferentes unidades de presión (¡una terrible molestia!) se presentan en la tabla 13-2. Es importante usar $N/m^2 = Pa$, la unidad de presión en el SI, para cálculos que impliquen otras cantidades especificadas en unidades del SI.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Use unidades del SI en los cálculos:
$1\ Pa = 1\ N/m^2$

TABLA 13–2 Factores de conversión entre diferentes unidades de presión

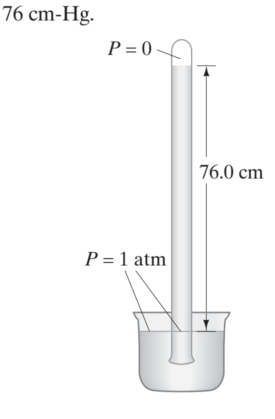
En términos de $1\ Pa = 1\ N/m^2$	1 atm en diferentes unidades
$1\ atm = 1.013 \times 10^5\ N/m^2$	$1\ atm = 1.013 \times 10^5\ N/m^2$
$= 1.013 \times 10^5\ Pa = 101.3\ kPa$	
$1\ bar = 1.000 \times 10^5\ N/m^2$	$1\ atm = 1.013\ bar$
$1\ dina/cm^2 = 0.1\ N/m^2$	$1\ atm = 1.013 \times 10^6\ dina/cm^2$
$1\ lb/in.^2 = 6.90 \times 10^3\ N/m^2$	$1\ atm = 14.7\ lb/in.^2$
$1\ lb/ft^2 = 47.9\ N/m^2$	$1\ atm = 2.12 \times 10^3\ lb/ft^2$
$1\ cm\text{-}Hg = 1.33 \times 10^3\ N/m^2$	$1\ atm = 76.0\ cm\text{-}Hg$
$1\ mm\text{-}Hg = 133\ N/m^2$	$1\ atm = 760\ mm\text{-}Hg$
$1\ torr = 133\ N/m^2$	$1\ atm = 760\ torr$
$1\ mm\text{-}H_2O\ (4°C) = 9.80\ N/m^2$	$1\ atm = 1.03 \times 10^4\ mm\text{-}H_2O\ (4°C)$

Otro tipo de manómetro de presión es el manómetro aneroide (figura 13-10b) en el que la aguja está unida a extremos flexibles de una cámara metálica delgada al vacío. En un manómetro electrónico, la presión puede aplicarse a un diafragma metálico delgado cuya distorsión resultante se traduce a una señal eléctrica mediante un transductor. En la figura 13-10c se ilustra un manómetro común para neumáticos.

La presión atmosférica se mide a menudo con un tipo modificado de manómetro de mercurio con un extremo cerrado, llamado **barómetro** de mercurio (figura 13-11). El tubo de vidrio se llena completamente con mercurio y luego se invierte en el recipiente de mercurio. Si el tubo es suficientemente largo, el nivel de mercurio descenderá, dejando un vacío en la parte superior del tubo, ya que la presión atmosférica puede soportar una columna de mercurio de sólo aproximadamente 76 cm de altura (exactamente 76.0 cm a presión atmosférica estándar). Esto es, una columna de mercurio de 76 cm de altura ejerce la misma presión que la atmósfera:†

$$P = \rho g\,\Delta h$$
$$= (13.6 \times 10^3\ kg/m^3)(9.80\ m/s^2)(0.760\ m) = 1.013 \times 10^5\ N/m^2 = 1.00\ atm.$$

FIGURA 13–11 El barómetro de mercurio, inventado por Torricelli, se ilustra aquí cuando la presión del aire es la presión atmosférica estándar, 76 cm-Hg.



†Este cálculo confirma la entrada en la tabla 13-2, 1 atm = 76.0 cm-Hg.



FIGURA 13–12 Un barómetro de agua: se introduce un tubo lleno de agua en una tina con agua, dejando cerrado el grifo en la parte superior del tubo. Cuando el extremo inferior del tubo se destapa, algo de agua fluye hacia fuera del tubo en la tina, dejando un vacío entre la superficie superior del agua y el grifo. ¿Por qué? Porque la presión del aire no puede soportar una columna de agua de más de 10 m de altura.

Un cálculo similar al anterior mostrará que la presión atmosférica puede sostener una columna de agua de 10.3 m de altura en un tubo cuya parte superior está al vacío (figura 13-12). Sin importar cuán buena sea una bomba de vacío, no es posible levantar el agua más de unos 10 m utilizando la presión atmosférica normal. Para bombear el agua del pozo de una mina profunda con una bomba de vacío se tendría que trabajar en distintas etapas y con profundidades mayores de 10 m. Galileo estudió este problema, y su discípulo Torricelli fue el primero en explicarlo. La razón es que una bomba no succiona realmente el agua hacia arriba del tubo, sino que sólo reduce la presión en la parte superior de éste. La presión atmosférica del aire *empuja* el agua hacia arriba del tubo si el extremo superior está a baja presión (al vacío), de la misma forma como lo hace la presión del aire que empuja (o sostiene) una columna de 76 cm altura en un barómetro. [Las bombas de fuerza (sección 13-14) que empujan hacia arriba desde el extremo inferior pueden ejercer una presión más elevada para empujar el agua más allá de 10 m de altura].

EJEMPLO CONCEPTUAL 13–7 **Succión.** Un estudiante propone el uso de zapatos con ventosas de succión para los astronautas de un transbordador, quienes deben trabajar en el exterior de la nave espacial. Después de estudiar este capítulo, usted le refuta sobre la falacia de este plan. ¿Cuál es la falacia?

RESPUESTA Las ventosas de succión trabajan empujando hacia fuera el aire que se encuentra debajo de ellas. Lo que mantiene a las ventosas de succión en su lugar es la presión del aire fuera de ellas. (Ésta puede ser una fuerza considerable sobre la Tierra. Por ejemplo, una ventosa con diámetro de 10 cm tiene una área de $7.9 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^2$. La fuerza de la atmósfera sobre ella es $(7.9 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^2)(1.0 \times 10^5\ \mathrm{N/m}^2) \approx 800\ \mathrm{N}$, o ¡aproximadamente 180 lbs!). Sin embargo, en el espacio exterior no hay presión del aire para mantener la ventosa de succión pagada a la nave espacial.

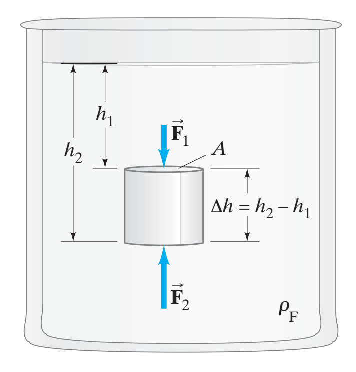
A veces pensamos de manera errónea que la succión es un efecto que se produce de forma activa. Por ejemplo, pensamos intuitivamente que absorbemos hacia arriba el líquido en una pajilla. Más bien, todo lo que hacemos es bajar la presión en la parte superior de la pajilla, y es la atmósfera la que *empuja* el líquido hacia arriba.

13–7 Flotación y el principio de Arquímedes

Los objetos sumergidos en un fluido parecen pesar menos que cuando están fuera de él. Por ejemplo, una piedra grande que usted tendría dificultad para levantar del suelo, a menudo puede levantarse fácilmente del fondo de una corriente. Cuando la piedra sale de la superficie del agua, repentinamente parece más pesada. Muchos objetos, como la madera, flotan sobre la superficie del agua. Éstos son dos ejemplos de *flotación*. En cada ejemplo, la fuerza de la gravedad actúa hacia abajo. Además, el líquido ejerce una fuerza de *flotación ascendente*. La fuerza de flotación sobre los peces y los buzos (como sucede en la foto de inicio del capítulo) casi equilibra la fuerza de gravedad hacia abajo y les permite "quedar suspendidos" en equilibrio.

La fuerza de flotación ocurre porque la presión en un fluido se incrementa con la profundidad. La presión ascendente sobre la superficie del fondo de un objeto sumergido es mayor que la presión descendente sobre su superficie superior. Para ver este efecto, consideremos un cilindro de altura Δh, el cual está completamente sumergido en un fluido de densidad ρ_F y cuyos extremos superior e inferior tienen una área A, como se observa en la figura 13-13. El fluido ejerce una presión $P_1 = \rho_F g h_1$ sobre la parte superior del cilindro (ecuación 13-3). La fuerza debida a esta presión sobre la parte superior del cilindro es $F_1 = P_1 A = \rho_F g h_1 A$ y está dirigida hacia abajo. De forma similar, el fluido ejerce una fuerza ascendente sobre el fondo del cilindro igual a $F_2 = P_2 A = \rho_F g h_2 A$. La fuerza neta que ejerce la presión del fluido sobre el cilindro, que es la **fuerza de flotación** $\vec{\mathbf{F}}_B$, actúa hacia arriba y tiene la magnitud

FIGURA 13–13 Determinación de la fuerza de flotación.



$$
\begin{aligned}
F_B &= F_2 - F_1 = \rho_F g A (h_2 - h_1) \\
&= \rho_F g A \, \Delta h \\
&= \rho_F V g \\
&= m_F g,
\end{aligned}
$$

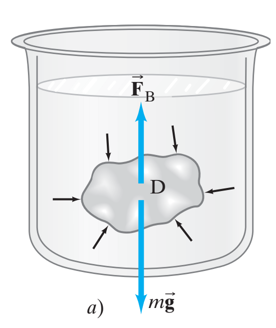
donde $V = A\,\Delta h$ es el volumen del cilindro, el producto $\rho_F V$ es la masa del fluido desplazado y $\rho_F V g = m_F g$ es el peso del fluido con un volumen igual al volumen del cilindro. Así, la fuerza de flotación sobre el cilindro es igual al peso del fluido desplazado por el cilindro.

Este resultado es válido sin importar la forma del objeto. Su descubrimiento se atribuye a Arquímedes (287?–212 a. de C.) y se llama **principio de Arquímedes**: *la fuerza de flotación sobre un cuerpo inmerso en un fluido es igual al peso del fluido desplazado por ese objeto*.

Por "fluido desplazado" se entiende un volumen de fluido igual al volumen sumergido del objeto (o de la parte sumergida del objeto). Si el cuerpo se coloca en un vaso o recipiente inicialmente lleno de agua hasta el borde, el agua que se derrama por la parte superior representa el agua desplazada por el objeto.

El principio de Arquímedes se obtiene mediante el siguiente argumento sencillo, aunque elegante. El objeto D de forma irregular mostrado en la figura 13-14a está sometido a la fuerza de gravedad (su peso, $m\vec{\mathbf{g}}$, es hacia abajo) y a la fuerza de flotación, $\vec{\mathbf{F}}_B$, ascendente. Queremos determinar F_B. Para esto, necesitamos considerar un cuerpo (D' en la figura 13-14b), esta vez hecho del mismo fluido, con la misma forma y tamaño que el objeto original y localizado a la misma profundidad. Podríamos visualizar este cuerpo separado del resto del fluido por una membrana imaginaria. La fuerza de flotación F_B sobre este cuerpo de fluido será exactamente la misma que se ejerce sobre el objeto original, ya que el fluido circundante, que ejerce F_B, tiene exactamente la misma configuración. Ahora el cuerpo de fluido D' está en equilibrio (el fluido en conjunto está en reposo). Por lo tanto, $F_B = m'g$, donde $m'g$ es el peso del cuerpo del fluido. Por consiguiente, la fuerza de flotación F_B es igual al peso del cuerpo del fluido cuyo volumen es igual al volumen original del objeto sumergido, lo cual es el principio de Arquímedes.

El descubrimiento de Arquímedes se realizó de forma empírica. En los dos párrafos anteriores mostramos que el principio de Arquímedes se deduce a partir de las leyes de Newton.



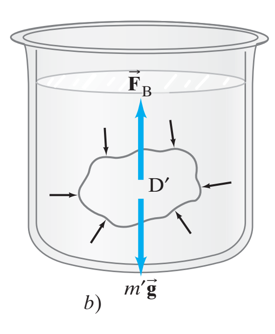


FIGURA 13–14
Principio de Arquímedes.

EJEMPLO CONCEPTUAL 13–8 **Dos cubetas de agua.** Considere dos cubetas idénticas de agua llenas hasta el borde. Una cubeta contiene sólo agua, mientras que la otra contiene además una pieza de madera flotando en ella. ¿Cuál tiene el mayor peso?

RESPUESTA Ambas cubetas pesan lo mismo. Recuerde el principio de Arquímedes: la madera desplaza un volumen de agua con un peso igual al peso de la madera. Algo de agua se derramará de la cubeta; sin embargo, el principio de Arquímedes nos dice que el agua derramada tiene un peso igual al peso del objeto de madera. Por lo tanto, las dos cubetas tienen el mismo peso.

EJEMPLO 13–9 **Recuperación de una estatua sumergida.** Una estatua antigua de 70 kg se encuentra en el fondo del mar. Su volumen es de $3.0 \times 10^4\ \mathrm{cm}^3$. ¿Qué fuerza se necesita para levantarla?

PLANTEAMIENTO La fuerza F necesaria para levantar la estatua es igual al peso mg de ésta menos la fuerza de flotación F_B. La figura 13-15 es el diagrama de cuerpo libre.

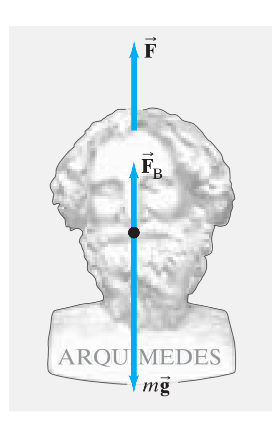
SOLUCIÓN La fuerza de flotación sobre la estatua que se debe al agua es igual al peso de $3.0 \times 10^4\ \mathrm{cm}^3 = 3.0 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}^3$ de agua (para el agua de mar $\rho = 1.025 \times 10^3\ \mathrm{kg/m}^3$):

$$\begin{aligned} F_B = m_{H_2O}g &= \rho_{H_2O}Vg \\ &= \left(1.025 \times 10^3\ \mathrm{kg/m}^3\right)\left(3.0 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}^3\right)\left(9.8\ \mathrm{m/s}^2\right) \\ &= 3.0 \times 10^2\ \mathrm{N}. \end{aligned}$$

El peso de la estatua es $mg = (70\ \mathrm{kg})(9.8\ \mathrm{m/s}^2) = 6.9 \times 10^2\ \mathrm{N}$. Por lo tanto, la fuerza F necesaria para levantarla es $690\ \mathrm{N} - 300\ \mathrm{N} = 390\ \mathrm{N}$. Es como si la estatua tuviera una masa de sólo $(390\ \mathrm{N})/(9.8\ \mathrm{m/s}^2) = 40\ \mathrm{kg}$.

NOTA Aquí $F = 390$ N es la fuerza necesaria para levantar la estatua sin aceleración cuando se encuentra bajo el agua. Conforme la estatua *sale* del agua, la fuerza F aumenta hasta alcanzar 690 N una vez que se encuentra fuera del agua por completo.

FIGURA 13–15 Ejemplo 13-9. La fuerza necesaria para levantar la estatua es $\vec{\mathbf{F}}$.



Se dice que Arquímedes descubrió su principio en la tina de baño, mientras pensaba cómo determinar si la nueva corona del rey era de oro puro o una falsificación. El oro tiene una gravedad específica de 19.3, un poco más alta que la de la mayoría de los metales; sin embargo, determinar de manera directa la gravedad específica o la densidad no es una tarea fácil porque, incluso si se conoce la masa, el volumen de un objeto de forma irregular es difícil de calcular. No obstante, si el objeto se pesa en el aire ($= w$) y también "se pesa" bajo el agua ($= w'$), la densidad se determina usando el principio de Arquímedes, como se muestra en el siguiente ejemplo. La cantidad w' se llama *peso aparente* en el agua y es lo que una balanza registra cuando el objeto está sumergido (véase la figura 13-16); w' es igual al peso verdadero ($w = mg$) menos la fuerza de flotación.

EJEMPLO 13–10 **Arquímedes: ¿Es de oro la corona?** Cuando una corona cuya masa es de 14.7 kg está sumergida en agua, una balanza exacta indica sólo 13.4 kg. ¿Está hecha de oro la corona?

PLANTEAMIENTO Si la corona es de oro, su densidad y gravedad específica deben ser muy altos, GE = 19.3 (véase la sección 13-2 y la tabla 13-1). Determinamos la gravedad específica mediante el principio de Arquímedes y los dos diagramas de cuerpo libre de la figura 13-16.

SOLUCIÓN El peso aparente del objeto sumergido (la corona) es w' (lo que indica la balanza), que es la fuerza que tira hacia abajo en el gancho de la balanza. De acuerdo con la tercera ley de Newton, w' es igual a la fuerza F'_T que ejerce la balanza sobre la corona en la figura 13-16b. La suma de las fuerzas sobre la corona es cero, así que w' es igual al peso real w ($= mg$) menos la fuerza de flotación F_B:

$$w' = F'_T = w - F_B$$

por lo que

$$w - w' = F_B.$$

Sea V el volumen del objeto sumergido por completo, ρ_O su densidad (de manera que $\rho_O V$ es su masa) y ρ_F es la densidad del fluido (agua en este caso). Por lo tanto, $(\rho_F V)g$ es el peso del fluido desplazado ($= F_B$). Ahora podemos escribir

$$w = mg = \rho_O Vg$$
$$w - w' = F_B = \rho_F Vg.$$

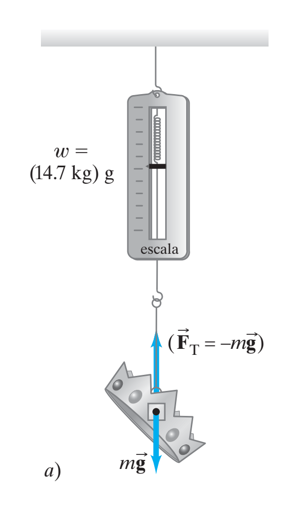
Dividimos estas dos ecuaciones para obtener

$$\frac{w}{w - w'} = \frac{\rho_O Vg}{\rho_F Vg} = \frac{\rho_O}{\rho_F}.$$

Vemos que $w/(w - w')$ es igual a la gravedad específica del objeto si el fluido en el que está sumergido es agua ($\rho_F = 1.00 \times 10^3$ kg/m^3). Por lo tanto,

$$\frac{\rho_O}{\rho_{H_2O}} = \frac{w}{w - w'} = \frac{(14.7\,\text{kg})g}{(14.7\,\text{kg} - 13.4\,\text{kg})g} = \frac{14.7\,\text{kg}}{1.3\,\text{kg}} = 11.3.$$

Esto corresponde a una densidad de 11,300 kg/m^3. La corona no es de oro; al parecer, está hecha de plomo (véase la tabla 13-1).



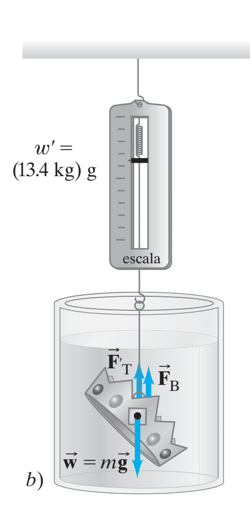


FIGURA 13–16 *a*) Una balanza registra la masa de un objeto en el aire, en este caso la corona del ejemplo 13-10. Todos los objetos están en reposo, por lo que la tensión F_T en la cuerda es igual al peso w del objeto: $F_T = mg$. Mostramos el diagrama de cuerpo libre de la corona y F_T es lo que causa la lectura de la balanza (igual a la fuerza neta hacia abajo sobre la balanza, de acuerdo con la tercera ley de Newton). *b*) Cuando la corona está sumergida actúa una fuerza adicional sobre ella, la fuerza de flotación F_B. La fuerza neta es cero, por lo que $F'_T + F_B = mg(= w)$. La balanza registra ahora $m' = 13.4$ kg, donde m' está relacionada con el peso efectivo por $w' = m'g$, por lo que $F'_T = w' = w - F_B$.

El principio de Arquímedes se aplica igualmente a objetos que flotan, como la madera. En general, *un objeto flota en un fluido si su densidad* (ρ_O) *es menor que la del fluido* (ρ_F). Esto se observa con claridad en la figura 13-17a, donde un objeto sumergido experimenta una fuerza neta ascendente y flota hacia la superficie si $F_B > mg$; es decir, si $\rho_F Vg > \rho_O Vg$, o bien, $\rho_F > \rho_O$. En equilibrio, es decir cuando está flotando, la fuerza de flotación sobre un objeto tiene una magnitud igual al peso del objeto. Por ejemplo, un tronco cuya gravedad específica es 0.60 y cuyo volumen es 2.0 m^3 tiene una masa $m = \rho_O V = (0.60 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3})\ (2.0\ \mathrm{m^3}) = 1200$ kg. Si el tronco está totalmente sumergido, desplazará una masa de agua $m_F = \rho_F V = (1000\ \mathrm{kg/m^3})(2.0\ \mathrm{m^3}) = 2000$ kg. Por consiguiente, la fuerza de flotación sobre el tronco será mayor que su peso y flotará hacia arriba, a la superficie (figura 13-17). El tronco alcanzará el equilibrio cuando desplace 1200 kg de agua, lo que implica que 1.2 m^3 de su volumen estará sumergido. La cantidad de 1.2 m^3 corresponde al 60% del volumen del tronco (1.2/2.0 = 0.60), por lo que el 60% del tronco está sumergido.

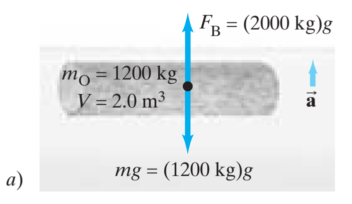
En general cuando un objeto flota, tenemos $F_B = mg$, que podemos escribir como (véase la figura 13-18)

$$\begin{aligned} F_B &= mg \\ \rho_F V_{\mathrm{despl}}\, g &= \rho_O V_O\, g, \end{aligned}$$

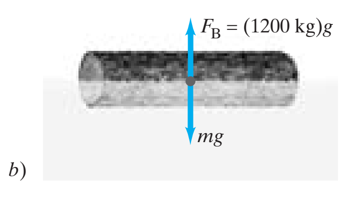
donde V_O es el volumen del objeto y V_{despl} es el volumen de fluido desplazado (= volumen sumergido). Por lo tanto,

$$\frac{V_{\mathrm{despl}}}{V_O} = \frac{\rho_O}{\rho_F}.$$

Es decir, la fracción del objeto sumergido está dada por la razón de la densidad del objeto a la del fluido. Si el fluido es agua, esta fracción es igual a la gravedad específica del objeto.



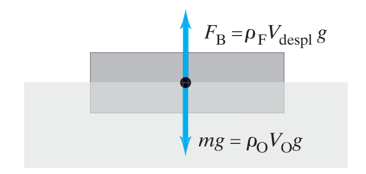
a)



b)

FIGURA 13–17 *a*) El tronco totalmente sumergido acelera hacia arriba porque $F_B > mg$. *b*) Alcanza el equilibrio cuando $\Sigma F = 0$, por lo que $F_B = mg = (1200\ \mathrm{kg})g$. Se desplazan entonces 1200 kg o 1.2 m^3 de agua.

FIGURA 13–18 Un objeto flota en equilibrio: $F_B = mg$.



EJEMPLO 13–11 **Calibración de un hidrómetro.** Un **hidrómetro** es un instrumento simple que sirve para medir la gravedad específica de un líquido al indicar a qué profundidad se hunde el instrumento en el líquido. Un hidrómetro particular (figura 13-19) consiste en un tubo de vidrio, pesado en el fondo, que mide 25.0 cm de longitud, 2.00 cm^2 de área transversal y tiene una masa de 45.0 g. ¿Qué tan lejos del extremo debe colocarse la marca 1.000?

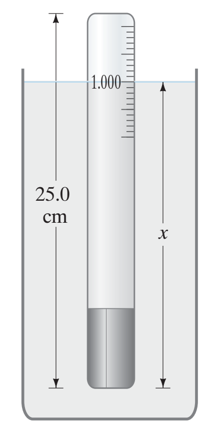
PLANTEAMIENTO El hidrómetro flotará en agua si su densidad ρ es menor que $\rho_w = 1.000\ \mathrm{g/cm^3}$, la densidad del agua. La fracción del hidrómetro sumergido ($V_{\mathrm{desplazado}}/V_{\mathrm{total}}$) es igual a la razón de densidad ρ/ρ_w.

SOLUCIÓN El hidrómetro tiene una densidad total

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{45.0\ \mathrm{g}}{(2.00\ \mathrm{cm^2})(25.0\ \mathrm{cm})} = 0.900\ \mathrm{g/cm^3}.$$

Por consiguiente, cuando se coloca en agua, estará en equilibrio cuando 0.900 de su volumen esté sumergido. Como es de sección transversal uniforme, (0.900)(25.0 cm) = 22.5 cm de su longitud estará sumergida. La gravedad específica del agua se define como 1.000, así que la marca debe colocarse a 22.5 cm del extremo pesado.

FIGURA 13–19 Un hidrómetro. Ejemplo 13-11.



EJERCICIO C En el hidrómetro del ejemplo 13-11, ¿las marcas por encima de 1.000 representan valores mayores o menores de densidad del líquido en el que está sumergido?

El principio de Arquímedes también resulta útil en geología. De acuerdo con la teoría de la tectónica de placas y la deriva continental, los continentes flotan sobre un "mar" fluido de roca ligeramente deformable (manto rocoso). Se han hecho algunos cálculos interesantes usando modelos muy simples, que consideraremos en los problemas al final del capítulo.

FÍSICA APLICADA
Deriva continental, tectónica de placas

El aire es un fluido y también ejerce una fuerza de flotación. Los objetos ordinarios pesan menos en el aire que si se pesan en vacío. Como la densidad del aire es tan pequeña, el efecto para sólidos ordinarios es ligero. Sin embargo, hay objetos que *flotan* en el aire, por ejemplo, los globos de helio, porque la densidad de este gas es menor que la densidad del aire.

EJERCICIO D ¿Cuál de los siguientes objetos, sumergidos en agua, experimenta mayor fuerza de flotación? *a*) Un globo de helio de 1 kg; *b*) 1 kg de madera; *c*) 1 kg de hielo; *d*) 1 kg de hierro; *e*) igual para todos.

EJERCICIO E ¿Cuál de los siguientes objetos, sumergidos en agua, experimenta la mayor fuerza de flotación? *a*) Un globo de helio de 1 m^3; *b*) 1 m^3 de madera; *c*) 1 m^3 de hielo; *d*) 1 m^3 de hierro; *e*) igual para todos.

EJEMPLO 13–12 Globo de helio. ¿Qué volumen V de helio se necesita para que un globo levante una carga de 180 kg (incluido el peso del globo vacío)?

PLANTEAMIENTO La fuerza de flotación sobre el globo de helio, F_B, que es igual al peso del aire desplazado, debe ser por lo menos igual al peso del helio más el peso del globo y la carga (figura 13-20). La tabla 13-1 indica que la densidad del helio es 0.179 kg/m^3.

SOLUCIÓN La fuerza de flotación debe tener un valor mínimo de

$$F_B = (m_{He} + 180\,\text{kg})g.$$

Esta ecuación se puede escribir en términos de la densidad usando el principio de Arquímedes:

$$\rho_{aire} V g = (\rho_{He} V + 180\,\text{kg})g.$$

Despejando V, encontramos

$$V = \frac{180\,\text{kg}}{\rho_{aire} - \rho_{He}} = \frac{180\,\text{kg}}{(1.29\,\text{kg/m}^3 - 0.179\,\text{kg/m}^3)} = 160\,\text{m}^3.$$

NOTA Éste es el volumen mínimo necesario cerca de la superficie de la Tierra, donde $\rho_{aire} = 1.29\,\text{kg/m}^3$. Para alcanzar una mayor altitud se necesitaría un mayor volumen, ya que la densidad del aire disminuye con la altura.

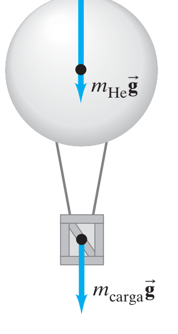


FIGURA 13–20 Ejemplo 13–12.

13–8 Fluidos en movimiento; tasa de flujo y la ecuación de continuidad

Pasamos ahora del estudio de fluidos en reposo al tema más complejo de fluidos en movimiento, llamado **dinámica de fluidos** o **hidrodinámica** (si el fluido es agua).

Podemos distinguir dos tipos principales de flujo. Si el flujo es suave, de manera que las capas vecinas del fluido se deslizan entre sí suavemente, se dice que el flujo es **aerodinámico** o **laminar**.† En este tipo de flujo, cada partícula del fluido sigue una trayectoria uniforme, llamada **línea de flujo**, y esas trayectorias no se cruzan entre sí (figura 13-21a). Más allá de cierta rapidez, el flujo se vuelve turbulento. El **flujo turbulento** se caracteriza por torbellinos pequeños y erráticos llamados *remolinos* (figura 13-21b). Los remolinos absorben una gran cantidad de energía y aunque incluso en el flujo laminar está presente una cierta cantidad de fricción interna, llamada **viscosidad**, ésta es mucho mayor cuando el flujo es turbulento. Unas cuantas gotas de tinta o de colorante derramadas en un líquido revelarán de inmediato si el flujo es laminar o turbulento.

†La palabra *laminar* significa "en capas".

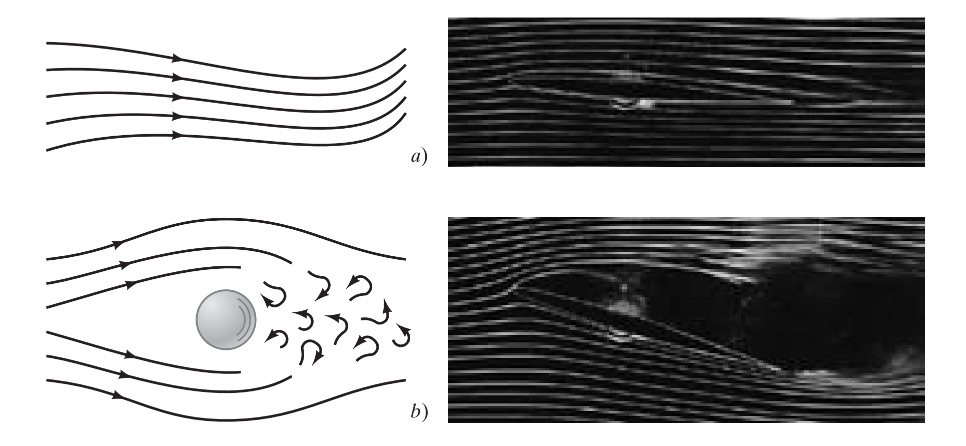


FIGURA 13–21 *a*) Flujo laminar; *b*) Flujo turbulento. Las fotografías muestran el flujo de aire alrededor de un perfil aerodinámico o ala de avión (más detalles en la sección 13-10).

Consideremos el flujo laminar estable de un fluido a través de un tubo cerrado como se ilustra en la figura 13-22. Primero determinamos cómo cambia la rapidez del fluido con el tamaño del tubo. La **tasa de flujo** de masa (o flujo másico) se define como la masa Δm de fluido que pasa por un punto dado por unidad de tiempo Δt:

$$\text{tasa de flujo de masa} = \frac{\Delta m}{\Delta t}.$$

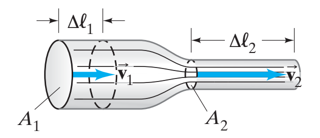


FIGURA 13–22 Flujo de un fluido a través de un tubo de diámetro variable.

En la figura 13-22, el volumen de fluido que pasa por el punto 1 (es decir, por el área A_1) en un tiempo Δt es $A_1\Delta\ell_1$, donde $\Delta\ell_1$ es la distancia que el fluido se desplaza en el tiempo Δt. Como la velocidad† del fluido que pasa por el punto 1 es $v_1 = \Delta\ell_1/\Delta t$, la tasa de flujo de masa que pasa por el área A_1 es

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\rho_1\,\Delta V_1}{\Delta t} = \frac{\rho_1\,A_1\,\Delta\ell_1}{\Delta t} = \rho_1\,A_1\,v_1\,,$$

donde $\Delta V_1 = A_1\Delta\ell_1$ es el volumen de la masa Δm_1, y ρ_1 es la densidad del fluido. De forma similar, en el punto 2 (a través del área A_2), la tasa de flujo es $\rho_2 A_2 V_2$. Como ningún fluido fluye por los lados, las tasas de flujo por A_1 y A_2 deben ser iguales. Por lo tanto, como:

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t},$$

tenemos

$$\rho_1\,A_1\,v_1 = \rho_2\,A_2\,v_2. \qquad \textbf{(13–7a)}$$

Ésta es la **ecuación de continuidad**.

Si el fluido es incompresible (ρ no cambia con la presión), lo que es una aproximación excelente para líquidos en la mayoría de los casos (y a veces también para gases), entonces $\rho_1 = \rho_2$, y la ecuación de continuidad toma la forma

$$A_1\,v_1 = A_2\,v_2. \qquad [\rho = \text{constante}] \quad \textbf{(13–7b)}$$

El producto Av representa la *tasa de flujo de volumen* (es decir, el volumen de fluido que pasa por un punto dado por segundo), ya que $\Delta V/\Delta t = A\ \Delta\ell/\Delta t = Av$, que en unidades del SI es m^3/s. La ecuación 13-7b nos dice que donde el área transversal es grande, la velocidad es pequeña, y donde el área es pequeña la velocidad es grande. Esto es razonable y se comprueba al observar la corriente de un río, la cual fluye lentamente en la pradera (donde el río es ancho) y aumenta su rapidez al pasar por una cañada estrecha.

EJEMPLO 13–13 ESTIMACIÓN **Flujo de la sangre.** En los seres humanos, la sangre fluye del corazón a la aorta, de donde pasa a las arterias mayores. Éstas se ramifican para formar las arterias menores (arteriolas), las cuales a la vez se ramifican en miríadas de pequeños capilares (figura 13-23). La sangre regresa al corazón a través de las venas. El radio de la aorta es de aproximadamente 1.2 cm y la sangre, al pasar por ella, lleva una rapidez aproximada de 40 cm/s. Un capilar típico tiene un radio de aproximadamente 4×10^{-4} cm y la sangre fluye por él con una rapidez de 5×10^{-4} m/s. Estime cuántos capilares hay en el cuerpo.

FÍSICA APLICADA
Flujo de la sangre

PLANTEAMIENTO Suponemos que la densidad de la sangre no varía de forma significativa entre la aorta y los capilares. Por la ecuación de continuidad, la tasa de flujo de volumen en la aorta debe ser igual a la tasa de flujo de volumen en *todos* los capilares. El área total de todos los capilares está dada por el área de un capilar multiplicada por N, el número total de capilares.

SOLUCIÓN Sea A_1 el área de la aorta y A_2 el área de *todos* los capilares a través de los cuales fluye la sangre. Entonces $A_2 = N\pi r^2_{\text{cap}}$ donde $r_{\text{cap}} \approx 4 \times 10^{-4}$ cm es el radio promedio estimado de un capilar. De la ecuación de continuidad (ecuación 13-7b), tenemos

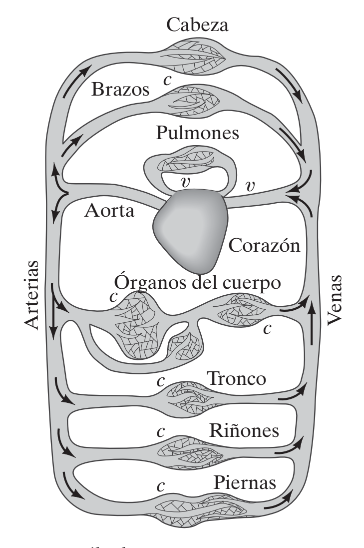
$$v_2\,A_2 = v_1\,A_1$$
$$v_2\,N\pi r^2_{\text{cap}} = v_1\pi r^2_{\text{aorta}}$$

por lo que

$$N = \frac{v_1}{v_2}\frac{r^2_{\text{aorta}}}{r^2_{\text{cap}}} = \left(\frac{0.40\ \text{m/s}}{5 \times 10^{-4}\ \text{m/s}}\right)\left(\frac{1.2 \times 10^{-2}\ \text{m}}{4 \times 10^{-6}\ \text{m}}\right)^2 \approx 7 \times 10^9,$$

o aproximadamente 10 mil millones de capilares.

FIGURA 13–23 Sistema circulatorio humano.



†Si no hubiera viscosidad, la velocidad sería la misma a través de la sección transversal del tubo. Los fluidos reales tienen viscosidad, y su fricción interna provoca que diferentes capas del fluido fluyan con distinta rapidez. En este caso, v_1 y v_2 representan las rapideces promedio en cada sección transversal.

FÍSICA APLICADA

Conducto de calefacción

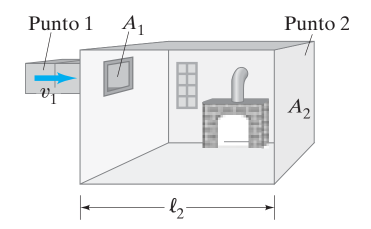


FIGURA 13–24 Ejemplo 13–14.

EJEMPLO 13–14 Conducto de calefacción para una habitación. ¿Qué tan grande debe ser un conducto de calefacción si el aire que se mueve a 3.0 m/s a lo largo de él debe renovar cada 15 minutos el aire de una habitación cuyo volumen es de 300 m^3? Suponga que la densidad del aire permanece constante.

PLANTEAMIENTO Aplicamos la ecuación de continuidad con densidad constante (ecuación 13-7b) al aire que fluye por el conducto (punto 1 en la figura 13-24) y luego en la habitación (punto 2). La tasa de flujo de volumen en la habitación es igual al volumen de la habitación dividido entre el tiempo de reabastecimiento de 15 minutos.

SOLUCIÓN Considere la habitación como una gran sección del conducto (figura 13-24) y piense que el aire es igual al volumen de la habitación que pasa por el punto 2 en $t = 15$ min = 900 s. Razonando de la misma manera como lo hicimos para obtener la ecuación 13-7a (cambiando Δt a t), escribimos $v_2 = \ell_2/t$, así que $A_2 v_2 = A_2 \ell_2/t = V_2/t$ donde V_2 es el volumen de la habitación. Así, la ecuación de continuidad se convierte en $A_1 v_1 = A_2 v_2 = V_2/t$, y

$$A_1 = \frac{V_2}{v_1 t} = \frac{300\ \text{m}^3}{(3.0\ \text{m/s})(900\ \text{s})} = 0.11\ \text{m}^2.$$

Si el conducto es cuadrado, entonces cada lado tiene longitud $\ell = \sqrt{A} = 0.33$ m, o 33 cm. Un conducto rectangular de 20 cm × 55 cm también será suficiente.

13–9 Ecuación de Bernoulli

¿Alguna vez se ha preguntado por qué un avión puede volar o por qué un bote de vela puede desplazarse en contra del viento? Éstos son ejemplos de un principio que descubrió Daniel Bernoulli (1700-1782) en relación con los fluidos en movimiento. En esencia, el **principio de Bernoulli** establece que *donde la velocidad de un fluido es alta, la presión es baja, y donde la velocidad es baja, la presión es alta*. Por ejemplo, si se miden las presiones en los puntos 1 y 2 en la figura 13-22, se encontrará que la presión es menor en el punto 2, donde la velocidad es mayor, que en el punto 1, donde la velocidad es menor. A primera vista, esto parece extraño; usted tal vez esperaría que una rapidez mayor en el punto 2 implicara una mayor presión. Sin embargo, éste no es el caso. Si la presión en el punto 2 fuera más alta que en el 1, esta mayor presión retardaría al fluido, mientras que de hecho éste se acelera al pasar del punto 1 al punto 2. Así, la presión en el punto 2 debe ser menor que en el punto 1, para ser consistente con el hecho de que el fluido acelera.

Para ayudar a aclarar cualquier malentendido, pensemos en que un fluido con mayor rapidez *ejercería* una mayor fuerza sobre un obstáculo que se interpusiera en su trayecto. Sin embargo, esto no es lo que queremos decir al referirnos a la presión en un fluido y, además, no estamos considerando los obstáculos que interrumpen el flujo. Examinamos un flujo laminar suave. La presión del fluido se ejerce sobre las paredes de un tubo o sobre la superficie de cualquier material por el que circula el fluido.

Bernoulli desarrolló una ecuación que expresa este principio de forma cuantitativa. Para obtener la ecuación de Bernoulli, suponemos que el flujo es estable y laminar, que el fluido es incompresible y que la viscosidad es muy pequeña, de manera que podemos ignorarla. Para generalizar, suponemos que el fluido se mueve en un tubo de sección transversal no uniforme que varía de altura con respecto a un nivel de referencia dado (figura 13-25). Consideraremos la cantidad de fluido ilustrado y calcularemos el trabajo efectuado para moverlo desde la posición indicada en la figura 13-25a a la posición representada en la figura 13-25b. En este proceso, el fluido que entra por el área A_1 fluye una distancia $\Delta\ell_1$ y obliga al fluido en el área A_2 a moverse una distancia $\Delta\ell_2$. El fluido a la izquierda del área A_1 ejerce una presión P_1 sobre nuestra sección de fluido y efectúa un trabajo

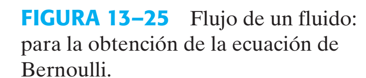
$$W_1 = F_1 \Delta\ell_1 = P_1 A_1 \Delta\ell_1 .$$

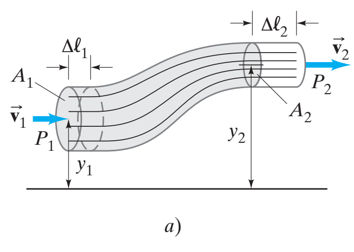
En el área A_2, el trabajo efectuado sobre nuestra sección de fluido es

$$W_2 = -P_2 A_2 \Delta\ell_2 .$$

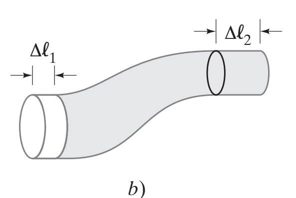
El signo negativo está presente porque la fuerza ejercida sobre el fluido es opuesta al movimiento (el fluido mostrado en color efectúa trabajo sobre el fluido a la derecha del punto 2). También la fuerza de gravedad efectúa trabajo sobre el fluido. Como el efecto neto del proceso mostrado en la figura 13-25 es mover una masa m de volumen

FIGURA 13–25 Flujo de un fluido: para la obtención de la ecuación de Bernoulli.





a)



b)

$A_1\Delta\ell_1$ (= $A_2\Delta\ell_2$, ya que el fluido es incompresible) del punto 1 al punto 2, el trabajo que realiza la gravedad es

$$W_3 = -mg(y_2 - y_1),$$

donde y_1 y y_2 son las alturas del centro del tubo arriba de un nivel de referencia arbitrario. En el caso mostrado en la figura 13-25, este término es negativo ya que el movimiento es ascendente, contra la fuerza de gravedad. El trabajo neto W efectuado sobre el fluido es:

$$W = W_1 + W_2 + W_3$$

$$W = P_1 A_1 \Delta\ell_1 - P_2 A_2 \Delta\ell_2 - mgy_2 + mgy_1 .$$

De acuerdo con el principio del trabajo y la energía (sección 7-4), el trabajo neto efectuado sobre un sistema es igual al cambio de su energía cinética. Así,

$$\tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 = P_1 A_1 \Delta\ell_1 - P_2 A_2 \Delta\ell_2 - mgy_2 + mgy_1 .$$

La masa m tiene un volumen $A_1\Delta\ell_1 = A_2\Delta\ell_2$ para un fluido incompresible. Podemos sustituir $m = \rho A_1\Delta\ell_1 = \rho A_2\Delta\ell_2$ y también dividir entre $A_1\Delta\ell_1 = A_2\Delta\ell_2$, para obtener:

$$\tfrac{1}{2}\rho v_2^2 - \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = P_1 - P_2 - \rho g y_2 + \rho g y_1 ,$$

que reordenamos para darle la forma

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 . \qquad \textbf{(13–8)}$$

Ecuación de Bernoulli

Ésta es la **ecuación de Bernoulli**. Como los puntos 1 y 2 pueden ser dos puntos cualesquiera a lo largo de un tubo de flujo, la ecuación de Bernoulli se puede escribir como

$$P + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante}$$

en cada punto en el fluido, donde y es la altura del centro del tubo por arriba de un nivel de referencia fijo. [Note que si no hay flujo ($v_1 = v_2 = 0$), entonces la ecuación 13-8 se reduce a la ecuación hidrostática, ecuación 13-6a: $P_2 - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1)$].

La ecuación de Bernoulli es una expresión de la ley de la conservación de la energía, ya que la obtuvimos a partir del principio del trabajo y la energía.

EJERCICIO F Conforme el agua pasa de la sección transversal estrecha de un tubo horizontal a una sección transversal más ancha, ¿cómo cambia la presión contra las paredes del tubo?

EJEMPLO 13–15 Flujo y presión en sistemas de calentamiento de agua. El agua circula a través de una casa en un sistema de calefacción con agua caliente. Si el agua es bombeada con rapidez de 0.50 m/s a través de un tubo de 4.0 cm de diámetro en el sótano a una presión de 3.0 atm, ¿cuál será la rapidez y presión del flujo en un tubo de 2.6 cm de diámetro en el segundo piso situado a 5.0 m arriba del sótano? Suponga que los tubos no tienen ramificaciones.

PLANTEAMIENTO Utilizamos la ecuación de continuidad con densidad constante para determinar la rapidez de flujo en el segundo piso, y luego la ecuación de Bernoulli para determinar la presión.

SOLUCIÓN Tomamos v_2 en la ecuación de continuidad (ecuación 13-7), como la rapidez de flujo en el segundo piso y v_1 como la rapidez de flujo en el sótano. Notando que las áreas son proporcionales a los cuadrados de los radios ($A = \pi r^2$), obtenemos

$$v_2 = \frac{v_1 A_1}{A_2} = \frac{v_1 \pi r_1^2}{\pi r_2^2} = (0.50\,\text{m/s})\frac{(0.020\,\text{m})^2}{(0.013\,\text{m})^2} = 1.2\,\text{m/s}.$$

Para determinar la presión en el segundo piso, usamos la ecuación de Bernoulli (ecuación 13-8):

$$\begin{aligned} P_2 &= P_1 + \rho g(y_1 - y_2) + \tfrac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) \\ &= (3.0 \times 10^5\,\text{N/m}^2) + (1.0 \times 10^3\,\text{kg/m}^3)(9.8\,\text{m/s}^2)(-5.0\,\text{m}) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(1.0 \times 10^3\,\text{kg/m}^3)\left[(0.50\,\text{m/s})^2 - (1.2\,\text{m/s})^2\right] \\ &= (3.0 \times 10^5\,\text{N/m}^2) - (4.9 \times 10^4\,\text{N/m}^2) - (6.0 \times 10^2\,\text{N/m}^2) \\ &= 2.5 \times 10^5\,\text{N/m}^2 = 2.5\,\text{atm}. \end{aligned}$$

NOTA El término de velocidad contribuye muy poco en este caso.

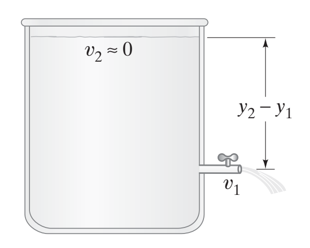


FIGURA 13–26 Teorema de Torricelli: $v_1 = \sqrt{2g(y_2 - y_1)}$.

13–10 Aplicaciones del principio de Bernoulli: Torricelli, aviones, pelotas de béisbol y ataque isquémico transitorio

La ecuación de Bernoulli se aplica a muchas situaciones. Un ejemplo es el cálculo de la velocidad v_1 de un líquido saliendo de un grifo en el fondo de un recipiente (figura 13-26). Elegimos el punto 2 en la ecuación 13-8 como la superficie superior del líquido. Suponiendo que el diámetro del recipiente es grande comparado con el del grifo, v_2 será casi cero. Los puntos 1 (el grifo) y 2 (la superficie superior) están abiertos a la atmósfera, por lo que la presión en ambos puntos es igual a la presión atmosférica: $P_1 = P_2$. La ecuación de Bernoulli toma entonces la forma

$$\tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = \rho g y_2$$

o bien,

$$v_1 = \sqrt{2g(y_2 - y_1)}. \qquad \textbf{(13–9)}$$

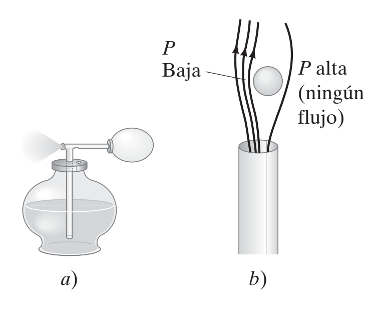
Este resultado se llama **teorema de Torricelli**. Aunque se reconoce como un caso especial de la ecuación de Bernoulli, Evangelista Torricelli, un discípulo de Galileo, lo descubrió un siglo antes que Bernoulli, y de ahí su nombre. La ecuación 13-9 nos dice que el líquido sale del grifo con la misma rapidez que tendría un objeto que cae libremente desde la misma altura. Esto no debe sorprender ya que la ecuación de Bernoulli se basa en la conservación de la energía.

Otro caso especial de la ecuación de Bernoulli surge cuando un fluido fluye horizontalmente sin cambio apreciable en su altura; es decir, $y_1 = y_2$. La ecuación 13-8 toma entonces la forma

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2, \qquad \textbf{(13–10)}$$

la cual nos dice en términos cuantitativos que cuando la rapidez es elevada la presión es baja y viceversa. También explica muchos fenómenos comunes, algunos de los cuales se ilustran en las figuras 13-27 a 13-32. La presión en el aire que sopla a gran rapidez a través de la parte superior del tubo vertical de un atomizador de perfume (figura 13-27a) es menor que la presión normal del aire que actúa sobre la superficie del líquido en el frasco. El perfume es empujado hacia arriba del tubo por la presión reducida en la parte superior. Una pelota de ping pong puede hacerse flotar arriba de un chorro de aire (algunas aspiradoras pueden soplar aire), figura 13-27b; si la pelota empieza a abandonar el chorro de aire, la presión mayor en el aire quieto fuera del chorro empuja la pelota de regreso.

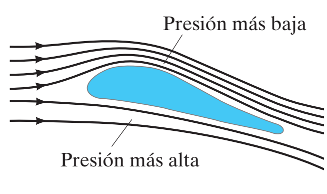
FIGURA 13–27 Ejemplos del principio de Bernoulli: *a*) atomizador, *b*) pelota de ping pong en un chorro de aire.



EJERCICIO G Regrese a la pregunta 2 del inicio del capítulo, página 339, y respóndala de nuevo. Intente explicar por qué quizá la contestó de manera diferente la primera vez.

Alas de aviones y sustentación dinámica

FIGURA 13–28 Sustentación en el ala de un avión. Estamos en el marco de referencia del ala, observando cómo fluye el aire.



FÍSICA APLICADA
Aviones y sustentación dinámica

Los aviones experimentan una fuerza de "sustentación" sobre sus alas, que los mantiene en el aire, si se mueven con una rapidez suficiente en relación con este último y las alas se inclinan hacia arriba en un ángulo pequeño (el "ángulo de ataque"), como en la figura 13-28, donde las líneas de flujo del aire se muestran precipitándose sobre el ala. (Estamos en el marco de referencia del ala, como si estuviéramos sentados sobre ella). Tanto la inclinación hacia arriba como la superficie superior redondeada del ala hacen que las líneas de flujo se vean forzadas hacia arriba y se apiñen sobre el ala. El área para el flujo de aire entre dos líneas de flujo cualesquiera se reduce conforme éstas se juntan, así que de acuerdo con la ecuación de continuidad ($A_1 v_1 = A_2 v_2$), la rapidez del aire aumenta por encima del ala, donde las líneas de flujo se constriñen. (Recuerde también cómo las líneas de flujo que se juntan en la constricción de una tubería, figura 13-22, indican que la velocidad es mayor en ese punto). Como la rapidez del aire es mayor sobre el ala que debajo de ella, la presión por encima del ala es menor que la presión debajo de ésta (principio de Bernoulli). Por lo tanto, existe una fuerza neta ascendente en el ala llamada **sustentación dinámica**. Los experimentos demuestran que la rapidez del aire por encima del ala puede incluso duplicar la rapidez del aire debajo de ella. (La fricción entre el aire y el ala ejerce una *fuerza de arrastre*, hacia la parte posterior, la cual debe ser superada por los motores del avión).

Una ala plana, o con una sección transversal simétrica, experimentará sustentación siempre que la parte frontal del ala esté inclinada hacia arriba (ángulo de ataque). El ala que se ilustra en la figura 13-28 puede experimentar sustentación incluso si el ángulo de ataque es cero, porque la superficie superior redondeada desvía el aire hacia arriba, haciendo que las líneas de flujo se junten. Los aviones pueden volar de cabeza,

experimentando sustentación, si el ángulo de ataque es suficiente para desviar las líneas de flujo hacia arriba y juntarlas.

La imagen considera líneas de flujo; sin embargo, si el ángulo de ataque es mayor de 15°, se registra turbulencia (figura 13-21b), produciendo mayor arrastre y menor sustentación, lo que podría causar que las alas “se frenen” y el avión se caiga.

Desde otro punto de vista, la inclinación hacia arriba de un ala significa que el aire que se mueve horizontalmente enfrente de ésta se desvía hacia abajo; el cambio en la cantidad de movimiento de las moléculas de aire que rebotan da por resultado una fuerza ascendente sobre el ala (tercera ley de Newton).

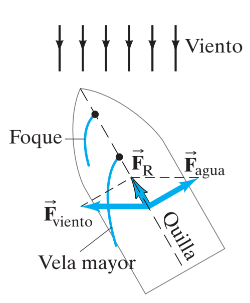


FIGURA 13–29 Un bote se desplaza contra el viento.

Botes de vela

Un bote de vela se puede mover *contra* el viento, gracias al efecto Bernoulli, si las velas se colocan en ángulo, como se observa en la figura 13-29. El aire viaja rápidamente sobre la superficie frontal abultada de la vela, y el aire relativamente quieto detrás de la vela ejerce una presión mayor, lo que da por resultado una fuerza neta sobre la vela, $\vec{\mathbf{F}}_{viento}$. Esta fuerza tendería a mover el bote hacia los lados si no fuera por la quilla que se extiende verticalmente hacia abajo dentro del agua, pues el agua ejerce una fuerza $(\vec{\mathbf{F}}_{agua})$ sobre la quilla casi en forma perpendicular a ésta. La resultante de estas dos fuerzas $(\vec{\mathbf{F}}_R)$ es casi directamente hacia delante, como se muestra.

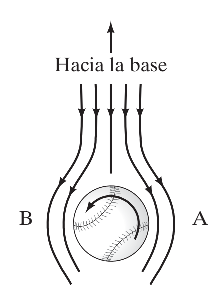


FIGURA 13–30 Vista superior de una pelota de béisbol lanzada hacia la base meta (*home*). Estamos en el marco de referencia de la pelota de béisbol, con el aire fluyendo a su alrededor.

Curva de béisbol

¿Por qué los lanzamientos en curva de una pelota de béisbol (o de tenis) también pueden explicarse mediante el principio de Bernoulli? Esto es más sencillo si nos colocamos en el marco de referencia de la pelota, con el aire que se precipita a su alrededor, como hicimos con el ala del avión. Suponga que la pelota está girando en sentido antihorario vista desde arriba (figura 13-30). Una delgada capa de aire (“capa de frontera”) es arrastrada alrededor de la pelota. Estamos viendo la pelota hacia abajo, y en el punto A en la figura 13-30, esta capa de frontera tiende a frenar el aire incidente. En el punto B, el aire que gira con la pelota agrega su rapidez a la del aire incidente, de manera que la rapidez del aire es mayor en B que en A. La mayor rapidez en B significa que la presión es menor en B que en A, lo que da por resultado una fuerza neta hacia B. La trayectoria de la pelota se curva hacia la izquierda (desde el punto de vista del lanzador).

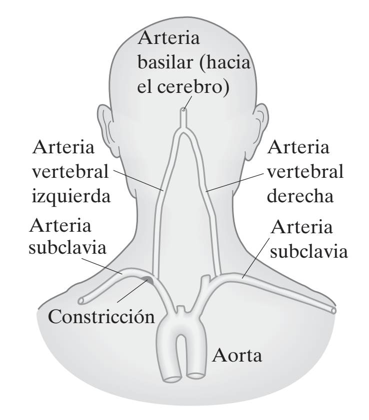
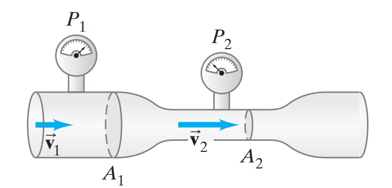


FIGURA 13–31 Parte posterior de la cabeza que muestra las arterias que van al cerebro y a los brazos. La alta velocidad de la sangre que pasa por la constricción en la arteria subclavia izquierda causa baja presión en la arteria vertebral izquierda, en la que puede generarse un flujo inverso (hacia abajo), que provoca un AIT, es decir, un menor suministro de sangre al cerebro.

Falta de suministro de sangre en el cerebro: AIT

En medicina, una de las muchas aplicaciones del principio de Bernoulli permite explicar un ataque isquémico transitorio (AIT), es decir, una falta temporal de suministro de sangre al cerebro. Una persona que sufre un AIT presenta síntomas como mareos, visión doble, dolores de cabeza y debilidad en las extremidades. Un AIT ocurre de la siguiente manera. La sangre fluye normalmente hacia el cerebro por la parte posterior de la cabeza a través de dos arterias vertebrales, una a cada lado del cuello, que se encuentran para formar la arteria basilar justo debajo del cerebro, como se aprecia en la figura 13-31. Las arterias vertebrales salen de las arterias subclavias, como se observa, antes de que estas últimas pasen a los brazos. Cuando un brazo se ejercita vigorosamente, el flujo de sangre se incrementa para cubrir las necesidades de los músculos del brazo. Sin embargo, si la arteria subclavia a un lado del cuerpo es parcialmente bloqueada, como sucede con la arteriosclerosis (endurecimiento de las arterias), la velocidad de la sangre tendrá que ser mayor en esa parte para suministrar la sangre necesaria. (Recuerde la ecuación de continuidad: menor área implica mayor velocidad para la misma tasa de flujo, ecuaciones 13-7). La mayor velocidad de la sangre que pasa por el orificio a la arteria vertebral da por resultado una menor presión (principio de Bernoulli). Así, la sangre que se eleva en la arteria vertebral en el lado “bueno” a presión normal puede *desviarse hacia abajo* a la otra arteria vertebral a causa de la menor presión en ese lado, en vez de pasar hacia arriba y llegar al cerebro. Por consiguiente, se reduce el suministro de sangre al cerebro.

FIGURA 13–32 Medidor Venturi.



Otras aplicaciones

Un **tubo de Venturi** es, en esencia, un tubo con una constricción estrecha (la garganta). El flujo del aire se acelera al pasar por esta constricción, por lo que la presión es menor. Un *medidor Venturi* (figura 13-32) sirve para medir la rapidez de flujo de gases y líquidos, incluida la velocidad de la sangre en las arterias.

¿Por qué sube el humo por una chimenea? Se debe en parte a que el aire caliente se eleva (es menos denso y, por lo tanto, flota), aunque el principio de Bernoulli también desempeña un papel. Cuando el viento sopla a través de la parte superior de una chimenea, la presión es menor ahí que dentro de la casa. Por consiguiente, el aire y el humo son empujados hacia arriba a lo largo de la chimenea por la presión más alta en el interior. Aun en una noche aparentemente quieta, por lo general hay suficiente flujo del aire ambiental en la parte superior de la chimenea para ayudar al flujo ascendente del humo.

La ecuación de Bernoulli ignora los efectos de la fricción (viscosidad) y la compresibilidad del fluido. La energía que se transforma en energía interna (o potencial) debido a la compresión y a la energía térmica por la fricción se puede tomar en cuenta agregando términos a la ecuación 13-8. Esos términos son difíciles de calcular teóricamente y por lo general se determinan en forma empírica; sin embargo, no alteran de manera significativa las explicaciones de los fenómenos descritos anteriormente.

* 13–11 Viscosidad

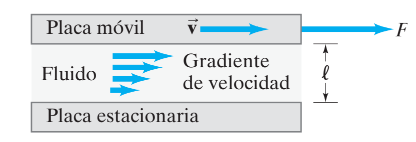


FIGURA 13–33
Determinación de la viscosidad.

Como se mencionó en la sección 13-8, los fluidos reales tienen una cierta cantidad de fricción interna llamada **viscosidad**. La viscosidad existe tanto en líquidos como en gases, y es esencialmente una fuerza de fricción entre capas adyacentes de fluido cuando éstas se mueven una con respecto a la otra. En los líquidos, la viscosidad se debe a fuerzas eléctricas de cohesión entre las moléculas. En los gases, surge por las colisiones entre moléculas.

La viscosidad de diferentes fluidos se expresa cuantitativamente mediante un *coeficiente de viscosidad*, η (la letra griega eta minúscula), que se define de la siguiente manera. Se coloca una capa delgada de fluido entre dos placas planas. Una placa es estacionaria y la otra móvil (figura 13-33). El fluido directamente en contacto con cada placa se mantiene unido a la superficie por la fuerza de adhesión entre las moléculas del líquido y las moléculas de las placas. La superficie superior del fluido se mueve con la misma velocidad v de la placa superior, mientras que el fluido en contacto con la placa estacionaria permanece inmóvil. La capa estacionaria de fluido retarda el flujo de la capa justo arriba de ella, que a su vez retarda el flujo de la siguiente capa y así sucesivamente. La velocidad varía en forma continua de 0 a v, como se indica. El incremento de velocidad dividido entre la distancia sobre la que este cambio tiene lugar (igual a v/ℓ) se llama *gradiente de velocidad*. Para mover la placa superior se requiere una fuerza, lo que se puede verificar moviendo una placa plana sobre el jarabe que se derramó sobre una mesa. Para un fluido dado, se encuentra que la fuerza requerida F es proporcional al área de fluido en contacto con cada placa, A, y a la rapidez v, en tanto que es inversamente proporcional a la separación ℓ de las placas: $F \propto vA/\ell$. Cuanto más viscoso es un fluido, mayor es la fuerza requerida. Por consiguiente, la constante de proporcionalidad para esta ecuación se define como el *coeficiente de viscosidad*, η:

$$F = \eta A \frac{v}{\ell}. \qquad \textbf{(13–11)}$$

Despejando η, obtenemos $\eta = F\ell/vA$. La unidad de η en el SI es $\mathrm{N \cdot s/m^2} = \mathrm{Pa{\cdot}s}$ (pascal × segundo). En el sistema cgs, la unidad es $\mathrm{dina{\cdot}s/cm^2}$, que recibe el nombre de *poise* (P). Las viscosidades a menudo se expresan en centipoise ($1\ \mathrm{cP} = 10^{-2}\ \mathrm{P}$). La tabla 13-3 da los coeficientes de viscosidad para varios fluidos. La temperatura también se especifica, ya que tiene un fuerte efecto; la viscosidad de líquidos como el aceite para motores, por ejemplo, decrece rápidamente cuando la temperatura aumenta.†

TABLA 13–3
Coeficientes de viscosidad

Fluido (temperatura en °C)	Coeficiente de viscosidad, η (Pa·s)†
Agua (0°)	1.8×10^{-3}
(20°)	1.0×10^{-3}
(100°)	0.3×10^{-3}
Sangre entera (37°)	$\approx 4 \times 10^{-3}$
Plasma sanguíneo (37°)	$\approx 1.5 \times 10^{-3}$
Alcohol etílico (20°)	1.2×10^{-3}
Aceite para motor (30°) (SAE 10)	200×10^{-3}
Glicerina (20°)	1500×10^{-3}
Aire (20°)	0.018×10^{-3}
Hidrógeno (0°)	0.009×10^{-3}
Vapor de agua (100°)	0.013×10^{-3}

† 1 Pa·s = 10 P = 1000 cP.

* 13–12 Flujo en tubos: Ecuación de Poiseuille, flujo sanguíneo

Si un fluido no tuviera viscosidad, podría fluir a través de un tubo horizontal aun cuando no se aplicara una fuerza. La viscosidad actúa como un tipo de fricción (entre capas de fluido que se mueven con rapideces ligeramente diferentes), de manera que se necesita una diferencia de presión entre los extremos de un tubo horizontal para mantener el flujo estable de cualquier fluido real, sea éste agua o aceite en un tubo, o la sangre en el sistema circulatorio de un ser humano.

El científico francés J. L. Poiseuille (1799-1869), quien estaba interesado en la física de la circulación de la sangre (y en honor de quien el "poise" recibió su nombre), determinó cómo afecta las variables la tasa de flujo de un fluido incompresible que experimenta flujo laminar en un tubo cilíndrico. Su resultado, conocido como *ecuación de Poiseuille*, es:

$$Q = \frac{\pi R^4 (P_1 - P_2)}{8\eta\ell}, \qquad \textbf{(13–12)}$$

donde R es el radio interior del tubo, ℓ es su longitud, $P_1 - P_2$ es la diferencia de presión entre los extremos, η es el coeficiente de viscosidad, y Q es la tasa de flujo de vo-

†La Sociedad de Ingenieros Automotrices asigna números para representar la viscosidad de los aceites: el peso 30 (SAE 30) es más viscoso que el peso 10. Los aceites multigrado, como el 20-50, están diseñados para mantener la viscosidad conforme se incrementa la temperatura; 20—50 significa que el aceite es de peso 20, cuando hace frío, y se comporta como un aceite puro de peso 50 cuando hace calor (temperatura de un motor en marcha).

lumen (volumen de fluido que pasa por un punto dado por unidad de tiempo, que en el SI tiene unidades de m^3/s). La ecuación 13-12 se aplica sólo al flujo laminar.

La ecuación de Poiseuille nos dice que la tasa de flujo Q es directamente proporcional al “gradiente de presión,” $(P_1 - P_2)/\ell$, y es inversamente proporcional a la viscosidad del fluido. Esto es justo lo que esperaríamos. Sin embargo, quizá resulte sorprendente que Q también depende de la *cuarta* potencia del radio del tubo. Esto significa que para el mismo gradiente de presión, si el radio del tubo se reduce a la mitad, la tasa de flujo ¡decrece en un factor de 16! Así, la tasa de flujo o, de manera alternativa, la presión requerida para mantener una tasa de flujo dada se ve fuertemente afectada por un pequeño cambio en el radio del tubo

Un ejemplo interesante de esta dependencia de R^4 es el *flujo sanguíneo* en el cuerpo humano. La ecuación de Poiseuille es válida sólo para el flujo laminar de un fluido incompresible, así que no es del todo exacta para la sangre, cuyo flujo presenta turbulencia, además de que contiene células sanguíneas (cuyo diámetro es casi igual al de un capilar). No obstante, la ecuación de Poiseuille da una aproximación razonable. Puesto que el radio de las arterias se reduce como resultado de la arteriosclerosis (engrosamiento y endurecimiento de las paredes arteriales) y la acumulación de colesterol, el gradiente de presión debe aumentar para mantener la misma tasa de flujo. Si el radio se reduce a la mitad, el corazón tendría que aumentar la presión en un factor de $2^4 = 16$ para mantener la misma tasa de flujo sanguíneo. El corazón debe trabajar más en tales condiciones, aunque por lo general no logra mantener la tasa de flujo original. Por lo tanto, la presión arterial alta es un indicador de que el corazón está trabajando más y de que la tasa de flujo sanguíneo se ha reducido.

FÍSICA APLICADA
Flujo sanguíneo

* 13–13 Tensión superficial y capilaridad

La *superficie* de un líquido en reposo también se comporta de manera interesante, casi como una membrana que se alarga bajo tensión. Por ejemplo, una gota de agua en el extremo de un grifo que gotea o una gota que cuelga de una rama delgada en el rocío de la mañana (figura 13-34) adquiere una forma casi esférica, como si fuera un pequeño globo lleno de agua. Una aguja de acero puede flotar sobre la superficie del agua aun cuando es más densa que ésta. La superficie de un líquido actúa como si estuviera bajo tensión, y esta tensión, que actúa paralelamente a la superficie, surge de las fuerzas de atracción entre las moléculas. Este efecto se llama **tensión superficial**. Más específicamente, la cantidad llamada *tensión superficial*, γ (letra griega gamma), se define como la fuerza F por unidad de longitud ℓ que actúa de forma perpendicular a cualquier línea o corte en la superficie de un líquido, tendiendo a cerrarla:

$$\gamma = \frac{F}{\ell}. \qquad \textbf{(13–13)}$$

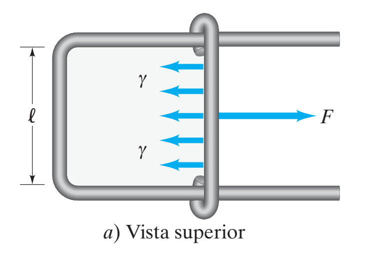


FIGURA 13–34 Gotitas esféricas de agua; rocío sobre una hoja de pasto.

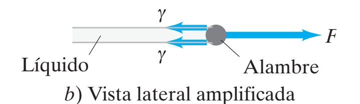
Para comprender esto, considere el aparato en forma de U de la figura 13-35, que encierra una película delgada de líquido. A causa de la tensión superficial, se requiere una fuerza F para tirar del alambre móvil e incrementar así el área superficial del líquido. El líquido contenido por el dispositivo de alambre es una película delgada que tiene una superficie superior y una inferior. Por consiguiente, la longitud de la superficie que se incrementa es 2ℓ, y la tensión superficial es $\gamma = F/2\ell$. Se puede usar un aparato delicado de este tipo para medir la tensión superficial de varios líquidos. La tensión superficial del agua es de 0.072 N/m a 20°C. La tabla 13-4 da los valores para otras sustancias. Observe que la temperatura tiene un efecto considerable sobre la tensión superficial.

TABLA 13–4
Tensión superficial de algunas sustancias

Sustancia (temperatura en °C)	Tensión superficial (N/m)
Mercurio (20°)	0.44
Sangre entera (37°)	0.058
Plasma sanguíneo (37°)	0.073
Alcohol etílico (20°)	0.023
Agua (0°)	0.076
(20°)	0.072
(100°)	0.059
Benceno (20°)	0.029
Solución jabonosa (20°)	≈0.025
Oxígeno (−193°)	0.016



a) Vista superior



b) Vista lateral amplificada

FIGURA 13–35 Aparato de alambre en forma de U que sostiene una película de líquido para medir la tensión superficial ($\gamma = F/2\ell$).

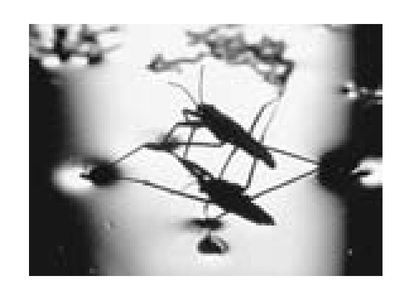


FIGURA 13–36 Insecto caminando sobre el agua.

Debido a la tensión superficial, algunos insectos (figura 13-36) logran caminar sobre el agua, y objetos más densos que el agua, como una aguja de acero, pueden flotar sobre la superficie. La figura 13-37a muestra cómo la tensión superficial puede soportar el peso w de un objeto. En realidad, el objeto se hunde ligeramente en el fluido, de manera que w es el "peso efectivo" de ese objeto, es decir, su peso verdadero menos la fuerza de flotación.

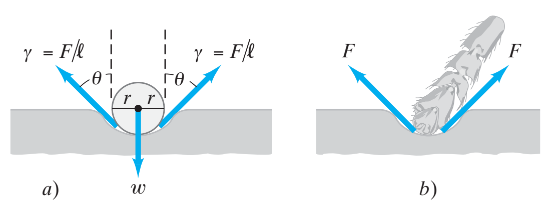


FIGURA 13–37 Tensión superficial que actúa sobre *a*) una esfera y *b*) la pata de un insecto. Ejemplo 13-16.

EJEMPLO 13–16 ESTIMACIÓN **Insecto que camina sobre el agua.** La base de la pata de un insecto es esférica aproximadamente, con un radio de 2.0×10^{-5} m. La masa de 0.0030 g del insecto es soportada en partes iguales por las seis patas. Estime el ángulo θ (véase la figura 13-37) para un insecto sobre la superficie del agua. Suponga que la temperatura del agua es de 20°C.

PLANTEAMIENTO Como el insecto está en equilibrio, la fuerza de tensión superficial ascendente es igual a la fuerza de gravedad efectiva hacia abajo sobre cada pata. Ignoramos la fuerza de flotación para esta estimación.

SOLUCIÓN Suponemos que para cada pata, la fuerza de tensión superficial actúa alrededor de un círculo de radio r, a un ángulo θ, como se indica en la figura 13-37a. Sólo la componente vertical, $\gamma \cos\theta$, actúa para equilibrar el peso mg. Así que sustituimos la longitud ℓ en la ecuación 13-13 por la circunferencia del círculo, $\ell \approx 2\pi r$. Así que la fuerza neta ascendente debida a la tensión superficial es $F_y \approx (\gamma\cos\theta)\ell \approx 2\pi r\gamma\cos\theta$. Esta fuerza de tensión superficial es igual a un sexto del peso del insecto, puesto que tiene seis patas:

$$2\pi r\gamma\cos\theta \approx \tfrac{1}{6}mg$$

$$(6.28)(2.0\times 10^{-5}\,\text{m})(0.072\,\text{N/m})\cos\theta \approx \tfrac{1}{6}(3.0\times 10^{-6}\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2)$$

$$\cos\theta \approx \frac{0.49}{0.90} = 0.54.$$

Por lo tanto, $\theta \approx 57°$. Si el $\cos\theta$ fuera mayor que 1, la tensión superficial no sería suficiente para soportar el peso del insecto

NOTA Nuestro estimado ignoró la fuerza de flotación, así como cualquier diferencia entre el radio del "pie" del insecto y el radio de la depresión superficial.

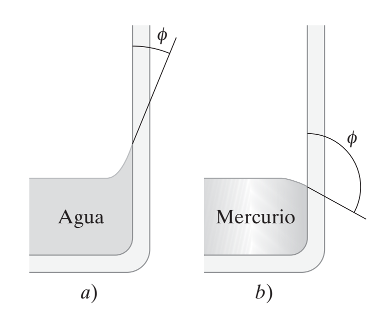
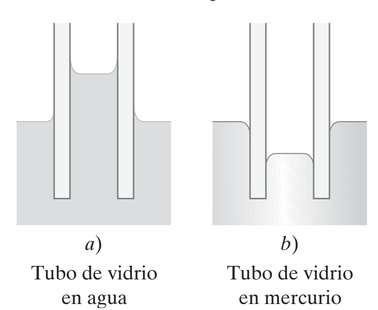


FIGURA 13–38 El agua "moja" la superficie del vidrio, mientras que *b*) el mercurio no "moja" el vidrio.

FIGURA 13–39 Capilaridad.



Los jabones y detergentes tienen el efecto de disminuir la tensión superficial del agua. Esto es deseable para lavar y limpiar ya que la alta tensión superficial del agua pura impide que ésta penetre fácilmente entre las fibras del material y en los pequeños intersticios. Las sustancias que reducen la tensión superficial de un líquido se llaman *surfactantes*.

La tensión superficial desempeña un papel en otro fenómeno interesante: la capilaridad. Es común observar que el agua en un recipiente de vidrio se eleva ligeramente donde toca el vidrio (figura 13-38a). Se dice que el agua "moja" al vidrio. Por otra parte, el mercurio se hunde donde toca al vidrio (figura 13-38b); el mercurio no moja al vidrio. Si un líquido moja o no a una superficie sólida es algo que se determina por la resistencia relativa de las fuerzas de cohesión entre las moléculas del líquido comparada con las fuerzas de adhesión entre las moléculas del líquido y las del recipiente. La *cohesión* se refiere a la fuerza entre moléculas del mismo tipo y la *adhesión* a la fuerza entre moléculas de tipos diferentes. El agua moja al vidrio porque las moléculas de agua son atraídas con mayor fuerza por las moléculas de vidrio que por otras moléculas de agua. Lo opuesto ocurre para el mercurio: las fuerzas de cohesión son más fuertes que las fuerzas de adhesión.

En tubos con diámetros muy pequeños se observa que los líquidos suben o bajan con respecto al nivel del líquido que los rodea. Este fenómeno se llama **capilaridad** y tales tubos delgados se llaman **capilares**. El hecho de que el líquido suba o baje (figura 13-39) depende de las intensidades relativas de las fuerzas de adhesión y cohesión. El agua se eleva en un tubo de vidrio, mientras que el mercurio desciende. La cantidad real de elevación (o descenso) depende de la tensión superficial, que es lo que impide que la superficie del líquido se rompa.

* 13–14 Las bombas y el corazón

Concluimos este capítulo con un breve análisis de bombas de varios tipos, incluido el corazón. Las bombas se clasifican en categorías de acuerdo con su función. Una *bomba de vacío* está diseñada para reducir la presión (generalmente del aire) en un recipiente dado. Por otro lado, una *bomba de fuerza* es aquella cuya función es incrementar la presión, por ejemplo, para levantar un líquido (como el agua de un pozo) o empujar un fluido a través de una tubería. La figura 13-40 ilustra el principio detrás de una bomba simple alternativa. Podría ser una bomba de vacío, en cuyo caso la entrada se conecta al recipiente que se evacuará. Un mecanismo similar se usa en algunas bombas de fuerza, y en este caso el fluido es forzado a través de la salida mediante un incremento de presión.

La bomba centrífuga (figura 13-41), o cualquier bomba de fuerza, puede usarse como una *bomba circulante*, es decir, para hacer circular un fluido alrededor de una trayectoria cerrada, como el agua refrigerante o el aceite lubricante en un automóvil.

El corazón del ser humano (y también de los animales) es esencialmente una bomba circulante. La acción del corazón humano se ilustra en la figura 13-42. En realidad hay dos trayectorias separadas para el flujo de la sangre. La trayectoria más larga lleva sangre a las distintas partes del cuerpo por medio de las arterias, llevando oxígeno a los tejidos y recogiendo dióxido de carbono para llevarlo al corazón por medio de las venas. Luego, esta sangre se bombea a los pulmones (la segunda trayectoria), donde se libera el dióxido de carbono y se toma oxígeno. La sangre cargada de oxígeno se lleva al corazón, donde de nuevo se bombea hacia los tejidos del cuerpo.

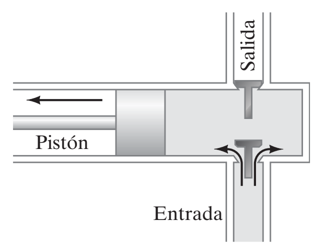


FIGURA 13–40 Un ejemplo de un tipo de bomba: la válvula de entrada se abre, y el aire (o el fluido que se bombea) llena el espacio vacío cuando el pistón se mueve hacia la izquierda. Cuando el pistón se mueve hacia la derecha (no se ilustra), la válvula de salida se abre y el fluido se ve forzado a salir.

FIGURA 13–41 Bomba centrífuga: los álabes en rotación fuerzan el fluido a través del tubo de salida; este tipo de bomba se usa en aspiradoras y en bombas de agua para automóvil.

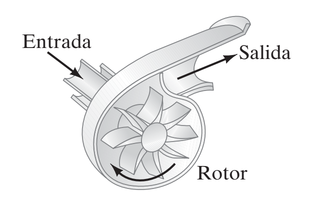
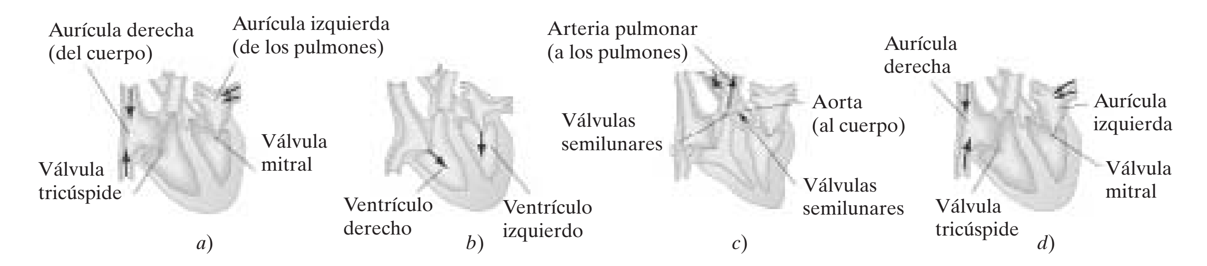


FIGURA 13–42 *a*) En la fase de diástole, el corazón se relaja entre cada latido. La sangre se mueve hacia el corazón; ambas aurículas se llenan rápidamente. *b*) Cuando las aurículas se contraen comienza la fase de bombeo o sístole. La contracción empuja la sangre a través de las válvulas mitral y tricúspide hacia los ventrículos. *c*) La contracción de los ventrículos fuerza a la sangre a través de las válvulas semilunares hacia la arteria pulmonar que la conduce a los pulmones y hacia la aorta (la arteria más grande del cuerpo), la cual a la vez la lleva a las arterias que irrigan todo el cuerpo. *d*) Cuando el corazón se relaja se cierran las válvulas semilunares; la sangre llena las aurículas y el ciclo comienza de nuevo.



Resumen

Las tres fases o estados de la materia son: **sólido**, **líquido** y **gaseoso**. Los líquidos y los gases se conocen colectivamente como **fluidos**, lo que implica que tienen la capacidad de fluir. La **densidad** de un material se define como su masa por unidad de volumen.

$$\rho = \frac{m}{V}. \qquad \textbf{(13–1)}$$

La **gravedad específica** es el cociente de la densidad del material a la densidad del agua (a 4°C).

La **presión** se define como fuerza por unidad de área.

$$P = \frac{F}{A}. \qquad \textbf{(13–2)}$$

La presión P a una profundidad h en un líquido está dada por

$$P = \rho g h, \qquad \textbf{(13–3)}$$

donde ρ es la densidad del líquido y g es la aceleración debida a la gravedad. Si la densidad de un fluido no es uniforme, la presión P varía con la altura y como

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g. \qquad \textbf{(13–4)}$$

El **principio de Pascal** dice que una presión externa aplicada a un fluido confinado se transmite por todo el fluido.

La presión se mide usando un manómetro u otro tipo de medidor. Un **barómetro** sirve para medir la presión atmosférica. La **presión atmosférica** estándar (promedio al nivel del mar) es de $1.013 \times 10^5\ \mathrm{N/m^2}$. La **presión manométrica** es la presión total (absoluta) menos la presión atmosférica.

El **principio de Arquímedes** establece que un objeto sumergido total o parcialmente en un fluido experimenta una fuerza de flotación igual al peso del fluido desplazado ($F_B = m_F g = \rho_F V_{\mathrm{despl}} g$).

El flujo de los fluidos se puede caracterizar como **laminar**, en el que las capas de fluido se mueven uniforme y regularmente a lo largo de trayectorias llamadas **líneas de flujo**, o como **turbulento**, en cuyo caso el flujo no es uniforme ni regular, sino que se caracteriza por remolinos de forma irregular.

La tasa de flujo de fluido es la masa o volumen de fluido que pasa por un punto dado por unidad de tiempo. La **ecuación de continuidad** establece que para un fluido incompresible que fluye en un tubo cerrado, el producto de la velocidad del flujo y el área de la sección transversal del tubo permanece constante:

$$Av = \text{constante} \qquad \textbf{(13–7b)}$$

El **principio de Bernoulli** nos dice que cuando la velocidad de un fluido es elevada, la presión en éste es baja, y cuando la velocidad es baja, la presión es elevada. La **ecuación de Bernoulli** para un flujo laminar estable de un fluido incompresible y sin viscosidad de acuerdo con la ley de la conservación de la energía es

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2, \qquad \textbf{(13–8)}$$

para dos puntos a lo largo de una línea de flujo.

[*La **viscosidad** se refiere a la fricción dentro de un fluido y es esencialmente una fuerza de fricción entre capas adyacentes de fluido cuando éstas se mueven una sobre otra].

[*Las superficies de líquido permanecen juntas como si estuvieran bajo tensión (**tensión superficial**), permitiendo que se formen gotas y que los objetos como agujas e insectos permanezcan sobre la superficie].

Preguntas

1. Si un material tiene mayor densidad que otro, ¿implica esto que las moléculas del primero son más pesadas que las del segundo? Explique.

2. Los pasajeros de avión notan a menudo que parte del contenido de sus frascos de cosméticos y otros recipientes se ha salido después de un vuelo. ¿Por qué sucede esto?

3. Los tres recipientes en la figura 13-43 están llenos con agua hasta la misma altura y tienen la misma área superficial en la base; por lo tanto, la presión del agua y la fuerza total en la base de cada uno es la misma. Sin embargo, el peso total del agua es diferente en cada uno. Explique esta "paradoja hidrostática".



FIGURA 13–43
Pregunta 3.

4. Considere qué sucede cuando usted empuja un alfiler y el extremo romo de una pluma contra su piel con la misma fuerza. Indique qué determina si su piel sufre daño: la fuerza neta aplicada o la presión.

5. Una pequeña cantidad de agua se hierve en un recipiente de metal de un galón. El recipiente se retira del calor y se tapa. A medida que el recipiente se enfría, colapsa. Explique por qué.

6. Cuando se mide la presión arterial, ¿por qué la banda del baumanómetro debe colocarse a nivel del corazón?

7. Un cubo de hielo flota en un vaso de agua lleno hasta el borde. ¿Qué puede decir acerca de la densidad del hielo? Cuando el hielo se derrita, ¿se derramará el vaso? Explique.

8. ¿Flotará un cubo de hielo en un vaso de alcohol? ¿Por qué?

9. Una lata de Coca Cola® que se sumerge en agua se hundirá; en cambio, una lata de Coca Cola dietética® flotará. ¡Inténtelo! Explique por qué.

10. ¿Por qué los barcos hechos de hierro no se hunden?

11. Explique cómo el tubo en la figura 13-44, conocido como **sifón**, puede transferir líquido de un recipiente a otro situado más abajo aun cuando el líquido tenga que fluir hacia arriba parte de la trayectoria. (Observe que el tubo debe estar lleno con líquido al principio).

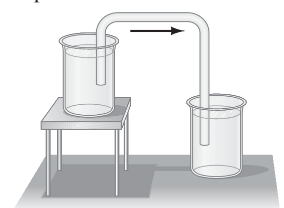


FIGURA 13–44
Pregunta 11. Un sifón.

12. Una barcaza llena con arena se acerca a un puente bajo sobre un río y no logra pasar por debajo de él. ¿Debería agregarse o retirarse arena de la barcaza? [*Sugerencia:* Considere el principio de Arquímedes].

13. Explique por qué los globos meteorológicos de helio, que se usan para medir condiciones atmosféricas a gran altura, se liberan normalmente cuando contienen sólo del 10 al 20% de su volumen máximo.

14. Un pequeño bote de madera flota en una alberca y se marca el nivel del agua en la orilla de esta última. Considere las siguientes situaciones y determine si el nivel del agua aumenta, disminuye o permanece igual. *a*) El bote se saca del agua. *b*) El bote en el agua tiene un ancla de hierro que se saca del bote y se coloca afuera en la orilla. *c*) El ancla de hierro se saca del bote y se deja caer dentro de la alberca.

15. ¿Tendrá un globo vacío precisamente el mismo peso aparente sobre una balanza que uno lleno con aire? Explique.

16. ¿Por qué flota usted más fácilmente en agua salada que en agua dulce?

17. Si usted cuelga dos piezas de papel verticalmente, separadas unas cuantas pulgadas (figura 13-45), y sopla entre ellas, ¿cómo cree que se moverán las piezas de papel? Inténtelo y vea. Explique.



FIGURA 13–45
Pregunta 17.

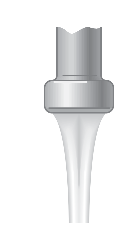


FIGURA 13–46
Pregunta 18. El agua sale de un grifo.

18. ¿Por qué el chorro de agua de un grifo se vuelve más estrecho al caer (figura 13-46)?

19. A menudo se advierte a los niños que eviten pararse muy cerca de un tren en rápido movimiento porque podrían ser succionados por él. ¿Es esto posible? Explique.

20. Un vaso largo de poliestireno se llena con agua. Se perforan dos agujeros en el vaso cerca del fondo y el agua empieza a salir. Si el vaso se deja caer libremente, ¿continuará el agua saliendo por los agujeros? Explique.

21. ¿Por qué los aviones despegan normalmente contra el viento?

22. Dos barcos que se mueven en trayectorias paralelas cercanas una a la otra podrían chocar. ¿Por qué?

23. ¿Por qué la capota de un automóvil convertible se abomba cuando el auto viaja con gran rapidez? [*Sugerencia:* Considere que el parabrisas desvía el aire hacia arriba, haciendo que se junten las líneas de flujo].

24. Los techos de las casas a veces "vuelan" (¿o son empujados hacia afuera?) durante un tornado o un huracán. Explique esto usando el principio de Bernoulli.

Problemas

13–2 Densidad y gravedad específica

1. (I) El volumen aproximado del monolito de granito conocido como El Capitán en el Parque Nacional de Yosemite (figura 13-47) es de aproximadamente 10^8 m^3. ¿Cuál es su masa aproximada?



FIGURA 13–47 Problema 1.

2. (I) ¿Cuál es la masa aproximada del aire en una habitación de 5.6 m × 3.8 m × 2.8 m?
3. (I) Si usted trata de contrabandear lingotes de oro llenando su mochila, cuyas dimensiones son de 56 cm × 28 cm × 22 cm, ¿cuál sería su masa?
4. (I) Determine la masa y estime el volumen de usted mismo. [*Sugerencia*: Como usted puede nadar sobre o justo bajo la superficie del agua en una alberca, tiene una buena idea de su densidad].
5. (II) Una botella tiene una masa de 35.00 g cuando está vacía y de 98.44 g cuando está llena con agua. Cuando está llena con otro fluido, la masa es de 89.22 g. ¿Cuál es la gravedad específica de este otro fluido?
6. (II) Si 5.0 L de solución anticongelante (gravedad específica = 0.80) se agregan a 4.0 L de agua para hacer una mezcla de 9.0 L, ¿cuál es la gravedad específica de la mezcla?
7. (III) La Tierra no es una esfera uniforme, sino que tiene regiones de densidad variable. Considere un modelo simple de la Tierra dividida en tres regiones: núcleo interno, núcleo externo y manto. Cada región tiene una densidad constante única (la densidad promedio de esa región real de la Tierra):

Región	Radio (km)	Densidad (kg/m³)
Núcleo interno	0–1220	13,000
Núcleo externo	1220–3480	11,100
Manto	3480–6371	4,400

a) Utilice este modelo para predecir la densidad promedio de toda la Tierra. *b*) El radio de la Tierra mide 6371 km y su masa es de 5.98×10^{24} kg. Utilice estos datos para determinar la densidad promedio real de la Tierra y compárela (como una diferencia porcentual) con la que determinó en *a*).

13–3 a 13–6 Presión; principio de Pascal

8. (I) Estime la presión necesaria para elevar una columna de agua a la misma altura que un roble de 35 m de alto.
9. (I) Estime la presión ejercida sobre un piso por *a*) el extremo puntiagudo de la pata de una silla (66 kg sobre cuatro patas) de área = 0.020 cm^2 y *b*) un elefante de 1300 kg parado sobre una sola pata (área = 800 cm^2).
10. (I) ¿Cuál es la diferencia en la presión sanguínea (en mm-Hg) entre la parte superior de la cabeza y la planta de los pies de una persona de 1.70 m que se encuentra de pie?
11. (II) ¿Qué tan alto llegaría el nivel en un barómetro de alcohol a presión atmosférica normal?
12. (II) En una película, Tarzán evade a sus captores escondiéndose bajo el agua durante varios minutos mientras respira a través de un carrizo largo y delgado. Suponiendo que la diferencia máxima de presión que sus pulmones pueden aguantar para seguir respirando es de −85 mm-Hg, calcule la máxima profundidad a la que podría sumergirse.
13. (II) La presión manométrica máxima en un elevador hidráulico es de 17.0 atm. ¿Cuál es el tamaño más grande de vehículo (kg) que puede levantar si el diámetro de la línea de salida es de 22.5 cm?
14. (II) La presión manométrica en cada uno de los cuatro neumáticos de un automóvil es de 240 kPa. Si cada neumático tiene una "huella" de 200 cm^2, estime la masa del automóvil.
15. (II) *a*) Determine la fuerza total y la presión absoluta sobre el fondo de una piscina de 28.0 m × 8.5 m cuya profundidad uniforme es de 1.8 m? *b*) ¿Cuál será la presión contra el *lado* de la piscina cerca del fondo?
16. (II) Una casa en el fondo de una colina se abastece mediante un tanque lleno de agua de 5.0 m de profundidad, el cual está conectado a la casa por un tubo de 110 m de longitud que forma un ángulo de 58° con la horizontal (figura 13-48). *a*) Determine la presión manométrica del agua en la casa. *b*) ¿Qué tan alto se elevaría el agua si saliera verticalmente de una tubería rota enfrente de la casa?

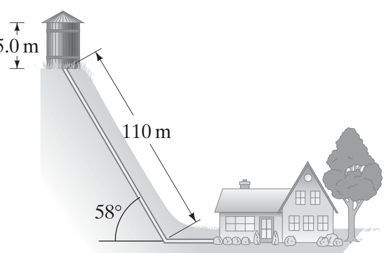


FIGURA 13–48 Problema 16.

17. (II) Se vierten agua y luego aceite (los cuales no se mezclan) en un tubo en forma de U, abierto en ambos extremos. Alcanzan el equilibrio como se ilustra en la figura 13-49. ¿Cuál es la densidad del aceite? [*Sugerencia*: Las presiones en los puntos a y b son iguales. ¿Por qué?].

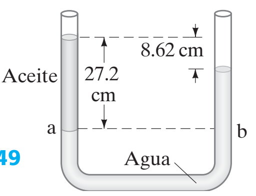


FIGURA 13–49 Problema 17.

18. (II) Al formular su principio, Pascal mostró de manera contundente cómo la fuerza se multiplica con la presión del fluido. Colocó un tubo delgado y largo de radio r = 0.30 cm verticalmente dentro de un barril de vino de radio R = 21 cm (figura 13-50). Encontró que cuando el barril se llenaba con agua y el tubo se llenaba hasta una altura de 12 m, el barril se rompía. Calcule *a*) la masa de fluido en el tubo y *b*) la fuerza neta que ejerce el agua sobre la tapa del barril justo antes de que éste se rompa.

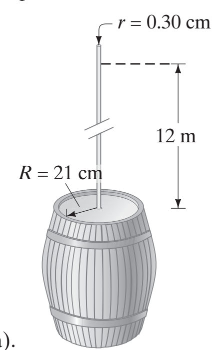


FIGURA 13–50 Problema 18 (No está a escala).

19. (II) ¿Cuál es la presión normal de la atmósfera en la cima del Monte Everest, a 8850 m sobre el nivel del mar?

20. (II) Una prensa hidráulica para compactar muestras de polvo tiene un cilindro grande de 10.0 cm de diámetro y un cilindro pequeño con diámetro de 2.0 cm (figura 13-51). Se adapta una palanca al cilindro pequeño, como se indica. La muestra, que se coloca en el cilindro grande, tiene una área de 4.0 cm^2. ¿Cuál es la presión sobre la muestra si se aplican 350 N a la palanca?

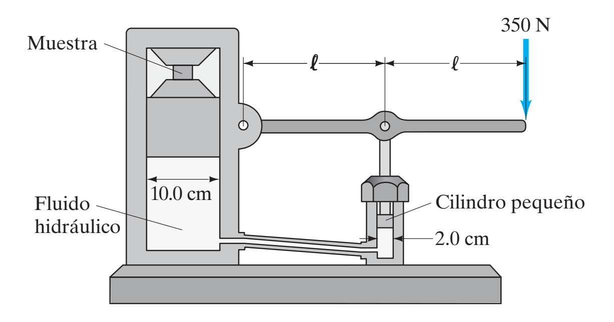


FIGURA 13–51 Problema 20.

21. (II) Un manómetro de mercurio de tubo abierto se usa para medir la presión en un tanque de oxígeno. Cuando la presión atmosférica es de 1040 mbar, ¿cuál es la presión absoluta (en Pa) en el tanque si la altura del mercurio en el tubo abierto es *a*) 21.0 cm más alta, *b*) 5.2 cm más baja que la del mercurio en el tubo conectado al tanque?

22. (III) Un recipiente de líquido acelera desde el reposo, sobre una superficie horizontal con aceleración a hacia la derecha. *a*) Demuestre que la superficie del líquido forma un ángulo $\theta = \tan^{-1}(a/g)$ con la horizontal. *b*) ¿Qué borde de la superficie del agua está más alto? *c*) ¿Cómo varía la presión con la profundidad debajo de la superficie?

23. (III) El agua alcanza una altura h detrás de una presa vertical de ancho uniforme b. *a*) Use integración para demostrar que la fuerza total del agua sobre la presa es $F = \frac{1}{2}\rho g h^2 b$. *b*) Demuestre que la torca con respecto a la base de la presa debida a esta fuerza puede considerarse que actúa con un brazo de palanca igual a $h/3$. *c*) Para una presa de concreto de espesor uniforme t y altura h, ¿qué espesor mínimo se necesita para evitar que se derrumbe? ¿Necesita usted añadir la presión atmosférica para esta última parte? Explique.

24. (III) Estime la densidad del agua a 5.4 km de profundidad en el mar. (Véase la tabla 12-1 y la sección 12-4 en relación con el módulo volumétrico). ¿En qué fracción difiere de la densidad en la superficie?

25. (III) Una cubeta cilíndrica con líquido dentro (densidad ρ) se gira con respecto a su eje de simetría que es vertical. Si la velocidad angular es ω, demuestre que la presión a una distancia r del eje de rotación es

$$P = P_0 + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2,$$

donde P_0 es la presión en $r = 0$.

13–7 Flotación y el principio de Arquímedes

26. (I) ¿Qué fracción de una pieza de hierro estará sumergida al flotar en mercurio?

27. (I) Un geólogo encuentra que una roca lunar cuya masa es de 9.28 kg tiene una masa aparente de 6.18 kg cuando está sumergida en agua. ¿Cuál es la densidad de la roca?

28. (II) Una grúa saca del mar el casco de acero de 16,000 kg de un barco hundido. Determine *a*) la tensión en el cable de la grúa cuando el casco está totalmente sumergido en el agua y *b*) la tensión cuando el casco está completamente fuera del agua.

29. (II) Un globo de forma esférica tiene un radio de 7.35 m y está lleno con helio. ¿Qué carga puede levantar, suponiendo que la cubierta y estructura del globo tienen una masa de 930 kg? Desprecie la fuerza de flotación sobre el volumen de carga.

30. (II) Una persona de 74 kg tiene una masa aparente de 54 kg (debido a la fuerza de flotación) cuando está de pie en el agua que le llega a las caderas. Estime la masa de cada pierna. Suponga que el cuerpo tiene un GE = 1.00.

31. (II) ¿Cuál es la identidad probable de un metal (véase la tabla 13-1) si una muestra tiene una masa de 63.5 g medida en el aire y una masa aparente de 55.4 g cuando está sumergida en agua?

32. (II) Calcule la masa verdadera (en el vacío) de una pieza de aluminio cuya masa aparente es de 3.0000 kg cuando se pesa en el aire.

33. (II) Como la gasolina es menos densa que el agua, los barriles que contienen gasolina flotan. Suponga que un barril de acero de 230 L está totalmente lleno de gasolina. ¿Qué volumen total de acero puede utilizarse para fabricarlo si el barril lleno de gasolina debe flotar en agua dulce?

34. (II) Un buzo y su equipo desplazan un volumen de 65.0 L y tienen una masa total de 68.0 kg. *a*) ¿Cuál es la fuerza de flotación sobre el buzo en el mar? *b*) ¿El buzo se hundirá o flotará?

35. (II) La gravedad específica del hielo es 0.917, mientras que el del agua salada es 1.025. ¿Qué fracción de un témpano de hielo queda sobre la superficie del agua?

36. (II) El principio de Arquímedes permite no sólo determinar la gravedad específica de un sólido usando un líquido conocido (ejemplo 13-10); el proceso inverso también puede realizarse. *a*) Por ejemplo, una bola de aluminio de 3.80 kg tiene una masa aparente de 2.10 kg cuando se sumerge en un líquido particular; calcule la densidad del líquido. *b*) Obtenga una fórmula simple para determinar la densidad de un líquido usando este procedimiento.

37. (II) *a*) Demuestre que la fuerza de flotación F_B sobre un objeto parcialmente sumergido, como un barco, actúa en el centro de gravedad del fluido antes de que éste sea desplazado. Este punto se llama **centro de flotación**. *b*) Para que un barco esté en equilibrio estable, ¿su centro de flotación debe estar arriba, abajo o en el mismo punto que su centro de gravedad? Explique. (Véase la figura 13-52).

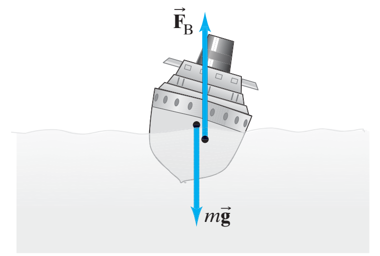


FIGURA 13–52 Problema 37.

38. (II) Un cubo cuyos lados miden 10.0 cm de longitud está hecho de un material desconocido y flota en la superficie entre agua y aceite. El aceite tiene una densidad de 810 kg/m^3. Si el cubo flota de forma que el 72% de él está en el agua y el 28% en aceite, ¿cuál es su masa y cuál es la fuerza de flotación sobre él?

39. (II) ¿Cuántos globos llenos de helio se necesitarán para levantar a una persona? Suponga que el sujeto tiene una masa de 75 kg y que cada globo lleno de helio es esférico con un diámetro de 33 cm.

40. (II) El tanque de un buzo, cuando está sumergido por completo, desplaza 15.7 L de agua de mar. El tanque, por sí solo, tiene una masa de 14.0 kg y, cuando está lleno, contiene 3.00 kg de aire. Suponiendo que sólo actúan el peso y la fuerza de flotación, determine la fuerza neta (magnitud y dirección) en el tanque sumergido por completo al inicio de la inmersión (cuando está lleno de aire) y al final (cuando está vacío).

41. (III) Si un objeto flota en el agua, su densidad se puede determinar uniendo una plomada a él de manera que ambos queden sumergidos. Demuestre que la gravedad específica está dada por $w/(w_1 - w_2)$, donde w es el peso del objeto solo en el aire, w_1 es el peso aparente cuando una plomada está unida a él y sólo la plomada está sumergida, y w_2 es el peso aparente cuando tanto el objeto como la plomada están sumergidos.

42. (III) Una pieza de madera de 3.25 kg (GE = 0.50) flota en el agua. ¿Qué masa mínima de plomo, colgada de ella mediante una cuerda, hará que se hunda?

13–8 a 13–10 Flujo de fluidos, ecuación de Bernoulli

43. (I) Un conducto de aire de 15 cm de radio se usa para renovar el aire de una habitación que mide 8.2 m × 5.0 m × 4.5 m cada 12 minutos. ¿Qué tan rápido fluye el aire en el conducto?

44. (I) Usando los datos del ejemplo 13-13, calcule la rapidez promedio del flujo sanguíneo en las principales arterias del cuerpo que tienen una área transversal total aproximada de 2.0 cm^2.

45. (I) ¿Qué tan rápido fluye el agua de un agujero en el fondo de un tanque de almacenamiento muy ancho de 5.3 m de profundidad lleno con agua? Desprecie la viscosidad.

46. (II) Una pecera mide 36 cm de ancho por 1.0 m de largo y 0.60 m de alto. Si el filtro debe procesar toda el agua en la pecera una vez cada 4.0 h, ¿cuál debería ser la rapidez del flujo en el tubo de entrada del filtro de 3.0 cm de diámetro?

47. (II) ¿Qué presión manométrica en la tubería principal de agua se necesita para que una manguera contra incendios arroje agua hasta una altura de 18 m?

48. (II) Una manguera de jardín de $\frac{5}{8}$ pulgadas de diámetro interior se usa para llenar una piscina redonda de 6.1 m de diámetro. ¿Cuánto tiempo tomará llenar la piscina a una profundidad de 1.2 m si el agua sale de la manguera con una rapidez de 0.40 m/s?

49. (II) Un viento de 180 km/h sopla sobre un techo plano de una casa y hace que éste se levante. Si la casa mide 6.2 m × 12.4 m, estime el peso del techo. Suponga que el techo no está clavado.

50. (II) Un tubo de 6.0 cm de diámetro se reduce gradualmente a 4.5 cm. Cuando el agua fluye por este tubo a cierta tasa, la presión manométrica en esas dos secciones es 32.0 kPa y 24 kPa, respectivamente. ¿Cuál es la tasa de flujo de volumen?

51. (II) Estime la presión del aire dentro de un huracán de categoría 5, en el que la rapidez del aire alcanza los 300 km/h (figura 13-53).



FIGURA 13–53 Problema 51.

52. (II) ¿Cuál es la fuerza de sustentación (en newtons) de acuerdo con el principio de Bernoulli sobre un ala de área de 88 m^2 si el aire pasa sobre las superficies superior e inferior con rapidez de 280 y 150 m/s, respectivamente?

53. (II) Demuestre que la potencia necesaria para impulsar un fluido a través de un tubo es igual a la tasa de flujo de volumen Q multiplicado por la diferencia de presión, $P_1 - P_2$.

54. (II) Agua a presión manométrica de 3.8 atm al nivel de la calle fluye hacia un edificio de oficinas con una rapidez de 0.68 m/s por un tubo de 5.0 cm de diámetro. El tubo se reduce a 2.8 cm de diámetro en el piso superior, donde el grifo se dejó abierto, 18 m por arriba del que está a nivel de la calle (figura 13-54). Calcule la velocidad del flujo y la presión manométrica en el tubo del piso superior. Suponga que no hay derivaciones y desprecie la viscosidad.

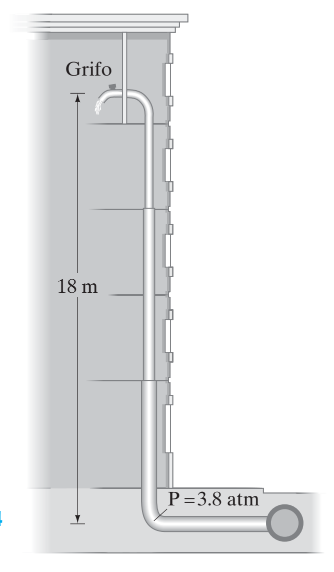


FIGURA 13–54 Problema 54.

55. (II) En la figura 13-55, tome en cuenta la rapidez de la superficie superior del tanque y demuestre que la rapidez del fluido que sale por el orificio en el fondo es

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{(1 - A_1^2/A_2^2)}},$$

donde $h = y_2 - y_1$, y A_1 y A_2 son las áreas del orificio y de la superficie superior, respectivamente. Suponga que $A_1 \ll A_2$ de forma que el flujo sea casi estable y laminar.



FIGURA 13–55 Problemas 55, 56, 58, y 59.

56. (II) Suponga que la superficie superior del recipiente en la figura 13-55 está sometida a una presión manométrica externa P_2. *a*) Obtenga una fórmula para la rapidez v_1 a la que el líquido fluye por el orificio en el fondo a presión atmosférica P_0. Suponga que la velocidad de la superficie del líquido v_2 es aproximadamente cero. *b*) Si P_2 = 0.85 atm y $y_2 - y_1$ = 2.4 m, determine v_1 para el agua.

57. (II) Usted está regando el césped con una manguera y coloca el dedo sobre la boquilla de ésta para aumentar la distancia a la que llega el agua. Si usted dirige la manguera al mismo ángulo y la distancia a la que llega el agua aumenta en un factor de cuatro, ¿qué fracción de la boquilla de la manguera está bloqueando?

58. (III) Suponga que la abertura en el tanque de la figura 13-55 está a una altura h_1 arriba de la base y que la superficie del líquido está a una altura h_2 sobre la base. El tanque descansa a nivel del terreno. *a*) ¿A qué distancia horizontal desde la base del tanque caerá el fluido en el terreno? *b*) ¿A qué otra altura, h'_1, puede colocarse un agujero de manera que el líquido emergente tenga el mismo "alcance"? Suponga que $v_2 \approx 0$.

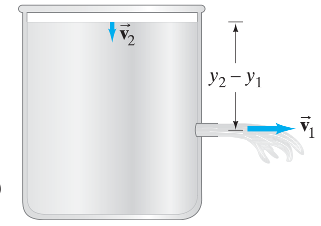


FIGURA 13–55 (repetida) Problemas 55, 56, 58 y 59.

59. (III) *a*) En la figura 13-55, demuestre que el principio de Bernoulli predice que el nivel del líquido $h = y_2 - y_1$, desciende a una tasa

$$\frac{dh}{dt} = -\sqrt{\frac{2ghA_1^2}{A_2^2 - A_1^2}},$$

donde A_1 y A_2 son las áreas del orificio y de la superficie superior, respectivamente, suponiendo que $A_1 \ll A_2$ y que la viscosidad se desprecia. *b*) Determine h como función del tiempo por integración. Sea $h = h_0$ en $t = 0$. *c*) ¿Cuánto tiempo tardará en vaciarse un cilindro de 10.6 cm de alto lleno con 1.3 L de agua si el orificio está en el fondo y tiene un diámetro de 0.50 cm?

60. (III) *a*) Demuestre que la velocidad de flujo medida por un medidor Venturi (figura 13-32) está dada por la relación

$$v_1 = A_2\sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}.$$

b) Un medidor Venturi mide el flujo de agua; tiene un diámetro principal de 3.0 cm y se reduce hasta un diámetro en la garganta de 1.0 cm; si la diferencia de presión es de 18 mm-Hg, ¿cuál es la velocidad del agua que entra a la garganta del medidor Venturi?

61. (III) *Propulsión de un cohete*. *a*) Use la ecuación de Bernoulli y la ecuación de continuidad para demostrar que la rapidez de emisión de los gases propulsores de un cohete es

$$v = \sqrt{2(P - P_0)/\rho},$$

donde ρ es la densidad del gas, P es la presión del gas dentro del cohete y P_0 es la presión atmosférica justo afuera del orificio de salida. Suponga que la densidad del gas permanece aproximadamente constante, y que el área del orificio de salida, A_0, es mucho menor que el área transversal A del interior del cohete (considere que éste es un cilindro grande). Suponga también que la rapidez del gas no es tan alta para que se establezcan turbulencias considerables o flujo inestable. *b*) Demuestre que la fuerza de propulsión sobre el cohete debida a los gases emitidos es

$$F = 2A_0(P - P_0).$$

62. (III) Una manguera contra incendios ejerce una fuerza sobre una persona que la sostiene. Esto se debe a que el agua acelera conforme avanza por la manguera hacia la boquilla. ¿Cuánta fuerza se requiere para sostener una manguera de 7.0 cm de diámetro y entregar 450 L/min a través de la boquilla de 0.75 cm de diámetro?

* 13–11 Viscosidad

***63.** (II) Un viscosímetro consiste en dos cilindros concéntricos de 10.20 cm y 10.60 cm de diámetro. Un líquido llena el espacio entre ellos a una profundidad de 12.0 cm. El cilindro exterior está fijo y una torca de 0.024 m·N mantiene al cilindro interior girando con una rapidez angular constante de 57 rev/min. ¿Cuál es la viscosidad del líquido?

***64.** (III) Un tubo hueco, largo, vertical y con diámetro interno de 1.00 cm se llena con aceite SAE 10 para motores. Una varilla de 150 g, 0.900 cm de diámetro y 30.0 cm de longitud se deja caer verticalmente en el aceite dentro del tubo. ¿Cuál es la rapidez máxima que alcanza la varilla al caer?

* 13–12 Flujo en tubos: Ecuación de Poiseuille

***65.** (I) El aceite de un motor (SAE 10, tabla 13 -3) pasa a través de un tubo fino de 1.80 mm de diámetro y 8.6 cm de longitud. ¿Qué diferencia de presión se necesita para mantener una tasa de flujo de 6.2 mL/min?

***66.** (I) Un jardinero piensa que tarda mucho tiempo regar un jardín con una manguera de $\frac{3}{8}$ pulgadas de diámetro. ¿En qué factor se reducirá el tiempo si usa una manguera de $\frac{5}{8}$ pulgadas de diámetro? Suponga que todo lo demás permanece igual.

***67.** (II) ¿Qué diámetro debe tener un conducto de aire de 15.5 m de largo si el sistema de ventilación y calefacción debe renovar el aire en una habitación de 8.0 m × 14.0 m × 4.0 m cada 12.0 minutos? Suponga que la bomba puede ejercer una presión manométrica de 0.710×10^{-3} atm.

***68.** (II) ¿Cuál debe ser la diferencia de presión entre los dos extremos de una sección de tubo de 1.9 km de longitud, 29 cm de diámetro, si el tubo debe transportar aceite ($\rho = 950$ kg/m³, $\eta = 0.20$ Pa·s) a una tasa de 650 cm³/s?

***69.** (II) La ecuación de Poiseuille no es válida si la velocidad del flujo es tan alta que se establece turbulencia. La aparición de la turbulencia ocurre cuando el **número de Reynolds**, *Re*, excede el valor aproximado de 2000. *Re* se define como

$$Re = \frac{2\bar{v}r\rho}{\eta},$$

donde $\bar{v}$ es la rapidez promedio del fluido, ρ es su densidad, η es su viscosidad, y r es el radio del tubo en el que fluye el fluido. *a*) Determine si el flujo de sangre a través de la aorta es laminar o turbulento cuando la rapidez promedio de la sangre en la aorta ($r = 0.80$ cm), durante la parte de reposo del ciclo del corazón es de aproximadamente 35 cm/s. *b*) Al hacer ejercicio, la rapidez del flujo sanguíneo se duplica. Calcule el número de Reynolds en este caso y determine si el flujo es laminar o turbulento.

***70.** (II) Suponiendo un gradiente constante de presión, ¿en qué factor disminuye el radio de un vaso capilar si el flujo sanguíneo se reduce en un 85%?

***71.** (III) Un paciente va a recibir una transfusión de sangre. Ésta fluirá a través de un tubo desde una botella elevada hacia una aguja insertada en la vena (figura 13-56). La aguja mide 25 mm de largo y su diámetro interior es de 0.80 mm; la tasa de flujo requerida es de 2.0 cm³ de sangre por minuto. ¿A qué distancia h debe colocarse la botella por arriba de la aguja? Obtenga ρ y η de las tablas. Suponga que la presión sanguínea es de 78 torr por arriba de la presión atmosférica.

FIGURA 13–56 Problemas 71 y 79.

* 13–13 Tensión superficial y capilaridad

***72.** (I) Si la fuerza F necesaria para mover el alambre en la figura 13-35 es de 3.4×10^{-3} N, calcule la tensión superficial γ del fluido encerrado. Suponga que $\ell = 0.070$ m.

***73.** (I) Calcule la fuerza necesaria para mover el alambre en la figura 13-35 si está inmerso en una solución jabonosa y el alambre mide 24.5 cm de longitud.

***74.** (II) La tensión superficial de un líquido se puede determinar midiendo la fuerza F necesaria justo para levantar un anillo circular de platino de radio r de la superficie del líquido. *a*) Obtenga una fórmula para γ en términos de F y r. *b*) A 30°C, si $F = 5.80 \times 10^{-3}$ N y $r = 2.8$ cm, calcule γ para el líquido probado.

***75.** (III) Estime el diámetro de una aguja de acero que apenas puede "flotar" en el agua gracias a la tensión superficial.

*76. (III) Demuestre que dentro de una burbuja de jabón debe haber una presión ΔP en exceso en comparación con la exterior, que es igual a $\Delta P = 4\gamma/r$, donde r es el radio de la burbuja y γ es la tensión superficial. [*Sugerencia*: Considere que la burbuja está formada por dos hemisferios en contacto y recuerde que hay dos superficies en la burbuja. Note que este resultado es aplicable a cualquier tipo de membrana, donde 2γ es la tensión por unidad de longitud en esa membrana].

*77. (III) Un efecto común de la tensión superficial es la capacidad de un líquido de elevarse por un delgado tubo, gracias a la acción capilar. Demuestre que, para un tubo delgado de radio r colocado en un líquido de densidad ρ y tensión superficial γ, el líquido en el tubo alcanzará una altura $h = 2\gamma/\rho g r$ por encima del nivel del líquido afuera del tubo, donde g es la aceleración gravitacional. Suponga que el líquido "moja" el capilar (la superficie del líquido es vertical cuando hace contacto con el interior del tubo).

Problemas generales

78. Se aplica una fuerza de 2.8 N al émbolo de una aguja hipodérmica. Si el diámetro del émbolo es de 1.3 cm y el de la aguja es de 0.20 mm, *a*) ¿con qué fuerza sale el fluido por la aguja? *b*) ¿Qué fuerza se requiere sobre el émbolo para empujar el fluido en una vena donde la presión manométrica es de 75 mm-Hg? Dé la respuesta para el instante justo antes de que el fluido empiece a moverse.

79. Las inyecciones intravenosas se aplican a menudo bajo gravedad, como se muestra en la figura 13-56. Suponiendo que el fluido tiene una densidad de 1.00 g/cm^3, ¿a qué altura h debe colocarse la botella para que la presión del líquido sea de *a*) 55 mm-Hg, *b*) 650 mm-H_2O? *c*) Si la presión de la sangre es de 78 mm-Hg arriba de la presión atmosférica, ¿qué tan alto debe colocarse la botella para que el fluido apenas logre entrar a la vena?

80. Un vaso de precipitados con agua se encuentra sobre una báscula electrónica que indica 998.0 g. Una bola sólida de cobre de 26 cm de diámetro se amarra a una cuerda sumergida en el agua, sin que toque el fondo. ¿Cuál es la tensión en la cuerda? ¿Cuál es la nueva lectura de la báscula?

81. ¿Cuál es la diferencia aproximada en la presión del aire entre la planta baja y el piso superior del Empire State en la ciudad de Nueva York? El edificio mide 380 m de alto y está ubicado al nivel del mar. Expréselo como una fracción de la presión atmosférica al nivel del mar.

82. Un elevador hidráulico se usa para levantar un automóvil de 920 kg hasta una altura de 42 cm del suelo. El diámetro del pistón de salida es de 18 cm y la fuerza de entrada es de 350 N. *a*) ¿Cuál es el área del pistón de entrada? *b*) ¿Cuál es el trabajo efectuado al levantar el automóvil 42 cm? *c*) Si el recorrido de cada carrera del pistón de entrada es de 13 cm, ¿qué distancia hacia arriba se mueve el automóvil en cada carrera? *d*) ¿Cuántas carreras se requieren para elevar el automóvil 42 cm? *e*) Demuestre que la energía se conserva.

83. Cuando usted maneja para subir o descender por las montañas sus oídos "estallan", lo que significa que la presión detrás del tímpano se está igualando a la presión exterior. Si esto no sucediera, ¿cuál sería la fuerza aproximada sobre un tímpano cuya área es de 0.20 cm^2 si tuviera lugar un cambio de altura de 950 m?

84. Las jirafas son una maravilla de ingeniería cardiovascular. Calcule la diferencia de presión (en atmósferas) que tienen que ajustar los vasos capilares en la cabeza de la jirafa cuando ésta baja su cabeza desde una posición totalmente erguida hasta el nivel del suelo para beber agua. Considere que la altura promedio de una jirafa es de 6 m.

85. Suponga que una persona puede reducir la presión en sus pulmones a –75 mm-Hg de presión manométrica. ¿A qué altura podrá succionar el agua con una pajilla?

86. Las líneas aéreas tienen permitido mantener un mínimo de presión de aire dentro de la cabina de pasajeros equivalente a la que se registra a una altura de 8000 ft (2400 m) para evitar que se presenten efectos adversos en los viajeros por falta de oxígeno. Estime esta presión mínima (en atmósferas).

87. Un modelo simple (figura 13-57) considera un continente como un bloque (densidad ≈ 2800 kg/m^3) que flota en el manto rocoso circundante (densidad ≈ 3300 kg/m^3). Suponiendo que el continente tiene 35 km de espesor (espesor promedio de la costra terrestre), estime la altura del continente por arriba de la roca que lo rodea.

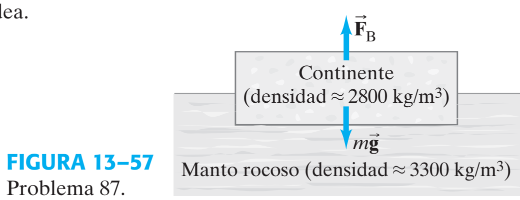


FIGURA 13–57 Problema 87.

88. Un barco que transporta agua dulce a una isla desértica en el mar Caribe, tiene un área transversal de 2240 m^2 en la línea de agua. Cuando se descarga, el barco se levanta 8.50 m en el agua. ¿Cuántos metros cúbicos de agua se descargaron?

89. Durante el ascenso, y especialmente durante el descenso, los cambios en el volumen de aire atrapado en el oído medio pueden provocar malestar hasta que la presión del oído medio y la presión exterior se igualan. *a*) Si un descenso rápido a una tasa de 7.0 m/s o mayor comúnmente provoca malestar en los oídos, ¿cuál es la tasa máxima de disminución en la presión atmosférica (esto es, dP/dt) tolerable para la mayoría de las personas? *b*) En un edificio de 350 m de alto, ¿cuál será el menor tiempo posible de descenso para un elevador que baje del último piso a la planta baja, suponiendo que el elevador está diseñado adecuadamente de acuerdo con la fisiología humana.

90. Una balsa se forma con 12 troncos unidos entre sí. Cada uno tiene 45 cm de diámetro y una longitud de 6.1 m. ¿Cuánta gente puede sostener la balsa antes de que empiecen a mojarse sus pies, suponiendo que la persona promedio tiene una masa de 68 kg? *No* desprecie el peso de los troncos. Suponga que la gravedad específica de la madera es de 0.60.

91. Estime la masa total de la atmósfera de la Tierra usando el valor conocido de la presión atmosférica al nivel del mar.

92. Durante cada latido del corazón, se bombean aproximadamente 70 cm^3 de sangre desde el corazón a una presión promedio de 105 mm-Hg. Calcule la potencia de salida del corazón, en watts, suponiendo que se efectúan 70 latidos por minuto.

93. Cuatro aspersores para regar el césped se alimentan mediante un tubo de 1.9 cm de diámetro. El agua sale de los aspersores con un ángulo de 35° con respecto a la horizontal y cubre un radio de 7.0 m. *a*) ¿Cuál es la velocidad del agua al salir del aspersor? (Suponga que no hay resistencia del aire.) *b*) Si el diámetro de salida de cada aspersor es de 3.0 mm, ¿cuántos litros de agua entregan los cuatro aspersores por segundo? *c*) ¿Qué tan rápido fluye el agua dentro del tubo de 1.9 cm de diámetro?

94. Una cubeta de agua se acelera hacia arriba a 1.8 g. ¿Cuál es la fuerza de flotación sobre una roca de granito de 3.0 kg (GE = 2.7) sumergida en el agua? ¿Flotará la roca? ¿Por qué?

95. La corriente de agua de un grifo disminuye en diámetro conforme desciende (figura 13-58). Obtenga una ecuación para el diámetro de la corriente como función de la distancia y debajo del grifo, dado que el agua tiene rapidez v_0 al salir de éste, cuyo diámetro es d.

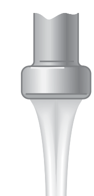


FIGURA 13–58 Problema 95. Agua que sale de un grifo.

96. Se necesita extraer con sifón el agua de una tarja atascada. La tarja tiene una área de 0.38 m^2 y está llena hasta una altura de 4.0 cm. El tubo del sifón se eleva 45 cm por arriba del fondo de la tarja y luego desciende 85 cm a una cubeta, como se ilustra en la figura 13-59. El tubo del sifón tiene un diámetro de 2.0 cm. *a*) Suponiendo que el nivel del agua en la tarja tiene velocidad casi de cero, calcule su velocidad cuando entra a la cubeta. *b*) Estime qué tiempo se requiere para vaciar la tarja.

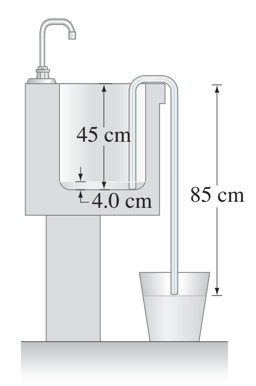


FIGURA 13–59 Problema 96.

97. Un avión tiene una masa de 1.7×10^6 kg; el aire fluye por la superficie inferior de las alas a 95 m/s. Si las alas tienen una área superficial de 1200 m^2, ¿qué tan rápido debe fluir el aire sobre la superficie superior del ala para que el avión permanezca en el aire?

98. Una fuente de agua potable lanza agua a unos 14 cm hacia arriba en el aire desde una tobera de 0.60 cm de diámetro. La bomba en la base de la fuente (1.1 m debajo de la tobera) empuja el agua hacia un tubo de 1.2 cm de diámetro que se conecta con la tobera. ¿Qué presión manométrica debe proporcionar la bomba? Desprecie la viscosidad, así que su respuesta será inferior al valor real.

99. Un huracán con vientos de 200 km/h sopla sobre la ventana de la fachada de una tienda. La ventana mide 2.0×3.0 m. Estime la fuerza sobre la ventana que se debe a la diferencia en la presión de aire entre el interior y el exterior. Suponga que la tienda está sellada al aire, de forma que la presión en el interior se mantiene en 1.0 atm. (Por eso no se debe sellar un edificio antes de un huracán).

100. La sangre de un animal se coloca en una botella a una altura de 1.30 m por encima de una aguja de 3.8 cm de largo y 0.40 mm de diámetro interno; la sangre fluye desde la aguja a una tasa de 4.1 cm^3/min. ¿Cuál es la viscosidad de la sangre?

101. Tres fuerzas actúan considerablemente sobre un globo lleno de helio que flota libremente: la fuerza de gravedad, la resistencia del aire (o fuerza de arrastre) y la fuerza de flotación. Considere un globo esférico lleno de helio de radio r = 15 cm que se eleva por el aire a 0°C; la masa del globo (desinflado) es m = 2.8 g. Para todas las rapideces v, excepto para las más bajas, el flujo de aire que pasa por un globo en ascenso es turbulento, y la fuerza de arrastre F_D está dada por la relación

$$F_D = \tfrac{1}{2} C_D \rho_{\text{aire}} \pi r^2 v^2$$

donde la constante C_D = 0.47 es el "coeficiente de arrastre" para una esfera lisa de radio r. Si el globo se libera desde el reposo, acelerará muy rápidamente (en unas cuantas décimas de segundo) hasta llegar a su velocidad terminal v_T, donde la fuerza de flotación se anula con la fuerza de arrastre y el peso total del globo. Suponiendo que la aceleración del globo se efectúa en un tiempo y una distancia insignificantes, ¿cuánto tardará el globo liberado en llegar a una distancia h = 12 m?

* **102.** Si la acumulación de colesterol reduce el diámetro de una arteria en un 15%, ¿en qué porcentaje se reducirá la tasa de flujo de la sangre suponiendo la misma diferencia de presión?

103. Un modelo de dos componentes utilizado para determinar el porcentaje de grasa en un cuerpo humano supone que una fracción $f(<1)$ de la masa total m del cuerpo está compuesta de grasa con una densidad de 0.90 g/cm^3, y que la masa restante del cuerpo está compuesta por tejido libre de grasa con una densidad de 1.10 g/cm^3. Si la gravedad específica de la densidad del cuerpo entero es X, demuestre que el porcentaje de grasa corporal (= $f \times 100$) está dado por

$$\text{Porcentaje de grasa corporal} = \frac{495}{X} - 450.$$

* Problemas numéricos/por computadora

* **104.** (III) La presión del aire disminuye con la altitud. Los siguientes datos corresponden a la presión del aire a diferentes altitudes.

Altitud (m)	Presión (kPa)
0	101.3
1000	89.88
2000	79.50
3000	70.12
4000	61.66
5000	54.05
6000	47.22
7000	41.11
8000	35.65
9000	30.80
10,000	26.50

a) Determine la ecuación cuadrática de mejor ajuste para demostrar cómo cambia la presión del aire con la altitud. *b*) Determine la ecuación exponencial de mejor ajuste que describa el cambio en la presión del aire con la altitud. c) Utilice cada ajuste para determinar la presión del aire en la montaña K2 a 8611 m e indique la diferencia porcentual.

Respuestas a los ejercicios

A: *d*).

B: Debería ser igual. La presión depende de la profundidad, no de la longitud.

C: Menores.

D: *a*).

E: *e*).

F: Se incrementa.

G: *b*).



Un objeto unido a un resorte en espiral puede mostrar movimiento oscilatorio. Muchos tipos de movimientos oscilatorios son senoidales, o casi senoidales, y se les llama movimiento armónico simple. Los sistemas reales tienen generalmente por lo menos algo de fricción, lo cual ocasiona que el movimiento sea amortiguado. El resorte automotriz que se muestra aquí tiene un amortiguador que fue diseñado para reducir la vibración y lograr un recorrido suave. Cuando se ejerce una fuerza externa senoidal sobre un sistema capaz de oscilar, se presenta la resonancia si la frecuencia de la fuerza impulsora es igual o cercana a la frecuencia natural de vibración del sistema.

CAPÍTULO 14

Oscilaciones

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!
Un péndulo simple consiste en una masa m (la "lenteja") que cuelga del extremo de una cuerda delgada de longitud ℓ y masa despreciable. Se jala hacia un lado la lenteja, de manera que la cuerda forme un ángulo de 5.0° con la vertical; y cuando se suelta, oscila de un lado a otro con una frecuencia f. En cambio, si el péndulo se elevara a un ángulo de 10.0°, su frecuencia sería

a) dos veces mayor.
b) la mitad.
c) la misma o casi la misma.
d) casi dos veces mayor.
e) un poco más de la mitad.

CONTENIDO

Muchos objetos vibran u oscilan, por ejemplo, un objeto en el extremo de un resorte, un diapasón, la rueda balancín de un reloj antiguo, un péndulo, una regla de plástico sostenida firmemente sobre el borde de una mesa y golpeada suavemente, las cuerdas de una guitarra o un piano. Las arañas detectan a sus presas gracias a las vibraciones en sus redes; los automóviles oscilan hacia arriba y hacia abajo cuando golpean un tope; los edificios y los puentes vibran cuando pasan camiones pesados o el viento es intenso. De hecho, debido a que la mayoría de los sólidos son elásticos (véase el capítulo 12), vibran (por lo menos brevemente) cuando reciben un impulso. En los aparatos de radio y televisión ocurren oscilaciones eléctricas. Al nivel atómico, los átomos vibran dentro de una molécula, y los átomos de un sólido vibran con respecto a sus posiciones relativamente fijas. Debido a que es tan común en la vida diaria y ocurre en tantas áreas de la física, el movimiento oscilatorio es de gran importancia. Las vibraciones de sistemas mecánicos se describen completamente con base en la mecánica newtoniana.

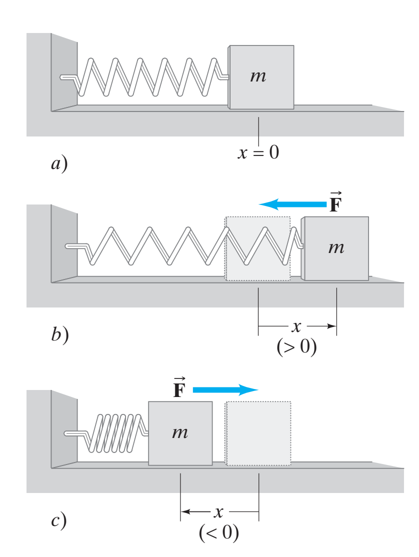


FIGURA 14–1 Masa que oscila en el extremo de un resorte uniforme.

14–1 Oscilaciones de un resorte

Cuando un objeto **vibra** u **oscila**, yendo y viniendo, sobre la misma trayectoria, cada oscilación toma la misma cantidad de tiempo y el movimiento es **periódico**. La forma más sencilla de movimiento periódico se representa mediante un objeto que oscila en el extremo de un resorte uniforme helicoidal. Como muchos otros tipos de movimiento vibratorio se parecen mucho a este sistema, estudiaremos éste en detalle. Suponemos que la masa del resorte se puede despreciar y que el resorte está montado horizontalmente (figura 14-1a), de manera que el objeto de masa m se desliza sin fricción sobre la superficie horizontal. Todo resorte tiene una longitud natural a la cual la fuerza neta sobre la masa m es cero. La posición de la masa en este punto se llama **posición de equilibrio**. Si la masa se mueve ya sea hacia la izquierda, comprimiendo al resorte, o bien hacia la derecha, estirándolo, el resorte ejerce una fuerza sobre la masa que actúa en el sentido de regresar a la masa a la posición de equilibrio; por consiguiente, la fuerza se llama *fuerza restauradora*. Consideramos la situación común en la que suponemos que la fuerza restauradora F es directamente proporcional al desplazamiento x que el resorte se ha estirado (figura 14-1b) o comprimido (figura 14-1c) desde la posición de equilibrio:

$$F = -kx. \qquad \text{[fuerza ejercida por el resorte]} \qquad \textbf{(14–1)}$$

Note que la posición de equilibrio se eligió en $x = 0$ y que el signo menos en la ecuación 14-1 indica que la fuerza restauradora tiene siempre sentido opuesto al desplazamiento x. Por ejemplo, si elegimos el sentido positivo hacia la derecha en la figura 14-1, x es positiva cuando el resorte está estirado (figura 14-1b); sin embargo, el sentido de la fuerza restauradora es hacia la izquierda (sentido negativo). Si el resorte está comprimido, x es negativa (hacia la izquierda); pero la fuerza F actúa hacia la derecha (figura 14-1c).

La ecuación 14-1, que a menudo se denomina ley de Hooke (secciones 7-3, 8-2 y 12-4), es exacta en tanto que el resorte no se haya comprimido hasta el punto en que las espiras se toquen, o estirado más allá de la región elástica (véase la figura 12-15). La ley de Hooke funciona no sólo con resortes sino también con otros sólidos oscilantes; por lo tanto, tiene una amplia gama de aplicaciones, aun cuando sea válida sólo durante cierto intervalo de valores de F y x.

La constante de proporcionalidad k en la ecuación 14-1 se llama *constante del resorte* para ese resorte específico, o *constante de rigidez del resorte*. Para estirar el resorte una distancia x, se tiene que ejercer una fuerza (externa) sobre el extremo libre del resorte con una magnitud por lo menos igual a

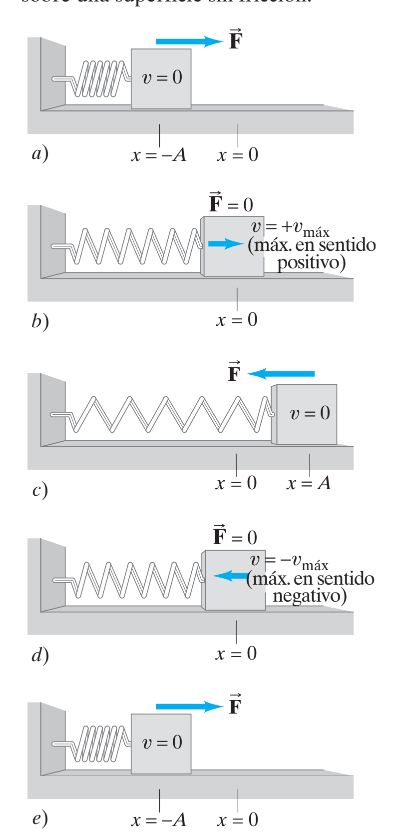
$$F_{\text{ext}} = +kx. \qquad \text{[fuerza sobre un resorte]}$$

Cuanto mayor sea el valor de k, mayor será la fuerza necesaria para estirar el resorte una distancia dada. Es decir, cuanto más rígido sea el resorte, mayor será su constante k.

Note que la fuerza F en la ecuación 14-1 *no* es una constante, sino que varía con la posición. Por lo tanto, la aceleración de la masa m no es constante, por lo que *no podemos* usar las ecuaciones para aceleración constante desarrolladas en el capítulo 2.

Examinemos qué sucede cuando nuestro resorte uniforme está inicialmente comprimido una distancia $x = -A$, como se muestra en la figura 14-2a, y luego se libera sobre una superficie sin fricción. El resorte ejerce una fuerza sobre la masa que la empuja hacia la posición de equilibrio. No obstante, como la masa tiene inercia, pasa por la posición de equilibrio con rapidez considerable. De hecho, cuando la masa alcanza la posición de equilibrio, la fuerza sobre ella disminuye a cero; pero su rapidez en este punto es un máximo, $v_{\text{máx}}$ (figura 14-2b). Conforme se mueve más hacia la derecha, la fuerza sobre ella actúa desacelerándola, y se detiene momentáneamente en $x = A$ (figura 14-2c). La masa empieza entonces a moverse de regreso, en sentido opuesto, acelerando hasta que pasa por el punto de equilibrio (figura 14-2d), y luego desacelera hasta que alcanza una rapidez cero en el punto de partida original, $x = -A$ (figura 14-2e). Se repite entonces el movimiento: de ida y vuelta en forma simétrica entre $x = A$ y $x = -A$.

FIGURA 14–2 Fuerza sobre, y velocidad de una masa en diferentes posiciones de su ciclo de oscilación sobre una superficie sin fricción.



EJERCICIO A Un objeto oscila de ida y vuelta. ¿Cuáles de siguientes afirmaciones son verdaderas en algún momento durante el curso del movimiento? *a*) El objeto puede tener velocidad cero y, simultáneamente, aceleración distinta de cero. *b*) El objeto puede tener velocidad cero, y simultáneamente, aceleración cero. *c*) El objeto puede tener aceleración cero y, simultáneamente, velocidad distinta de cero. *d*) El objeto puede tener, simultáneamente, velocidad y aceleración distintas de cero.

EJERCICIO B Una masa oscila sobre una superficie sin fricción en el extremo de un resorte horizontal. Donde, si acaso, la aceleración de la masa es cero (véase la figura 14-2)? *a*) Tanto en $x = -A$; *b*) como en $x = 0$; *c*) en $x = +A$; *d*) tanto en $x = -A$ y $x = +A$; *e*) en ningún lado.

Para estudiar el movimiento oscilatorio, necesitamos definir algunos términos. La distancia x de la masa al punto de equilibrio en cualquier momento se llama **desplazamiento**. El desplazamiento máximo, o distancia más grande desde el punto de equilibrio, se llama **amplitud**, A. **Un ciclo** se refiere al movimiento completo de ida y vuelta desde algún punto inicial y de regreso a ese mismo punto, digamos, de $x = -A$ a $x = A$, y de regreso a $x = -A$. El **periodo** T se define como el tiempo requerido para efectuar un ciclo completo. Finalmente, la **frecuencia** f es el número de ciclos completos por segundo. La frecuencia se especifica generalmente en hertz (Hz), donde 1 Hz = 1 ciclo por segundo (s^{-1}). A partir de tales definiciones, es fácil ver que la frecuencia y el periodo están inversamente relacionados, como vimos en las ecuaciones 5-2 y 10-8:

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{y} \quad T = \frac{1}{f}; \qquad \textbf{(14–2)}$$

por ejemplo, si la frecuencia es de 5 ciclos por segundo, entonces cada ciclo dura $\frac{1}{5}$ de s.

La oscilación de un resorte que cuelga verticalmente es esencialmente la misma que la de un resorte horizontal. Debido a la fuerza de gravedad, la longitud de un resorte vertical con una masa m en el extremo será mayor en el punto de equilibrio, que cuando el mismo resorte está horizontal, como se muestra en la figura 14-3. El resorte está en equilibrio cuando $\Sigma F = 0 = mg - kx_0$, por lo que el resorte se alarga una cantidad adicional $x_0 = mg/k$ para estar en equilibrio. Si x se mide desde esta nueva posición de equilibrio, la ecuación 14-1 se puede usar directamente con el mismo valor de k.



Para un resorte vertical mida el desplazamiento (x o y) desde la posición vertical de equilibrio

EJERCICIO C Si una masa oscilante tiene una frecuencia de 1.25 Hz, efectúa 100 oscilaciones en *a*) 12.5 s, *b*) 125 s, *c*) 80 s, *d*) 8.0 s.

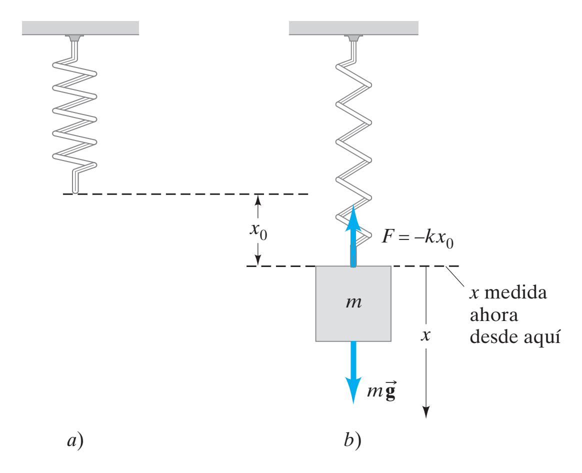


FIGURA 14–3
a) Resorte libre, colgado verticalmente.
b) Masa m unida al resorte en una nueva posición de equilibrio, que se presenta cuando $\Sigma F = 0 = mg - kx_0$.

EJEMPLO 14–1 **Resortes automotrices.** Cuando una familia de cuatro personas con una masa total de 200 kg se sube a su automóvil de 1200 kg, los resortes del vehículo se comprimen 3.0 cm. *a*) ¿Cuál es la constante de resorte de los resortes del auto (figura 14-4), suponiendo que éstos actúan como un solo resorte? *b*) ¿Cuánto más bajo estará el automóvil si se carga con 300 kg, en vez de 200 kg?

PLANTEAMIENTO Utilizamos la ley de Hooke: el peso de la gente mg provoca un desplazamiento de 3.0 cm.

SOLUCIÓN *a*) La fuerza agregada de (200 kg)(9.8 m/s^2) = 1960 N ocasiona que los resortes se compriman 3.0×10^{-2} m. Por lo tanto, según la ecuación 14-1, la constante del resorte es

$$k = \frac{F}{x} = \frac{1960\text{ N}}{3.0 \times 10^{-2}\text{ m}} = 6.5 \times 10^4\text{ N/m}.$$

b) Si el automóvil está cargado con 300 kg, la ley de Hooke proporciona

$$x = \frac{F}{k} = \frac{(300\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)}{(6.5 \times 10^4\text{ N/m})} = 4.5 \times 10^{-2}\text{ m},$$

o 4.5 cm.

NOTA En *b*) podríamos haber obtenido x sin despejar k: como x es proporcional a F, si 200 kg comprimen el resorte 3.0 cm, entonces 1.5 veces esta fuerza, comprimirá al resorte 1.5 veces más, es decir, 4.5 cm.

FIGURA 14–4 Fotografía de un resorte automotriz. (Se observa también el amortiguador; véase la sección 14-7).



14–2 Movimiento armónico simple

Para cualquier sistema oscilatorio en el que la fuerza restauradora neta es directamente proporcional al negativo del desplazamiento (como en la ecuación 14-1, $F = -kx$) se dice que experimenta un **movimiento armónico simple** (MAS). Un sistema así a menudo se llama **oscilador armónico simple** (OAS). Vimos en el capítulo 12 (sección 12-4) que la mayoría de los materiales sólidos se estiran o se comprimen, de acuerdo con la ecuación 14-1, siempre que el desplazamiento no sea muy grande. Debido a esto, muchas oscilaciones naturales son armónicas simples o casi no lo son.

EJERCICIO D ¿Cuál de los siguientes valores representa un oscilador armónico simple: *a*) $F = -0.5x^2$, (*b*) $F = -2.3y$, (*c*) $F = 8.6x$, (*d*) $F = -4\theta$?

Determinemos ahora la posición x como función del tiempo para una masa unida al extremo de un resorte simple con constante k. Usamos entonces la segunda ley de Newton, $F_{net} = ma$. Como la aceleración $a = d^2x/dt^2$, tenemos

$$ma = \Sigma F$$
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

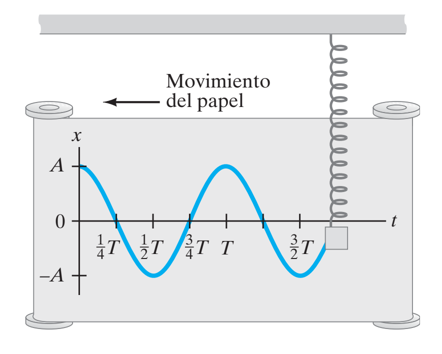


FIGURA 14–5 Naturaleza senoidal del MAS en función del tiempo. En este caso $x = A\cos(2\pi t/T)$.

donde m es la masa[†] que está oscilando. Reordenando:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0, \qquad \text{[SHM]} \quad \textbf{(14–3)}$$

que se conoce como la **ecuación de movimiento** de un oscilador armónico simple. Matemáticamente se trata de una *ecuación diferencial*, ya que incluye derivadas. Queremos determinar qué función del tiempo, $x(t)$, satisface esta ecuación. Podríamos imaginar la forma de la solución notando que si una pluma se uniera a una masa vibratoria (figura 14-5) y una hoja de papel se moviera a una tasa constante debajo de ella, la pluma trazaría la curva mostrada. La forma de esta curva parecería **senoidal** (como una curva seno o coseno) en función del tiempo y su altura es la amplitud A. Consideremos entonces que la solución general de la ecuación 14-3 se escribe como

$$x = A\cos(\omega t + \phi), \qquad \textbf{(14–4)}$$

donde incluimos la constante ϕ en el argumento para hacerlo general.[‡] Pongamos ahora esta solución intuida en la ecuación 14-3 y veamos si realmente funciona. Necesitamos diferenciar dos veces $x = x(t)$: :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[A\cos(\omega t + \phi)] = -\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi)$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi).$$

Ponemos ahora la última ecuación en la ecuación 14-3, junto con la ecuación 14-4 para x:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$
$$-\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) + \frac{k}{m}A\cos(\omega t + \phi) = 0$$

o bien,

$$\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)A\cos(\omega t + \phi) = 0.$$

[†]En el caso de una masa m' sobre el extremo de un resorte, el resorte mismo también oscila y por lo menos debe incluirse una parte de su masa. Es posible demostrar (véase los problemas) que aproximadamente un tercio de la masa del resorte, m_s, debe incluirse, por lo que $m = m' + \frac{1}{3}m_s$ en nuestra ecuación. A menudo, m_s es suficientemente pequeña y puede ignorarse.

[‡]Otra manera posible de escribir la solución es la combinación $x = a\cos\omega t + b\,\mathrm{sen}\,\omega t$, donde a y b son constantes. Esto es equivalente a la ecuación 14-4 como se observa usando la identidad trigonométrica $\cos(A \pm B) = \cos A\cos B 7\mathrm{sen}\,A\,\mathrm{sen}\,B$.

Nuestra solución, ecuación 14-4, satisface ciertamente la ecuación de movimiento (ecuación 14-3) para cualquier tiempo t; pero sólo si $(k/m - \omega^2) = 0$; por consiguiente,

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \qquad \textbf{(14–5)}$$

La ecuación 14-4 es la solución general a la ecuación 14-3 y contiene dos constantes arbitrarias A y ϕ, lo cual deberíamos esperar porque la segunda derivada en la ecuación 14-3 implica que se requieren dos integraciones, cada una dando una constante. Éstas son "arbitrarias" sólo en sentido del cálculo, ya que pueden tener cualquier valor y aún así satisfacer la ecuación diferencial (14-3). Sin embargo, en situaciones físicas reales, A y ϕ están determinadas por las **condiciones iniciales**. Por ejemplo, suponga que la masa parte de su desplazamiento máximo y se libera del reposo. Esto es, de hecho, lo que se muestra en la figura 14-5, y para este caso $x = A \cos \omega t$. Confirmemos esto: se nos da $v = 0$ en $t = 0$, donde

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[A\cos(\omega t + \phi)] = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = 0. \qquad [\text{en } t = 0]$$

Para que v sea cero en $t = 0$, tenemos $\operatorname{sen}(\omega t + \phi) = \operatorname{sen}(0 + \phi)$ es cero, si $\phi = 0$ (ϕ podría ser también π, 2π, etcétera), y cuando $\phi = 0$, entonces

$$x = A\cos\omega t,$$

como esperábamos. Vemos inmediatamente que A es la amplitud del movimiento, y que inicialmente se determina por cuánto se jala la masa m desde su posición de equilibrio, antes de soltarla.

Considere otro caso interesante: en $t = 0$, la masa m está en $x = 0$ y es golpeada, con lo que se le da una velocidad inicial hacia valores crecientes de x. Entonces, en $t = 0$, $x = 0$, por lo que podemos escribir $x = A \cos(\omega t + \phi) = A \cos \phi = 0$, que puede suceder sólo si $\phi = \pm \pi/2$ (o $\pm 90°$). Si $\phi = +\pi/2$ o $-\pi/2$ depende de $v = dx/dt = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = -\omega A \operatorname{sen} \phi$ en $t = 0$, que se nos dan como positivas ($v > 0$ en $t = 0$); por lo tanto, $\phi = -\pi/2$ ya que sen $-90°) = -1$. Nuestra solución para este caso es

$$x = A\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= A\operatorname{sen}\omega t,$$

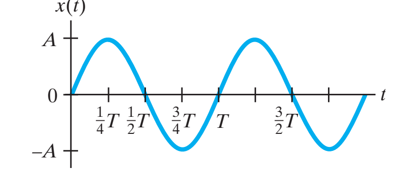
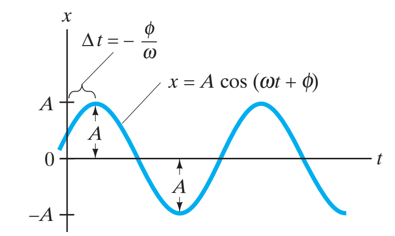


FIGURA 14–6 Caso especial de un MAS, donde la masa m parte en $t = 0$, en la posición de equilibrio $x = 0$, y tiene velocidad inicial hacia valores positivos de x ($v > 0$ en $t = 0$).

donde usamos $\cos(\theta - \pi/2) = \operatorname{sen}\theta$. La solución en este caso es una onda senoidal pura, figura 14-6, donde A es de nuevo la amplitud.

Muchas otras situaciones son posibles, como la de la figura 14-7. La constante ϕ se llama **ángulo de fase**, y nos indica cuánto tiempo después de (o antes de) $t = 0$, se alcanza el pico en $x = A$. Note que el valor de ϕ no afecta la forma de la curva $x(t)$, sino que sólo afecta el desplazamiento en algún tiempo arbitrario, $t = 0$. El movimiento armónico simple es entonces siempre *senoidal*. De hecho, el movimiento armónico simple se *define* como un movimiento que es puramente senoidal.

FIGURA 14–7 Gráfica de $x = A \cos(\omega t + \phi)$ cuando $\phi < 0$.



Como nuestra masa oscilante repite su movimiento después de un tiempo igual a su periodo T, ella debe estar en la misma posición y con movimiento en el mismo sentido en $t = T$ que en $t = 0$. Y como una función seno o coseno se repite después de cada 2π radianes, por la ecuación 14-4, debemos tener entonces

$$\omega T = 2\pi.$$

Por consiguiente,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f,$$

donde f es la frecuencia del movimiento. Estrictamente hablando, a ω la llamamos **frecuencia angular** (las unidades son rad/s) para distinguirla de la frecuencia f (las unidades son s^{-1} = Hz); en ocasiones se omite la palabra "angular", por lo que necesita especificarse el símbolo ω o f. Como $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$, escribimos la ecuación 14-4 como

$$x = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi\right) \qquad \textbf{(14–6a)}$$

o bien,

$$x = A\cos(2\pi f t + \phi). \qquad \textbf{(14–6b)}$$

Como $\omega = 2\pi f = \sqrt{k/m}$ (ecuación 14-5), entonces,

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \textbf{(14–7a)}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad \textbf{(14–7b)}$$

Note que *la frecuencia y el periodo* no *dependen de la amplitud*. Cambiar la amplitud de un oscilador armónico simple no afecta su frecuencia. La ecuación 14-7a nos indica que cuanto mayor sea la masa, menor será la frecuencia; y que cuanto más rígido sea el resorte, mayor será la frecuencia. Esto tiene sentido, puesto que una masa grande implica más inercia y, por lo tanto, una respuesta (o aceleración) más lenta; una k grande implica una mayor fuerza y por ende una respuesta más rápida. La frecuencia f (ecuación 14-7a) a la cual oscila naturalmente un OAS se conoce como su **frecuencia natural** (para distinguirla de una frecuencia a la que podría forzarse a oscilar por una fuerza externa, como veremos en la sección 14-8).

El oscilador armónico simple es importante en la física, porque siempre que tenemos una fuerza restauradora neta proporcional al desplazamiento ($F = -kx$), al menos es una buena aproximación para una variedad de sistemas, por lo que tenemos un movimiento armónico simple, es decir, senoidal.

FÍSICA APLICADA
Resorte automotriz

EJEMPLO 14–2 **De nuevo, resorte automotriz.** Determine el periodo y la frecuencia del automóvil en el ejemplo 14-1a después de golpear un tope (protuberancia en el camino). Suponga que los amortiguadores están en mal estado, por lo que el auto realmente oscila hacia arriba y hacia abajo.

PLANTEAMIENTO Consideramos $m = 1400$ kg y $k = 6.5 \times 10^4$ N/m del ejemplo 14-1a en las ecuaciones 14-7.

SOLUCIÓN De la ecuación 14-7b,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1400\ \text{kg}}{6.5 \times 10^4\ \text{N/m}}} = 0.92\ \text{s},$$

o ligeramente menos que un segundo. La frecuencia $f = 1/T = 1.09$ Hz.

EJERCICIO E En cuanto debería cambiar la masa del extremo del resorte para reducir a la mitad la frecuencia de sus oscilaciones? *a*) no debería cambiar; *b*) duplicarse; *c*) cuadruplicarse; *d*) reducirse a la mitad; *e*) reducirse a la cuarta parte.

EJERCICIO F La posición de un OAS está dada por $x = (0.80\ \text{m})\cos(3.14t - 0.25)$. La frecuencia es *a*) 3.14 Hz, *b*) 1.0 Hz, *c*) 0.50 Hz, *d*) 9.88 Hz, *e*) 19.8 Hz.

Continuemos nuestro análisis de un oscilador armónico simple. La velocidad y la aceleración de la masa oscilante se pueden obtener derivando de la ecuación 14-4, $x = A\cos(\omega t + \phi)$:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\,\text{sen}(\omega t + \phi) \quad \textbf{(14–8a)}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi). \quad \textbf{(14–8b)}$$

La velocidad y la aceleración de un OAS también varían senoidalmente. En la figura 14-8 graficamos el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de un OAS en función del tiempo, para el caso en que $\phi = 0$. Como se observa, la rapidez alcanza su máximo

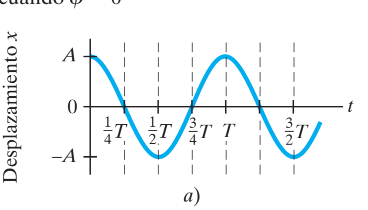
$$v_{\text{máx}} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}\,A \quad \textbf{(14–9a)}$$

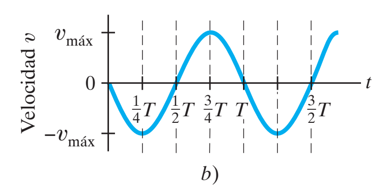
cuando el objeto oscilante pasa por su punto de equilibrio, $x = 0$. Y la rapidez es cero en puntos de desplazamiento máximo, $x = \pm A$. Esto concuerda con nuestro análisis de la figura 14-2. Asimismo, la aceleración tiene su valor máximo

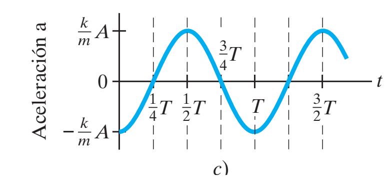
$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = \frac{k}{m}\,A \quad \textbf{(14–9b)}$$

que ocurre donde $x = \pm A$; y a es cero en $x = 0$, como esperábamos, ya que $ma = F = -kx$.

FIGURA 14–8 Desplazamiento, x, velocidad, dx/dt, y aceleración d^2x/dt^2, de un oscilador armónico simple cuando $\phi = 0$







Para el caso general cuando $\phi \neq 0$, podemos relacionar las constantes A y ϕ con los valores iniciales de x, v y a haciendo $t = 0$ en las ecuaciones 14-4, 14-8 y 14-9:

$$x_0 = x(0) = A\cos\phi$$

$$v_0 = v(0) = -\omega A \operatorname{sen}\phi = -v_{\text{máx}} \operatorname{sen}\phi$$

$$a_0 = a(0) = -\omega^2 A\cos\phi = -a_{\text{máx}}\cos\phi.$$

EJEMPLO 14–3 **ESTIMACIÓN** **Un piso que vibra.** En una fábrica un motor grande provoca que el piso vibre con una frecuencia de 10 Hz. La amplitud del movimiento del piso cerca del motor es de aproximadamente 3.0 mm. Estime la aceleración máxima del piso cerca del motor.

PLANTEAMIENTO Suponiendo que el movimiento del piso es aproximadamente MAS, podemos estimar para la aceleración máxima usando la ecuación 14-9b.

SOLUCIÓN Dado $\omega = 2\pi f = (2\pi)(10\,\text{s}^{-1}) = 62.8\,\text{rad/s}$, entonces la ecuación 14-9b proporciona

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = (62.8\,\text{rad/s})^2(0.0030\,\text{m}) = 12\,\text{m/s}^2.$$

NOTA La aceleración máxima es un poco mayor que g, de manera que cuando el piso acelera hacia abajo, los objetos colocados en el piso realmente pierden contacto en un instante, lo que causará ruido y desgaste importante.

FÍSICA APLICADA
Vibraciones no deseadas en el piso

EJEMPLO 14–4 **Altavoz.** El cono de un altavoz (figura 14-9) vibra con MAS a una frecuencia de 262 Hz ("do medio"). La amplitud en el centro del cono es $A = 1.5 \times 10^{-4}$ m, y en $t = 0$, $x = A$. *a*) ¿Cuál es la ecuación que describe el movimiento en el centro del cono? *b*) ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración como función del tiempo? *c*) ¿Cuál es la posición del cono en $t = 1.00$ ms ($= 1.00 \times 10^{-3}$ s)?



FIGURA 14–9 Ejemplo 14-4. Un cono de un altavoz.

PLANTEAMIENTO El movimiento comienza ($t = 0$) con el cono en su máximo desplazamiento ($x = A$ en $t = 0$), por lo que usamos la función coseno, $x = A\cos\omega t$, con $\phi = 0$.

SOLUCIÓN *a*) La amplitud $A = 1.5 \times 10^{-4}$ m y

$$\omega = 2\pi f = (6.28\,\text{rad})(262\,\text{s}^{-1}) = 1650\,\text{rad/s}.$$

El movimiento se describe como

$$x = A\cos\omega t = (1.5 \times 10^{-4}\,\text{m})\cos(1650t),$$

donde t está en segundos.

b) A partir de la ecuación 14-9a, la velocidad máxima es

$$v_{\text{máx}} = \omega A = (1650\,\text{rad/s})(1.5 \times 10^{-4}\,\text{m}) = 0.25\,\text{m/s},$$

Por lo que

$$v = -(0.25\,\text{m/s})\operatorname{sen}(1650t).$$

De la ecuación 14-9b la aceleración máxima es $a_{\text{máx}} = \omega^2 A = (1650\ \text{rad/s})^2(1.5 \times 10^{-4}\ \text{m}) = 410\ \text{m/s}^2$, que es más de 40 g. Entonces,

$$a = -(410\,\text{m/s}^2)\cos(1650t).$$

c) En $t = 1.00 \times 10^{-3}$ s,

$$x = A\cos\omega t = (1.5 \times 10^{-4}\,\text{m})\cos[(1650\,\text{rad/s})(1.00 \times 10^{-3}\,\text{s})]$$

$$= (1.5 \times 10^{-4}\,\text{m})\cos(1.65\,\text{rad}) = -1.2 \times 10^{-5}\,\text{m}.$$

NOTA Asegúrese de que su calculadora esté en modo RAD, y no en modo DEG, para estos cálculos de $\cos\omega t$.

CUIDADO
Asegúrese siempre de que su calculadora esté en el modo correcto para ángulos

EJEMPLO 14–5 **Cálculos en un resorte.** Un resorte se estira 0.150 m cuando se cuelga suavemente de él una masa de 0.300 kg, como en la figura 14-3b. Luego el resorte se coloca horizontalmente con la masa de 0.300 kg descansando sobre una mesa sin fricción, como en la figura 14-2. La masa se empuja de manera que el resorte se comprime 0.100 m del punto de equilibrio, y se libera a partir del reposo. Determine: *a*) la constante de rigidez del resorte k y la frecuencia angular ω; *b*) la amplitud de la oscilación horizontal A; *c*) la magnitud de la velocidad máxima, $v_{\text{máx}}$; *d*) la magnitud de la aceleración máxima de la masa, $a_{\text{máx}}$; *e*) el periodo T y la frecuencia f; *f*) el desplazamiento x en función del tiempo; y *g*) la velocidad en $t = 0.150$ s.

PLANTEAMIENTO Cuando la masa de 0.300 kg cuelga en reposo del resorte, como en la figura 14-3b, aplicamos la segunda ley de Newton para las fuerzas verticales: $\Sigma F = 0 = mg - kx_0$, de modo que $k = mg/x_0$. Para las oscilaciones horizontales, se da la amplitud, y las otras cantidades se encuentran a partir de las ecuaciones 14-4, 14-5, 14-7 y 14-9. Elegimos x positiva a la derecha.

SOLUCIÓN *a*) El resorte se estira 0.150 m cuando se cuelgan de él una carga de 0.300 kg, por lo que

$$k = \frac{F}{x_0} = \frac{mg}{x_0} = \frac{(0.300\,\text{kg})(9.80\,\text{m/s}^2)}{0.150\,\text{m}} = 19.6\,\text{N/m}.$$

De la ecuación 14-5,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{19.6\,\text{N/m}}{0.300\,\text{kg}}} = 8.08\,\text{s}^{-1}.$$

b) Como el resorte está ahora de forma horizontal (sobre una mesa). Se comprime 0.100 desde el equilibrio y no se le da rapidez inicial, por lo que $A = 0.100$ m.

c) De la ecuación 14-9a, la velocidad máxima es

$$v_{\text{máx}} = \omega A = \left(8.08\,\text{s}^{-1}\right)(0.100\,\text{m}) = 0.808\,\text{m/s}.$$

d) Como $F = ma$, la aceleración máxima ocurre donde la fuerza también es máxima, es decir, cuando $x = \pm A = \pm 0.100$ m. Así su magnitud es

$$a_{\text{máx}} = \frac{F}{m} = \frac{kA}{m} = \frac{(19.6\,\text{N/m})(0.100\,\text{m})}{0.300\,\text{kg}} = 6.53\,\text{m/s}^2.$$

[Este resultado también podría haberse obtenido directamente de la ecuación 14-9b, pero en general es útil regresar a los fundamentos como lo hicimos aquí].

e) Las ecuaciones 14-7b y 14-2 dan

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.300\,\text{kg}}{19.6\,\text{N/m}}} = 0.777\,\text{s}$$

$$f = \frac{1}{T} = 1.29\,\text{Hz}.$$

f) El movimiento empieza en un punto de compresión máxima. Si tomamos x positiva hacia la derecha en la figura 14-2, entonces en $t = 0$, $x = -A = -0.100$ m. Por lo tanto, necesitamos una curva senoidal que tenga su valor máximo negativo en $t = 0$; ésta es justamente un coseno negativo:

$$x = -A\cos\omega t.$$

Para escribir esto en la forma de la ecuación 14-4 (sin signo menos), recuerde que $\cos\theta = -\cos(\theta - \pi)$; entonces, con valores numéricos, y recordando $-\cos\theta = \cos(\pi - \theta) = \cos(\theta - \pi)$, tenemos

$$\begin{aligned} x &= -(0.100\,\text{m})\cos 8.08t \\ &= (0.100\,\text{m})\cos(8.08t - \pi), \end{aligned}$$

donde t está en segundos y x en metros. Note que el ángulo de fase (ecuación 14-4) es $\phi = -\pi$ o $-180°$.

g) La velocidad en cualquier tiempo t es dx/dt (véase también el inciso *c*):

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A\,\text{sen}\,\omega t = (0.808\,\text{m/s})\,\text{sen}\,8.08t.$$

En $t = 0.150$ s, $v = (0.808\text{ m/s})\,\text{sen}\,(1.21\text{ rad}) = 0.756$ m/s, y es hacia la derecha (+).

EJEMPLO 14–6 **El movimiento de un resorte se inicia empujándolo.** Suponga que el resorte del ejemplo 14-5 está comprimido 0.100 m desde su posición de equilibrio ($x_0 = -0.100$ m) y se le da un empujón para generar una velocidad en la dirección $+x$ de $v_0 = 0.400$ m/s. Determine *a*) el ángulo de fase ϕ, *b*) la amplitud A, y *c*) el desplazamiento x en función del tiempo, $x(t)$.

PLANTEAMIENTO Usamos la ecuación 14-8a, en $t = 0$ para escribir $v_0 = -\omega A \operatorname{sen}\phi$, y la ecuación 14-4 para escribir $x_0 = A\cos\phi$. Combinándolas, obtenemos ϕ. Calculamos A utilizando de nuevo la ecuación 14-4 en $t = 0$. Del ejemplo 14-5, $\omega = 8.08\ \mathrm{s}^{-1}$.

SOLUCIÓN *a*) Combinamos las ecuaciones 14-8a y la ecuación 14-4 en $t = 0$, y despejamos la tangente:

$$\tan\phi = \frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi} = \frac{(v_0/-\omega A)}{(x_0/A)} = -\frac{v_0}{\omega x_0} = -\frac{0.400\ \mathrm{m/s}}{(8.08\ \mathrm{s}^{-1})(-0.100\ \mathrm{m})} = 0.495.$$

Una calculadora da el ángulo como 26.3°, pero notamos de esta ecuación que tanto el seno como el coseno son negativos, por lo que nuestro ángulo se halla en el tercer cuadrante. Por lo tanto,

$$\phi = 26.3^\circ + 180^\circ = 206.3^\circ = 3.60\ \mathrm{rad}.$$

b) Usando de nuevo la ecuación 14-4 en $t = 0$, como se estableció en el planteamiento,

$$A = \frac{x_0}{\cos\phi} = \frac{(-0.100\ \mathrm{m})}{\cos(3.60\ \mathrm{rad})} = 0.112\ \mathrm{m}.$$

c) $x = A\cos(\omega t + \phi) = (0.112\ \mathrm{m})\cos(8.08t + 3.60)$.

14–3 Energía en el oscilador armónico simple

Al tratar con fuerzas que no son constantes, como en el movimiento armónico simple, a menudo es conveniente y útil usar un enfoque energético, como vimos en los capítulos 7 y 8.

Para un oscilador armónico simple, como una masa m que oscila sobre el extremo de un resorte sin masa, la fuerza restauradora está dada por

$$F = -kx.$$

La función de energía potencial, como vimos en el capítulo 8, está dada por

$$U = -\int F\,dx = \tfrac{1}{2}kx^2,$$

donde hicimos la constante de integración igual a cero, de modo que $U = 0$ en $x = 0$ (la posición de equilibrio).

La energía mecánica total es la suma de las energías cinética y potencial,

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2,$$

donde v es la velocidad de la masa m cuando está a una distancia x desde la posición de equilibrio. El MAS puede ocurrir sólo cuando no hay fricción, por lo que la energía mecánica total E permanece constante. Como la masa oscila de atrás hacia adelante alternadamente, la energía cambia continuamente de energía potencial a energía cinética, y de nuevo a energía potencial (figura 14-10). En los puntos extremos, $x = A$ y $x = -A$, toda la energía está almacenada en el resorte como energía potencial (y es la misma cuando el resorte está comprimido o estirado a su amplitud máxima). En esos puntos extremos, la masa se detiene momentáneamente cuando cambia el sentido de su movimiento, por lo que $v = 0$ y:

$$E = \tfrac{1}{2}m(0)^2 + \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}kA^2. \qquad \textbf{(14–10a)}$$

Entonces, la *energía mecánica total de un oscilador armónico simple es proporcional al cuadrado de la amπlitud*. En el punto de equilibrio, $x = 0$, toda la energía es cinética:

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}k(0)^2 = \tfrac{1}{2}mv^2_{\text{máx}}, \qquad \textbf{(14–10b)}$$

donde $v_{\text{máx}}$ es la velocidad máxima durante el movimiento. En puntos intermedios la energía es parte cinética y parte potencial, y como la energía se conserva

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2. \qquad \textbf{(14–10c)}$$

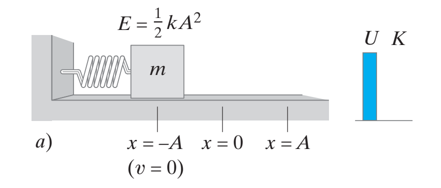
Podemos confirmar las ecuaciones 14-10a y b explícitamente insertando las ecuaciones 14-4 y 14-8 en esta última relación:

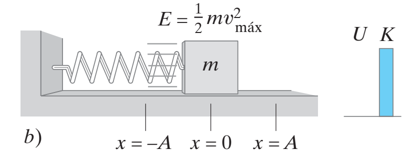
$$E = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2\operatorname{sen}^2(\omega t + \phi) + \tfrac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi).$$

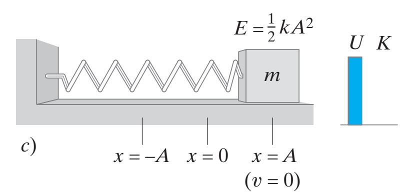
Sustituyendo $\omega^2 = k/m$, o $kA^2 = m\omega^2A^2 = mv^2_{\text{máx}}$, y notando la importante identidad trigonométrica $\operatorname{sen}^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi) = 1$, obtenemos las ecuaciones 14-10a y b:

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}mv^2_{\text{máx}}.$$

[Note que podemos verificar la consistencia despejando $v_{\text{máx}}$ de esta ecuación y obtenemos así la ecuación 14-9a].







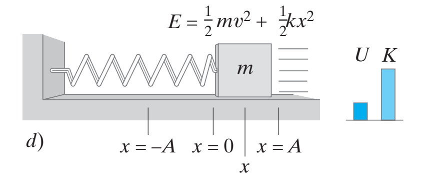


FIGURA 14–10 La energía cambia de energía cinética a energía potencial y viceversa, cuando el resorte oscila. Las gráficas de barras para la energía (a la derecha) se describen en la sección 8-4.

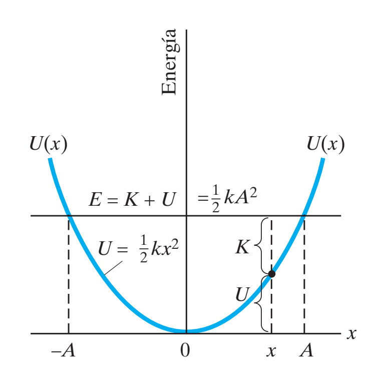


FIGURA 14–11 Gráfica de energía potencial, $U = \frac{1}{2}kx^2$. $K + U = E =$ constante para cualquier punto x donde $-A \leq x \leq A$. Los valores de K y U están indicados para una posición x arbitraria.

Podemos ahora obtener una ecuación para la velocidad v como función de x despejando v en la ecuación 14-10c:

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)} \quad \textbf{(14–11a)}$$

o, como $v_{\text{máx}} = A\sqrt{k/m}$,

$$v = \& v_{\text{máx}}\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}. \quad \textbf{(14–11b)}$$

Vemos de nuevo que v es un máximo en $x = 0$, y es cero en $x = \pm A$.

La energía potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$, está graficada en la figura 14-11 (véase también la sección 8-9). La línea horizontal superior representa un valor específico de la energía total $E = \frac{1}{2}kA^2$. La distancia entre la línea E y la curva U representa la energía cinética K, y el movimiento está restringido a valores x entre $-A$ y $+A$. Estos resultados son, por supuesto, consistentes con nuestra solución completa de la sección previa.

La conservación de la energía es una manera conveniente de obtener v, por ejemplo, si conocemos x (o viceversa), sin tener que tratar con el tiempo t.

EJEMPLO 14–7 **Cálculos de la energía.** Para la oscilación armónica simple del ejemplo 14-5, determine *a*) la energía total, *b*) las energías cinética y potencial en función del tiempo, *c*) la velocidad cuando la masa está a 0.050 m de la posición de equilibrio, *d*) y las energías cinética y potencial a media amplitud ($x = \pm A/2$).

PLANTEAMIENTO Usamos la conservación de la energía para el sistema resorte-masa (ecuaciones 14-10 y 14-11).

SOLUCIÓN *a*) Del ejemplo 14-5, $k = 19.6$ N/m y $A = 0.100$ m, por lo que la energía total E de la ecuación 14-10a es

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2 = \tfrac{1}{2}(19.6\,\text{N/m})(0.100\,\text{m})^2 = 9.80 \times 10^{-2}\,\text{J}.$$

b) De los incisos *f*) y *g*) del ejemplo 14-5, tenemos $x = -(0.100\text{ m})\cos 8.08t$ y $v = (0.808\text{ m/s})\,\text{sen}\,8.08t$, por lo que

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}(19.6\,\text{N/m})(0.100\,\text{m})^2\cos^2 8.08t = \left(9.80 \times 10^{-2}\,\text{J}\right)\cos^2 8.08t$$

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(0.300\,\text{kg})(0.808\,\text{m/s})^2\,\text{sen}^2\,8.08t = \left(9.80 \times 10^{-2}\,\text{J}\right)\text{sen}^2\,8.08t.$$

c) Usamos la ecuación 14-11b y encontramos

$$v = v_{\text{máx}}\sqrt{1 - x^2/A^2} = (0.808\,\text{m/s})\sqrt{1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = 0.70\,\text{m/s}.$$

d) En $x = A/2 = 0.050$ m, tenemos

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}(19.6\,\text{N/m})(0.050\,\text{m})^2 = 2.5 \times 10^{-2}\,\text{J}$$

$$K = E - U = 7.3 \times 10^{-2}\,\text{J}.$$

EJEMPLO CONCEPTUAL 14–8 **Se duplica la amplitud.** Suponga que el resorte de la figura 14-10 se estira el doble (a $x = 2A$). ¿Qué sucede a *a*) la energía del sistema, *b*) la velocidad máxima de la masa oscilante, *c*) la aceleración máxima de la masa?

RESPUESTA *a*) De la ecuación 14-10a, la energía es proporcional al cuadrado de la amplitud A, por lo que estirándolo al doble la energía se cuadruplica ($2^2 = 4$). Usted podría objetar: "Yo efectúe trabajo al estirar el resorte desde $x = 0$ hasta $x = A$. ¿No efectúo yo el mismo trabajo al estirarlo desde A hasta $2A$?" No. La fuerza que usted tiene que ejercer es proporcional al desplazamiento x, por lo que para el segundo desplazamiento, de $x = A$ a $2A$, usted haría más trabajo que para el primer desplazamiento (de $x = 0$ a A). *b*) De la ecuación 14-10b, observamos que cuando la energía se cuadruplica, la velocidad máxima debe duplicarse con respecto al valor anterior. $\left[v_{\text{máx}} \propto \sqrt{E} \propto A.\right]$ *c*) Como la fuerza aplicada es dos veces más grande cuando estiramos el resorte al doble, la aceleración es también dos veces más grande: $a \propto F \propto x$.

EJERCICIO G Suponga que el resorte de la figura 14-10 se comprime a $x = -A$, pero se le da un empujón a la derecha, de manera que la rapidez inicial de la masa m es v_0. ¿Qué efecto tiene este empujón sobre *a*) la energía del sistema, *b*) la velocidad máxima, *c*) la aceleración máxima?

14–4 Movimiento armónico simple relacionado con movimiento circular uniforme

El movimiento armónico simple tiene una relación sencilla e interesante con una partícula que gira en un círculo con rapidez uniforme. Considere una masa m girando en un círculo de radio A con rapidez v_M sobre la superficie de una mesa, como se indica en la figura 14-12. Visto desde arriba, el movimiento es un círculo. No obstante, una persona que observa el movimiento desde el borde de la mesa lo ve como un movimiento oscilatorio de ida y vuelta, y ello corresponde precisamente a un MAS, como veremos ahora. Lo que la persona ve, y lo que nos interesa, es la proyección del movimiento circular sobre el eje x, figura 14-12. Para evidenciar que este movimiento es análogo al MAS, calculemos la componente x de la velocidad v_M designada v en la figura 14-12. Los dos triángulos rectángulos en la figura 14-12 son semejantes, por lo que

$$\frac{v}{v_M} = \frac{\sqrt{A^2 - x^2}}{A}$$

o bien,

$$v = v_M\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}.$$

Ésta es exactamente la ecuación para la rapidez de una masa que oscila con MAS, ecuación 14-11b, donde $v_M = v_{máx}$. Además, en la figura 14-12 observamos que si el desplazamiento angular en $t = 0$ es ϕ, entonces después de un tiempo t la partícula habrá girado un ángulo $\theta = \omega t$, y así

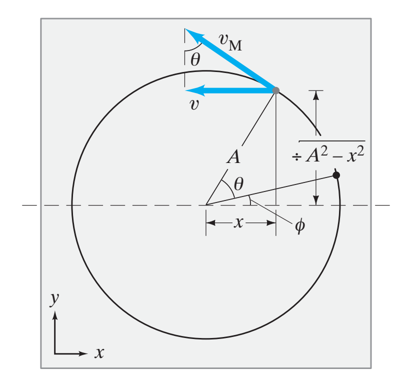
$$x = A\cos(\theta + \phi) = A\cos(\omega t + \phi).$$

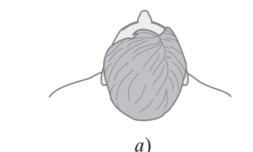
¿Pero qué es ω aquí? La velocidad lineal v_M de nuestra partícula que experimenta movimiento circular está relacionada con ω por $v_M = \omega A$, donde A es el radio del círculo (véase la ecuación 10-4, $v = R\omega$). Para efectuar una revolución se requiere un tiempo T, por lo que también tenemos $v_M = 2\pi A/T$, donde $2\pi A$ es la circunferencia del círculo. Por lo tanto,

$$\omega = \frac{v_M}{A} = \frac{2\pi A/T}{A} = 2\pi/T = 2\pi f$$

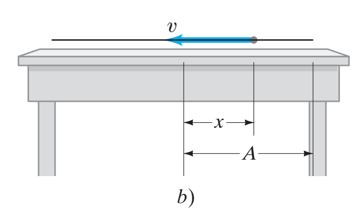
donde T es el tiempo requerido para efectuar una revolución y f es la frecuencia. Esto corresponde precisamente al movimiento de ida y vuelta de un oscilador armónico simple. Entonces, la proyección sobre el eje x de una partícula que gira en un círculo tiene el mismo movimiento que una masa bajo MAS. De hecho, podemos afirmar que la proyección de un movimiento circular sobre una recta es MAS.

La proyección de un movimiento circular uniforme sobre el eje y también es un MAS. Así, el movimiento circular uniforme puede imaginarse como dos movimientos armónicos simples que se efectúa a ángulos rectos.





a)



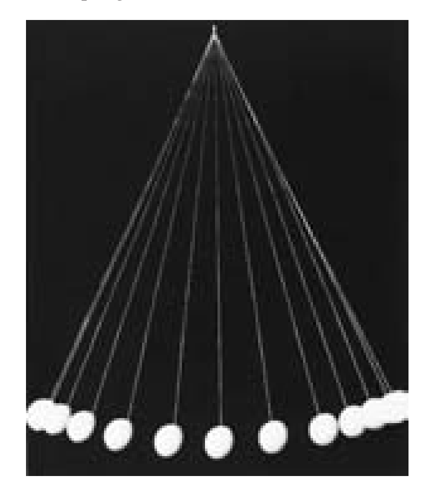
b)

FIGURA 14–12 Análisis de un movimiento armónico simple como una vista lateral *b*) de un movimiento circular *a*).

14–5 El péndulo simple

Un **péndulo simple** consiste en un objeto pequeño (lenteja) suspendido del extremo de una cuerda ligera, figura 14-13. Suponemos que la cuerda no se estira y que su masa puede despreciarse comparada con la masa de la lenteja. El movimiento de un péndulo simple al oscilar, con fricción despreciable, se parece al movimiento armónico simple: el péndulo oscila a lo largo del arco de un círculo con igual amplitud a cada lado de su punto de equilibrio, y al pasar por su punto de equilibrio (por la vertical) tiene su rapidez máxima. Sin embargo, ¿se trata realmente de un MAS? Es decir, ¿la fuerza restauradora es proporcional a su desplazamiento? Averigüémoslo.

FIGURA 14–13 Fotografía estroboscópica de la oscilación de un péndulo tomada a intervalos de tiempo iguales.



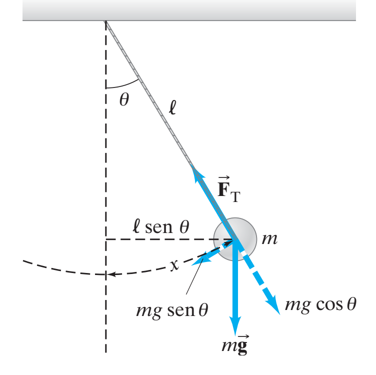


FIGURA 14–14 Péndulo simple.

El desplazamiento del péndulo a lo largo del arco está dado por $x = \ell\theta$, donde θ es el ángulo (en radianes) que forma la cuerda con la vertical y ℓ es la longitud de la cuerda (figura 14-14). Si la fuerza restauradora es proporcional a x o a θ, el movimiento será armónico simple. La fuerza restauradora es la fuerza neta sobre la lenteja y es igual a la componente del peso mg, que es tangente al arco:

$$F = -mg \operatorname{sen} \theta,$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Aquí el signo menos, como en la ecuación 14-1, significa que la fuerza tiene sentido opuesto al desplazamiento angular θ. Como F es proporcional al seno de θ y no a θ mismo, el movimiento *no* es MAS. Sin embargo, si θ es pequeño, entonces sen θ es casi igual a θ, considerando θ en radianes. Esto es evidente observando el desarrollo† en serie de sen θ (u observando la tabla trigonométrica en el Apéndice A), o tan sólo notando en la figura 14-14 que la longitud de arco x $(= \ell\theta)$ tiene casi la misma longitud que "la cuerda" $(= \ell \operatorname{sen} \theta)$, indicada por la línea recta punteada, *si θ es pequeño*. Para ángulos menores de 15°, la diferencia entre θ (en radianes) y sen θ es menor que el 1%. Entonces, con muy buena aproximación para ángulos pequeños,

$$F = -mg \operatorname{sen} \theta \approx -mg\theta.$$

Sustituyendo $x = \ell\theta$, o bien, $\theta = x/\ell$, tenemos

$$F \approx -\frac{mg}{\ell} x.$$

Entonces, para desplazamientos pequeños, el movimiento es esencialmente armónico simple, ya que esta ecuación se ajusta a la ley de Hooke, $F = -kx$, donde la constante de fuerza efectiva es $k = mg/\ell$. Podemos entonces escribir

$$\theta = \theta_{\text{máx}} \cos(\omega t + \phi)$$

donde $\theta_{\text{máx}}$ es el desplazamiento angular máximo y $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$. Para obtener ω usamos la ecuación 14-5, tomando $k = mg/\ell$, es decir,‡ $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{(mg/\ell)/m}$, o bien,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \qquad [\theta \text{ pequeño}] \quad \textbf{(14–12a)}$$

La frecuencia f es entonces

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}, \qquad [\theta \text{ pequeño}] \quad \textbf{(14–12b)}$$

y el periodo T es

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \qquad [\theta \text{ pequeño}] \quad \textbf{(14–12c)}$$

La masa m de la lenteja del péndulo no aparece en estas fórmulas para T y f. Tenemos entonces el resultado sorprendente de que el periodo y la frecuencia de un péndulo simple no depende de la masa de la lenteja del péndulo. Usted habrá notado esto al empujar a un niño pequeño y luego a uno grande en el mismo columpio.

De la ecuación 14-12c vemos también que el periodo de un péndulo no depende de la amplitud (como cualquier MAS, sección 14-2), siempre que la amplitud θ sea pequeña. Se dice que Galileo notó primero esto observando una lámpara en oscilación en la catedral de Pisa (figura 14-15). Este descubrimiento condujo a la invención del reloj de péndulo, el primero realmente preciso, que se convertiría en el estándar durante siglos.

FIGURA 14–15 Se dice que el movimiento oscilatorio de esta lámpara, que cuelga de una cuerda muy larga del techo de la catedral de Pisa, fue observado por Galileo y eso lo inspiró a concluir que el periodo de un péndulo no depende de la amplitud.



FÍSICA APLICADA
Reloj de péndulo

Como un péndulo no experimenta *exactamente* MAS, el periodo depende ligeramente de la amplitud, sobre todo para amplitudes grandes. La exactitud de un reloj de péndulo se verá afectada luego de muchas oscilaciones, debido a la disminución de la amplitud por fricción; sin embargo, el resorte en un reloj de péndulo (o el peso descendente en el reloj del abuelo) suministra energía para compensar la fricción y para mantener la amplitud constante, de manera que el tiempo indicado permanezca exacto.

†$\operatorname{sen} \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots.$

‡Tenga cuidado de no considerar $\omega = d\theta/dt$ como en el movimiento rotatorio. Aquí θ es el ángulo del péndulo en cualquier instante (figura 14-14), pero ahora usamos ω para representar *no* la tasa de cambio de este ángulo θ, sino más bien como una constante relacionada con el periodo, $\omega = 2\pi f = \sqrt{g/\ell}$.

EJERCICIO H Si un péndulo se lleva desde el nivel del mar hasta la cumbre de una montaña alta y se inicia en el mismo ángulo de 5°, oscilaría en la cima de la montaña *a*) un poco más lento, *b*) un poco más rápido, *c*) en exactamente la misma frecuencia, *d*) nada en lo absoluto: se detendrá, *e*) ninguna de las anteriores.

EJERCICIO I Regrese a la pregunta de inicio del capítulo, página 369, y respóndala de nuevo. Intente explicar porque quizás usted la contestó de manera diferente la primera vez.

EJEMPLO 14–9 **Medición de *g*.** Un geólogo usa un péndulo simple cuya longitud es de 37.10 cm y tiene una frecuencia de 0.8190 Hz en un lugar específico sobre la Tierra. ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en este lugar?

PLANTEAMIENTO Podemos utilizar la longitud ℓ y la frecuencia f del péndulo en la ecuación 14-12b, que contiene nuestra incógnita, g.

SOLUCIÓN Despejamos g de la ecuación 14-12b y obtenemos

$$g = (2\pi f)^2\ell = \left(6.283 \times 0.8190\,\mathrm{s}^{-1}\right)^2(0.3710\,\mathrm{m}) = 9.824\,\mathrm{m/s^2}.$$

EJERCICIO J *a*) Estime la longitud de un péndulo simple que completa una oscilación de ida y vuelta por segundo. *b*) ¿Cuál sería el periodo de un péndulo de 1.0 m de longitud?

*14–6 El péndulo físico y el péndulo de torsión

Péndulo físico

El término péndulo físico se refiere a cualquier objeto real extenso que oscila de ida y vuelta, a diferencia del péndulo simple idealizado donde toda la masa se supone concentrada en su pequeña lenteja. Un ejemplo de un péndulo físico es un bate de béisbol suspendido del punto O, como se muestra en la figura 14-16. La fuerza de gravedad actúa en el centro de gravedad (CG) del objeto localizado a una distancia h del punto pivote O. Al péndulo físico conviene analizarlo usando las ecuaciones del movimiento rotacional. La torca sobre un péndulo físico, calculada con respecto al punto O, es

$$\tau = -mgh\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

La segunda ley de Newton para movimiento rotacional, ecuación 10-14, establece que

$$\Sigma\tau = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

donde I es el momento de inercia del objeto con respecto al punto pivote y $\alpha = d^2\theta/dt^2$ es la aceleración angular. Tenemos entonces

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh\,\mathrm{sen}\,\theta$$

o bien,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0,$$

donde I se calcula con respecto a un eje que pasa por el punto O. Para una amplitud angular pequeña, sen $\theta \approx \theta$, así que

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgh}{I}\right)\theta = 0. \quad \text{[desplazamiento angular pequeño]} \quad \textbf{(14–13)}$$

Ésta es la ecuación para el MAS, ecuación 14-3, excepto que θ reemplaza x y mgh/I reemplaza k/m. Entonces, para desplazamientos angulares pequeños, un péndulo físico experimenta un MAS, dado por

$$\theta = \theta_{\text{máx}}\cos(\omega t + \phi),$$

donde $\theta_{\text{máx}}$ es el desplazamiento angular máximo y $\omega = 2\pi/T$. El periodo T es (véase la ecuación 14-7b, reemplazando m/k por I/mgh):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}. \quad \text{[desplazamiento angular pequeño]} \quad \textbf{(14–14)}$$

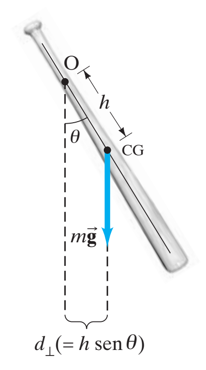


FIGURA 14–16 desplazamiento angular pequeño péndulo físico suspendido del punto O.

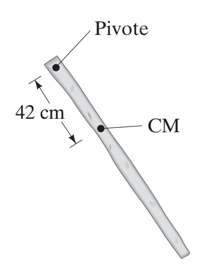


FIGURA 14–17 Ejemplo 14–10.

EJEMPLO 14–10 **Medición del momento de inercia.** Una manera fácil de medir el momento de inercia de un objeto con respecto a cualquier eje consiste en medir el periodo de oscilación alrededor de ese eje. *a*) Considere que una vara no uniforme de 1.0 kg puede equilibrarse en un punto a 42 cm desde un extremo. Si es “pivoteada” con respecto a ese extremo (figura 14-17), oscilará con un periodo de 1.6 s. ¿Cuál es el momento de inercia con respecto a este extremo? *b*) ¿Cuál es el momento de inercia con respecto a un eje perpendicular a la vara que pase por su centro de masa?

PLANTEAMIENTO Colocamos los valores dados en la ecuación 14-14 y despejamos I. Para *b*) usamos el teorema de los ejes paralelos (sección 10-7).

SOLUCIÓN *a*) Dadas $T = 1.6$ s y $h = 0.42$ m, despejamos I de la ecuación 14-14:

$$I = mghT^2/4\pi^2 = 0.27\ \text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

b) Usamos el teorema de los ejes paralelos (ecuación 10-17). El CM está donde la vara queda en equilibrio, a 42 cm desde el extremo, por lo que

$$I_{\text{cm}} = I - mh^2 = 0.27\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 - (1.0\ \text{kg})(0.42\ \text{m})^2 = 0.09\ \text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

NOTA Como un objeto no oscila alrededor de su CM, no podemos medir I_{CM} directamente; sin embargo, el teorema de los ejes paralelos brinda un método conveniente para determinar I_{CM}.

Péndulo de torsión

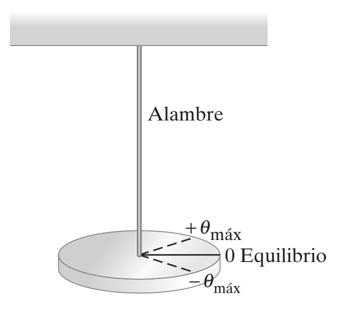


FIGURA 14–18 Péndulo de torsión. El disco oscila en MAS entre $\theta_{\text{máx}}$ y $-\theta_{\text{máx}}$.

Otro tipo de movimiento oscilatorio es un **péndulo de torsión** en el cual un disco (figura 14-18) o una barra (como en el aparato de Cavendish, figura 6-3) está suspendido de un alambre. La torsión del alambre sirve como la fuerza elástica. El movimiento aquí será MAS, ya que la torca restauradora es aproximadamente proporcional al negativo del desplazamiento angular,

$$\tau = -K\theta,$$

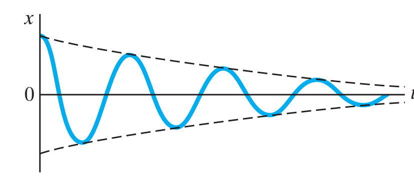
donde K es una constante que depende de la rigidez del alambre. Entonces,

$$\omega = \sqrt{K/I}.$$

Aquí no hay restricción de ángulo pequeño, como en el caso del péndulo físico (donde actúa la gravedad), siempre que el alambre responda linealmente de acuerdo con la ley de Hooke.

14–7 Movimiento armónico amortiguado

FIGURA 14–19 Movimiento armónico amortiguado. La curva en línea sólida representa un coseno multiplicado por una función exponencial decreciente (las curvas punteadas).



La amplitud de cualquier resorte o péndulo en oscilación disminuye lentamente hasta que las oscilaciones cesan por completo. La figura 14-19 muestra una gráfica típica del desplazamiento en función del tiempo. Éste se llama **movimiento armónico amortiguado**. Por lo general el amortiguamiento[†] se debe a la resistencia del aire y a la fricción interna dentro del sistema oscilante. La energía que se disipa como energía térmica se manifiesta en una amplitud decreciente de la oscilación.

Como los sistemas oscilantes naturales están amortiguados en general, ¿por qué hablamos de movimiento armónico simple (no amortiguado)? La respuesta es que el MAS es mucho más fácil de tratar matemáticamente. Y si el amortiguamiento no es grande, las oscilaciones se pueden considerar como movimiento armónico simple, sobre el cual se superpone el amortiguamiento (como lo representan las curvas punteadas en la figura 14-19. Aunque el amortiguamiento altera la frecuencia de la vibración, el efecto es usualmente pequeño si el amortiguamiento es pequeño. Veamos esto con más detalle.

La fuerza de amortiguamiento depende de la rapidez del objeto oscilante y se opone al movimiento. En algunos casos sencillos, la fuerza de amortiguamiento puede aproximarse como una fuerza directamente proporcional a la rapidez:

$$F_{\text{amortiguamiento}} = -bv,$$

donde b es una constante.[‡] Para una masa oscilante en el extremo de un resorte, la fuerza restauradora del resorte es $F = -kx$; por lo que la segunda ley de Newton ($ma = \Sigma F$) se convierte en

$$ma = -kx - bv.$$

Pasamos todos los términos al lado izquierdo de la ecuación y sustituimos $v = dx/dt$ y $a = d^2x/dt^2$ y obtenemos

[†] “Amortiguar” significa disminuir, restringir o extinguir, como “disminuir el ánimo de alguien”.

[‡] En la sección 5-6 estudiamos tales fuerzas dependientes de la velocidad.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0, \qquad \textbf{(14–15)}$$

que es la ecuación del movimiento. Para resolver esta ecuación, proponemos una solución y luego verificamos si funciona. Si es pequeña la constante b de amortiguamiento, x en función de t queda graficada como en la figura 14-19, que parece una función coseno multiplicada por un factor (representado por las líneas punteadas) que decrece con el tiempo. Una función simple que hace esto es la exponencial, $e^{-\gamma t}$, y la solución que satisface la ecuación 14-15 es

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos\omega' t, \qquad \textbf{(14–16)}$$

donde A, γ y ω' se suponen constantes, y $x = A$ en $t = 0$. Llamamos ω' a la frecuencia angular (y no ω) porque no es la misma que la ω para el MAS sin amortiguamiento $\left(\omega = \sqrt{k/m}\right)$.

Si sustituimos la ecuación 14-16 en la ecuación 14-15 (véase la siguiente subsección opcional), encontramos que la ecuación 14-16 es de hecho una solución si γ y ω' tienen los valores

$$\gamma = \frac{b}{2m} \qquad \textbf{(14–17)}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \qquad \textbf{(14–18)}$$

Así, x en función del tiempo t para un oscilador armónico amortiguado (ligeramente) es

$$x = Ae^{(-b/2m)t}\cos\omega' t. \qquad \textbf{(14–19)}$$

Por supuesto, puede sumarse una constante de fase ϕ al argumento del coseno en la ecuación 14-19. Tal como está, con $\phi = 0$, resulta claro que la constante A en la ecuación 14-19 es simplemente el desplazamiento inicial, $x = A$ en $t = 0$. La frecuencia f es

$$f' = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}. \qquad \textbf{(14–20)}$$

La frecuencia es menor y el periodo mayor que para el MAS no amortiguado. (Sin embargo, en muchos casos prácticos de amortiguamiento pequeño, ω' difiere sólo ligeramente de $\omega = \sqrt{k/m}$). Esto tiene sentido puesto que esperamos que el amortiguamiento desacelere el movimiento. La ecuación 14-20 se reduce a la ecuación 14-7a, como debería, cuando no hay amortiguamiento ($b = 0$). La constante $\gamma = b/2m$ es una medida de cuan rápidamente disminuyen las oscilaciones hacia cero (figura 14-19). El tiempo $t_L = 2m/b$ es el tiempo requerido para que las oscilaciones caigan a $1/e$ de la amplitud original; t_L se llama "vida media" de las oscilaciones. Note que cuanto mayor sea b, más rápidamente terminarán las oscilaciones.

La solución, ecuación 14-19, no es válida si b es tan grande que

$$b^2 > 4mk$$

ya que ω' (ecuación 14-18) se volvería imaginaria. En este caso, el sistema no oscila sino que regresa directamente a su posición de equilibrio, como veremos ahora.

La figura 14-20 muestra tres casos comunes de sistemas *fuertemente amortiguados*. La curva C representa la situación en que el amortiguamiento es tan grande ($b^2 \gg 4mk$) que se requiere mucho tiempo para alcanzar el equilibrio; el sistema está **sobreamortiguado**. La curva A representa una situación **subamortiguada**, en la que el sistema efectúa varias oscilaciones antes de llegar al reposo ($b^2 < 4mk$) y corresponde a una versión más fuertemente amortiguada de la ecuación 14-19. La curva B representa el **amortiguamiento crítico**: $b^2 = 4mk$; en este caso, el equilibrio se alcanza en el menor tiempo posible. Estos términos se derivan todos del uso de sistemas de amortiguamiento prácticos, como los mecanismos de cierre de puertas y los **amortiguadores** automotrices (figura 14-21) que por lo general se diseñan para proporcionar amortiguamiento crítico. Sin embargo, como se desgastan, se genera un subamortiguamiento: una puerta se cierra de golpe y un automóvil rebota varias veces cuando golpea un tope o cae a un bache.

En muchos sistemas, el movimiento oscilatorio es lo que cuenta, como en los relojes, y el amortiguamiento debe minimizarse. En otros sistemas, las oscilaciones son el problema, como en los resortes automotrices, por lo que se quiere lograr una cantidad de amortiguamiento apropiada (es decir, amortiguamiento crítico). Un amortiguamiento bien diseñado es necesita para todo tipo de aplicaciones. Los grandes edificios, especialmente en California, ahora se construyen (o refuerzan) con enormes amortiguadores para reducir el daño por sismos.

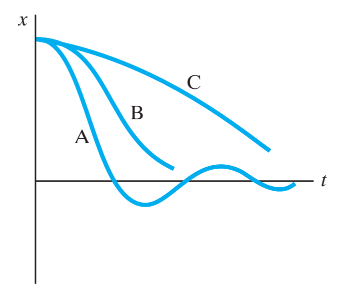
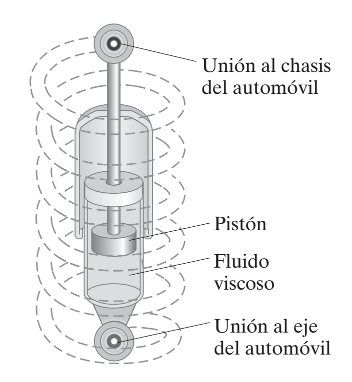


FIGURA 14–20 Movimiento subamortiguado (A), críticamente amortiguado (B) y sobreamortiguado (C).

FIGURA 14–21 Resorte y amortiguadores automotrices para proporcionar amortiguamiento de modo que el automóvil no rebote hacia arriba y hacia abajo indefinidamente.



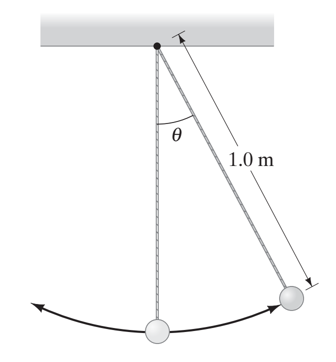


FIGURA 14–22 Ejemplo 14–11.

EJEMPLO 14–11 **Péndulo simple con amortiguamiento.** Un péndulo simple que tiene una longitud de 1.0 m (figura 14-22) se pone a oscilar con oscilaciones de pequeña amplitud. Después de 5.0 minutos, la amplitud es sólo el 50% del valor inicial. *a*) ¿Cuál es el valor de γ para el movimiento? *b*) ¿En qué factor difiere la frecuencia f' de la frecuencia no amortiguada f?

PLANTEAMIENTO Suponemos que la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la rapidez angular, $d\theta/dt$. La ecuación del movimiento para el movimiento armónico amortiguado es

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos\omega' t, \quad \text{donde} \quad \gamma = \frac{b}{2m} \quad \text{y} \quad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}},$$

para el movimiento de una masa en el extremo de un resorte. Para el péndulo simple sin amortiguamiento, en la sección 14-5 vimos que

$$F = -mg\theta$$

para θ pequeño. Como $F = ma$, donde a puede escribirse en términos de la aceleración angular $\alpha = d^2\theta/dt^2$ como $a = \ell\alpha = \ell\, d^2\theta/dt^2$, entonces $F = m\ell\, d^2\theta/dt^2$, y

$$\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\theta = 0.$$

Introduciendo el término de amortiguamiento, $b(d\theta/dt)$, tenemos

$$\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} + b\frac{d\theta}{dt} + g\theta = 0,$$

que es la misma que la ecuación 14-15 con θ sustituyendo x, y ℓ y g reemplazando m y k.

SOLUCIÓN *a*) Comparamos la ecuación 14-15 con la ecuación anterior y vemos que nuestra ecuación $x = Ae^{-\gamma t}\cos\omega' t$ se vuelve una ecuación para θ con

$$\gamma = \frac{b}{2\ell} \quad \text{y} \quad \omega' = \sqrt{\frac{g}{\ell} - \frac{b^2}{4\ell^2}}.$$

En $t = 0$, reescribimos la ecuación 14-16 con θ reemplazando x como

$$\theta_0 = Ae^{-\gamma\cdot 0}\cos\omega'\cdot 0 = A.$$

Entonces en $t = 5.0$ min $= 300$ s, la amplitud dada por la ecuación 14-16 descendió a $0.50\,A$, por lo que

$$0.50A = Ae^{-\gamma(300\,\mathrm{s})}.$$

Despejamos γ de aquí y obtenemos $\gamma = \ln 2.0/(300\text{ s}) = 2.3 \times 10^{-3}\text{ s}^{-1}$.

b) Tenemos $\ell = 1.0$ m, por lo que $b = 2\gamma\ell = 2(2.3 \times 10^{-3}\text{s}^{-1})(1.0\text{ m}) = 4.6 \times 10^{-3}$ m/s. Así, $(b^2/4\ell^2)$ es mucho menor que g/ℓ $(= 9.8\text{ s}^{-2})$ y la frecuencia angular del movimiento permanece casi igual que la del movimiento sin amortiguamiento. Específicamente (véase la ecuación 14-20),

$$f' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}\left[1 - \frac{\ell}{g}\left(\frac{b^2}{4\ell^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\ell}{g}\left(\frac{b^2}{4\ell^2}\right)\right]$$

donde usamos el desarrollo binomial. Entonces, con $f = (1/2\,\pi)\sqrt{g/\ell}$ (ecuación 14-12b),

$$\frac{f - f'}{f} \approx \frac{1}{2}\frac{\ell}{g}\left(\frac{b^2}{4\ell^2}\right) = 2.7 \times 10^{-7}.$$

Por lo que f' difiere de f en menos de una parte en un millón.

*Demostración de que $x = Ae^{-\gamma t}\cos\omega' t$ es una solución

Comenzamos con la ecuación 14-16, para ver si es una solución de la ecuación 14-15. Primero tomamos las primera y segunda derivadas

$$\frac{dx}{dt} = -\gamma Ae^{-\gamma t}\cos\omega' t - \omega' Ae^{-\gamma t}\,\mathrm{sen}\,\omega' t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \gamma^2 Ae^{-\gamma t}\cos\omega' t + \gamma A\omega' e^{-\gamma t}\,\mathrm{sen}\,\omega' t + \omega'\gamma Ae^{-\gamma t}\,\mathrm{sen}\,\omega' t - \omega'^2 Ae^{-\gamma t}\cos\omega' t.$$

Luego sustituimos esas relaciones en la ecuación 14-15 y reordenamos para obtener

$$Ae^{-\gamma t}\left[\left(m\gamma^2 - m\omega'^2 - b\gamma + k\right)\cos\omega' t + (2\omega'\gamma m - b\omega')\,\text{sen}\,\omega' t\right] = 0. \qquad \textbf{(i)}$$

El lado izquierdo de esta ecuación debe ser igual a cero en todo tiempo t, pero esto sólo puede ser así para ciertos valores de γ y ω'. Para determinar γ y ω', elegimos dos valores de t que hagan su evaluación fácil. En $t = 0$, sen $\omega' t = 0$, por lo que la relación anterior se reduce a $A(m\gamma^2 - m\omega'^2 - b\gamma + k) = 0$, lo que implica† que

$$m\gamma^2 - m\omega'^2 - b\gamma + k = 0. \qquad \textbf{(ii)}$$

Y en $t = \pi/2\omega'$, $\cos\omega' t = 0$ por lo que la ecuación (i) sólo puede ser válida si

$$2\gamma m - b = 0. \qquad \textbf{(iii)}$$

De la ecuación (iii), tenemos

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

y de la ecuación (ii)

$$\omega' = \sqrt{\gamma^2 - \frac{b\gamma}{m} + \frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}.$$

Vemos entonces que la ecuación 14-16 es una solución de la ecuación de movimiento para el oscilador armónico amortiguado, siempre que γ y ω' tengan esos valores específicos (ya dados antes en las ecuaciones 14-17 y 14-18).

14–8 Oscilaciones forzadas: resonancia

Cuando un sistema oscilatorio se pone en movimiento, vibra con su frecuencia natural (ecuaciones 14-7a y 14-12b). Sin embargo, sobre el sistema puede actuar una fuerza externa, que tiene su propia frecuencia particular y así tenemos una **oscilación forzada**.

Por ejemplo, podríamos jalar la masa sobre el resorte de la figura 14-1 de ida y vuelta a una frecuencia f. La masa vibra entonces con la frecuencia f de la fuerza externa, aun si esta frecuencia es diferente de la **frecuencia natural** del resorte, que ahora denotaremos con f_0 donde (véase las ecuaciones 14-5 y 14-7a)

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

En una oscilación forzada, la amplitud de vibración y, por consiguiente, la energía transferida al sistema oscilatorio, depende de la diferencia entre f y f_0, así como de la cantidad de amortiguamiento, alcanzándose un máximo cuando la frecuencia de la fuerza externa es igual a la frecuencia natural del sistema, es decir, cuando $f = f_0$. La amplitud está graficada en la figura 14-23 en función de la frecuencia externa f. La curva A representa amortiguamiento ligero y la curva B amortiguamiento pesado. La amplitud puede volverse muy grande cuando la frecuencia impulsora f está cerca de la frecuencia natural, $f \approx f_0$, en tanto que el amortiguamiento no sea muy grande. Cuando el amortiguamiento es pequeño, el incremento en amplitud cerca de $f = f_0$ es muy grande (y a menudo dramático). Este efecto se conoce como **resonancia**. La frecuencia natural f_0 de un sistema se llama su **frecuencia resonante**.

Una ilustración simple de resonancia es empujar a un niño en un columpio, el cual, como cualquier péndulo, tiene una frecuencia natural de oscilación que depende de su longitud ℓ. Si usted empuja el columpio con una frecuencia aleatoria, el columpio se moverá de un lugar a otro y no alcanzará gran amplitud. Pero si usted empuja con una frecuencia igual a la frecuencia natural del columpio, la amplitud se incrementará considerablemente. En la resonancia, se requiere relativamente poco esfuerzo para obtener una gran amplitud.

A
Amplitud del sistema oscilante
A
B
f
f_0
Frecuencia externa f

FIGURA 14–23 Resonancia para sistemas ligeramente amortiguados (A) y fuertemente amortiguados (B). (Véase en la figura 14-26 una gráfica más detallada).

†También se cumpliría para $A = 0$, pero esto daría la solución trivial sin ningún interés $x = 0$ para todo t, es decir, ninguna oscilación.



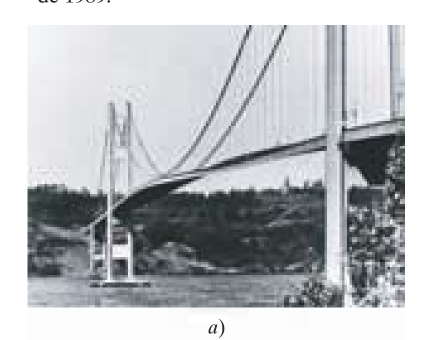
FIGURA 14–24 Esta copa se rompe al vibrar en resonancia con el sonido de la trompeta.

Se dice que el gran tenor Enrico Caruso era capaz de hacer añicos una copa de cristal emitiendo una nota justo con la frecuencia correcta a todo pulmón. Éste es un ejemplo de resonancia, pues las ondas sonoras emitidas por la voz actúan como una oscilación forzada sobre el vidrio. En la resonancia, la oscilación resultante en la copa puede ser suficientemente grande en amplitud como para que el vidrio exceda su límite elástico y se rompa (figura 14-24).

Como los objetos materiales son, en general, elásticos, la resonancia es un fenómeno importante en muchas situaciones. Es particularmente importante en ingeniería estructural, aunque los efectos no son siempre previsibles. Por ejemplo, se ha informado que un puente de ferrocarril se colapsó, porque una grieta en una de las ruedas de un tren que cruzaba puso al puente en oscilación resonante. Los soldados que marchan, de hecho, rompen el paso al cruzar un puente para evitar la posibilidad de que su marcha rítmica normal pueda corresponder a una frecuencia resonante del puente. El famoso colapso del puente Tacoma Narrows (figura 14-25a) en 1940 ocurrió como resultado de fuertes ráfagas de viento que impulsaron el claro en un movimiento oscilatorio de gran amplitud. La autopista de Oakland que se derrumbó en el sismo de 1989 en California (figura 14-25b) implicó una oscilación resonante de una sección que estaba construida sobre un relleno que transmitió fácilmente esa frecuencia.

Más adelante analizaremos ejemplos importantes de resonancia. También veremos que los objetos en vibración tienen a menudo no una sino varias frecuencias resonantes.

FIGURA 14–25 *a*) Oscilación de gran amplitud del puente Tacoma Narrows, debido a ráfagas de viento, que condujeron a su colapso (1940). *b*) Derrumbe de una autopista en California, causado por el sismo de 1989.



a)



b)

*Ecuación de movimiento y su solución

Veremos ahora la ecuación de movimiento para una oscilación forzada y su solución. Suponga que la fuerza externa es senoidal y que puede representarse por

$$F_{ext} = F_0 \cos \omega t,$$

donde $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular aplicada externamente al oscilador. La ecuación del movimiento (con amortiguamiento) es entonces

$$ma = -kx - bv + F_0 \cos \omega t.$$

Esto puede escribirse como

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t. \quad \textbf{(14–21)}$$

La fuerza externa, a la derecha de la ecuación, es el único término que no contiene x o una de sus derivadas. El problema 68 le pide a usted demostrar que

$$x = A_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) \quad \textbf{(14–22)}$$

es una solución de la ecuación 14-21, por sustitución directa, donde

$$A_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega^2/m^2}} \quad \textbf{(14–23)}$$

y

$$\phi_0 = \tan^{-1}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega(b/m)}. \quad \textbf{(14–24)}$$

En realidad, la solución general de la ecuación 14-21 es la ecuación 14-22 más otro término de la forma de la ecuación 14-19, para el movimiento natural amortiguado del oscilador; éste segundo término tiende a cero con el tiempo, por lo que en muchos casos sólo tenemos que ocuparnos con la ecuación 14-22.

La amplitud del movimiento armónico forzado, A_0, depende considerablemente de la diferencia entre la frecuencia aplicada y la frecuencia natural. La figura 14-26 muestra una gráfica de A_0 (ecuación 14-23) como función de la frecuencia aplicada, ω (una versión más detallada de la figura 14-23), para tres valores específicos de la constante de amortiguamiento b. La curva A $\left(b = \frac{1}{6}m\omega_0\right)$ representa un amortiguamiento pequeño; la curva B $\left(b = \frac{1}{2}m\omega_0\right)$ un amortiguamiento bastante fuerte; y la curva C $\left(b = \sqrt{2}m\omega_0\right)$ un movimiento sobre-amortiguado. La amplitud puede volverse grande cuando la frecuencia impulsora es cercana a la frecuencia natural, $\omega \approx w_0$, siempre y cuando el amortiguamiento no sea muy grande. Cuando el amortiguamiento es pequeño, el incremento en la amplitud cerca de $\omega = \omega_0$ es muy grande y, como vimos, se conoce como *resonancia*. La frecuencia natural de oscilación f_0 $(= \omega_0/2\pi)$ de un sistema es su *fre-*

cuencia resonante.† Si $b = 0$, la resonancia ocurre en $\omega = \omega_0$ y el pico resonante (de A_0) se vuelve infinito; en tal caso, la energía se transfiere continuamente al sistema y ninguna se disipa. En sistemas reales, b nunca es precisamente cero, y el pico resonante es finito. El pico no ocurre precisamente en $\omega = \omega_0$ (debido al término $b^2\omega^2/m^2$ en el denominador de la ecuación 14-23), si bien es bastante cercano a ω_0 —a menos que el amortiguamiento sea muy grande. Si el amortiguamiento es grande, hay un pico pequeño o ninguno (curva C en la figura 14-26).

*Valor Q

La altura y estrechez de un pico de resonancia a menudo se especifican usando su **factor de calidad** o **valor Q**, definido como

$$Q = \frac{m\omega_0}{b}. \qquad \textbf{(14–25)}$$

En la figura 14-26, la curva A tiene $Q = 6$, la curva B tiene $Q = 2$ y la curva C tiene $Q = 1/\sqrt{2}$. Cuanto menor sea la constante de amortiguamiento b, mayor será el valor de Q y mayor será el valor del pico de resonancia. El valor Q es también una medida del ancho del pico. Para saber por qué, sean ω_1 y ω_2 las frecuencias donde el cuadrado de la amplitud A_0 tiene la mitad de su valor máximo (usamos el cuadrado porque la potencia transferida al sistema es proporcional a A_0^2); entonces, $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, que se llama el *ancho* del pico de resonancia, está relacionado con Q mediante

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}. \qquad \textbf{(14–26)}$$

Esta relación es exacta sólo para amortiguamiento débil. Cuanto mayor sea el valor de Q, más estrecho será el pico de resonancia con respecto a su altura. Por lo tanto, un valor grande de Q, que representa un sistema de alta calidad, tiene un pico de resonancia alto y estrecho.

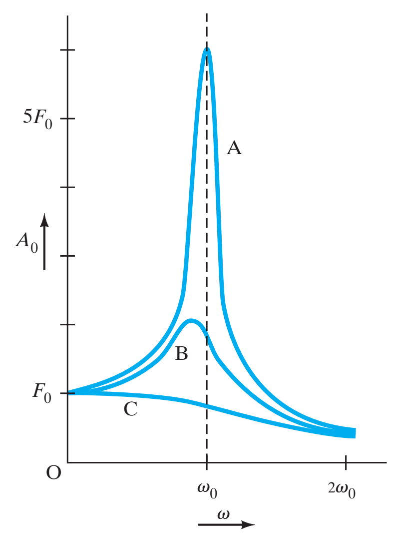


FIGURA 14–26 Amplitud de un oscilador armónico forzado en función de ω. Las curvas A, B y C corresponden a sistemas ligero, fuerte y sobreamortiguado, respectivamente ($Q = m\omega_0/b = 6, 2, 0.71$).

† A veces, la frecuencia resonante se define como el valor real de ω, para el cual la amplitud tiene su valor máximo, y esto depende en alguna medida de la constante de amortiguamiento. Excepto para amortiguamiento muy intenso, este valor es muy cercano a ω_0.

Resumen

Un objeto que oscila experimenta un **movimiento armónico simple** (MAS) si la fuerza restauradora es proporcional al desplazamiento.

$$F = -kx. \qquad \textbf{(14–1)}$$

El desplazamiento máximo a partir de la posición de equilibrio se llama **amplitud**.

El **periodo** T es el tiempo requerido para un ciclo completo (ida y vuelta), y la **frecuencia** f es el número de ciclos por segundo; ambos están relacionados por

$$f = \frac{1}{T}. \qquad \textbf{(14–2)}$$

El periodo de oscilación para una masa m en el extremo de un resorte ideal sin masa está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad \textbf{(14–7b)}$$

El MAS es **senoidal**, lo cual significa que el desplazamiento en función del tiempo sigue una curva seno o coseno. La solución general puede escribirse como

$$x = A\cos(\omega t + \phi) \qquad \textbf{(14–4)}$$

donde A es la amplitud, f es el **ángulo de fase**, y

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad \textbf{(14–5)}$$

Los valores de A y ϕ dependen de las **condiciones iniciales** (x y v en $t = 0$).

Durante el MAS, la energía total $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ está cambiando continuamente de potencial a cinética, y viceversa.

Un **péndulo simple** de longitud ℓ se aproxima a un MAS si su amplitud es pequeña y la fricción puede ignorarse. Para amplitudes pequeñas, su periodo está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}, \qquad \textbf{(14–12c)}$$

donde g es la aceleración de la gravedad.

Cuando se tiene fricción (en todos los resortes y péndulos reales), se dice que el movimiento está **amortiguado**. El desplazamiento máximo disminuye con el tiempo y al final la energía mecánica se transforma en energía térmica. Si la fricción es muy grande, y no ocurren oscilaciones, se dice que el sistema está **sobreamortiguado**. Si la fricción es suficientemente pequeña como para que ocurran oscilaciones, el sistema está **subamortiguado** y el desplazamiento está dado por

$$x = Ae^{-\gamma t}\cos\omega' t, \qquad \textbf{(14–16)}$$

donde γ y ω' son constantes. Para un sistema **críticamente amortiguado**, no se tienen oscilaciones y se alcanza el equilibrio en el tiempo más corto.

Si una fuerza oscilante se aplica a un sistema capaz de vibrar, la amplitud de la vibración puede ser muy grande si la frecuencia de la fuerza aplicada es cercana a la **frecuencia natural** (o **resonante**) del oscilador; esto se llama **resonancia**.

Preguntas

1. Mencione algunos ejemplos de objetos cotidianos en vibración. ¿Cuál tiene un MAS, por lo menos aproximado?
2. ¿La aceleración de un oscilador armónico simple puede ser cero? Si es así, ¿dónde?
3. Explique por qué el movimiento de un pistón en un motor de automóvil es aproximadamente armónico simple?
4. Los resortes reales tienen masa. ¿El periodo y la frecuencia reales son mayores o menores que los dados por las ecuaciones para una masa oscilante en el extremo de un resorte idealizado sin masa? Explique su respuesta.
5. ¿Cómo podría usted duplicar la rapidez máxima de un oscilador armónico simple (OAS)?
6. Una trucha de 5.0 kg está unida al gancho de un resorte de balanza vertical y luego se suelta. Describa la lectura de la balanza en función del tiempo.
7. Si un reloj de péndulo es exacto al nivel del mar, ¿al llevarlo a una gran altitud se atrasará o se adelantará? ¿Por qué?
8. Un neumático oscilante cuelga de una rama cerca del suelo (figura 14-27). ¿Cómo podría usted estimar la altura de la rama usando sólo un cronómetro?



FIGURA 14–27 Pregunta 8.

9. Para un oscilador armónico simple, ¿cuándo (si acaso) los vectores de desplazamiento y de velocidad tienen el mismo sentido? ¿Cuándo los vectores de desplazamiento y de aceleración tienen el mismo sentido?
10. Una masa de 100 g cuelga de una cuerda larga y forma un péndulo. La masa se jala una distancia corta hacia un lado y se suelta desde el reposo. El tiempo de balanceo de un lado a otro se mide cuidadosamente en 2.0 s. Si la masa de 100 g se reemplaza con una masa de 200 g, que luego se jala la misma distancia y se suelta desde el reposo, el tiempo será *a*) 1.0 s, *b*) 1.41 s, *c*) 2.0 s, *d*) 2.82 s, *e*) 4.0 s.
11. Dos masas iguales están unidas a resortes separados idénticos uno junto al otro. Se jala una masa de modo que su resorte se estira 20 cm, y el otro también se jala y su resorte se estira sólo 10 cm. Las masas se sueltan simultáneamente. ¿Cuál masa alcanzará primero el punto de equilibrio?
12. ¿Rebota un automóvil en sus resortes más rápido cuando está vacío o cuando está completamente cargado?
13. ¿Cuál es el periodo aproximado del paso de usted al caminar?
14. ¿Qué le sucede al periodo de un columpio si usted cambia de una posición sentada a una de pie?
15. * Una varilla delgada uniforme de masa m está suspendida de un extremo y oscila con una frecuencia f. Si se le une una pequeña esfera de masa $2m$ al otro extremo, ¿la frecuencia aumenta o disminuye? Explique su respuesta.
16. Un diapasón con frecuencia natural de 264 Hz está sobre una mesa al frente de una habitación. En la parte de atrás del cuarto, dos diapasones, uno de frecuencia natural de 260 Hz y el otro de 420 Hz, están inicialmente en silencio; sin embargo, cuando el diapasón al frente se pone en vibración, el diapasón de 260 Hz comienza espontáneamente a vibrar pero no lo hace el de 420 Hz. Explíquelo.
17. ¿Por qué es posible hacer que el agua se agite en una cacerola sólo si ésta se sacude con cierta frecuencia?
18. Dé varios ejemplos comunes de resonancia.
19. ¿Puede el traqueteo de un automóvil llegar a ser un fenómeno de resonancia? Explique su respuesta.
20. A lo largo de los años, los edificios se han construido con materiales cada vez más ligeros. ¿Cómo ha afectado esto las frecuencias naturales de vibración de los edificios y los problemas de resonancia debida al paso de camiones, aeroplanos, o por viento y otras fuentes naturales de vibración?

Problemas

14–1 y 14–2 Movimiento armónico simple

1. (I) Si una partícula experimenta un MAS con amplitud de 0.18 m, ¿cuál será la distancia total que la partícula viaja en un periodo?
2. (I) Una cuerda elástica mide 65 cm de largo cuando se cuelga de ella un peso de 75 N, pero mide 85 cm cuando el peso es de 180 N. ¿Cuál es la constante "de resorte" k de esta cuerda elástica?
3. (I) Los resortes de un automóvil de 1500 kg se comprimen 5.0 mm cuando una persona de 68 kg se sienta en el lugar del conductor. Si el automóvil pasa por un tope, ¿cuál será la frecuencia de las vibraciones? Ignore el amortiguamiento.
4. (I) *a*) ¿Cuál es la ecuación que describe el movimiento de una masa en el extremo de un resorte, que se estira 8.8 cm desde el equilibrio y luego se suelta desde el reposo, y cuyo periodo de oscilación es de 0.66 s? *b*) ¿Cuál será su desplazamiento después de 1.8 s?
5. (II) Estime la rigidez del resorte en el cangurín de un niño, si éste tiene una masa de 35 kg y rebota una vez cada 2.0 segundos.
6. (II) La báscula de un pescador se alarga 3.6 cm cuando un pez de 2.4 kg cuelga de ella. *a*) ¿Cuál es la constante de rigidez del resorte? Y *b*) ¿cuáles serán la amplitud y la frecuencia de la oscilación, si el pez es jalado 2.5 cm hacia abajo y luego se libera de manera que entre en vibración vertical?

7. (II) Los edificios altos se diseñan para balancearse con el viento. Con un viento de 100 km/h, por ejemplo, la parte superior de la torre Sears de 110 pisos oscila horizontalmente con una amplitud de 15 cm. El edificio oscila a su frecuencia natural, que tiene un periodo de 7.0 s. Suponiendo MAS, encuentre la velocidad horizontal máxima y la aceleración experimentadas por un empleado de la torre Sears cuando se sienta a trabajar en su escritorio localizado en el piso superior. Compare la aceleración máxima (como un porcentaje) con la aceleración debida a la gravedad.

8. (II) Elabore una tabla que indique la posición x de la masa de la figura 14-2 en tiempos de $t = 0, \frac{1}{4}T, \frac{1}{2}T, \frac{3}{4}T, T$, y $\frac{5}{4}T$, donde T es el periodo de oscilación. En una gráfica de x versus t, grafique estos seis puntos. Ahora conecte estos puntos con una curva suave. Con base en estas consideraciones simples, ¿su curva se parece a una onda seno o una onda coseno?

9. (II) Una mosca pequeña de 0.25 g es atrapada en una telaraña. Ésta oscila predominantemente con una frecuencia de 4.0 Hz. *a*) ¿Cuál es el valor de la constante efectiva de rigidez del resorte k de la telaraña? *b*) ¿A qué frecuencia vibraría la telaraña si fuera atrapado un insecto con masa de 0.50 g?

10. (II) Una masa m en el extremo de un resorte vibra con una frecuencia de 0.83 Hz. Cuando se agrega a m una masa adicional de 0.83 kg, la frecuencia es de 0.60 Hz. ¿Cuál es el valor de m?

11. (II) Una vara uniforme de 1.0 m de longitud y masa M está articulada en un extremo y se sostiene horizontalmente con un resorte de constante k en el otro extremo (figura 14-28). Si la vara oscila poco hacia arriba y hacia abajo, ¿cuál es su frecuencia? [*Sugerencia*: Escriba una ecuación de torca con respecto a la bisagra].

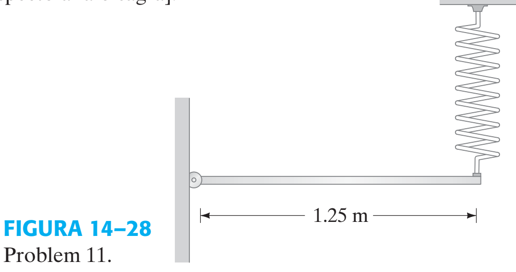


FIGURA 14–28 Problem 11.

12. (II) Un bloque de madera de balsa con masa de 55 g flota sobre un lago, oscilando verticalmente a una frecuencia de 3.0 Hz. *a*) ¿Cuál es el valor de la constante de resorte efectiva del agua? *b*) Una botella parcialmente llena de agua con masa de 0.25 kg, y casi del mismo tamaño y forma que la del bloque de madera, se lance al agua. ¿A qué frecuencia esperaría usted que la botella oscilara verticalmente? Suponga un MAS.

13. (II) La figura 14-29 muestra dos ejemplos de MAS, designados como A y B. Para cada uno, ¿cuál es *a*) la amplitud, *b*) la frecuencia y *c*) el periodo? *d*) Escriba las ecuaciones para A y B en la forma de seno o coseno.

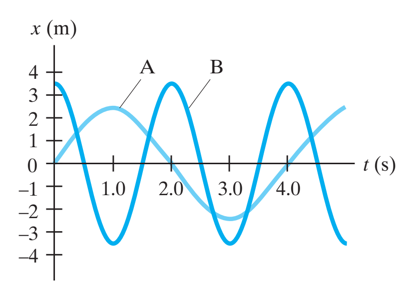


FIGURA 14–29 Problema 13.

14. (II) Determine la constante de fase ϕ en la ecuación 14-4, si en $t = 0$, la masa oscilante está en *a*) $x = -A$, *b*) $x = 0$, *c*) $x = A$, *d*) $x = \frac{1}{2}A$, *e*) $x = -\frac{1}{2}A$, *f*) $x = A/\sqrt{2}$.

15. (II) Un resorte vertical con constante de rigidez de 305 N/m vibra con una amplitud de 28.0 cm cuando se cuelgan de él 0.260 kg. La masa pasa por el punto de equilibrio ($y = 0$) con velocidad positiva en $t = 0$. *a*) ¿Cuál es la ecuación que describe este movimiento en función del tiempo? *b*) ¿En qué tiempos el resorte tendrá sus extensiones máxima y mínima?

16. (II) En la figura 14-30 se muestra la gráfica de desplazamiento versus tiempo de una pequeña masa m en el extremo de un resorte. En $t = 0$, $x = 0.43$ cm. *a*) Si $m = 9.5$ g, encuentre la constante de resorte k. *b*) Escriba la ecuación para el desplazamiento x en función del tiempo.

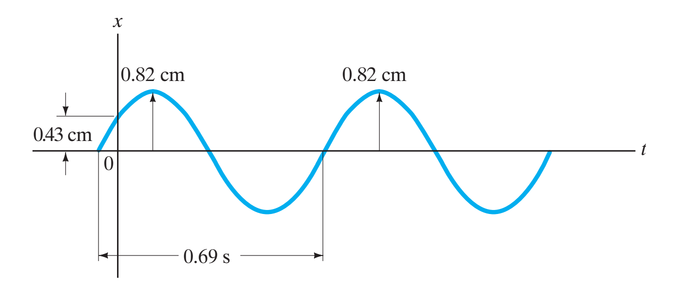


FIGURA 14–30 Problema 16.

17. (II) La posición de un OAS en función del tiempo está dada por $x = 3.8\cos(5\pi t/4 + \pi/6)$ donde t está en segundos y x en metros. Encuentre *a*) el periodo y la frecuencia, *b*) la posición y velocidad en $t = 0$, y *c*) la velocidad y aceleración en $t = 2.0$ s.

18. (II) Un diapasón vibra a una frecuencia de 441 Hz y cada rama de él se mueve 1.5 mm a cada lado del centro. Calcule *a*) la rapidez máxima y *b*) la aceleración máxima de la punta de una rama.

19. (II) Un objeto de masa desconocida m se cuelga de un resorte vertical de constante k desconocida, y se observa que el objeto está en reposo cuando el resorte se extiende 14 cm. Luego se le da al resorte un ligero empujón y experimenta MAS. Determine el periodo T de esta oscilación.

20. (II) Una masa de 1.25 kg estira 0.215 m un resorte vertical. Si el resorte se estira adicionalmente 0.130 m y se suelta, ¿qué tiempo le tomará alcanzar la (nueva) posición de equilibrio?

21. (II) Considere dos objetos A y B, ambos experimentando MAS, pero con diferentes frecuencias, como lo describen las ecuaciones $x_A = (2.0\text{ m})\,\text{sen}\,(2.0\,t)$ y $x_B = (5.0\text{ m})\,\text{sen}\,(3.0\,t)$, donde t está en segundos. Después de $t = 0$, encuentre los siguientes tres tiempos t en que ambos objetos pasan por el origen simultáneamente.

22. (II) Un objeto de 1.60 kg oscila cada 0.55 s desde un resorte ligero que cuelga verticalmente. *a*) Escriba la ecuación que da su posición y (+ hacia arriba) en función del tiempo t, suponiendo que cuando se comprime 16 cm a partir de la posición de equilibrio (donde $y = 0$), y luego se libera. *b*) ¿Cuánto tiempo le tomará alcanzar por primera vez la posición de equilibrio? *c*) ¿Cuál será su rapidez máxima? *d*) ¿Cuál será su aceleración máxima y dónde ocurrirá?

23. (II) Un saltador de *bungee* con masa de 65.0 kg salta desde un puente alto. Después de alcanzar su punto más bajo, oscila verticalmente alcanzando un punto bajo ocho veces más en 43.0 segundos. Alcanza finalmente el reposo 25.0 m debajo del nivel del puente. Calcule la constante del resorte y la longitud sin estirar de la cuerda *bungee* suponiendo MAS.

24. (II) Un bloque de masa m está soportado por dos resortes verticales paralelos idénticos con constantes k y k (figura 14-31). ¿Cuál será la frecuencia de vibración vertical?

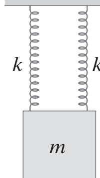


FIGURA 14–31 Problema 24.

25. (III) Una masa m está conectada a dos resortes, con constantes k_1 y k_2, de dos maneras diferentes, como se muestra en las figuras 14-32a y b. Demuestre que el periodo para la configuración mostrada en *a*) está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{m\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)}$$

y para la configuración mostrada en *b*) está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

Ignore la fricción.

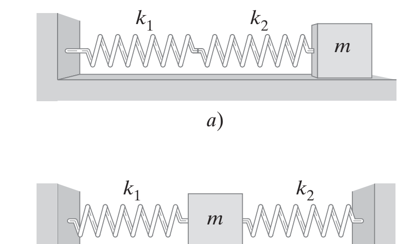


FIGURA 14–32 Problema 25.

26. (III) Una masa m está en reposo sobre el extremo de un resorte de constante k. En $t = 0$ se le da un impulso J con un martillo. Escriba la fórmula para el movimiento subsecuente en términos de m, k, J y t.

14–3 Energía en MAS

27. (I) Una masa de 1.15 kg vibra de acuerdo con la ecuación $x = 0.650 \cos 7.40t$, donde x está en metros y t en segundos. Determine *a*) la amplitud, *b*) la frecuencia, *c*) la energía total, y *d*) la energía cinética y la energía potencial cuando $x = 0.260$ m.

28. (I) *a*) ¿Para qué desplazamiento de un OAS la energía es mitad cinética y mitad potencial? *b*) ¿Qué fracción de la energía total de un OAS es cinética y qué fracción es potencial cuando el desplazamiento es un tercio de la amplitud?

29. (II) Elabore una gráfica como la figura 14-11 para un resorte horizontal, cuya constante sea 95 N/m y que tenga una masa de 55 g en su extremo. Suponga que el resorte empezó con una amplitud inicial de 2.0 cm. Ignore la masa del resorte y cualquier fricción con la superficie horizontal. Utilice su gráfica para estimar *a*) la energía potencial, *b*) la energía cinética y *c*) la rapidez de la masa, para $x = 1.5$ cm.

30. (II) Una masa de 0.35 kg en el extremo de un resorte vibra 2.5 veces por segundo con una amplitud de 0.15 m. Determine *a*) la velocidad cuando pasa por el punto de equilibrio, *b*) la velocidad cuando está a 0.10 m de la posición de equilibrio, *c*) la energía total del sistema, y *d*) la ecuación que describe el movimiento de la masa, suponiendo que en $t = 0$, x fue un máximo.

31. (II) Se requiere una fuerza de 95.0 N para comprimir el resorte de una pistola de juguete 0.175 m para "cargar" una bola de 0.160 kg. ¿Con qué rapidez saldrá la bola de la pistola si se dispara horizontalmente?

32. (II) Una bala de 0.0125 kg golpea un bloque de 0.240 kg unido a un resorte fijo horizontal, cuya constante de resorte es de 2.25×10^3 N/m y lo pone en vibración con una amplitud de 12.4 cm. ¿Cuál fue la rapidez inicial de la bala, si los dos objetos se mueven juntos después del impacto?

33. (II) Si una oscilación tiene 5.0 veces la energía de una segunda oscilación con las mismas frecuencia y masa, ¿cómo se comparan sus amplitudes?

34. (II) Una masa de 240 g oscila sobre una superficie horizontal sin fricción a una frecuencia de 3.0 Hz y con amplitud de 4.5 cm. *a*) ¿Cuál es la constante efectiva de resorte para este movimiento? *b*) ¿Cuánta energía está implicada en este movimiento?

35. (II) Una masa se encuentra en reposo, sobre una superficie horizontal sin fricción, unida a un extremo de un resorte; el otro extremo está fijo a una pared. Se requieren 3.6 J de trabajo para comprimir el resorte 0.13 m. Si la masa se libera del reposo con el resorte comprimido, experimenta una aceleración máxima de 15 m/s^2. Encuentre el valor de a) la constante del resorte y *b*) la masa.

36. (II) Un objeto con masa de 2.7 kg efectúa un movimiento armónico simple, unido a un resorte con constante $k = 280$ N/m. Cuando el objeto está a 0.020 m de su posición de equilibrio, se mueve con una rapidez de 0.55 m/s. *a*) Calcule la amplitud del movimiento. *b*) Calcule la rapidez máxima alcanzada por el objeto.

37. (II) La agente Arlene inventó el siguiente método para medir la velocidad de salida de un rifle (figura 14-33). Ella dispara una bala hacia un bloque de madera de 4.648 kg que descansa sobre una superficie lisa y está unido a un resorte de constante $k = 142.7$ N/m. La bala, cuya masa es de 7.870 g, permanece incrustada en el bloque de madera. También mide la distancia máxima que el bloque comprime el resorte y obtiene el valor 9.460 cm. ¿Cuál es la rapidez v de la bala?

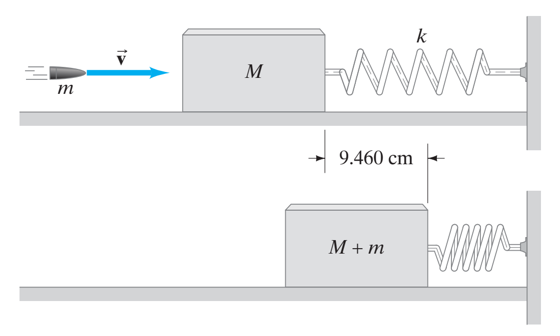


FIGURA 14–33 Problema 37.

38. (II) Obtenga el desplazamiento x en función del tiempo t para el oscilador armónico simple usando la conservación de la energía, ecuaciones 14-10. [*Sugerencia*: Integre la ecuación 14-11a con $v = dx/dt$].

39. (II) En $t = 0$, una masa de 785 g en reposo en el extremo de un resorte horizontal ($k = 184$ N/m) se golpea con un martillo que le da una rapidez inicial de 2.26 m/s. Determine *a*) el periodo y la frecuencia del movimiento, *b*) la amplitud, *c*) la aceleración máxima, *d*) la posición en función del tiempo, *e*) la energía total, y *f*) la energía cinética cuando $x = 0.40A$ donde A es la amplitud.

40. (II) Una máquina de "pinball" utiliza como lanzador un resorte que se comprime 6.0 cm para lanzar una bola por una rampa a 15°. Suponga que la bola tiene masa $m = 25$ g y radio $r = 1.0$ cm y rueda sin deslizarse cuando sale del mecanismo lanzador. Si tiene una rapidez de 3.0 m/s, ¿cuál será la constante del resorte que se utiliza como lanzador?

14–5 Péndulo simple

41. (I) Un péndulo tiene un periodo de 1.35 s sobre la Tierra. ¿Cuál es su periodo en Marte, donde la aceleración de la gravedad es aproximadamente de 0.37 la de la Tierra?

42. (I) Un péndulo vibra 32 veces en exactamente 50 s. ¿Cuáles son *a*) su periodo y *b*) su frecuencia?

43. (II) Un péndulo simple tiene 0.30 m de largo. En $t = 0$ se suelta desde el reposo iniciando con un ángulo de 13°. Ignorando la fricción, ¿cuál será la posición angular del péndulo en *a*) $t = 0.35$ s, *b*) $t = 3.45$ s, y *c*) $t = 6.00$ s?

44. (II) ¿Cuál es el periodo de un péndulo simple de 53 cm de largo *a*) en la Tierra, y *b*) cuando se encuentra en un elevador que cae libremente?

45. (II) Un péndulo simple vibra con una amplitud de 10.0°. ¿Qué fracción del tiempo pasa entre +5.0° y −5.0°? Suponga MAS.

46. (II) El péndulo del reloj antiguo de pared del abuelo tiene una longitud de 0.9930 m. Si el reloj pierde 26 s por día, ¿cómo tendría usted que ajustar la longitud del péndulo?

47. (II) Obtenga una fórmula para la rapidez máxima $v_{\text{máx}}$ de la lenteja de un péndulo simple en términos de g, la longitud ℓ, y el ángulo máximo de oscilación $\theta_{\text{máx}}$.

* 14–6 Péndulo físico y péndulo de torsión

***48.** (II) Un péndulo consiste en una pequeña lenteja de masa M y en una cuerda uniforme de masa m y longitud ℓ. *a*) Determine una expresión para el periodo usando la aproximación de ángulo pequeño. *b*) ¿Cuál sería el error fraccional si usted utilizara la expresión para un péndulo simple, ecuación 14-12c?

***49.** (II) La rueda balancín de un reloj es un anillo delgado de radio 0.95 cm que oscila con una frecuencia de 3.10 Hz. Si una torca de 1.1×10^{-5} m · N ocasiona que la rueda gire 45°, calcule la masa de la rueda balancín.

***50.** (II) La pierna humana se puede comparar con un péndulo físico, con un periodo de oscilación "natural", para el cual caminar es más fácil. Considere la pierna como dos varillas unidas rígidamente entre sí en la rodilla; el eje para la pierna es la articulación en la cadera. La longitud de cada varilla es aproximadamente la misma: 55 cm. La varilla superior tiene una masa de 7.0 kg y la varilla inferior tiene una masa de 4.0 kg. *a*) Calcule el periodo de oscilación natural del sistema. *b*) Verifique su respuesta parándose sobre una silla y midiendo el tiempo para una o más oscilaciones completas de ida y vuelta. El efecto de una pierna más corta es, por supuesto, un periodo de oscilación más corto, lo cual permite un paso "natural" más rápido.

***51.** (II) *a*) Determine la ecuación de movimiento (para θ en función del tiempo) para un péndulo de torsión, figura 14-18, y demuestre que el movimiento es armónico simple. *b*) Demuestre que el periodo T es $T = 2\pi\sqrt{I/K}$. [La rueda balancín de un reloj mecánico es un ejemplo de un péndulo de torsión, en el que la torca restauradora es aplicada por un resorte en espiral].

***52.** (II) Una estudiante quiere usar una vara de un metro como péndulo. Planea taladrar un pequeño agujero a través de la vara y suspenderla desde un pasador liso unido a la pared (figura 14-34). ¿En qué punto de la vara debería taladrar el agujero para obtener el periodo más corto posible? ¿Qué tan corto puede ser el periodo de oscilación con una vara de un metro oscilando de esta manera?

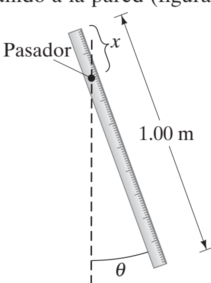


FIGURA 14–34 Problem 52.

***53.** (II) Una vara de un metro cuelga de su centro de un alambre delgado (figura 14-35a). Se gira y oscila con un periodo de 5.0 s. La vara se recorta a una longitud de 70.0 cm. Esta pieza de nuevo se equilibra en su centro y se pone a oscilar (figura 14-35b). ¿Con qué periodo oscilará ahora?

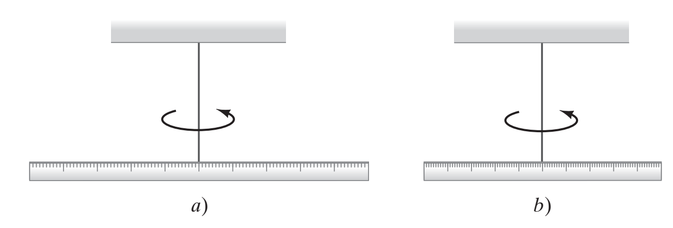


FIGURA 14–35 Problem 53.

***54.** (II) Un disco de aluminio de 12.5 cm de diámetro y 375 g de masa está montado sobre un eje vertical con muy baja fricción (figura 14-36). Un extremo de un resorte plano en espiral está unido al disco; y el otro extremo, a la base del aparato. El disco se pone en oscilación rotatoria con frecuencia de 0.331 Hz. ¿Cuál es la constante de torsión del resorte K ($\boldsymbol{\tau} = -K\theta$)?

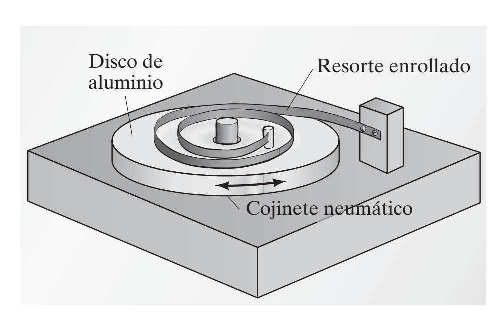


FIGURA 14–36 Problema 54.

***55.** (II) Un disco de madera contrachapada con radio de 20.0 cm y masa de 2.20 kg tiene un pequeño agujero taladrado a través de él, a 2.00 cm de su borde (figura 14-37). El disco cuelga de la pared por medio de un pasador metálico que pasa a través del agujero y se usa como un péndulo. ¿Cuál es el periodo de este péndulo para oscilaciones pequeñas?

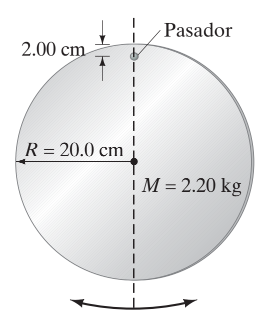


FIGURA 14–37 Problema 55.

14–7 Amortiguamiento

56. (II) Un bloque de 0.835 kg oscila en el extremo de un resorte cuya constante de resorte es $k = 41.0$ N/m. La masa se mueve en un fluido que ofrece una fuerza de resistencia $F = -bv$, donde $b = 0.662$ N · s/m. *a*) ¿Cuál es el periodo del movimiento? *b*) ¿Cuál es el decremento fraccional en amplitud por ciclo? *c*) Escriba el desplazamiento en función del tiempo, si en $t = 0, x = 0$, y en $t = 1.00$ s, $x = 0.120$ m.

57. (II) Estime cómo cambia la constante de amortiguamiento cuando el amortiguador de un automóvil envejece y el auto rebota tres veces después de pasar por un tope reductor de velocidad.

58. (II) Un péndulo físico consiste en una varilla uniforme de madera de 85 cm de longitud y masa de 240 g, que cuelga de un clavo cercano a uno de sus extremos (figura 14-38). El movimiento es amortiguado por la fricción en el pivote; la fuerza de amortiguamiento es aproximadamente proporcional a $d\theta/dt$. La varilla se pone en oscilación desplazándola 15° de su posición de equilibrio y liberándola desde el reposo. Después de 8.0 segundos, la amplitud de la oscilación se ha reducido a 5.5°. Si el desplazamiento angular puede escribirse como $\theta = Ae^{-\gamma t}\cos\omega' t$, encuentre *a*) γ, *b*) el periodo aproximado del movimiento, y *c*) el tiempo necesario para que la amplitud se reduzca a $\frac{1}{2}$ de su valor original.

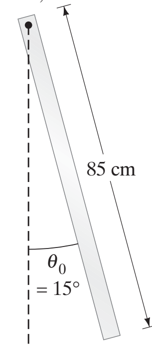


FIGURA 14–38
Problema 58.

59. (II) Un oscilador armónico amortiguado pierde 6.0% de su energía mecánica en cada ciclo. *a*) ¿En qué porcentaje difiere su frecuencia de la frecuencia natural $f_0 = (1/2\pi)\sqrt{k/m}$? *b*) ¿Después de cuántos periodos habrá disminuido la amplitud a $1/e$ de su valor original?

60. (II) Un resorte vertical con constante de 115 N/m soporta una masa de 75 g. La masa oscila en un tubo de líquido. Si a la masa se le da inicialmente una amplitud de 5.0 cm, se observa que la masa tiene una amplitud de 2.0 cm después de 3.5 s. Estime la constante de amortiguamiento b. Ignore las fuerzas de flotación.

61. (III) *a*) Demuestre que la energía mecánica total, $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$, en función del tiempo para un oscilador armónico ligeramente amortiguado, es

$$E = \tfrac{1}{2}kA^2e^{-(b/m)t} = E_0e^{-(b/m)t},$$

donde E_0 es la energía mecánica total en $t = 0$. (Suponga $\omega' \gg b/2m$.) *b*) Demuestre que la pérdida fraccional de energía por periodo es

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{2\pi b}{m\omega_0} = \frac{2\pi}{Q},$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ y $Q = m\omega_0/b$ se llama el **factor de calidad** o **valor Q** del sistema. Un valor mayor de Q significa que el sistema puede realizar oscilaciones por un tiempo mayor.

62. (III) Un deslizador sobre una vía de aire está conectado con resortes a ambos extremos de la vía (figura 14-39). Ambos resortes tienen la misma constante de resorte, k, y el deslizador tiene masa M. *a*) Determine la frecuencia de la oscilación, suponiendo que no hay amortiguamiento, si $k = 125$ N/m y $M = 215$ g. *b*) Se observa que después de 55 oscilaciones, la amplitud de la oscilación ha disminuido a la mitad de su valor original. Estime el valor de a, usando la ecuación 14-16. *c*) ¿Cuánto tiempo pasará para que la amplitud disminuya a un cuarto de su valor inicial?

FIGURA 14–39
Problema 62.

14–8 Oscilaciones forzadas: Resonancia

63. (II) *a*) Para una oscilación forzada en la resonancia ($\omega = \omega_0$), ¿cuál es el valor del ángulo de fase ϕ_0 en la ecuación 14-22? *b*) ¿Cuál es entonces el desplazamiento cuando la fuerza impulsora F_{ext} es máxima y cuando $F_{ext} = 0$? *c*) ¿Cuál es la diferencia de fase (en grados) entre la fuerza impulsora y el desplazamiento en este caso?

64. (II) Diferencie la ecuación 14-23 para mostrar que la amplitud de resonancia alcanza su máximo en

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}}.$$

65. (II) Un automóvil de 1150 kg tiene un resorte con $k = 16{,}000$ N/m. Uno de los neumáticos no está adecuadamente balanceado, ya que tiene una pequeña masa adicional en un lado, comparándolo con el otro, lo cual ocasiona que el auto vibre a ciertas rapideces. Si el radio del neumático es de 42 cm, ¿con qué rapidez vibrará más la rueda?

****66.** (II) Construya una curva de resonancia exacta, de $\omega = 0$ a $\omega = 2\omega_0$ para $Q = 6.0$.

****67.** (II) La amplitud de un oscilador armónico impulsado alcanza un valor de 23.7 F_0/m a una frecuencia de resonancia de 382 Hz. ¿Cuál es el valor Q de este sistema?

68. (III) Por sustitución directa, demuestre que la ecuación 14-22, con las ecuaciones 14-23 y 14-24, es una solución de la ecuación de movimiento (ecuación 14-21) para el oscilador forzado. [*Sugerencia*: Para encontrar sen ϕ_0 y cos ϕ_0 a partir de tan ϕ_0, dibuje un triángulo rectángulo].

****69.** (III) Considere un péndulo simple (lenteja es una masa puntual) de 0.50 m de longitud con una U de 350. *a*) ¿Cuánto tiempo se requiere para que la amplitud (que se supone pequeña) disminuya en dos tercios? *b*) Si la amplitud es de 2.0 cm y la lenteja tiene masa de 0.27 kg, ¿cuál es la tasa de la pérdida de energía inicial del péndulo en watts? *c*) Si se va a estimular la resonancia con una fuerza impulsora senoidal, ¿qué tan cerca debe estar la frecuencia impulsora de la frecuencia natural del péndulo (de $\Delta f = f - f_0$)?

Problemas generales

70. Una persona de 62 kg salta desde una ventana a una red de bomberos que está 20.0 m abajo y la estira 1.1 m. Suponga que la red se comporta como un resorte simple. *a*) Calcule cuánto se estiraría si la misma persona estuviera acostada sobre ella. *b*) ¿Cuánto se estiraría si la persona saltara desde 38 metros?

71. El parachoques, absorbedor de energía, de un automóvil tiene una constante de resorte de 430 N/m. Encuentre la compresión máxima del parachoques si el automóvil, con masa de 1300 kg, choca contra un muro a una rapidez de 2.0 m/s (aproximadamente 5 mi/h).

72. La longitud de un péndulo simple es de 0.63 m, la lenteja del péndulo tiene una masa de 295 g, y se libera a un ángulo de 15° con respecto a la vertical. *a*) ¿Con qué frecuencia oscilará? *b*) ¿Cuál es la rapidez de la lenteja del péndulo cuando pasa por el punto más bajo de su oscilación? Suponga un MAS. *c*) ¿Cuál es la energía total almacenada en esta oscilación suponiendo que no hay pérdidas de energía?

73. Un péndulo simple oscila con frecuencia f. ¿Cuál es su frecuencia si acelera a 0.50 g *a*) hacia arriba y *b*) hacia abajo?

74. Una masa de 0.650 kg vibra de acuerdo con la ecuación $x = 0.25$ sen $(5.50t)$ donde x está en metros y t está en segundos. Determine *a*) la amplitud, *b*) la frecuencia, *c*) el periodo, *d*) la energía total, y *e*) la energía cinética y la energía potencial cuando $x = 15$ cm.

75. *a*) Una grúa levanta un automóvil de 1350 kg en un depósito de chatarra. El cable de acero de la grúa es de 20.0 m de largo y tiene un diámetro de 6.4 mm. Si el auto empieza a oscilar en el extremo del cable, ¿cuál es el periodo de la oscilación? [*Sugerencia*: Refiérase a la tabla 12-1.] *b*) ¿Qué amplitud de la oscilación hará que el cable se rompa? (Véase la tabla 12-2, y suponga que la ley de Hooke es válida hasta el punto de ruptura).

76. Dentro de una molécula de ADN en un sitio específico, puede hacerse que un átomo de oxígeno realice un movimiento armónico simple, cuando se ilumina con luz infrarroja. Mediante un enlace químico parecido a un resorte, el átomo de oxígeno se enlaza con un átomo de fósforo, el cual se une rígidamente a la columna de ADN. La oscilación del átomo de oxígeno ocurre con frecuencia $f = 3.7 \times 10^{13}$ Hz. Si el átomo de oxígeno en este sitio se reemplaza químicamente con un átomo de azufre, la constante de resorte del enlace no cambia (el azufre está justo debajo del oxígeno en la tabla periódica). Prediga la frecuencia para una molécula de ADN después de la sustitución del azufre.

77. Un péndulo de laboratorio tiene un periodo de exactamente 2.000 segundos; cada oscilación en un sentido tarda 1.000 s. ¿Cuál es la longitud de este péndulo en Austin, Texas, donde $g = 9.793$ m/s^2? Si el péndulo se mueve a París, donde $g = 9.809$ m/s^2, ¿en cuántos milímetros debemos alargar el péndulo? ¿Cuál es la longitud de este péndulo sobre la Luna, donde $g = 1.62$ m/s^2?

78. Una balsa de madera de 320 kg flota en un lago. Cuando un hombre de 75 kg se pone de pie en la balsa, ésta se hunde 3.5 cm en el agua. Cuando el hombre sale de ella, la balsa oscila durante cierto tiempo. *a*) ¿Cuál es la frecuencia de la oscilación? *b*) ¿Cuál es la energía total de oscilación (despreciando el amortiguamiento)?

79. ¿A qué desplazamiento a partir del equilibrio, la rapidez de un OAS es la mitad de su valor máximo?

80. Un trampolín oscila con movimiento armónico simple con frecuencia de 2.5 ciclos por segundo. ¿Cuál es la amplitud máxima con que el extremo del trampolín puede oscilar para que una pequeña piedra colocada en ese punto (figura 14-40) no pierda contacto con el trampolín durante la oscilación?

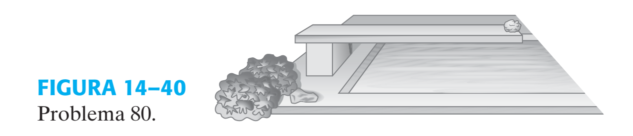


FIGURA 14–40
Problema 80.

81. Un bloque rectangular de madera flota en un lago en calma. Demuestre que, si se ignora la fricción, cuando el bloque se empuja suavemente hacia abajo en el agua y luego se suelta, vibrará con MAS. Además, determine una ecuación para la constante de fuerza.

82. Un automóvil de 950 kg golpea un gran resorte a una rapidez de 25 m/s (figura 14-41) y lo comprime 5.0 m. *a*) ¿Cuál es la constante del resorte? *b*) ¿Cuánto tiempo está en contacto el automóvil con el resorte antes de rebotar en la dirección opuesta?

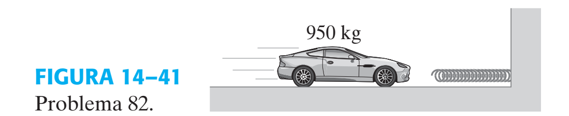


FIGURA 14–41
Problema 82.

83. Una mesa de 1.60 kg está soportada sobre cuatro resortes. Un trozo de arcilla de 0.80 kg se mantiene por encima de la mesa y se deja caer de manera que golpea la mesa con una rapidez de 1.65 m/s (figura 14-42). La arcilla sufre una colisión inelástica con la mesa y ambas oscilan verticalmente. Después de un largo tiempo la mesa llega al reposo 6.0 cm debajo de su posición original. *a*) ¿Cuál es la constante de resorte efectiva de los cuatro resortes tomados en conjunto? *b*) ¿Con qué amplitud máxima oscila la plataforma?

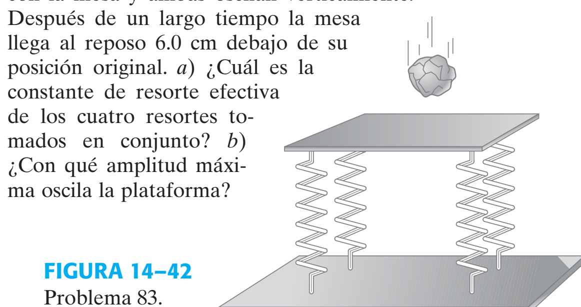
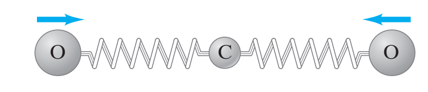


FIGURA 14–42
Problema 83.

84. En algunas moléculas diatómicas, la fuerza que cada átomo ejerce sobre el otro puede aproximarse por la expresión $F = -C/r^2 + D/r^3$, donde r es la separación atómica C y D son constantes positivas. *a*) Grafique F versus r desde $r = 0.8\ D/C$ a $r = 4D/C$. *b*) Demuestre que el equilibrio ocurre en $r = r_0 = D/C$. *c*) Sea $\Delta r = r - r_0$ un pequeño desplazamiento desde el equilibrio, donde $\Delta r \ll r_0$. Demuestre que para tales desplazamientos pequeños, el movimiento es aproximadamente armónico simple, y *d*) determine la constante de fuerza. *e*) ¿Cuál es el periodo de tal movimiento? [*Sugerencia*: Considere que un átomo se mantiene en reposo].

85. Un resorte con una masa unida a su extremo se estira una distancia x_0 desde su posición de equilibrio y luego se libera. ¿A qué distancia de la posición de equilibrio tendrá la masa *a*) una velocidad igual a la mitad de su velocidad máxima y *b*) una aceleración igual a la mitad de su aceleración máxima?

86. El bióxido de carbono es una molécula lineal. Los enlaces carbono-oxígeno en esta molécula actúan en forma muy parecida a un resorte. La figura 14-43 muestra una manera posible en que pueden vibrar los átomos de oxígeno en una molécula: los átomos de oxígeno vibran simétricamente hacia afuera y hacía adentro; mientras que el átomo central de carbono permanece en reposo. Por lo tanto, cada átomo de oxígeno actúa como un oscilador armónico simple con una masa igual a la masa de un átomo de oxígeno. Se observa que esta oscilación ocurre con una frecuencia $f = 2.83 \times 10^{13}$ Hz. ¿Cuál es la constante de resorte del enlace C—O?



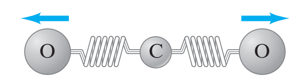


FIGURA 14–43
Problema 86, la molécula de CO_2.

87. Imagine que se perfora un agujero circular de 10 cm de diámetro a través de toda la Tierra, pasando por su centro (figura 14-44). En un extremo del agujero se deja caer una manzana. Demuestre que si se supone que la Tierra tiene densidad constante, el movimiento subsecuente de la manzana es armónico simple. ¿Cuánto tiempo le tomará a la manzana regresar? Suponga que podemos ignorar todos los efectos de fricción. [*Sugerencia*: Véase el apéndice D].

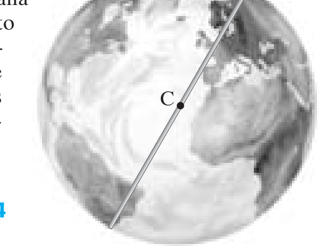




FIGURA 14–44
Problema 87.

88. Una varilla delgada recta uniforme de longitud $\ell = 1.00$ m y masa $m = 215$ g, cuelga de un pivote en un extremo. *a*) ¿Cuál es su periodo para oscilaciones de pequeña amplitud. *b*) ¿Cuál es la longitud de un péndulo simple que tenga el mismo periodo?

89. Una masa m se coloca suavemente en el extremo de un resorte que cuelga libremente. Después la masa cae 32.0 cm antes de detenerse y comienza a elevarse. ¿Cuál es la frecuencia de la oscilación?

90. Un niño de masa m se sienta en la superficie de una tabla con masa de $M = 35$ kg, la cual a la vez está en reposo sobre el piso horizontal de una pizzería. La tabla está unida a un resorte horizontal con una constante $k = 430$ N/m (el otro extremo se une a una pared fija, figura 14-45). El coeficiente de fricción estática entre el niño y la superficie de la tabla es $\mu = 0.40$. La intención del propietario del establecimiento es que, al desplazarse desde la posición de equilibrio y luego liberarse, la tabla y el niño (sin deslizamiento entre ambos) tengan un MAS con amplitud $A = 0.50$ m. ¿Debería haber una restricción de peso para este recorrido? Si es así, ¿cuál sería?

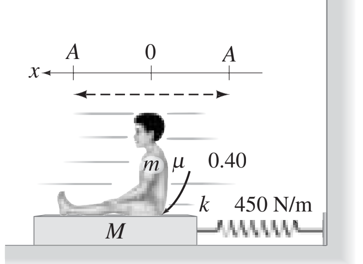


FIGURA 14–45 Problema 90.

91. Estime la constante de resorte efectiva de un trampolín.

92. En la sección 14-5, la oscilación de un péndulo simple (figura 14-46) se observa como un movimiento lineal a lo largo de una longitud en arco x y se analiza mediante $F = ma$. De manera alternativa, el movimiento del péndulo puede considerarse como movimiento rotacional con respecto a su punto de apoyo y analizarse usando $\tau = I\alpha$. Realice este análisis alternativo y demuestre que

$$\theta(t) = \theta_{\text{máx}} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t + \phi\right),$$

donde $\theta(t)$ es el desplazamiento angular del péndulo a partir de la vertical en el tiempo t, siempre que su valor máximo sea menor que aproximadamente 15°.

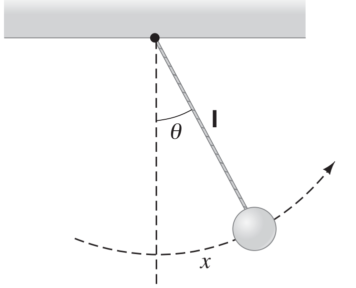


FIGURA 14–46 Problema 92.

*Problemas numéricos/por computadora

*__93.__ (II) Una masa m sobre una superficie sin fricción se une a un resorte con constante k como se muestra en la figura 14-47. Se observa que el sistema masa-resorte ejecuta movimiento armónico simple con periodo T. La masa m se cambia varias veces y el periodo T asociado se mide en cada caso, generando la siguiente tabla de datos:

Masa m (kg)	Periodo T (s)
0.5	0.445
1.0	0.520
2.0	0.630
3.0	0.723
4.5	0.844

a) Empezando con la ecuación 14-7b muestre por qué se espera que una gráfica de T^2 versus m produzca una línea recta. ¿Cómo puede determinarse k a partir de la pendiente de la recta? ¿Cuánto se espera que sea la intersección en y de la recta? *b*) Usando los datos de la tabla, grafique T^2 versus m y demuestre que esta gráfica produce una recta. Determine la pendiente y la intersección en y (diferente de cero). *c*) Demuestre que una intersección en y diferente de cero puede esperarse teóricamente en nuestra gráfica si, en vez de tan sólo utilizar m para la masa en la ecuación 14-7b, usamos $m + m_0$, donde m_0 es una constante; es decir, repita el inciso *a*) usando $m + m_0$ para la masa en la ecuación 14-7b. Luego use el resultado de este análisis para determinar k y m_0 a partir de la pendiente y la intersección en y de su gráfica. *d*) Dé una interpretación física para m_0, una masa que parece estar oscilando, además de la masa m unida.

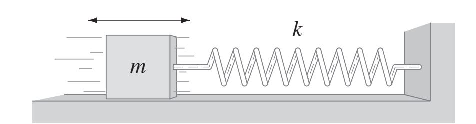


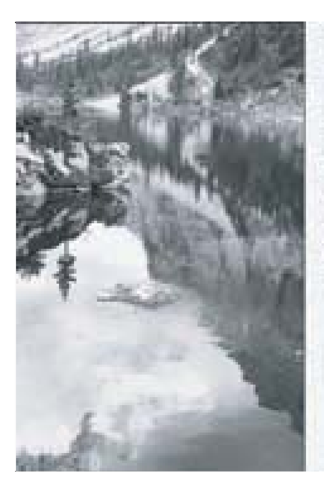
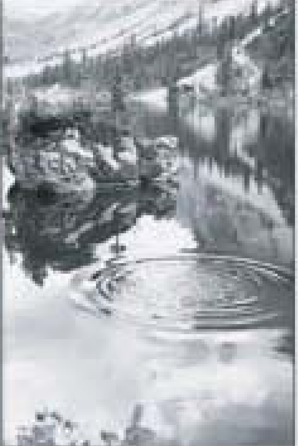
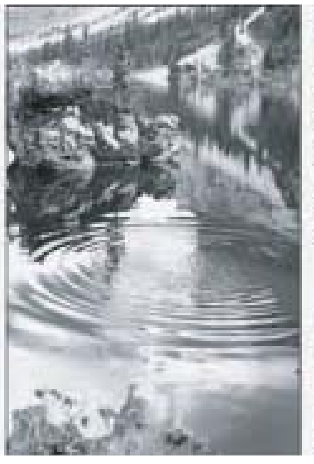
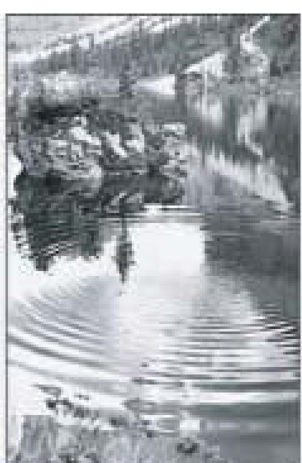
FIGURA 14–47 Problema 93.

*__94.__ (III) *Amortiguamiento proporcional a v^2*. Suponga que el oscilador del ejemplo 14-5 es amortiguado por una fuerza proporcional al cuadrado de la velocidad, $F_{\text{amortiguamiento}} = -cv^2$, donde $c = 0.275$ kg/m es una constante. Integre numéricamente† la ecuación diferencial de $t = 0$ a $t = 2.00$ s para una exactitud del 2% y grafique sus resultados.

† Véase la sección 2–9.

Respuestas a los ejercicios

A: *a*), *c*), *d*).
B: *b*).
C: *c*).
D: *b*), *d*).
E: *c*).
F: *c*).
G: Todas son más grandes.
H: *a*).
I: *c*).
J: *a*) 25 cm; *b*) 2.0 s.

Las ondas, como estas olas, se dispersan hacia fuera a partir de una fuente. En este caso, la fuente es un pequeño sitio del agua que oscila de arriba a abajo, brevemente, en donde se lanzó una piedra (fotografía izquierda). Otros tipos de ondas incluyen ondas en una soga o una cuerda, las cuales también se producen mediante vibración. En general, las ondas se alejan de su fuente, aunque también son de interés aquellas que, al parecer, permanecen quietas ("ondas estacionarias"). Las ondas se reflejan y pueden interferir entre sí cuando pasan por algún punto al mismo tiempo.

CAPÍTULO 15

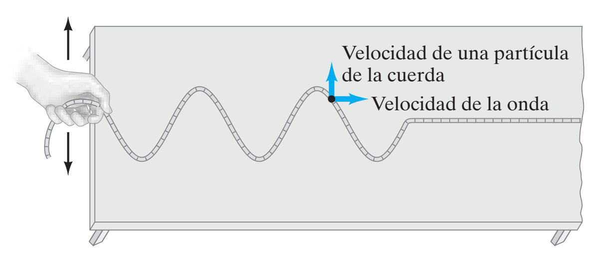
Movimiento ondulatorio

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!
Usted lanza una piedra hacia un estanque y las olas se dispersan en círculos

a) Las ondas llevan agua hacia fuera, alejándose del punto donde cayó la piedra. El agua en movimiento transporta energía hacia fuera.
b) Las ondas sólo hacen que el agua se mueva arriba y abajo. No se transporta energía hacia fuera desde el sitio donde cayó la piedra.
c) Las ondas sólo hacen que el agua se mueva arriba y abajo, pero las ondas sí transportan energía hacia fuera, alejándose del sitio donde cayó la piedra.

Cuando usted lanza una piedra a un lago o una alberca, se forman ondas circulares que se mueven hacia fuera, como se observa en las fotografías de arriba. Las ondas también viajarán a lo largo de una cuerda extendida sobre una mesa si usted hace vibrar un extremo de ida y vuelta, como se ilustra en la figura 15-1. Las olas así como las ondas en una cuerda son dos ejemplos comunes de **ondas mecánicas**, que se propagan como oscilaciones de materia. En los próximos capítulos se estudiarán otros tipos de ondas, incluidas las ondas electromagnéticas y la luz.

FIGURA 15–1 Onda que viaja en una cuerda. La onda viaja hacia la derecha a lo largo de la cuerda. Las partículas de la cuerda oscilan de ida y vuelta sobre la mesa.



CONTENIDO

Si alguna vez ha observado las olas oceánicas moverse hacia la playa antes de romper, quizá se haya preguntado si esas olas llevaban agua desde sitios lejanos del mar hacia la orilla. Sin embargo, no es así.† Las olas se mueven con una velocidad reconocible. Pero cada partícula (o molécula) del agua en sí misma simplemente oscila en torno a un punto de equilibrio. Esto se demuestra claramente al observar las hojas sobre un estanque conforme pasan las ondas. Las hojas (o un corcho) no son transportadas por las ondas, sino simplemente oscilan en torno a un punto de equilibrio porque éste es el movimiento del agua en sí.

EJEMPLO CONCEPTUAL 15–1 **Onda versus la velocidad de partícula.** ¿La velocidad de una onda que se mueve a lo largo de una cuerda es la misma que la velocidad de una partícula de la cuerda? Véase la figura 15-1.

RESPUESTA No. Las dos velocidades son diferentes, tanto en magnitud como en dirección. La onda sobre la cuerda de la figura 15-1 se mueve hacia la derecha a lo largo de la mesa, pero cada trozo de la cuerda sólo vibra de un lado al otro. (Como es evidente, la cuerda no viaja en la dirección en que lo hace la onda).

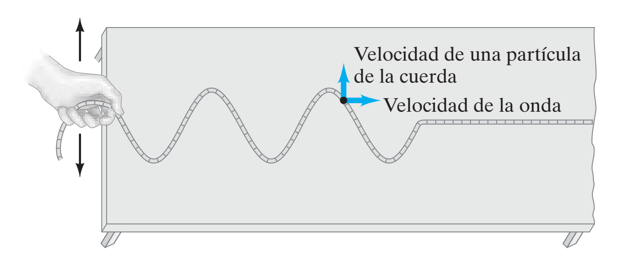


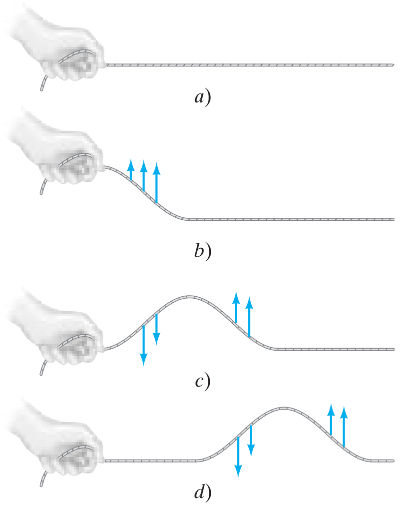
FIGURA 15–1 (repetida) Onda que viaja en una cuerda. La onda viaja hacia la derecha a lo largo de la cuerda. Las partículas de la cuerda oscilan de ida y vuelta sobre la mesa.

Las ondas se pueden desplazar a través de grandes distancias, pero el medio (ya sea el agua o la cuerda) en sí sólo tiene un movimiento limitado y oscila en torno a un punto de equilibrio como en el movimiento armónico simple. Por ende, aunque una onda no es materia, el patrón de onda puede viajar en la materia. Una onda consiste en oscilaciones que se mueven sin portar materia con ellas.

Las ondas portan energía de un lugar a otro. La energía se imparte a una onda de agua, por ejemplo, mediante una piedra que se lanza al agua o por el viento que sopla mar adentro. La energía se transporta mediante ondas a la playa. La mano en la figura 15-1, al oscilar, transfiere energía a la cuerda, y esa energía es transportada por la cuerda y se puede transferir a un objeto en el otro extremo. Todas las formas de ondas viajeras transportan energía.

EJERCICIO A Regrese a la pregunta de inicio del capítulo, página 395, y respóndala de nuevo ahora. Intente explicar por qué quizá la contestó de manera diferente la primera vez.

FIGURA 15–2 Movimiento de un pulso de onda hacia la derecha. Las flechas indican la velocidad de las partículas de la cuerda.



15–1 Características del movimiento ondulatorio

Observemos un poco más de cerca cómo se forma una onda y cómo "viaja". Primero observemos un solo brinco de la onda o **pulso**. En una cuerda se puede formar un pulso mediante un movimiento rápido de arriba a abajo de la mano, figura 15-2. La mano tira de un extremo de la cuerda. Puesto que la sección final está unida a secciones adyacentes, éstas también sienten una fuerza ascendente y también comienzan a moverse hacia arriba. Conforme cada sección sucesiva de la cuerda se mueve hacia arriba, la cresta de la onda se mueve hacia fuera a lo largo de la cuerda. Mientras tanto, la sección final de la cuerda regresa a su posición original mediante el movimiento de la mano. Conforme cada sección sucesiva de la cuerda llega a su posición pico, también recibe de nuevo un tirón hacia abajo por la tensión de la sección adyacente de la cuerda. Así, la fuente de un pulso de onda viajera es una perturbación, y las fuerzas de cohesión entre secciones adyacentes de la cuerda hacen viajar al pulso. Las ondas en

†Esta situación no debe confundirse con el "rompimiento" de las olas oceánicas, que ocurre cuando una onda interactúa con el suelo en aguas poco profundas y, por consiguiente, ya no es una onda simple.

otros medios se crean y se propagan hacia fuera en forma similar. Un ejemplo dramático de un pulso de onda es un tsunami o maremoto que se crea por un terremoto en la corteza de la Tierra bajo el océano. Por otra parte, el estampido que usted escucha cuando se azota una puerta es un pulso de onda sonora.

Una **onda continua** o **periódica**, como la que se representa en la figura 15-1, tiene como su fuente una perturbación que es continua y oscilatoria; esto es, la fuente es una *vibración* u *oscilación*. En la figura 15-1, una mano hace oscilar un extremo de la cuerda. Las ondas de agua se pueden producir mediante algún objeto en vibración en la superficie, como su mano; el agua también vibra cuando sopla el viento o cuando se lanza una piedra hacia ella. Un diapasón o la membrana de un tambor que vibra originan ondas sonoras en el aire. Más adelante veremos que cargas eléctricas oscilatorias originan ondas de luz. De hecho, casi cualquier objeto en vibración envía ondas.

Así, la fuente de cualquier onda es una vibración. Es una *vibración* que se propaga hacia fuera y, de esta forma, constituye la onda. Si la fuente vibra de forma sinusoidal con MAS, entonces la onda en sí —cuando el medio es perfectamente elástico— tendrá una forma sinusoidal tanto en el espacio como en el tiempo. (1) En el espacio: si usted toma una fotografía de la onda en el espacio en un instante dado, la onda tendrá la forma de un seno o coseno como función de la posición. (2) En el tiempo: si usted observa el movimiento del medio en un lugar determinado durante un largo periodo de tiempo —por ejemplo, si observa entre dos postes cercanos de un muelle o por la claraboya de un barco mientras las olas pasan por ahí—, el movimiento arriba y abajo de ese pequeño segmento de agua será movimiento armónico simple. El agua se mueve arriba y abajo de forma sinusoidal en el tiempo.

En la figura 15-3 se muestran algunas de las cantidades importantes usadas para describir una onda sinusoidal periódica. Los puntos altos en una onda se llaman *crestas*; los puntos bajos, *valles*. La **amplitud**, A, es la altura máxima de una cresta, o la profundidad de un valle, en relación con el nivel normal (o de equilibrio). El balanceo total de una cresta a un valle es el doble de la amplitud. La distancia entre dos crestas sucesivas se llama **longitud de onda**, λ (letra griega lambda). La longitud de onda también es igual a la distancia entre *cualesquiera* dos puntos idénticos sucesivos en la onda. La **frecuencia**, f, es el número de crestas o ciclos completos que pasan por un punto dado por unidad de tiempo. El **periodo**, T, es igual a $1/f$ y es el tiempo transcurrido entre dos crestas sucesivas que pasan por el mismo punto en el espacio.

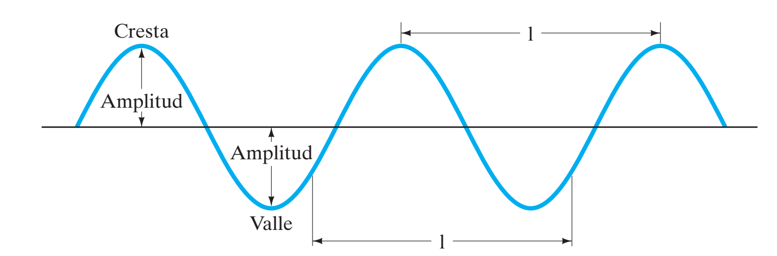


FIGURA 15–3 Características de una onda continua de una sola frecuencia que se mueve en el espacio.

La **velocidad de onda**, v, es la velocidad a la que las crestas de la onda (o cualquier otra parte de la forma de onda) se mueven hacia delante. La velocidad de onda debe distinguirse de la velocidad de una partícula del medio, como se vio en el ejemplo 15-1

Una cresta de onda viaja una distancia de una longitud de onda, λ, en un tiempo igual a un periodo, T. Por lo tanto, la velocidad de la onda es $v = \lambda/T$. Entonces, dado que $1/T = f$,

$$v = \lambda f. \qquad \textbf{(15–1)}$$

Por ejemplo, suponga que una onda tiene una longitud de onda de 5 m y una frecuencia de 3 Hz. Puesto que tres crestas pasan por un punto dado por segundo, y las crestas están separadas 5 m, la primera cresta (o cualquiera otra parte de la onda) debe recorrer una distancia de 15 m durante 1 s. De manera que la velocidad de la onda es 15 m/s.

EJERCICIO B Usted observa una ola que pasa por el extremo de un muelle y cuyas crestas se suceden aproximadamente cada 0.5 s. Por lo tanto, *a*) la frecuencia es 0.5 Hz; *b*) la velocidad es 0.5 m/s; *c*) la longitud de onda es 0.5 m; *d*) el periodo es 0.5 s.

15–2 Tipos de ondas: Transversales y longitudinales

Cuando una onda viaja por una cuerda (por ejemplo, de izquierda a derecha como en la figura 15-1), las partículas de la cuerda vibran arriba y abajo en una dirección transversal (esto es, perpendicular) al movimiento de la onda. Tal onda se llama **onda transversal** (figura 15-4a). Existe otro tipo de onda conocida como **onda longitudinal**. En una onda longitudinal la vibración de las partículas del medio es *a lo largo* de la dirección del movimiento de la onda. Las ondas longitudinales se forman fácilmente en un resorte estirado o *Slinky* al comprimir y expandir alternadamente un extremo. Esto se muestra en la figura 15-4b y se puede comparar con la onda transversal de la figura 15-4a.

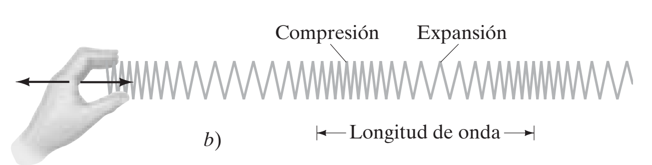


FIGURA 15–4 *a*) Onda transversal; *b*) onda longitudinal.

Una serie de compresiones y expansiones se propagan a lo largo del resorte. Las *compresiones* son aquellas áreas donde las espiras están momentáneamente cercanas. Las *expansiones* (a veces llamadas *rarefacciones*) son regiones donde las espiras están momentáneamente separadas. Las compresiones y las expansiones corresponden a las crestas y los valles de una onda transversal.

Un ejemplo importante de una onda longitudinal es una onda sonora en el aire. Por ejemplo, una membrana de tambor en vibración comprime y rarifica alternadamente el aire en contacto con ella, lo que produce una onda longitudinal que viaja hacia fuera en el aire, como se observa en la figura 15-5.

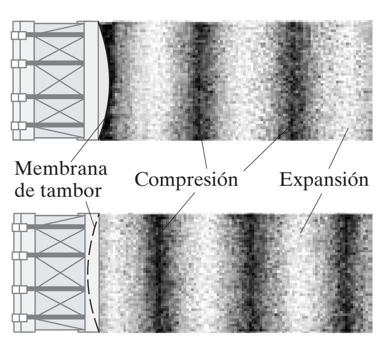


FIGURA 15–5 Producción de una onda sonora, que es longitudinal, que se muestra en dos momentos en el tiempo separados aproximadamente medio periodo $\left(\frac{1}{2}T\right)$.

Como en el caso de las ondas transversales, cada sección del medio en el que pasa una onda longitudinal oscila una pequeña distancia, mientras que la onda puede viajar grandes distancias. La longitud de onda, la frecuencia y la velocidad de onda tienen significado para una onda longitudinal. La longitud de onda es la distancia entre compresiones (o expansiones) sucesivas y la frecuencia es el número de compresiones (o expansiones) que pasan por un punto dado por segundo. La velocidad de onda es la velocidad con la que parece moverse cada compresión; es igual al producto de la longitud de onda y la frecuencia, $v = \lambda f$ (ecuación 15-1).

Una onda longitudinal puede representarse trazando una gráfica de la densidad de las moléculas de aire (o las espiras de un Slinky) versus la posición en un instante dado, como se muestra en la figura 15-6. Tal representación gráfica hace sencillo ilustrar lo que ocurre. Note que la gráfica se parece mucho a una onda transversal.

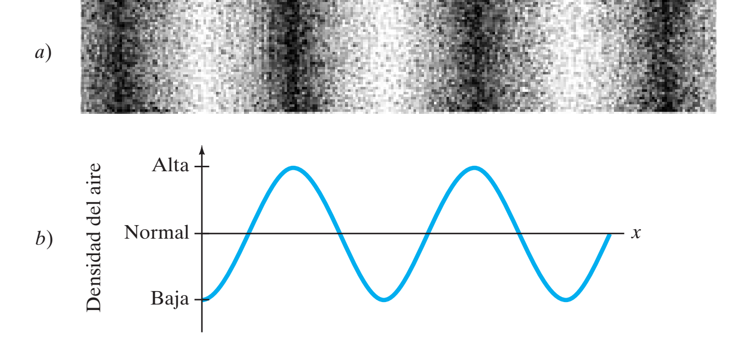


FIGURA 15–6 *a*) Una onda longitudinal con *b*) su representación gráfica en un instante particular.

Velocidad de las ondas transversales

La velocidad de una onda depende de las propiedades del medio en el que viaja. La velocidad de una onda transversal en una cuerda estirada, por ejemplo, depende de la tensión en la cuerda, F_T, y de la masa por unidad de longitud de la cuerda, μ (letra griega mu, donde $\mu = m/\ell$). Para ondas de amplitud pequeña, la relación es

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}. \qquad \left[\begin{array}{l}\text{onda transversal}\\ \text{en una cuerda}\end{array}\right] \qquad \textbf{(15–2)}$$

Antes de detenernos en la obtención de esta fórmula, vale la pena hacer notar que, al menos cualitativamente, la fórmula tiene sentido sobre la base de la mecánica newtoniana. Esto es, se espera que la tensión esté en el numerador y la masa por unidad de longitud en el denominador. ¿Por qué? Porque, cuando la tensión es mayor, se espera que la velocidad sea mayor dado que cada segmento de cuerda está en contacto más estrecho con el segmento vecino. Y, cuanto mayor sea la masa por unidad de longitud, más inercia tendrá la cuerda y se espera que la onda se propague más lentamente.

EJERCICIO C Una onda parte del extremo izquierdo de una cuerda larga (véase la figura 15-1) cuando alguien agita la cuerda de ida y vuelta a una tasa de 2.0 Hz. Se observa que la onda se mueve hacia la derecha a 4.0 m/s. Si la frecuencia aumenta de 2.0 a 3.0 Hz, la nueva rapidez de la onda es *a*) 1.0 m/s, *b*) 2.0 m/s, *c*) 4.0 m/s, *d*) 8.0 m/s, *e*) 16.0 m/s.

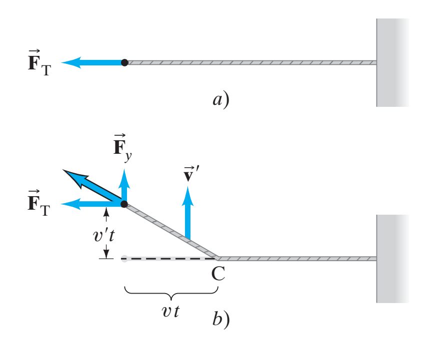


FIGURA 15–7 Diagrama de pulso de onda simple en una cuerda para la deducción de la ecuación 15-2. El vector que se muestra en *b*) como el resultante de $\vec{F}_T + \vec{F}_y$ tiene que dirigirse a lo largo de la cuerda porque esta última es flexible. (El diagrama no está a escala: suponemos que $v' \ll v$; el ángulo ascendente de la cuerda está exagerado para dar mayor claridad).

Es posible hacer una deducción sencilla de la ecuación 15-2 usando un modelo simple de una cuerda bajo tensión F_T, como se muestra en la figura 15-7a. Se tira de la cuerda hacia arriba con una rapidez v' utilizando la fuerza F_y. Como se ilustra en la figura 15-7b, todos los puntos de la cuerda a la izquierda del punto C se mueven hacia arriba con la rapidez v', y los que están a la derecha aún están en reposo. La rapidez de propagación, v, de este pulso de onda es la rapidez del punto C, el borde frontal del pulso. El punto C se mueve hacia la derecha una distancia vt en un tiempo t, mientras que el extremo de la cuerda se mueve hacia arriba una distancia $v't$. Por triángulos similares se tiene la relación aproximada

$$\frac{F_T}{F_y} = \frac{vt}{v't} = \frac{v}{v'},$$

que es exacta para desplazamientos pequeños ($v't \ll vt$), de manera que F_T no cambia en forma apreciable. Como se vio en el capítulo 9, el impulso dado a un objeto es igual al cambio de su cantidad de movimiento. Durante el tiempo t, el impulso total hacia arriba es $F_y t = (v'/v)F_T t$. El cambio en la cantidad de movimiento de la cuerda, Δp, es la masa de la cuerda que se mueve hacia arriba por su velocidad. Dado que el segmento de cuerda que se mueve hacia arriba tiene masa igual a la masa por unidad de longitud μ por su longitud vt, tenemos

$$F_y t = \Delta p$$

$$\frac{v'}{v} F_T t = (\mu vt)v'.$$

Al despejar v encontramos $v = \sqrt{F_T/\mu}$ que es la ecuación 15-2. Aunque se obtuvo para un caso especial, es válida para cualquier forma de onda, pues se puede considerar que otras formas están constituidas por muchas pequeñas longitudes. Sin embargo, es válida sólo para pequeños desplazamientos (como en el caso de nuestra deducción). Los experimentos están en concordancia con este resultado obtenido a partir de la mecánica newtoniana.

EJEMPLO 15–2 **Pulso en un alambre.** Un alambre de cobre de 80.0 cm de largo y 2.10 mm de diámetro se estira entre dos postes. Una ave se posa en el punto central del alambre, enviando un pequeño pulso de onda en ambas direcciones. Los pulsos se reflejan en los extremos y regresan a la ubicación del ave 0.750 segundos después de que ésta se posó. Determine la tensión en el alambre.

PLANTEAMIENTO A partir de la ecuación 15-2, la tensión está dada por $F_T = \mu v^2$. La rapidez v es la distancia dividida entre el tiempo. La masa por unidad de longitud μ se calcula a partir de la densidad del cobre y las dimensiones del alambre.

SOLUCIÓN Cada pulso de onda recorre 40.0 m hasta el poste y regresa (= 80.0 m) en 0.750 s. Por lo tanto, su rapidez es $v = (80.0\text{ m})/(0.750\text{ s}) = 107\text{ m/s}$. La densidad del cobre (tabla 13-1) se toma como $8.90 \times 10^3\text{ kg/m}^3$. El volumen del alambre de cobre es el área transversal (πr^2) por la longitud ℓ, y la masa del alambre es el volumen por la densidad: $m = \rho(\pi r^2)$ para un alambre de radio r y longitud ℓ. Entonces, $\mu = m/\ell$ es

$$\mu = \rho\pi r^2\ell/\ell = \rho\pi r^2 = \left(8.90 \times 10^3\,\text{kg/m}^3\right)\pi\left(1.05 \times 10^{-3}\,\text{m}\right)^2 = 0.0308\,\text{kg/m}.$$

Por lo tanto, la tensión es $F_T = \mu v^2 = (0.0308\,\text{kg/m})(107\,\text{m/s})^2 = 353\,\text{N}$.

Velocidad de las ondas longitudinales

La velocidad de una onda longitudinal tiene una forma similar a la de una onda transversal en una cuerda (ecuación 15-2); esto es,

$$v = \sqrt{\frac{\text{factor de fuerza elástica}}{\text{factor de inercia}}}.$$

En particular, para una onda longitudinal que viaja por una varilla sólida larga,

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \qquad \left[\begin{array}{l}\text{onda longitudinal}\\ \text{en una varilla larga}\end{array}\right] \qquad \textbf{(15–3)}$$

donde E es el módulo elástico o módulo de Young (sección 12-4) del material y ρ es su densidad. Para una onda longitudinal que viaja en un líquido o gas,

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}, \qquad \left[\begin{array}{l}\text{onda longitudinal}\\ \text{en un fluido}\end{array}\right] \qquad \textbf{(15–4)}$$

donde B es el módulo volumétrico (sección 12-4) y ρ de nuevo es la densidad.

FÍSICA APLICADA
Percepción del espacio en los animales que usan ondas sonoras

EJEMPLO 15–3 **Ecolocalización.** La ecolocalización es una forma de percepción sensorial que usan animales como los murciélagos, las ballenas y los delfines. El animal emite un pulso de sonido (una onda longitudinal) que, después de reflejarse en los objetos, regresa y es detectado por el animal. Las ondas de ecolocalización pueden tener frecuencias de aproximadamente 100,000 Hz. *a*) Estime la longitud de onda de una onda de ecolocalización de un animal marino. *b*) Si un obstáculo está a 100 m del animal, ¿cuánto tiempo después de que el animal emite una onda se detecta su reflexión?

PLANTEAMIENTO Primero calculamos la rapidez de las ondas longitudinales (sonido) en el agua de mar, usando la ecuación 15-4 y las tablas 12-1 y 13-1. La longitud de onda es $\lambda = v/f$.

SOLUCIÓN *a*) La rapidez de las ondas longitudinales en el agua de mar, que es ligeramente más densa que el agua pura, es

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.0 \times 10^9\,\text{N/m}^2}{1.025 \times 10^3\,\text{kg/m}^3}} = 1.4 \times 10^3\,\text{m/s}.$$

Luego, con la ecuación 15-1, encontramos

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{\left(1.4 \times 10^3\,\text{m/s}\right)}{\left(1.0 \times 10^5\,\text{Hz}\right)} = 14\,\text{mm}.$$

b) El tiempo requerido para el viaje redondo entre el animal y el objeto es

$$t = \frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}} = \frac{2(100\,\text{m})}{1.4 \times 10^3\,\text{m/s}} = 0.14\,\text{s}.$$

NOTA Más adelante se verá que las ondas se pueden usar para "resolver" (o detectar) objetos sólo si la longitud de onda es comparable con el objeto o menor que éste. De esta forma, un delfín puede detectar objetos del orden de un centímetro o más de tamaño.

*Obtención de la velocidad de una onda en un fluido

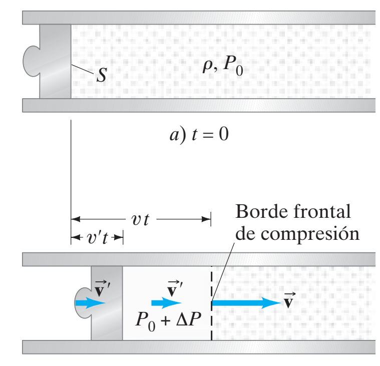


FIGURA 15–8 Determinación de la rapidez de una onda longitudinal unidimensional en un fluido contenido en un tubo largo y estrecho.

Ahora deduciremos la ecuación 15-4. Considere un pulso de onda que viaja en un fluido dentro de un tubo largo, de forma que el movimiento de la onda es unidimensional. El tubo está ajustado con un pistón en un extremo y está lleno con un fluido que, en $t = 0$, es de densidad uniforme ρ y se encuentra a presión uniforme P_0, figura 15-8a. En este momento el pistón comienza a moverse abruptamente hacia la derecha, con rapidez v', lo que comprime el fluido enfrente de él. En el (corto) tiempo t, el pistón se mueve una distancia $v't$. El fluido comprimido también se mueve con rapidez v', pero el borde frontal de la región comprimida se mueve hacia la derecha con la rapidez característica v de las ondas de compresión en ese fluido; se supone que la rapidez de onda v es mucho mayor que la rapidez del pistón v'. El borde frontal de la compresión (que en $t = 0$ estaba en la cara del pistón) se mueve, por lo tanto, una distancia vt en el tiempo t, como se indica en la figura 15-8b. Sea la presión en la compresión $P_0 + \Delta P$, que es ΔP mayor que en el fluido sin comprimir. Mover el pistón a la derecha requiere una fuerza externa $(P_0 + \Delta P)S$ que actúe hacia la derecha, donde S es el área transversal del tubo. (Usamos S por "área superficial"; la A la reservamos para amplitud). La fuerza *neta* sobre la región comprimida del fluido es

$$F_{\text{net}} = (P_0 + \Delta P)S - P_0 S = S\,\Delta P$$

ya que el fluido no comprimido ejerce una fuerza P_0S hacia la izquierda en el borde frontal. En consecuencia, el impulso dado al fluido comprimido, que es igual a su cambio en cantidad de movimiento, es

$$F_{\text{net}}\,t = \Delta m v'$$
$$S\,\Delta P\,t = (\rho S v t)v',$$

donde (ρSvt) representa la masa de fluido a la que se da la rapidez v' (el fluido comprimido de área S se mueve una distancia vt, figura 15-8, de manera que el volumen desplazado es Svt). Por lo tanto, tenemos

$$\Delta P = \rho v v'.$$

A partir de la definición de módulo volumétrico B (ecuación 12-7):

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V_0} = -\frac{\rho v v'}{\Delta V/V_0},$$

donde $\Delta V/V_0$ es el cambio fraccional en volumen debido a una compresión. El volumen original del fluido comprimido es $V_0 = Svt$ (véase la figura 15-8), y se comprimió una cantidad $\Delta V = -Sv't$ (figura 15-8b). Por lo tanto,

$$B = -\frac{\rho v v'}{\Delta V/V_0} = -\rho v v'\left(\frac{Svt}{-Sv't}\right) = \rho v^2,$$

y por lo tanto

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}},$$

que es lo que se quería demostrar, la ecuación 15-4.

La obtención de la ecuación 15-3 sigue líneas similares, pero toma en cuenta la expansión de los lados de una varilla cuando el extremo de ésta se comprime.

Otras ondas

FÍSICA APLICADA
Ondas sísmicas

Cuando ocurre un **terremoto** se producen ondas transversales y longitudinales. Las ondas transversales que viajan a través del cuerpo de la Tierra se llaman ondas S (S por el término en inglés *shear*, que significa corte) y las ondas longitudinales se llaman ondas P (P por presión) u ondas de *compresión*. Ambos tipos de ondas pueden viajar a través de un sólido, pues los átomos o moléculas pueden vibrar en cualquier dirección en torno a sus posiciones relativamente fijas. Sin embargo, sólo las ondas longitudinales se pueden propagar a través de un fluido, porque cualquier movimiento transversal no experimentaría fuerza restauradora alguna dado que un fluido es fácilmente deformable. Este hecho lo usaron los geofísicos para inferir que una porción del núcleo de la Tierra debía ser líquida: después de un terremoto, las ondas longitudinales se detectan diametralmente a través de la Tierra, pero las ondas transversales no.

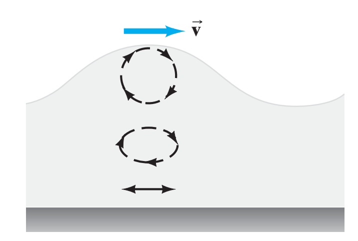
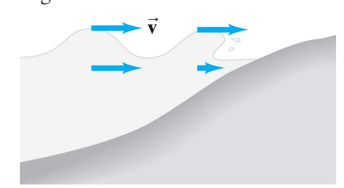


FIGURA 15–9 Una ola es un ejemplo de una *onda superficial*, que es una combinación de movimientos de onda transversal y longitudinal.

FIGURA 15–10 Cómo rompe una ola. Las flechas epresentan la velocidad local de las moléculas de agua.



Además de estos dos tipos de ondas que pueden pasar a través del cuerpo de la Tierra (u otra sustancia), también podría haber *ondas superficiales* que viajen a lo largo de la frontera entre dos materiales. Una ola en realidad es una onda superficial que se mueve en la frontera entre agua y aire. El movimiento de cada partícula de agua en la superficie es circular o elíptico (figura 15-9), de manera que es una combinación de movimientos transversales y longitudinales. Bajo la superficie, también hay movimiento transversal además del longitudinal, como se observa. En el fondo, el movimiento sólo es longitudinal. (Cuando una ola se aproxima a la playa, el agua arrastra el fondo y se frena, mientras que las crestas se mueven hacia delante con mayor rapidez [figura 15-10] y se "derraman" sobre la parte superior).

Cuando ocurre un terremoto también se forman ondas superficiales en la Tierra. Las ondas que viajan a lo largo de la superficie son las responsables principales del daño causado por los terremotos.

Las ondas que viajan a lo largo de una línea en una dimensión, como las ondas transversales en una cuerda estirada, o las ondas longitudinales en una varilla o en un tubo lleno de fluido, son *ondas lineales* o *unidimensionales*. Las ondas superficiales, como las que se ilustran al principio de este capítulo, son *ondas bidimensionales*. Por último, las ondas que se mueven en todas direcciones a partir de una fuente, como el sonido que sale de un altavoz o las ondas sísmicas que viajan a través de la Tierra, son *ondas tridimensionales*.

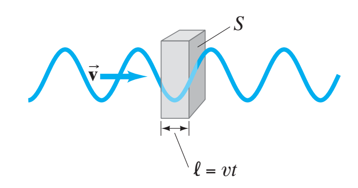
15–3 Energía transportada por las ondas

Las ondas transportan energía de un lugar a otro. Conforme las ondas viajan a través de un medio, la energía se transfiere como energía vibratoria entre las partículas del medio. Para una onda sinusoidal de frecuencia f, las partículas se mueven en movimiento armónico simple (capítulo 14) conforme la onda pasa, y cada partícula tiene energía $E = \frac{1}{2}kA^2$ donde A es el desplazamiento máximo (amplitud) de su movimiento, ya sea transversal o longitudinalmente (ecuación 14-10a). Al usar la ecuación 14-7a podemos escribir $k = 4\pi^2 mf^2$, donde m es la masa de una partícula (o pequeño volumen) del medio. Así, en términos de la frecuencia f y la amplitud A,

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = 2\pi^2 mf^2A^2.$$

Para ondas tridimensionales que viajan en un medio elástico, la masa $m = \rho V$, donde ρ es la densidad del medio y V es el volumen de una pequeña rebanada del medio. El volumen $V = S\ell$, donde S es el área transversal a través de la que viaja la onda (figura 15-11), y podemos escribir ℓ como la distancia que recorre la onda en un tiempo t como $\ell = vt$, donde v es la rapidez de la onda. Por lo tanto, $m = \rho V = \rho S\ell = \rho Svt$ y

FIGURA 15–11 Cálculo de la energía transportada por una onda que se mueve con velocidad v.



$$E = 2\pi^2\rho Svtf^2A^2. \qquad \textbf{(15–5)}$$

A partir de esta ecuación se tiene el importante resultado de que *la energía transportada por una onda es proporcional al cuadrado de la amplitud y al cuadrado de la frecuencia.* La *tasa* promedio de energía transferida es la potencia promedio P:

$$\overline{P} = \frac{E}{t} = 2\pi^2\rho Svf^2A^2. \qquad \textbf{(15–6)}$$

Finalmente, la **intensidad**, I, de una onda se define como la potencia promedio transferida a través de una área unitaria perpendicular a la dirección del flujo de energía:

$$I = \frac{\overline{P}}{S} = 2\pi^2 v\rho f^2A^2. \qquad \textbf{(15–7)}$$

Si una onda fluye en todas direcciones desde la fuente, es una onda tridimensional. Ejemplos de ello son el sonido que viaja en el aire abierto, las ondas sísmicas y las ondas de luz. Si el medio es isotrópico (igual en todas direcciones), la onda de una fuente

puntual es una *onda esférica* (figura 15-12). Conforme la onda se mueve hacia fuera, la energía que porta se dispersa sobre una área cada vez más grande, pues el área superficial de una esfera de radio r es $4\pi r^2$. Por lo tanto, la intensidad de una onda es

$$I = \frac{\overline{P}}{S} = \frac{\overline{P}}{4\pi r^2}.$$

Si la potencia de salida $\overline{P}$ es constante, entonces la intensidad disminuye como el cuadrado inverso de la distancia desde la fuente:

$$I \propto \frac{1}{r^2}. \qquad \text{[onda esférica]} \quad \textbf{(15–8a)}$$

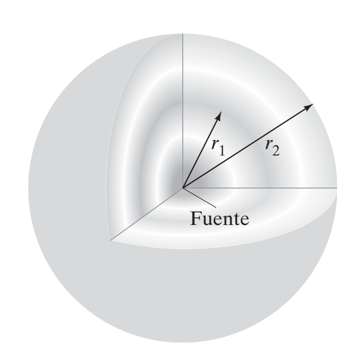


FIGURA 15–12 Una onda que viaja hacia fuera desde una fuente puntual tiene forma esférica. Se muestran dos diferentes crestas (o compresiones), con radios r_1 y r_2.

Si consideramos dos puntos a distancias r_1 y r_2 desde la fuente, como en la figura 15-12, entonces $I_1 = \overline{P}/4\pi r_1^2$ y $I_2 = \overline{P}/4\pi r_2^2$, de manera que

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\overline{P}/4\pi r_2^2}{\overline{P}/4\pi r_1^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}. \qquad \textbf{(15–8b)}$$

Entonces, si se duplica la distancia $(r_2/r_1 = 2)$, entonces la intensidad se reduce a $\frac{1}{4}$ de su valor anterior: $I_2/I_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

La amplitud de una onda también disminuye con la distancia. Dado que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud (ecuación 15-7), $I \propto A^2$, la amplitud A debe disminuir como $1/r$, de manera que I puede ser proporcional a $1/r^2$ (ecuación 15-8a). En consecuencia,

$$A \propto \frac{1}{r}.$$

Para ver esto directamente a partir de la ecuación 15-6, considere de nuevo dos distancias diferentes desde la fuente, r_1 y r_2. Para una potencia de salida constante, $S_1 A_1^2 = S_2 A_2^2$ donde A_1 y A_2 son las amplitudes de la onda en r_1 y r_2, respectivamente. Como $S_1 = 4\pi r_1^2$ y $S_2 = 4\pi r_2^2$, tenemos $\left(A_1^2 r_1^2\right) = \left(A_2^2 r_2^2\right)$, o

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Cuando la onda está el doble de lejos de la fuente, la amplitud es la mitad, y así sucesivamente (si se ignora el amortiguamiento debido a la fricción).

EJEMPLO 15–4 Intensidad sísmica. La intensidad de una onda sísmica P que viaja a través de la Tierra y se detecta a 100 km de la fuente es de $1.0 \times 10^6\ \mathrm{W/m^2}$. ¿Cuál es la intensidad de esa onda si se detecta a 400 km de la fuente?

PLANTEAMIENTO Suponemos que la onda es esférica, de manera que la intensidad disminuye como el cuadrado de la distancia desde la fuente.

SOLUCIÓN A 400 km la distancia es 4 veces mayor que a 100 km, de manera que la intensidad será $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ de su valor a 100 km o $(1.0 \times 10^6\ \mathrm{W/m^2})/16 = 6.3 \times 10^4\ \mathrm{W/m^2}$.

NOTA Al utilizar directamente la ecuación 15-8b se obtiene

$$I_2 = I_1 r_1^2/r_2^2 = \left(1.0 \times 10^6\ \mathrm{W/m^2}\right)(100\ \mathrm{km})^2/(400\ \mathrm{km})^2 = 6.3 \times 10^4\ \mathrm{W/m^2}.$$

La situación es diferente para una onda unidimensional, como una onda transversal en una cuerda o un pulso de onda longitudinal que viaja por una varilla metálica delgada uniforme. El área permanece constante, de manera que la amplitud A también permanece constante (si se ignora la fricción). Por lo tanto, la amplitud y la intensidad no disminuyen con la distancia.

En la práctica, por lo general se presenta amortiguamiento por fricción y parte de la energía se transforma en energía térmica. Por lo tanto, la amplitud y la intensidad de una onda unidimensional disminuyen con la distancia desde la fuente. Para una onda tridimensional, la disminución será mayor que la discutida anteriormente, aunque usualmente el efecto es pequeño.

15–4 Representación matemática de una onda viajera

Considere ahora una onda unidimensional que viaja a lo largo del eje x. Podría ser, por ejemplo, una onda transversal en una cuerda o una onda longitudinal que viaja en una varilla o en un tubo lleno de fluido. Supongamos que la forma de la onda es sinusoidal y tiene una longitud de onda particular λ y frecuencia f. En $t = 0$, suponga que la forma de la onda está dada por

$$D(x) = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} x, \qquad \textbf{(15–9)}$$

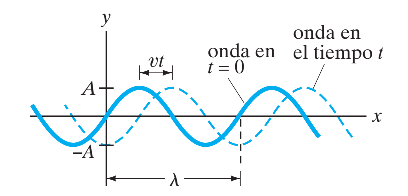


FIGURA 15–13 Una onda viajera. En el tiempo t, la onda se mueve una distancia vt.

como se muestra mediante la curva sólida en la figura 15-13: $D(x)$ es el **desplazamiento**[†] de la onda (ya sea una onda longitudinal o transversal) en la posición x, y A es la **amplitud** (desplazamiento máximo) de la onda. Esta relación da una forma que se repite a sí misma cada longitud de onda, lo cual es necesario para que el desplazamiento sea el mismo en $x = 0$, $x = \lambda$, $x = 2\lambda$, etcétera (dado que sen 4π = sen 2π = sen 0).

Ahora suponga que la onda se mueve hacia la derecha con velocidad v. Entonces, después de un tiempo t, cada parte de la onda (de hecho, toda la "forma" de onda) se movió hacia la derecha una distancia vt; véase la curva punteada en la figura 15-13. Considere cualquier punto sobre la onda en $t = 0$: por ejemplo, una cresta que esté en alguna posición x. Después de un tiempo t, esa cresta habrá viajado una distancia vt, de manera que su nueva posición está a una distancia vt mayor que su antigua posición. Para describir este mismo punto sobre la forma de onda, el argumento de la función seno debe ser el mismo, así que sustituimos x en la ecuación 15-9 por $(x - vt)$:

Onda 1-D que se mueve en dirección x positiva

$$D(x, t) = A \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]. \qquad \textbf{(15–10a)}$$

Dicho de otra forma, si usted monta sobre una cresta, el argumento de la función seno, $(2\pi/\lambda)(x - vt)$, permanece igual (= $\pi/2$, $5\pi/2$, etcétera); conforme t aumenta, x debe aumentar a la misma tasa, de manera que $(x - vt)$ permanece constante.

La ecuación 15-10a es la representación matemática de una onda sinusoidal que viaja a lo largo del eje x hacia la derecha (x creciente). Da el desplazamiento $D(x, t)$ de la onda en cualquier punto elegido x en cualquier tiempo t. La función $D(x, t)$ describe una curva que representa la forma real de la onda en el espacio en el tiempo t. Dado que $v = \lambda f$ (ecuación 15-1), podemos escribir la ecuación 15-10a en otras formas que con frecuencia son convenientes:

Onda 1-D que se mueve en dirección x positiva

$$D(x, t) = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T}\right), \qquad \textbf{(15–10b)}$$

donde $T = 1/f = \lambda/v$ es el periodo; y

$$D(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t), \qquad \textbf{(15–10c)}$$

donde $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ es la frecuencia angular y

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \textbf{(15–11)}$$


CUIDADO

No confunda el número de onda k con la constante de resorte k

se llama **número de onda**. (No debe confundirse el número de onda k con la constante de resorte k; son cantidades muy diferentes.) Las tres formas, ecuaciones 15-10a, b y c, son equivalentes; la ecuación 15-10c es la más simple de escribir y es quizá la más común. La cantidad $(kx - \omega t)$, y su equivalente en las otras dos ecuaciones, se llama **fase** de la onda. La velocidad v de la onda a menudo se llama **velocidad de fase**, pues describe la velocidad de la fase (o forma) de la onda y se puede escribir en términos de ω y k:

$$v = \lambda f = \left(\frac{2\pi}{k}\right)\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{\omega}{k}. \qquad \textbf{(15–12)}$$

[†] Algunos libros emplean $y(x)$ en vez de $D(x)$. Para evitar confusiones, se reserva y (y z) para las posiciones coordenadas de las ondas en dos o tres dimensiones. La $D(x)$ de este libro puede representar presión (en ondas longitudinales), desplazamiento de posición (ondas mecánicas transversales) o, como se verá más adelante, campos eléctricos o magnéticos (para ondas electromagnéticas).

Para una onda que viaja a lo largo del eje x hacia la izquierda (valores decrecientes de x), comenzamos de nuevo con la ecuación 15-9 y notamos que la velocidad ahora es $-v$. Un punto particular en la onda cambia de posición por $-vt$ en un tiempo t, de manera que se debe sustituir x en la ecuación 15-9 por $(x + vt)$. En consecuencia, para una onda que viaja hacia la izquierda con velocidad v,

Onda 1-D que se mueve en dirección x negativa

$$D(x,t) = A \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x + vt)\right] \qquad \textbf{(15–13a)}$$

$$= A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{2\pi t}{T}\right) \qquad \textbf{(15–13b)}$$

$$= A \operatorname{sen}(kx + \omega t). \qquad \textbf{(15–13c)}$$

En otras palabras, simplemente se sustituye v en las ecuaciones 15-10 por $-v$.

Observemos la ecuación 15-13c (o, igualmente, la ecuación 15-10c). En $t = 0$ se tiene

$$D(x,0) = A \operatorname{sen} kx,$$

que es con lo que comenzamos, una onda con forma sinusoidal. Si observamos la forma de onda en el espacio en un tiempo posterior particular t_1, entonces tenemos

$$D(x,t_1) = A \operatorname{sen}(kx + \omega t_1).$$

Esto es, si tomamos una fotografía de la onda en $t = t_1$, veríamos una onda seno con una constante de fase ωt_1. Por lo tanto, para $t = t_1$ fijo, la onda tiene una forma sinusoidal en el espacio. Por otra parte, si consideramos un punto fijo en el espacio, por ejemplo, $x = 0$, podemos ver cómo la onda varía en el tiempo:

$$D(0,t) = A \operatorname{sen} \omega t$$

donde empleamos la ecuación 15-13c. Ésta es la ecuación para movimiento armónico simple (sección 14-2). Para cualquier otro valor fijo de x, por ejemplo, $x = x_1$, $D = A \operatorname{sen}(\omega t + kx_1)$ que sólo difiere por una constante de fase kx_1. En consecuencia, en cualquier punto fijo en el espacio, el desplazamiento experimenta las oscilaciones del movimiento armónico simple en el tiempo. Las ecuaciones 15-10 y 15-13 combinan estos aspectos para darnos la representación para una **onda sinusoidal viajera** (también llamada **onda armónica**).

El argumento del seno en las ecuaciones 15-10 y 15-13, en general, puede contener un ángulo de fase ϕ, que para la ecuación 15-10c es

$$D(x,t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi),$$

para ajustar la posición de la onda en $t = 0$, $x = 0$, tal como en la sección 14-2 (véase la figura 14-7). Si el desplazamiento es cero en $t = 0$, $x = 0$, como en la figura 14-6 (o la figura 15-13), entonces $\phi = 0$.

Ahora consideremos una onda general (o pulso de onda) de cualquier forma. Si las pérdidas por fricción son pequeñas, los experimentos demuestran que la onda mantiene su forma mientras viaja. Así, se pueden emplear los mismos argumentos que utilizamos a propósito de la ecuación 15-9. Suponga que la onda tiene alguna forma en $t = 0$, dada por

$$D(x,0) = D(x)$$

donde $D(x)$ es el desplazamiento de la onda en x y no necesariamente es sinusoidal. En algún momento posterior, si la onda viaja hacia la derecha a lo largo del eje x, la onda tendrá la misma forma, aunque todas las partes se habrán desplazado una distancia vt, donde v es la velocidad de fase de la onda. En consecuencia, debemos sustituir x por $x - vt$ para obtener la amplitud en el tiempo t:

$$D(x,t) = D(x - vt). \qquad \textbf{(15–14)}$$

De igual forma, si la onda se mueve hacia la izquierda, debemos sustituir x por $x + vt$, de manera que

$$D(x,t) = D(x + vt). \qquad \textbf{(15–15)}$$

Por lo tanto, cualquier onda que viaje a lo largo del eje x debe tener la forma de la ecuación 15-14 o 15-15.

EJERCICIO D Una onda está dada por $D(x, t) = (5.0 \text{ mm}) \operatorname{sen}(2.0x - 20.0t)$, donde x está en metros y t en segundos. ¿Cuál es la rapidez de la onda? *a*) 10 m/s, *b*) 0.10 m/s, *c*) 40 m/s, *d*) 0.005 m/s, *e*) 2.5×10^{-4} m/s.

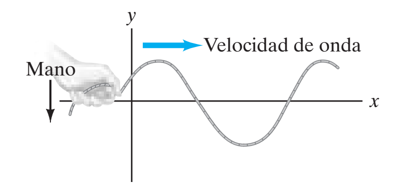


FIGURA 15–14 Ejemplo 15-5. La onda en $t = 0$ (la mano en descenso). La figura no está a escala.

EJEMPLO 15–5 **Una onda viajera.** El extremo izquierdo de una cuerda larga, horizontal y estirada oscila transversalmente en MAS con frecuencia $f = 250$ Hz y 2.6 cm de amplitud. La cuerda está bajo una tensión de 140 N y tiene una densidad lineal $\mu = 0.12$ kg/m. En $t = 0$, el extremo de la cuerda tiene un desplazamiento hacia arriba de 1.6 cm y está bajando (figura 15-14). Determine *a*) la longitud de onda de las ondas producidas y *b*) la ecuación de la onda viajera.

PLANTEAMIENTO Primero determinamos la velocidad de fase de la onda transversal a partir de la ecuación 15-2; luego, $\lambda = v/f$. En *b*) necesitamos determinar la fase ϕ usando las condiciones iniciales.

SOLUCIÓN *a*) La velocidad de onda es

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{140\text{ N}}{0.12\text{ kg/m}}} = 34\text{ m/s}.$$

Luego,

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{34\text{ m/s}}{250\text{ Hz}} = 0.14\text{ m} \qquad \text{o} \qquad 14\text{ cm}.$$

b) Sea $x = 0$ en el extremo izquierdo de la cuerda. La fase de la onda en $t = 0$ no es cero en general, como se supuso en las ecuaciones 15-9, 10 y 13. La forma general para una onda que viaja hacia la derecha es

$$D(x,t) = A\,\text{sen}(kx - \omega t + \phi),$$

donde ϕ es el ángulo de fase. En este caso, la amplitud $A = 2.6$ cm; y en $t = 0, x = 0$, tenemos $D = 1.6$ cm. Por consiguiente,

$$1.6 = 2.6\,\text{sen}\,\phi,$$

de manera que $\phi = \text{sen}^{-1}(1.6/2.6) = 38° = 0.66$ rad. También tenemos que $\omega = 2\pi f = 1\,570\text{ s}^{-1}$ y $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/0.14\text{ m} = 45\text{ m}^{-1}$. Por lo tanto,

$$D = (0.026\text{ m})\,\text{sen}\big[(45\text{ m}^{-1})x - (1570\text{ s})t + 0.66\big]$$

que podemos escribir de manera más sencilla como

$$D = 0.026\,\text{sen}(45x - 1570t + 0.66),$$

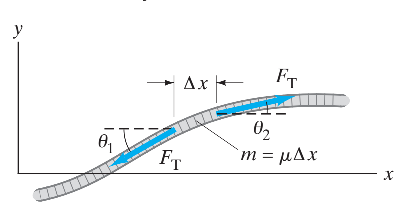
y se especifica claramente que D y x están en metros y t en segundos.

*15–5 La ecuación de onda

Muchos tipos de onda satisfacen una importante ecuación que es la equivalente de la segunda ley de Newton del movimiento para partículas. Esta "ecuación de movimiento para una onda" se llama **ecuación de onda** y la obtendremos ahora para ondas que viajan en una cuerda horizontal estirada.

Suponemos que la amplitud de la onda es pequeña en comparación con la longitud de onda, de manera que se puede suponer que cada punto sobre la cuerda se mueve sólo verticalmente y que la tensión en la cuerda, F_T, no varía durante una vibración. Aplicamos la segunda ley de Newton, $\Sigma F = ma$, al movimiento vertical de una pequeña sección de la cuerda, como se indica en la figura 15-15. La amplitud de la onda es pequeña, de manera que los ángulos θ_1 y θ_2 que forma la cuerda con la horizontal son pequeños. La longitud de esta sección es entonces aproximadamente Δx, y su masa es $\mu\,\Delta x$, donde μ es la masa por unidad de longitud de la cuerda. La fuerza vertical neta sobre esta sección de cuerda es $F_T\,\text{sen}\,\theta_2 - F_T\,\text{sen}\,\theta_1$. De manera que la segunda ley de Newton aplicada a la dirección vertical (y) produce

FIGURA 15–15 Derivación de la ecuación de onda a partir de la segunda ley de Newton: un segmento de cuerda bajo tensión F_T.



$$\Sigma F_y = ma_y$$

$$F_T\,\text{sen}\,\theta_2 - F_T\,\text{sen}\,\theta_1 = (\mu\,\Delta x)\frac{\partial^2 D}{\partial t^2}. \qquad \textbf{(i)}$$

Escribimos la aceleración como $a_y = \partial^2 D/\partial t^2$, pues el movimiento sólo es vertical; empleamos la notación de derivada parcial porque el desplazamiento D es una función

tanto de x como de t. Dado que se supuso que los ángulos θ_1 y θ_2 eran pequeños, sen $\theta \approx \tan\theta$ y $\tan\theta$ es igual a la pendiente s de la cuerda en cada punto:

$$\operatorname{sen}\theta \approx \tan\theta = \frac{\partial D}{\partial x} = s.$$

Por lo tanto, la ecuación (i) al final de la página anterior se convierte en

$$F_{\mathrm{T}}(s_2 - s_1) = \mu\,\Delta x\,\frac{\partial^2 D}{\partial t^2}$$

o

$$F_{\mathrm{T}}\frac{\Delta s}{\Delta x} = \mu\frac{\partial^2 D}{\partial t^2}, \tag{ii}$$

donde $\Delta s = s_2 - s_1$ es la diferencia en la pendiente entre los dos extremos de nuestra pequeña sección. Ahora obtenemos el límite de $\Delta x \rightarrow 0$, de manera que

$$F_{\mathrm{T}}\lim_{\Delta x\rightarrow 0}\frac{\Delta s}{\Delta x} = F_{\mathrm{T}}\frac{\partial s}{\partial x}$$
$$= F_{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right) = F_{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}$$

ya que la pendiente $s = \partial D/\partial x$, como escribimos anteriormente. Al sustituir esto en la ecuación anterior marcada como (ii), se obtiene

$$F_{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = \mu\frac{\partial^2 D}{\partial t^2}$$

o

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F_{\mathrm{T}}}\frac{\partial^2 D}{\partial t^2}.$$

Anteriormente en este capítulo (ecuación 15-2) vimos que la velocidad de las ondas en una cuerda está dada por $v = \sqrt{F_{\mathrm{T}}/\mu}$, de manera que podemos escribir esta última ecuación como

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 D}{\partial t^2}. \tag{15–16}$$

Ésta es la **ecuación de onda unidimesional** y puede describir no sólo ondas de amplitud pequeña en una cuerda estirada, sino también ondas longitudinales de amplitud pequeña (como las ondas sonoras) en gases, líquidos y sólidos elásticos, en cuyo caso D se refiere a las variaciones de presión. En este caso, la ecuación de onda es una consecuencia directa de la segunda ley de Newton aplicada a un medio elástico continuo. La ecuación de onda también describe ondas electromagnéticas para las que D se refiere al campo eléctrico o magnético, como se verá en el capítulo 31. La ecuación 15-16 se aplica a ondas que viajan sólo en una dimensión. Para las ondas que se dispersan en tres dimensiones, la ecuación de onda es la misma, con la adición de $\partial^2 D/\partial y^2$ y $\partial^2 D/\partial z^2$ al lado izquierdo de la ecuación 15-16.

La ecuación de onda es una ecuación *lineal*: el desplazamiento D aparece individualmente en cada término. No hay términos que contengan D^2 o $D(\partial D/\partial x)$, o en los que D aparezca más de una vez. Por lo tanto, si $D_1(x, t)$ y $D_2(x, t)$ son dos soluciones diferentes de la ecuación de onda, entonces la combinación lineal

$$D_3(x, t) = aD_1(x, t) + bD_2(x, t),$$

donde a y b son constantes, también es una solución. Esto se ve fácilmente mediante sustitución directa en la ecuación de onda. Ésta es la esencia del *principio de superposición*, que se explica en la siguiente sección. En esencia, dice que si dos ondas pasan a través de la misma región del espacio al mismo tiempo, el desplazamiento real es la suma de los desplazamientos separados. Para ondas en una cuerda, o para ondas sonoras, esto es válido sólo para ondas de amplitud pequeña. Si la amplitud no es lo suficientemente pequeña, las ecuaciones para la propagación de onda pueden volverse no lineales y el principio de superposición no se cumpliría, además de que podrían ocurrir efectos más complicados.

EJEMPLO 15–6 **Solución a la ecuación de onda.** Verifique que la onda sinusoidal de la ecuación 15-10c, $D(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$, satisface la ecuación de onda.

PLANTEAMIENTO Sustituimos la ecuación 15-10c en la ecuación de onda, ecuación 15-16.

SOLUCIÓN Tomamos la derivada de la ecuación 15-10c dos veces con respecto a t:

$$\frac{\partial D}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = -\omega^2 A \operatorname{sen}(kx - \omega t).$$

Con respecto a x, las derivadas son

$$\frac{\partial D}{\partial x} = kA \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = -k^2 A \operatorname{sen}(kx - \omega t).$$

Si ahora dividimos las segundas derivadas, obtenemos

$$\frac{\partial^2 D/\partial t^2}{\partial^2 D/\partial x^2} = \frac{-\omega^2 A \operatorname{sen}(kx - \omega t)}{-k^2 A \operatorname{sen}(kx - \omega t)} = \frac{\omega^2}{k^2}.$$

A partir de la ecuación 15-12 tenemos que $\omega^2/k^2 = v^2$, y vemos que la ecuación 15-10 satisface la ecuación de onda (ecuación 15-16).

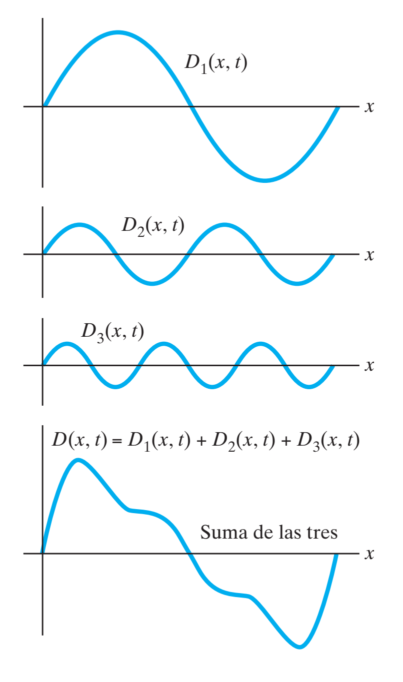
15–6 El principio de superposición

Cuando dos o más ondas pasan a través de la misma región del espacio al mismo tiempo, se encuentra que, para muchas ondas, *el desplazamiento real es la suma vectorial* (o *algebraica*) *de los desplazamientos separados*. A esto se le llama **principio de superposición**. Es válido para ondas mecánicas siempre que los desplazamientos no sean muy grandes y haya una relación lineal entre el desplazamiento y la fuerza restauradora del medio oscilante.† Si la amplitud de una onda mecánica, por ejemplo, es tan grande que va más allá de la región elástica del medio, y ya no se cumple la ley de Hooke, el principio de superposición deja de ser preciso.‡ En la mayoría de los casos, consideraremos sistemas para los cuales se supone que el principio de superposición se cumple.

Un resultado del principio de superposición es que si dos ondas pasan a través de la misma región del espacio, continúan moviéndose de manera independiente una de la otra. Por ejemplo, tal vez haya notado que las ondas en la superficie del agua (ondas bidimensionales), que se forman a partir de dos piedras que golpean el agua en diferentes lugares, pasan unas sobre otras.

La figura 15-16 ilustra un ejemplo del principio de superposición. En este caso hay tres ondas presentes en una cuerda estirada, cada una de diferente amplitud y frecuencia. En cualquier momento, como en el instante que se muestra, la amplitud real en cualquier posición x es la suma algebraica de la amplitud de las tres ondas en esa posición. La onda real no es una onda sinusoidal simple y se llama *onda compuesta* (o *compleja*). (En la figura 15-16 las amplitudes están exageradas).

FIGURA 15–16 El principio de superposición para ondas unidimensionales. Una onda compuesta formada a partir de tres ondas sinusoidales de diferentes amplitudes y frecuencias ($f_0, 2f_0, 3f_0$) en cierto instante en el tiempo. La amplitud de la onda compuesta en cada punto del espacio, en cualquier momento, es la suma algebraica de las amplitudes de las ondas componentes. Las amplitudes se muestran exageradas; para que se sostenga el principio de superposición, las amplitudes deben ser pequeñas comparadas con las longitudes de onda.



Es posible demostrar que cualquier onda compleja se puede considerar como compuesta de muchas ondas sinusoidales simples de diferentes amplitudes, longitudes de onda y frecuencias. Esto se conoce como *teorema de Fourier*. Una onda periódica compleja de periodo T se puede representar como una suma de términos sinusoidales puros cuyas frecuencias son múltiplos enteros de $f = 1/T$. Si la onda no es periódica, la suma se convierte en una integral (llamada *integral de Fourier*). Aunque no entraremos en detalles aquí, vemos la importancia de considerar ondas sinusoidales (y el movimiento armónico simple), ya que cualquier otra forma de onda se puede considerar como una suma de tales ondas sinusoidales puras.

†Para ondas electromagnéticas en el vacío, el principio de superposición siempre se cumple.

‡La distorsión de intermodulación en los equipos de alta fidelidad es un ejemplo del principio de superposición que no se cumple cuando dos frecuencias no se combinan linealmente en la electrónica.

EJEMPLO CONCEPTUAL 15–7 **Generación de una onda cuadrada.** En $t = 0$, tres ondas están dadas por $D_1 = A\cos kx$, $D_2 = -\frac{1}{3}A\cos 3kx$ y $D_3 = \frac{1}{5}A\cos 5kx$, donde $A = 1.0$ m y $k = 10\ \mathrm{m}^{-1}$. Grafique la suma de las tres ondas desde $x = -0.4$ m hasta $+0.4$ m. (Estas tres ondas son los primeros tres componentes de Fourier de una "onda cuadrada").

RESPUESTA La primera onda, D_1, tiene 1.0 m de amplitud y longitud de onda $\lambda = 2\pi/k = (2\pi/10)$ m $= 0.628$ m. La segunda onda, D_2, tiene 0.33 m de amplitud y longitud de onda $\lambda = 2\pi/3k = (2\pi/30)$ m $= 0.209$ m. La tercera onda, D_3, tiene 0.20 m de amplitud y longitud de onda $\lambda = 2\pi/5k = (2\pi/50)$ m $= 0.126$ m. Cada onda se grafica en la figura 15-17a. La suma de las tres ondas se muestra en la figura 15-17b. La suma comienza a recordar una "onda cuadrada", que se muestra en azul en la figura 15-17b.

FÍSICA APLICADA
Onda cuadrada

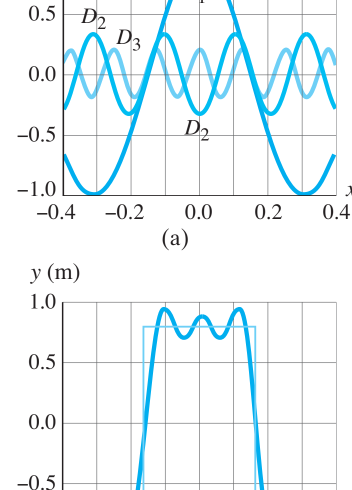


FIGURA 15–17 Ejemplo 15-7. Generación de una onda cuadrada.

Cuando la fuerza restauradora no es precisamente proporcional al desplazamiento para ondas mecánicas en algún medio continuo, la rapidez de las ondas sinusoidales depende de la frecuencia. La variación de rapidez con la frecuencia se llama **dispersión**. En tal caso, las diferentes ondas sinusoidales que componen una onda compleja viajarán con rapideces ligeramente diferentes. En consecuencia, una onda compleja cambiará de forma mientras viaja si el medio es "dispersivo". Sin embargo, una onda seno pura no cambiará de forma en estas condiciones, excepto por la influencia de la fricción o fuerzas disipativas. Si no hay dispersión (o fricción), incluso una onda lineal compleja no cambia de forma.

15–7 Reflexión y transmisión

Cuando una onda golpea un obstáculo, o llega al final del medio en el que viaja, al menos parte de la onda se refleja. Probablemente usted ha visto olas que se reflejan en una roca o en un costado de una alberca. Y es probable que haya escuchado un grito reflejado en un risco distante, al que comúnmente llamamos "eco".

Un pulso de onda que viaja por una cuerda se refleja como se ilustra en la figura 15-18. El pulso reflejado regresa invertido como en la figura 15-18a si el extremo de la cuerda está fijo; pero regresa derecho si el extremo está libre, como en la figura 15-18b. Cuando el extremo está fijo a un soporte, como en la figura 15-18a, el pulso que llega a ese extremo fijo ejerce una fuerza (hacia arriba) sobre el soporte. El soporte ejerce una fuerza igual aunque opuesta hacia abajo sobre la cuerda (tercera ley de Newton). Esta fuerza descendente sobre la cuerda es lo que "genera" el pulso invertido reflejado.

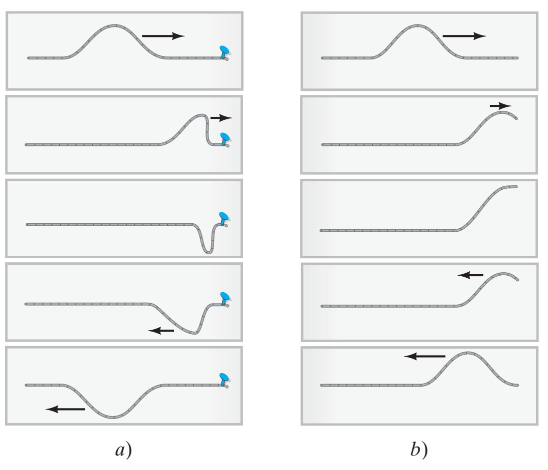


FIGURA 15–18 Reflexión de un pulso de onda en una cuerda que yace sobre una mesa. *a*) El extremo de la cuerda está fijo a un pivote. *b*) El extremo de la cuerda tiene libertad de movimiento.

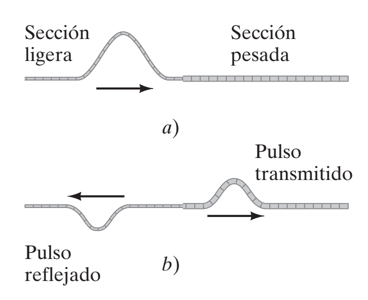


FIGURA 15–19 Cuando un pulso de onda que viaja hacia la derecha a lo largo de una cuerda delgada *a*) alcanza una discontinuidad donde la cuerda se vuelve más gruesa y pesada; entonces, parte se refleja y parte se transmite *b*).

Considere a continuación un pulso que viaja por una cuerda que consiste en una sección ligera y una sección pesada, como se aprecia en la figura 15-19. Cuando el pulso de onda alcanza la frontera entre las dos secciones, parte del pulso se refleja y parte se transmite, como se muestra. Cuanto más pesada es la segunda sección, menos energía se transmite. (Cuando la segunda sección es una pared o un soporte rígido, se transmite muy poca, en tanto la mayor parte se refleja, como en la figura 15-18a). Para una onda periódica, la frecuencia de la onda transmitida no cambia a través de la frontera, pues el punto de frontera oscila a esa frecuencia. Por consiguiente, si la onda transmitida tiene una rapidez más baja, su longitud de onda también es menor ($\lambda = v/f$).

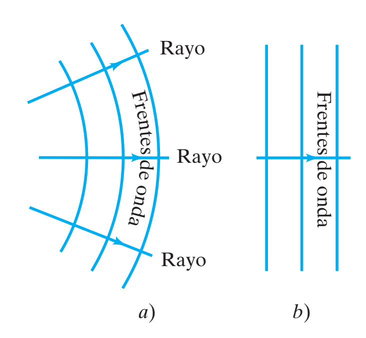


FIGURA 15–20 Los rayos, que significan la dirección del movimiento, siempre son perpendiculares a los frentes de onda (crestas de onda). *a*) Ondas circulares o esféricas cerca de la fuente. *b*) Lejos de la fuente, los frentes de onda son casi rectos o planos, y se llaman ondas planas.

En el caso de una onda bidimensional o tridimensional, como una ola, son de especial interés los **frentes de onda**, entendidos como todos los puntos a lo largo de la onda que forman la cresta (lo que comúnmente se conoce como "ola" en la playa). Una línea dibujada en la dirección del movimiento, perpendicular al frente de onda, se llama **rayo**, como se ilustra en la figura 15-20. Los frentes de onda alejados de la fuente han perdido casi toda su curvatura (figura 15-20b) y son casi rectos, como lo son a menudo las olas oceánicas; entonces se llaman **ondas planas**.

En la reflexión de una onda plana bidimensional o tridimensional, como se muestra en la figura 15-21, el ángulo que la *onda incidente* o entrante forma con la superficie reflectora es igual al ángulo formado por la onda reflejada. Ésta es la **ley de reflexión**:

El ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia.

El "ángulo de incidencia" se define como el ángulo (θ_i) que el rayo incidente forma con la perpendicular a la superficie reflectora (o que el frente de onda forma con una tangente a la superficie), y el "ángulo de reflexión" es el ángulo correspondiente (θ_r) para la onda reflejada.

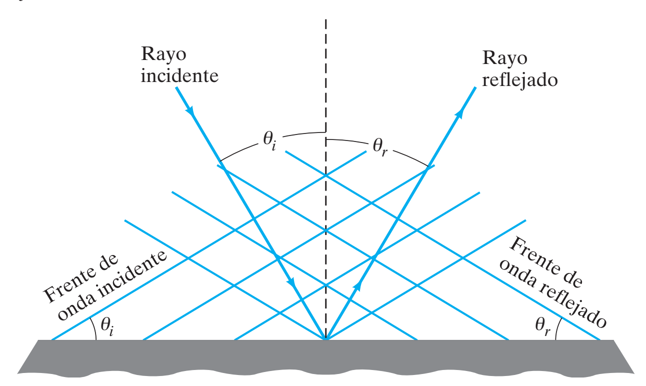


FIGURA 15–21
Ley de reflexión: $\theta_r = \theta_i$.

15–8 Interferencia

La **interferencia** se refiere a lo que ocurre cuando dos ondas pasan a través de la misma región del espacio al mismo tempo. Considere, por ejemplo, los dos pulsos de onda en una cuerda que viajan uno hacia el otro, como se ilustra en la figura 15-22. En la figura 15-22a los dos pulsos tienen la misma amplitud, pero uno es una cresta y el otro un valle; en la figura 15-22b ambos son crestas. En los dos casos, las ondas se encuentran y pasan rectas una sobre otra. Sin embargo, en la región donde se traslapan, el desplazamiento resultante es *la suma algebraica de sus desplazamientos separados* (una cresta se considera positiva y un valle negativo). Éste es otro ejemplo del principio de superposición. En la figura 15-22a, las dos ondas tienen desplazamientos opuestos en el instante cuando pasan una sobre otra, y suman cero. El resultado se llama **interferencia destructiva**. En la figura 15-22b, en el instante cuando se traslapan los dos pulsos, producen un desplazamiento resultante que es mayor que el desplazamiento de cualquiera de los pulsos por separado, y el resultado es **interferencia constructiva**.

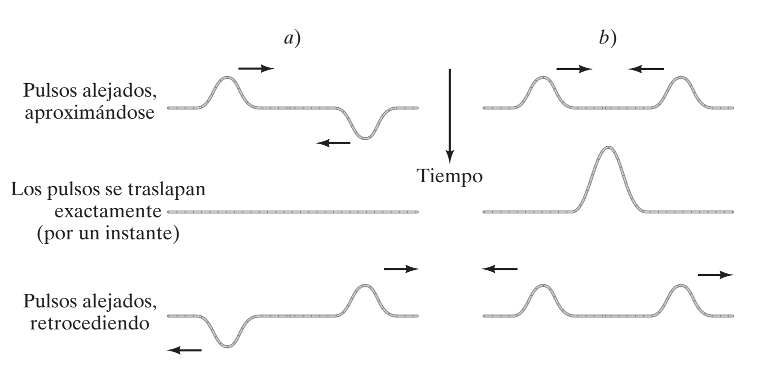


FIGURA 15–22 Dos pulsos de onda pasan uno sobre otro. Donde se traslapan, ocurre interferencia: *a*) destructiva y *b*) constructiva.

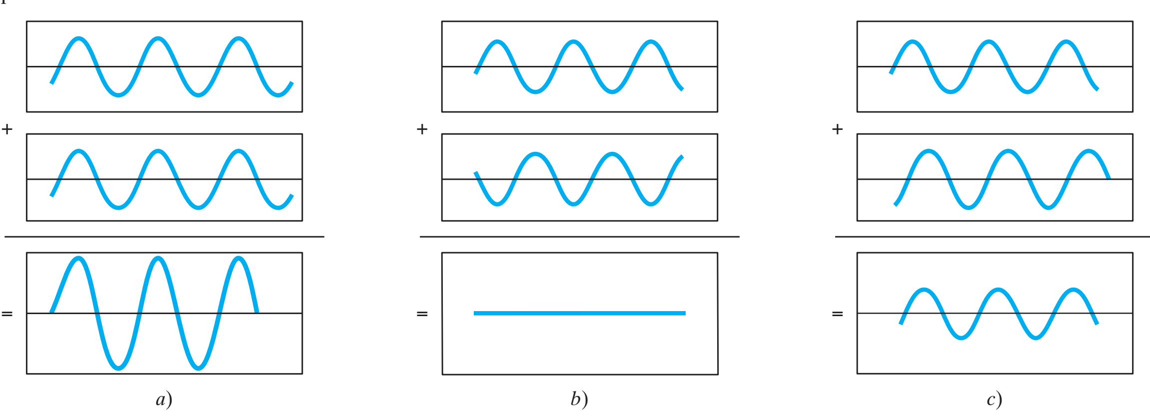
[Tal vez se pregunte dónde está la energía en el momento de la interferencia destructiva en la figura 15-22a; la cuerda puede estar recta en este instante, pero sus partes centrales todavía se mueven hacia arriba o hacia abajo].



FIGURA 15–23 *a*) Interferencia de ondas en el agua. *b*) La interferencia constructiva ocurre donde el máximo de una onda (una cresta) encuentra el máximo de otra. La interferencia destructiva ("agua plana") ocurre donde el máximo de una onda (una cresta) encuentra el mínimo de otra (un valle).

Cuando se lanzan dos piedras simultáneamente a un estanque, los dos conjuntos de ondas circulares interfieren uno con otro, como se representa en la figura 15-23a. En algunas áreas de traslape, las crestas de una onda repetidamente encuentran crestas de la otra (y los valles encuentran valles), figura 15-23b. En estos puntos ocurre interferencia constructiva, y el agua continuamente oscila arriba y abajo con mayor amplitud que cualquier onda por separado. En otras áreas ocurre interferencia destructiva, donde el agua no se mueve arriba y abajo en todo momento. Es aquí donde las crestas de una onda encuentran valles de la otra, y viceversa. La figura 15-24a muestra gráficamente el desplazamiento de dos ondas idénticas como función del tiempo, así como su suma, para el caso de la interferencia constructiva. Cuando se presenta interferencia constructiva (figura 15-24a), las dos ondas están **en fase**. En los puntos donde ocurre interferencia destructiva (figura 15-24b), las crestas de una onda repetidamente encuentran valles de la otra onda y las dos ondas están **fuera de fase** por media longitud de onda o 180°. Las crestas de una onda se producen media longitud de onda detrás de las crestas de la otra onda. En la mayoría de las áreas, la fase relativa de las dos ondas de la figura 15-23 es intermedia entre estos dos extremos, lo que da por resultado interferencia *parcialmente* destructiva, como se ilustra en la figura 15-24c. Si las amplitudes de dos ondas que interfieren no son iguales, no ocurre interferencia totalmente destructiva (como en la figura 15-24b).

FIGURA 15–24 Gráficas que muestran dos ondas idénticas, y su suma, como función del tiempo en tres ubicaciones. En *a*) las dos ondas interfieren constructivamente, en *b*) destructivamente y en *c*) de manera parcialmente destructiva.



15–9 Ondas estacionarias: Resonancia

Si usted agita el extremo de una cuerda mientras el otro extremo se mantiene fijo, viajará una onda continua hacia el extremo fijo y se reflejará, invertida, como vimos en la figura 15-18a. Conforme usted continúa haciendo vibrar la cuerda, las ondas viajarán en ambas direcciones, y la onda que viaja a lo largo de la cuerda, alejándose de su mano, hará interferencia con la onda reflejada que regresa. Por lo general habrá una mezcolanza. Pero si hace vibrar la cuerda justo a la frecuencia correcta, las dos ondas viajeras interferirán en tal forma que se producirá una **onda estacionaria** de gran amplitud, figura 15-25. Se llama "onda estacionaria" porque no parece estar viajando. La cuerda simplemente parece tener segmentos que oscilan arriba y abajo en un patrón fijo. Los puntos de interferencia destructiva, donde la cuerda permanece quieta en todo momento, se llaman **nodos**. Los puntos de interferencia constructiva, donde la cuerda oscila con amplitud máxima, se llaman **antinodos**. Los nodos y antinodos permanecen en posiciones fijas para una frecuencia particular.

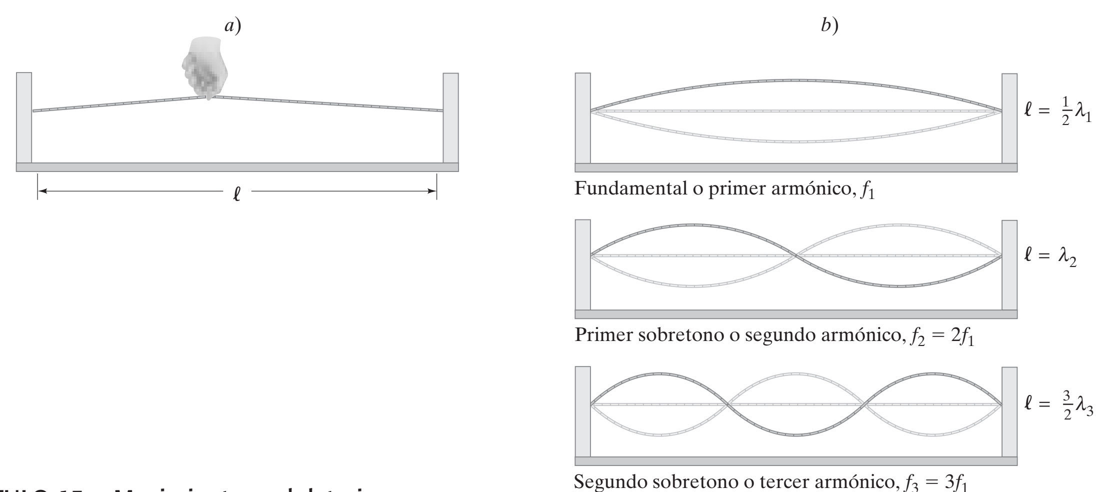
FIGURA 15–25 Ondas estacionarias correspondientes a tres frecuencias resonantes.

Las ondas estacionarias pueden ocurrir a más de una frecuencia. La frecuencia más baja de vibración que produce una onda estacionaria da lugar al patrón que se observa en la figura 15-25a. Las ondas estacionarias que se muestran en las figuras 15-25b y 15-25c se producen precisamente a dos y tres veces la frecuencia más baja, respectivamente, suponiendo que la tensión en la cuerda es la misma. La cuerda también puede vibrar con cuatro bucles (cuatro antinodos) a cuatro veces la frecuencia más baja, y así sucesivamente.

Las frecuencias a las que se producen las ondas estacionarias son las **frecuencias naturales** o **frecuencia resonantes** de la cuerda, y los distintos patrones de onda estacionaria que se representan en la figura 15-25 son diferentes "modos de vibración resonante". Una onda estacionaria en una cuerda es el resultado de la interferencia de dos ondas que viajan en direcciones opuestas. Una onda estacionaria también se puede considerar un objeto que vibra en resonancia. Las ondas estacionarias representan el mismo fenómeno que la resonancia de un resorte o un péndulo en vibración, que se explicó en el capítulo 14. Sin embargo, un resorte o un péndulo sólo tienen una frecuencia resonante, mientras que la cuerda tiene un número infinito de frecuencias resonantes, cada una de las cuales es un múltiplo entero de la frecuencia resonante más baja.

Considere una cuerda estirada entre dos soportes que se pulsa como una cuerda de guitarra o violín, figura 15-26a. Viajarán ondas de una gran variedad de frecuencias en ambas direcciones a lo largo de la cuerda, se reflejarán en los extremos y viajarán de vuelta en la dirección opuesta. La mayoría de estas ondas interfieren unas con otras y se extinguen rápidamente. Sin embargo, aquellas ondas que correspondan a las frecuencias resonantes de la cuerda persistirán. Los extremos de la cuerda, puesto que están fijos, serán nodos. También puede haber otros nodos. Algunos de los posibles modos de vibración resonante (ondas estacionarias) se ilustran en la figura 15-26b. Por lo general, el movimiento será una combinación de estos diferentes modos resonantes, pero sólo estarán presentes aquellas frecuencias que correspondan a una frecuencia resonante.

FIGURA 15–26 *a*) Una cuerda se pulsa. *b*) Sólo las ondas estacionarias correspondientes a frecuencias resonantes persisten más tiempo.



Para determinar las frecuencias resonantes, primero hay que hacer notar que las longitudes de onda de las ondas estacionarias tienen una relación simple con la longitud ℓ de la cuerda. La frecuencia más baja, llamada **frecuencia fundamental**, corresponde a un antinodo (o bucle). Y, como se puede ver en la figura 15-26b, toda la longitud corresponde a media longitud de onda. Por lo tanto, $\ell = \frac{1}{2}\lambda_1$, donde λ_1 representa la longitud de onda de la frecuencia fundamental. Las otras frecuencias naturales se llaman **sobretonos**; para una cuerda que vibra son múltiplos enteros (integrales) de la frecuencia fundamental, y también se llaman **armónicos**, siendo la frecuencia fundamental el **primer armónico**.† El siguiente modo de vibración después del modo fundamental tiene dos bucles y se llama **segundo armónico** (o primer sobretono), figura 15-26b. La longitud de la cuerda ℓ en el segundo armónico corresponde a una longitud de onda completa: $\ell = \lambda_2$. Para el tercero y cuarto armónicos, $\ell = \frac{3}{2}\lambda_3$, y $\ell = 2\lambda_4$, respectivamente, y así sucesivamente. En general, podemos escribir

$$\ell = \frac{n\lambda_n}{2}, \qquad \text{donde } n = 1, 2, 3, \cdots.$$

El entero n indica el número del armónico: $n = 1$ para la frecuencia fundamental, $n = 2$ para el segundo armónico y así sucesivamente. Despejamos λ_n y obtenemos

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots. \qquad \left[\begin{array}{c}\text{cuerda fija en}\\ \text{ambos extremos}\end{array}\right] \qquad \textbf{(15–17a)}$$

Para encontrar la frecuencia f de cada vibración empleamos la ecuación 15-1, $f = v/\lambda$, y vemos que

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2\ell} = nf_1, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots, \qquad \textbf{(15–17b)}$$

donde $f_1 = v/\lambda_1 = v/2\ell$ es la frecuencia fundamental. Como vemos, cada frecuencia resonante es un múltiplo entero de la frecuencia fundamental.

Puesto que una onda estacionaria es equivalente a dos ondas viajeras que se mueven en direcciones opuestas, el concepto de velocidad de onda aún tiene sentido y está dado por la ecuación 15-2 en términos de la tensión F_T en la cuerda y su masa por unidad de longitud ($\mu = m/\ell$). Esto es, $v = \sqrt{F_T/\mu}$ para ondas que viajan en ambas direcciones.

EJEMPLO 15–8 **Cuerda de piano.** Una cuerda de piano mide 1.10 m de largo y tiene una masa de 9.00 g. *a*) ¿Bajo cuánta tensión debe estar la cuerda si debe vibrar a una frecuencia fundamental de 131 Hz? *b*) ¿Cuáles son las frecuencias de los primeros cuatro armónicos?

PLANTEAMIENTO Para determinar la tensión, necesitamos determinar la rapidez de la onda usando la ecuación 15-1 ($v = \lambda f$), y luego usar la ecuación 15-2 y despejar F_T.

SOLUCIÓN *a*) La longitud de onda del modo fundamental es $\lambda = 2\ell = 2.20$ m (ecuación 15-17a, con $n = 1$). La rapidez de la onda en la cuerda es $v = \lambda f = (2.20 \text{ m})(131 \text{ s}^{-1}) = 288$ m/s. Entonces, tenemos (ecuación 15-2)

$$F_T = \mu v^2 = \frac{m}{\ell}v^2 = \left(\frac{9.00 \times 10^{-3}\,\text{kg}}{1.10\,\text{m}}\right)(288\,\text{m/s})^2 = 679\,\text{N}.$$

b) Las frecuencias del segundo, tercero y cuarto armónicos son dos, tres y cuatro veces la frecuencia fundamental: 262, 393 y 524 Hz, respectivamente..

NOTA La rapidez de la onda en la cuerda *no* es la misma que la rapidez de la onda sonora que produce la cuerda de piano en el aire (como se verá en el capítulo 16).

Una onda estacionaria parece mantenerse en su lugar (y una onda viajera parece moverse). El término onda "estacionaria" también tiene significado desde el punto de vista de la energía. Dado que la cuerda está en reposo en los nodos, no fluye energía por esos puntos. En consecuencia, la energía no se transmite sobre la cuerda, sino que "se queda" en su lugar en la cuerda.

Las ondas estacionarias se producen no sólo en las cuerdas, sino sobre cualquier objeto que se golpee, como una membrana de tambor o un objeto hecho de metal o madera. Las frecuencias resonantes dependen de las dimensiones del objeto, así como en el caso de una cuerda dependen de la longitud de esta última. Los objetos grandes tienen frecuencias resonantes más bajas que los objetos pequeños. Todos los instrumentos musicales, desde los instrumentos de cuerda y los de viento (en estos últimos, una columna de aire vibra como una onda estacionaria) hasta los tambores y otros instrumentos de percusión, dependen de las ondas estacionarias para producir sus sonidos musicales particulares, como se verá en el capítulo 16.

†El término "armónico" viene de la música, porque tales múltiplos enteros de las frecuencias "armonizan".

Representación matemática de una onda estacionaria

Como vimos, se puede considerar que una onda estacionaria consiste en dos ondas viajeras que se mueven en direcciones opuestas. Estas últimas se pueden escribir (véase las ecuaciones 15-10c y 15-13c)

$$D_1(x,t) = A\,\text{sen}(kx - \omega t) \quad \text{y} \quad D_2(x,t) = A\,\text{sen}(kx + \omega t)$$

ya que, suponiendo que no hay amortiguamiento, las amplitudes son iguales, como lo son las frecuencias y las longitudes de onda. La suma de estas dos ondas viajeras produce una onda estacionaria que se representa matemáticamente como

$$D = D_1 + D_2 = A\big[\text{sen}(kx - \omega t) + \text{sen}(kx + \omega t)\big].$$

A partir de la identidad trigonométrica sen θ_1 + sen $\theta_2 = 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)\cos\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)$, esto se reescribe como

$$D = 2A\,\text{sen}\,kx\cos\omega t. \tag{15–18}$$

Si tomamos $x = 0$ en el extremo izquierdo de la cuerda, entonces el extremo derecho está en $x = \ell$, donde ℓ es la longitud de la cuerda. Dado que la cuerda está fija en sus dos extremos (figura 15-26), $D(x, t)$ debe ser cero en $x = 0$ y en $x = \ell$. La ecuación 15-18 ya satisface la primera condición ($D = 0$ en $x = 0$) y satisface la segunda condición si sen $k\ell = 0$, lo que significa

$$k\ell = \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots, n\pi, \cdots$$

donde n es un número entero. Dado que $k = 2\pi/\lambda$, entonces $\lambda = 2\ell/n$, que es justo la ecuación 15-17a.

La ecuación 15-18, con la condición $\lambda = 2\ell/n$, es la representación matemática de una onda estacionaria. Vemos que una partícula en cualquier posición x vibra en movimiento armónico simple (debido al factor cos ωt). Todas las partículas de la cuerda oscilan con la misma frecuencia $f = \omega/2\pi$, pero la amplitud depende de x y es igual a $2A$ sen kx. (Compare esto con una onda viajera para la que todas las partículas vibran con la misma amplitud.) La amplitud tiene un máximo, igual a $2A$, cuando $kx = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2$ y así sucesivamente; esto es, en

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \cdots.$$

Desde luego, éstas son las posiciones de los antinodos (véase la figura 15-26).

EJEMPLO 15–9 **Formas de onda.** Dos ondas que viajan en direcciones opuestas sobre una cuerda fija en $x = 0$ se describen mediante las funciones

$$D_1 = (0.20\text{ m})\,\text{sen}(2.0x - 4.0t) \quad \text{y} \quad D_2 = (0.20\text{ m})\,\text{sen}(2.0x + 4.0t)$$

(donde x está en m, t en s) y producen un patrón de onda estacionaria. Determine *a*) la función para la onda estacionaria, *b*) la amplitud máxima en $x = 0.45$ m, *c*) dónde está fijo el otro extremo ($x > 0$), *d*) la máxima amplitud y dónde ocurre.

PLANTEAMIENTO Usamos el principio de superposición para sumar las dos ondas. Las ondas dadas tienen la forma que empleamos para obtener la ecuación 15-18, la cual, por lo tanto, podemos utilizar.

SOLUCIÓN *a*) Las dos ondas son de la forma $D = A$ sen$(kx \pm \omega t)$, de manera que

$$k = 2.0\text{ m}^{-1} \quad \text{y} \quad \omega = 4.0\text{ s}^{-1}.$$

Éstos se combinan para formar una onda estacionaria con la forma de la ecuación 15-18:

$$D = 2A\,\text{sen}\,kx\cos\omega t = (0.40\text{ m})\,\text{sen}(2.0x)\cos(4.0t),$$

donde x está en metros y t en segundos.

(*b*) En $x = 0.45$ m,

$$D = (0.40\text{ m})\,\text{sen}(0.90)\cos(4.0t) = (0.31\text{ m})\cos(4.0t).$$

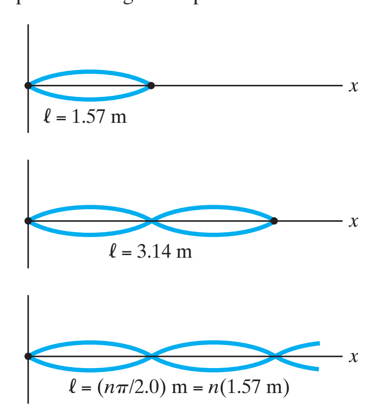
La amplitud máxima en este punto es $D = 0.31$ m y ocurre cuando $\cos(4.0t) = 1$.

c) Estas ondas forman un patrón de onda estacionaria, de manera que ambos extremos de la cuerda deben ser nodos. Los nodos se presentan cada media longitud de onda, que para la cuerda es

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{k} = \frac{\pi}{2.0}\text{ m} = 1.57\text{ m}.$$

Si la cuerda incluye sólo un bucle, su longitud es $\ell = 1.57$ m. Pero sin más información, podría ser el doble de largo, $\ell = 3.14$ m, o cualquier número entero por 1.57 m, y aún así dar un patrón de onda estacionaria, figura 15-27.

FIGURA 15–27 Ejemplo 15-9: posibles longitudes para la cuerda.



d) Los nodos se presentan en $x = 0$, $x = 1.57$ m y, si la cuerda es más larga que $\ell = 1.57$ m, en $x = 3.14$ m, 4.71 m, etcétera. La amplitud máxima (antinodo) es 0.40 m [de la parte *b*) anterior] y ocurre a la mitad entre los nodos. Para $\ell = 1.57$ m, sólo hay un antinodo, en $x = 0.79$ m.

* 15–10 Refracción†

Cuando una onda golpea una frontera, parte de la energía se refleja y parte se transmite o se absorbe. Cuando una onda bidimensional o tridimensional que viaja en un medio cruza una frontera hacia un medio donde su rapidez es diferente, la onda transmitida puede moverse en una dirección diferente a la de la onda incidente, como se muestra en la figura 15-28. Este fenómeno se conoce como **refracción**. Un ejemplo es una ola; la velocidad disminuye en agua poco profunda y las ondas se refractan, como se ilustra en la figura 15-29 (abajo). [Cuando la velocidad de la onda cambia gradualmente, como en la figura 15-29, sin una frontera clara, las ondas cambian de dirección (se refractan) gradualmente].

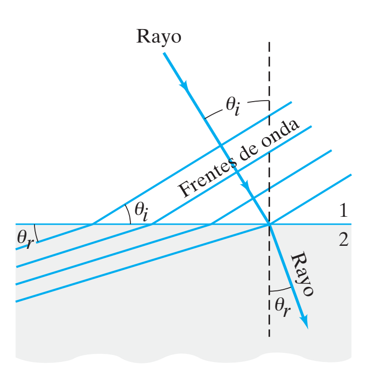


FIGURA 15–28 Refracción de ondas que pasan una frontera.





FIGURA 15–29 Las olas se refractan gradualmente conforme se aproximan a la playa y su velocidad disminuye. No hay una frontera distinguible, como en la figura 15-28, porque la velocidad de la onda cambia gradualmente.

En la figura 15-28, la velocidad de la onda en el medio 2 es menor que en el medio 1. En este caso, el frente de onda se dobla de manera que viaja más paralelo a la frontera. Esto es, *el ángulo de refracción*, θ_r, es menor que el *ángulo de incidencia*, θ_i. Para ver por qué sucede esto, y ayudarnos a obtener una relación cuantitativa entre θ_r y θ_i, pensemos en cada frente de onda como una fila de soldados. Los soldados marchan en tierra firme (medio 1), luego entran en el lodo (medio 2) y se frenan después de pasar la frontera. Los soldados que llegan primero al lodo frenan primero, y la fila se dobla como se muestra en la figura 15-30a. Consideremos el frente de onda (o la fila de soldados) marcado como A en la figura 15-30b. En el mismo tiempo t cuando A_1 se mueve una distancia $\ell_1 = v_1 t$, vemos que A_2 se mueve una distancia $\ell_2 = v_2 t$. Los dos triángulos rectos en la figura 15-30b, que aparecen sombreados, tienen en común el lado marcado como a. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\theta_1 = \frac{\ell_1}{a} = \frac{v_1 t}{a}$$

puesto que a es la hipotenusa, y

$$\operatorname{sen}\theta_2 = \frac{\ell_2}{a} = \frac{v_2 t}{a}.$$

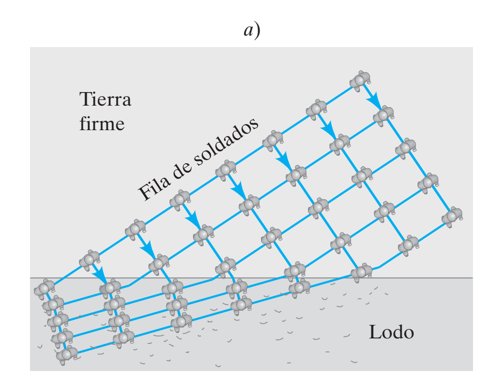
Al dividir estas dos ecuaciones, obtenemos la **ley de refracción**:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_1} = \frac{v_2}{v_1}. \qquad \textbf{(15–19)}$$

Dado que θ_1 es el ángulo de incidencia (θ_i) y θ_2 es el ángulo de refracción (θ_r), la ecuación 15-19 da la relación cuantitativa entre los dos. Si la onda fuera en la dirección opuesta, la geometría no cambiaría; sólo cambiarían de papeles θ_1 y θ_2: θ_1 sería el ángulo de refracción y θ_2 el ángulo de incidencia. Claramente, entonces, si la onda viaja en un medio donde se puede mover más rápido, se doblará de la forma opuesta, $\theta_r > \theta_i$. A partir de la ecuación 15-19 vemos que, si la velocidad aumenta, el ángulo aumenta, y viceversa.

Las ondas sísmicas se refractan dentro de la Tierra conforme viajan a través de las capas de roca de diferentes densidades (por lo tanto, la velocidad es diferente) tal como hacen las ondas de agua. Las ondas de luz también se refractan y, cuando estudiemos óptica, nos resultará muy útil la ecuación 15-19.

†Esta sección y la siguiente se cubren con mayor detalle en los capítulos 32 a 35, referentes a óptica.



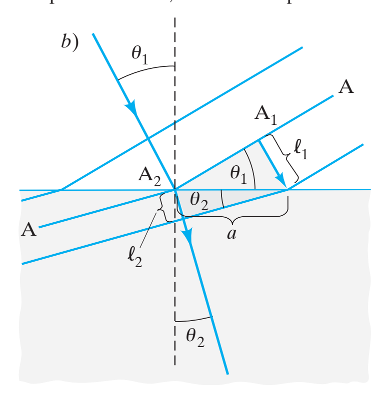


FIGURA 15–30 *a*) Analogía militar para deducir *b*) la ley de refracción para ondas.

FÍSICA APLICADA
Refracción de ondas sísmicas

EJEMPLO 15–10 Refracción de una onda sísmica. Una onda sísmica P pasa a través de una frontera en roca donde su velocidad aumenta de 6.5 km/s a 8.0 km/s. Si golpea esta frontera a 30°, ¿cuál es el ángulo de refracción?

PLANTEAMIENTO Aplicamos la ley de refracción, ecuación 15-19, sen θ_2/sen $\theta_1 = v_2/v_1$.

SOLUCIÓN Dado que sen 30° = 0.50, la ecuación 15-19 da

$$\text{sen}\,\theta_2 \;=\; \frac{(8.0\,\text{m/s})}{(6.5\,\text{m/s})}(0.50) \;=\; 0.62.$$

De manera que $\theta_2 = \text{sen}^{-1}(0.62) = 38°$.

NOTA Tenga cuidado con los ángulos de incidencia y refracción. Como se explicó en la sección 15-7 (figura 15-21), estos ángulos están entre el frente de onda y la línea de frontera, o, de manera equivalente, entre el rayo (dirección de movimiento de la onda) y la línea perpendicular a la frontera (la normal). Inspeccione cuidadosamente la figura 15-30b.



FIGURA 15–31 Difracción de onda. Las ondas llegan desde la esquina superior izquierda. Note cómo las ondas, conforme pasan el obstáculo, se doblan alrededor del mismo, en la “región de sombra” detrás del obstáculo.

*15–11 Difracción

Las ondas se dispersan conforme viajan. Cuando encuentran un obstáculo, se doblan un poco alrededor de éste y pasan a la región detrás del obstáculo, como se muestra en la figura 15-31 en el caso de las ondas de agua. Este fenómeno se llama **difracción**.

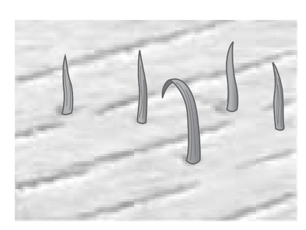
La cantidad de difracción depende de la longitud de onda de la onda y del tamaño del obstáculo, como se muestra en la figura 15-32. Si la longitud de onda es mucho mayor que el objeto, como sucede con las hojas de pasto de la figura 15-32a, la onda se dobla alrededor del objeto casi como si éste no estuviera ahí. Para objetos más grandes, partes *b*) y *c*), hay más región de “sombra” detrás del obstáculo, donde no esperaríamos que penetraran las ondas… pero lo hacen, al menos un poco. Note entonces, en la parte *d*), donde el obstáculo es el mismo que en la parte *c*) pero donde la longitud de onda es mayor, que hay más difracción en la región de sombra. Como regla empírica, *sólo si la longitud de onda es menor que el tamaño del objeto habrá una región de sombra significativa*. Esta regla también se aplica a la *reflexión* desde un obstáculo. Muy poco de la onda se refleja, a menos que la longitud de onda sea menor que el tamaño del obstáculo.

Una guía aproximada a la cantidad de difracción es

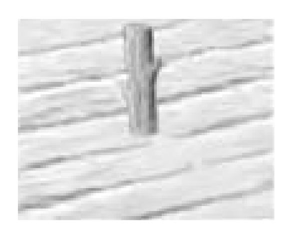
$$\theta(\text{radianes}) \;\approx\; \frac{\lambda}{\ell},$$

donde θ es aproximadamente la dispersión angular de las ondas después de que pasan a través de una abertura de ancho ℓ o alrededor de un obstáculo de ancho ℓ.

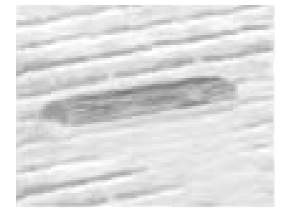
FIGURA 15–32 Olas que pasan objetos de varios tamaños. Note que cuanto mayor sea la longitud de onda comparada con el tamaño del objeto, más difracción habrá en la “región de sombra”.



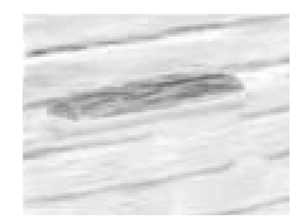
a) Olas que pasan hojas de pasto



b) Vara en agua



c) Olas con longitud de onda corta que pasan un tronco



d) Olas con longitud de onda larga que pasan un tronco

El hecho de que las ondas puedan rodear obstáculos y, por consiguiente, puedan portar energía a áreas detrás de los obstáculos es muy diferente del hecho de que las partículas materiales transporten energía. Un claro ejemplo es el siguiente: si usted está de pie a la vuelta de una esquina en un lado de un edificio, no puede ser golpeado por una pelota de béisbol lanzada desde el otro lado; sin embargo, sí escucha un grito u otro sonido proveniente del mismo lugar porque las ondas sonoras se difractan alrededor de los bordes del edificio.

Resumen

Los objetos que vibran actúan como fuentes de **ondas** que viajan hacia afuera desde la fuente. Son ejemplos las ondas en el agua y las ondas en una cuerda. La onda puede ser un **pulso** (una sola cresta) o puede ser continua (muchas crestas y valles).

La **longitud de onda** de una onda continua es la distancia entre dos crestas sucesivas (o cualesquiera dos puntos idénticos en la forma de onda).

La **frecuencia** es el número de longitudes de onda completas (o crestas) que pasan por un punto dado por unidad de tiempo.

La **velocidad de onda** (o velocidad de fase, cuán rápido se mueve una cresta) es igual al producto de la longitud de onda y la frecuencia,

$$v = \lambda f. \qquad \textbf{(15–1)}$$

La **amplitud** de una onda es la altura máxima de una cresta, o la profundidad de un valle, en relación con el nivel normal (o de equilibrio).

En una **onda transversal** las oscilaciones son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda. Un ejemplo es una onda en una cuerda.

En una **onda longitudinal**, las oscilaciones son a lo largo (paralelas) a la dirección de propagación; un ejemplo es el sonido.

La velocidad de las ondas longitudinales y transversales en la materia es proporcional a la raíz cuadrada de un factor de fuerza elástica dividido entre un factor de inercia (o densidad).

Las ondas portan energía de un lugar a otro sin que se transporte materia. La **intensidad** de una onda (energía transportada a través de una unidad de área por unidad de tiempo) es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda.

Para una onda que viaja hacia fuera en tres dimensiones desde una fuente puntual, la intensidad (ignorando el amortiguamiento) disminuye con el cuadrado de la distancia desde la fuente,

$$I \propto \frac{1}{r^2}. \qquad \textbf{(15–8a)}$$

La amplitud disminuye linealmente con la distancia desde la fuente.

Una onda transversal unidimensional que viaja en un medio hacia la derecha a lo largo del eje x positivo, se puede representar mediante una fórmula para el desplazamiento del medio a partir de la posición de equilibrio, en cualquier punto x, como una función del tiempo:

$$D(x,t) = A\,\mathrm{sen}\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(x - vt)\right] \qquad \textbf{(15–10a)}$$

$$= A\,\mathrm{sen}(kx - \omega t) \qquad \textbf{(15–10c)}$$

donde

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \textbf{(15–11)}$$

y

$$\omega = 2\pi f.$$

Si una onda viaja hacia valores decrecientes de x,

$$D(x,t) = A\,\mathrm{sen}(kx + \omega t). \qquad \textbf{(15–13c)}$$

[*Las ondas se describen mediante la **ecuación de onda**, que en una dimensión es $\partial^2 D/\partial x^2 = (1/v^2)\,\partial^2 D/\partial t^2$, ecuación 15-16].

Cuando dos o más ondas pasan a través de la misma región del espacio al mismo tiempo, el desplazamiento en cualquier punto dado será la suma vectorial del desplazamiento de las ondas separadas. Éste es el **principio de superposición**. Es válido para ondas mecánicas si las amplitudes son lo suficientemente pequeñas como para que la fuerza restauradora del medio sea proporcional al desplazamiento.

Las ondas se reflejan en los objetos que encuentran en su trayectoria. Cuando el **frente de onda** de una onda bidimensional o tridimensional golpea un objeto, el *ángulo de reflexión* es igual al *ángulo de incidencia*, que es la **ley de reflexión**. Cuando una onda golpea una frontera entre dos materiales en los que puede viajar, parte de la onda se refleja y parte se transmite.

Cuando dos ondas pasan a través de la misma región del espacio al mismo tiempo, produce **interferencia**. De acuerdo con el principio de superposición, el desplazamiento resultante en cualquier punto y a cualquier tiempo es la suma de sus desplazamientos separados. Esto puede dar por resultado **interferencia constructiva**, **interferencia destructiva** o una situación intermedia, dependiendo de las amplitudes y las fases relativas de las ondas.

Las ondas que viajan en una cuerda de longitud fija interfieren con las ondas que se reflejan en el extremo y viajan de vuelta en la dirección opuesta. A ciertas frecuencias, se producen **ondas estacionarias** que parecen estar quietas en vez de estar viajando. La cuerda (u otro medio) vibra como un todo. Éste es un fenómeno de resonancia, y las frecuencias a las que ocurren las ondas estacionarias se llaman **frecuencias resonantes**. Los puntos de interferencia destructiva (no vibración) se llaman **nodos**. Los puntos de interferencia constructiva (máxima amplitud de vibración) se llaman **antinodos**. En una cuerda de longitud ℓ fija en ambos extremos, las longitudes de onda de las ondas estacionarias están dadas por

$$\lambda_n = 2\ell/n \qquad \textbf{(15–17a)}$$

donde n es un número entero.

[*Las ondas cambian de dirección, o se **refractan**, cuando viajan de un medio a un segundo medio donde su rapidez es diferente. Las ondas se dispersan, o se **difractan**, conforme viajan y encuentran obstáculos. Una guía aproximada de la cantidad de difracción es $\theta \approx \lambda/\ell$, donde λ es la longitud de onda y ℓ el ancho de una abertura u obstáculo. Hay una "región de sombra" significativa sólo si la longitud de onda λ es menor que el tamaño del obstáculo].

Preguntas

1. ¿La frecuencia de una onda periódica simple es igual a la frecuencia de su fuente? ¿Por qué?
2. Explique la diferencia entre la rapidez de una onda transversal que viaja por una cuerda y la rapidez de un pequeño trozo de la cuerda.
3. Usted encuentra desafiante subir de un bote a otro bote más alto cuando hay oleaje fuerte. Si el ascenso varía de 2.5 m a 4.3 m, ¿cuál es la amplitud de la onda? Suponga que los centros de los dos botes están separados media longitud de onda.
4. ¿Qué tipo de ondas cree que viajarán por una varilla metálica horizontal si usted golpea su extremo *a*) verticalmente desde arriba y *b*) horizontalmente en forma paralela a su longitud?
5. Dado que la densidad del aire disminuye con un aumento en la temperatura, pero el módulo volumétrico B es casi independiente de la temperatura, ¿cómo esperaría que varíe la rapidez de las ondas sonoras en el aire en función de la temperatura?
6. Describa cómo podría estimar la rapidez de las olas a través de la superficie de un estanque.
7. La rapidez del sonido en la mayoría de los sólidos es un poco mayor que en el aire, aunque la densidad de los sólidos es mucho mayor (10^3 a 10^4 veces). Explique.
8. Dé dos razones por las que las ondas circulares en el agua disminuyen en amplitud conforme se alejan de la fuente.

9. Dos ondas lineales tienen la misma amplitud y rapidez; serían idénticas si no fuera por que una tiene la mitad de la longitud de onda que la otra. ¿Cuál transmite más energía? ¿En qué factor?

10. ¿Cualquier función de $(x - vt)$ (véase la ecuación 15-14) representa un movimiento ondulatorio? ¿Por qué? Si no es así, dé un ejemplo.

11. Cuando una onda sinusoidal cruza la frontera entre dos secciones de cuerda, como en la figura 15-19, la frecuencia no cambia (aunque la longitud de onda y la velocidad sí cambian). Explique por qué.

12. Si una onda sinusoidal en una cuerda de dos secciones (figura 15-19) se invierte en la reflexión, ¿la onda transmitida tendrá una longitud de onda más larga o más corta?

13. ¿La energía siempre se conserva cuando interfieren dos ondas? Expliquen.

14. Si una cuerda vibra como una onda estacionaria en tres segmentos, ¿existen algunos lugares que podrían tocarse con la hoja de un cuchillo sin perturbar el movimiento?

15. Cuando una cuerda existe una onda estacionaria, las vibraciones de las ondas incidente y reflejada se cancelan en los nodos. ¿Esto significa que la energía se destruyó? Explique.

16. ¿La amplitud de las ondas estacionarias en la figura 15-25 puede ser mayor que la amplitud de las vibraciones que las causan (el movimiento de la mano de arriba abajo)?

17. Cuando una cuerda se hace vibrar como en la figura 15-25, ya sea mediante la acción de la mano o de un oscilador mecánico, los “nodos” no son verdaderamente nodos (en reposo). Explique. [*Sugerencia:* Considere el amortiguamiento y el flujo de energía de la mano u oscilador].

* 18. Por lo regular, las señales de radio de AM se escuchan detrás de una colina, pero las señales de FM a menudo no se escuchan. Es decir, las señales de AM se doblan más que las de FM. Explique. (Las señales de radio, como se verá, son transportadas por ondas electromagnéticas cuyas longitudes de onda para AM son, por lo general, de 200 a 600 m y para FM aproximadamente de 3 m).

* 19. Si se sabe que la energía se transmitió de un lugar a otro, ¿cómo podríamos determinar si la energía se transportó mediante partículas (objetos materiales) o por medio de ondas?

Problemas

15–1 y 15–2 Características de las ondas

1. (I) Un pescador nota que las crestas de las olas pasan por la quilla de su bote anclado cada 3.0 s. El pescador hace una medición y determina que la distancia entre dos crestas es de 8.0 m. ¿Qué tan rápido viajan las olas?

2. (I) Una onda sonora en el aire tiene una frecuencia de 262 Hz y viaja con una rapidez de 343 m/s. ¿Qué tan separadas están las crestas de la onda (las compresiones)?

3. (I) Calcule la rapidez de ondas longitudinales en *a*) agua, *b*) granito y *c*) acero.

4. (I) Las señales de radio de AM tienen frecuencias entre 550 kHz y 1600 kHz (kilohertz) y viajan con una rapidez de 3.0×10^8 m/s. ¿Cuáles son las longitudes de onda de estas señales? En FM las frecuencias varían de 88 MHz a 108 MHz (megahertz) y viajan con la misma rapidez que las de AM. ¿Cuáles son sus longitudes de onda?

5. (I) Determine la longitud de onda de una onda sonora de 5800 Hz que viaja a lo largo de una varilla de hierro.

6. (II) Una cuerda de 0.65 kg de masa se estira entre dos soportes separados 8.0 m. Si la tensión en la cuerda es de 140 N, ¿cuánto tiempo tardará un pulso en viajar de un soporte al otro?

7. (II) Una cuerda de 0.40 kg se estira entre dos soportes, separados 7.8 m. Cuando un soporte se golpea con un martillo, una onda transversal viaja por la cuerda y alcanza el otro soporte en 0.85 s. ¿Cuál es la tensión en la cuerda?

8. (II) Un marino golpea el lado de su barco justo debajo de la superficie del mar. 2.8 s más tarde escucha el eco de la onda reflejada en el lecho del océano directamente abajo. ¿Cuál es la profundidad del océano en ese punto?

9. (II) Una góndola de esquiar está conectada a lo alto de una colina mediante un cable de acero de 660 m de longitud y 1.5 cm de diámetro. Conforme la góndola llega al extremo de su recorrido, rebota en la terminal y envía un pulso de onda a lo largo del cable. Se observa que el pulso tarda 17 s en regresar. *a*) ¿Cuál es la rapidez del pulso? *b*) ¿Cuál es la tensión en el cable?

10. (II) Las ondas P y S de un terremoto viajan con diferentes rapideces, y esta diferencia ayuda a ubicar el “epicentro” del terremoto (donde tuvo lugar la perturbación). *a*) Suponiendo rapideces típicas de 8.5 km/s y 5.5 km/s para las ondas P y S, respectivamente, ¿qué tan lejos ocurrió el terremoto si una estación sísmica particular detecta la llegada de estos dos tipos de onda con una diferencia de 1.7 min? *b*) ¿Es suficiente una estación sísmica para determinar la ubicación del epicentro? Explique.

11. (II) La onda en una cuerda que se muestra en la figura 15-33 se mueve hacia la derecha con una rapidez de 1.10 m/s. *a*) Dibuje la forma de la cuerda 1.00 s después e indique cuáles partes de la cuerda se mueven hacia arriba y cuáles hacia abajo en ese instante. *b*) Estime la rapidez vertical del punto A sobre la cuerda en el instante que se muestra en la figura.

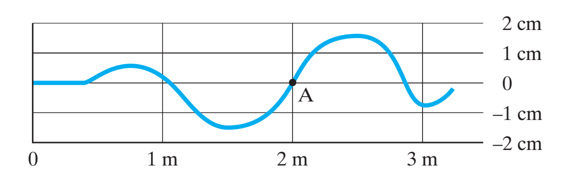


FIGURA 15–33 Problema 11.

12. (II) Una bola de 5.0 kg cuelga de un alambre de acero de 1.00 mm de diámetro y 5.00 m de largo. ¿Cuál sería la rapidez de una onda en el alambre de acero?

13. (II) Dos niños se envían señales a lo largo de una cuerda con masa total de 0.50 kg; la cuerda está amarrada, en cada uno de sus extremos, a una lata de aluminio con una tensión de 35 N. Las vibraciones en la cuerda tardan 0.50 s en viajar de un niño al otro. ¿A qué distancia están los niños entre sí?

* 14. (II) **Análisis dimensional.** Las olas en la superficie del océano no dependen significativamente de las propiedades del agua, como la densidad o la tensión superficial. La principal “fuerza de retorno” para el agua apilada en las crestas de las olas se debe a la atracción gravitacional de la Tierra. Por lo tanto, la rapidez v (m/s) de las olas oceánicas depende de la aceleración de la gravedad g. Es razonable esperar que v también dependa de la profundidad del agua h y de la longitud de onda λ de la ola. Suponga que la rapidez de la ola está dada por la forma funcional $v = Cg^{\alpha}h^{\beta}\lambda^{\gamma}$, donde α, β, γ y C son cantidades adimensionales. *a*) En aguas profundas, el agua por debajo no afecta el movimiento de las olas en la superficie; por ende, v debe ser independiente de la profundidad h (es decir, $\beta = 0$). Utilizando sólo análisis dimensional (sección 1-7), determine una expresión para la rapidez de las olas superficiales en aguas profundas. *b*) En aguas poco profundas, experimentalmente se encuentra que la rapidez de las olas superficiales es independiente de la longitud de onda (es decir, $\gamma = 0$). Utilizando sólo análisis dimensional, determine una expresión para la rapidez de las olas en aguas poco profundas.

15–3 Energía transportada por las ondas

15. (I) Dos ondas sísmicas de la misma frecuencia viajan a través de la misma porción de la Tierra, pero una porta 3.0 veces la energía de la otra. ¿Cuál es la razón de las amplitudes de las dos ondas?

16. (II) ¿Cuál es la razón de *a*) las intensidades y *b*) las amplitudes de una onda sísmica P que pasa a través de la Tierra y se detecta en dos puntos a 15 y 45 km de la fuente.

17. (II) Demuestre que, si se ignora el amortiguamiento, la amplitud A de las ondas circulares en el agua disminuye como la raíz cuadrada de la distancia r desde la fuente: $A \propto 1/\sqrt{r}$.

18. (II) La intensidad de una onda sísmica que pasa a través de la Tierra se mide en $3.0 \times 10^6\ \mathrm{J/m^2 \cdot s}$ a una distancia de 48 km desde la fuente. *a*) ¿Cuál fue la intensidad cuando pasó por un punto ubicado a sólo 1.0 km de la fuente? *b*) ¿A qué tasa pasó la energía a través de una área de $2.0\ \mathrm{m^2}$ a 1.0 km?

19. (II) Un pequeño alambre de acero, de 1.0 mm de diámetro, se conecta a un oscilador y está bajo una tensión de 7.5 N. La frecuencia del oscilador es de 60.0 Hz y se observa que la amplitud de la onda en el alambre de acero es de 0.50 cm. *a*) ¿Cuál es la salida de potencia del oscilador, suponiendo que la onda no se refleja? *b*) Si la salida de potencia permanece constante pero la frecuencia se duplica, ¿cuál es la amplitud de la onda?

20. (II) Demuestre que la intensidad de una onda es igual a la densidad de energía (energía por unidad de volumen) en la onda por la rapidez de la onda.

21. (II) *a*) Demuestre que la tasa promedio con la que la energía se transporta a lo largo de una cuerda mediante una onda mecánica de frecuencia f y amplitud A es

$$\overline{P} = 2\pi^2 \mu v f^2 A^2,$$

donde v es la rapidez de la onda y μ es la masa por unidad de longitud de la cuerda. *b*) Si la cuerda está bajo una tensión $F_T = 135$ N y tiene 0.10 kg/m de masa por unidad de longitud, ¿qué potencia se requiere para transmitir ondas transversales de 120 Hz y de 2.0 cm de amplitud?

15–4 Representación matemática de una onda viajera

22. (I) Una onda transversal en un alambre está dada por $D(x, t) = 0.015\ \mathrm{sen}(25x - 1200t)$, donde D y x están en metros y t en segundos. *a*) Escriba una expresión para una onda con la misma amplitud, longitud de onda y frecuencia, pero que viaja en la dirección opuesta. *b*) ¿Cuál es la rapidez de cualquiera de las dos ondas?

23. (I) Suponga que, en $t = 0$, un perfil de onda se representa mediante $D = A\ \mathrm{sen}(2\pi x/\lambda + \phi)$; esto es, difiere de la ecuación 15-9 por un factor de fase constante ϕ. Entonces, ¿cuál será la ecuación para una onda que viaja hacia la izquierda a lo largo del eje x, como función de x y t?

24. (II) Una onda viajera transversal en una cuerda se representa mediante $D = 0.22\ \mathrm{sen}(5.6x + 34t)$, donde D y x están en metros y t en segundos. Para esta onda, determine *a*) la longitud de onda, *b*) la frecuencia, *c*) la velocidad (magnitud y dirección), *d*) la amplitud y *e*) las rapideces máxima y mínima de las partículas de la cuerda.

25. (II) Considere el punto $x = 1.00$ m en la cuerda del ejemplo 15-5. Determine *a*) la velocidad máxima de este punto y *b*) su aceleración máxima. *c*) ¿Cuál es su velocidad y aceleración en $t = 2.50$ s?

26. (II) Una onda transversal en una cuerda está dada por $D(x, t) = 0.12\ \mathrm{sen}(3.0x - 15.0t)$, donde D y x están en m y t en s. En $t = 0.20$ s, ¿cuáles son el desplazamiento y la velocidad de un punto de la cuerda en $x = 0.60$ m?

27. (II) Un pulso de onda transversal viaja hacia la derecha a lo largo de una cuerda, con una rapidez $v = 2.0$ m/s. En $t = 0$, la forma del pulso está dada por la función

$$D = 0.45 \cos(2.6x + 1.2),$$

donde D y x están en metros. *a*) Grafique D versus x en $t = 0$. *b*) Determine una fórmula para el pulso de onda en cualquier tiempo t, suponiendo que no hay pérdidas por fricción. *c*) Grafique $D(x, t)$ versus x en $t = 1.0$ s. *d*) Repita las partes *b*) y *c*) suponiendo que el pulso viaja hacia la izquierda. Elabore las tres gráficas sobre los mismos ejes para una fácil comparación.

28. (II) Una onda longitudinal de 524 Hz en el aire tiene una rapidez de 345 m/s. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda? *b*) ¿Cuánto tiempo se requiere para que la fase cambie 90° en un punto dado en el espacio? *c*) En un instante particular, ¿cuál es la diferencia de fase (en grados) entre dos puntos separados 4.4 cm?

29. (II) Escriba la ecuación para la onda del problema 28 que viaja hacia la derecha, si su amplitud es de 0.020 cm y $D = -0.020$ cm en $t = 0$ y $x = 0$.

30. (II) Una onda sinusoidal que viaja en una cuerda en la dirección x negativa tiene 1.00 cm de amplitud, 3.00 cm de longitud de onda y 245 Hz de frecuencia. En $t = 0$, la partícula de cuerda en $x = 0$ tiene un desplazamiento $D = 0.80$ cm sobre el origen y se mueve hacia arriba. *a*) Bosqueje la forma de la onda en $t = 0$ y *b*) determine la función de x y t que describe la onda.

* 15–5 La ecuación de onda

***31.** (II) Determine si la función $D = A\ \mathrm{sen}\ kx \cos \omega t$ es una solución de la ecuación de onda.

***32.** (II) Demuestre por sustitución directa que las siguientes funciones satisfacen la ecuación de onda: *a*) $D(x, t) = A \ln(x + vt)$; *b*) $D(x, t) = (x - vt)^4$.

***33.** (II) Demuestre que las formas de onda de las ecuaciones 15-13 y 15-15 satisfacen la ecuación de onda, ecuación 15-16.

***34.** (II) Sean dos ondas lineales representadas por $D_1 = f_1(x, t)$ y $D_2 = f_2(x, t)$. Si estas dos ondas satisfacen la ecuación de onda (ecuación 15-16), demuestre que cualquier combinación $D = C_1 D_1 + C_2 D_2$ también lo hace, donde C_1 y C_2 son constantes.

***35.** (II) ¿La función $D(x, t) = e^{-(kx - \omega t)^2}$ satisface la ecuación de onda? ¿Por qué?

***36.** (II) En la obtención de la ecuación 15-2, $v = \sqrt{F_T/\mu}$, para la rapidez de una onda transversal en una cuerda, se supuso que la amplitud de la onda A es mucho menor que su longitud de onda λ. Suponiendo una forma de onda sinusoidal $D = A\ \mathrm{sen}(kx - \omega t)$, demuestre por medio de la derivada parcial $v' = \partial D/\partial t$ que la suposición $A \ll \lambda$ implica que la máxima rapidez transversal $v'_{\text{máx}}$ de la cuerda es mucho menor que la velocidad de la onda. Si $A = \lambda/100$, determine la razón $v'_{\text{máx}}/v$.

15–7 Reflexión y transmisión

37. (II) Una cuerda tiene dos secciones con densidades lineales de 0.10 kg/m y 0.20 kg/m, figura 15-34. Una onda incidente, dada por $D = (0.050\ \mathrm{m})\ \mathrm{sen}(7.5x - 12.0t)$, donde x está en metros y t en segundos, viaja a lo largo de la cuerda más ligera. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda sobre la sección más ligera de la cuerda? *b*) ¿Cuál es la tensión en la cuerda? *c*) ¿Cuál es la longitud de onda cuando la onda viaja sobre la sección más pesada?

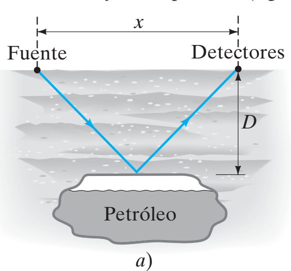
$\mu_1 = 0.10$ kg/m $\mu_2 = 0.20$ kg/m

$D = (0.050\ \mathrm{m})\ \mathrm{sen}(7.5x - 12.0\,t)$

FIGURA 15–34 Problema 37.

38. (II) Considere una onda seno que viaja por la cuerda estirada de dos partes en la figura 15-19. Determine una expresión *a*) para la razón de las rapideces de la onda en las dos secciones, v_H/v_L, y *b*) para la razón de las longitudes de onda en las dos secciones. (La frecuencia es la misma en ambas secciones. ¿Por qué?) *c*) ¿La longitud de onda es mayor en la cuerda más pesada o en la más ligera?

39. (II) La prospección de reflexión sísmica se usa normalmente para trazar mapas de formaciones enterradas profundamente que contienen petróleo. En esta técnica, una onda sísmica generada en la superficie de la Tierra (por ejemplo, mediante una explosión o un peso que cae) se refleja en la formación bajo la superficie y se detecta a su regreso a nivel del suelo. Al colocar detectores a nivel del suelo en varias posiciones relativas a la fuente y observar la variación en los tiempos de recorrido de la fuente al detector, se puede determinar la profundidad de la formación bajo la superficie. *a*) Suponga que un detector a nivel del suelo se coloca a una distancia *x* de una fuente de ondas sísmicas y que a una profundidad *D* existe una frontera horizontal entre la roca subyacente y la formación bajo la superficie (figura 15-35a). Determine una expresión para el tiempo *t* que la onda reflejada tarda en viajar de la fuente al detector, suponiendo que la onda sísmica se propaga con rapidez constante *v*. *b*) Suponga que a lo largo de una línea se colocan muchos detectores a diferentes distancias *x* de la fuente, como en la figura 15-35b. Luego, cuando se genera una onda sísmica, se miden los diferentes tiempos de trayecto *t* para cada detector. Comenzando con su resultado de la parte *a*), explique cómo se puede usar un gráfica de t^2 versus x^2 para determinar *D*.



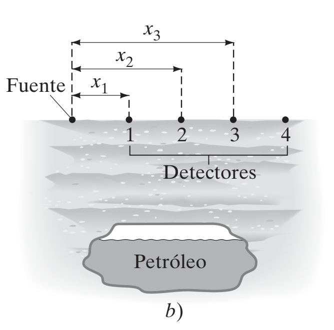


FIGURA 15–35
Problema 39.

40. (III) Una cuerda estirada a una tensión F_T consta de dos secciones (como en la figura 15-19), cuyas densidades lineales son μ_1 y μ_2. Tome $x = 0$ como el punto (un nudo) donde se unen, con μ_1 la densidad lineal en la sección izquierda de la cuerda y μ_2 en la sección de la derecha. Una onda sinusoidal, $D = A \operatorname{sen}[k_1(x - v_1 t)]$, parte del extremo izquierdo de la cuerda. Cuando llega al nudo, una parte se refleja y otra parte se transmite. Sean $D_R = A_R \operatorname{sen}[k_1(x + v_1 t)]$ la ecuación de la onda reflejada y $D_T = A_T \operatorname{sen}[k_2(x - v_2 t)]$ la ecuación de la onda transmitida. Dado que la frecuencia debe ser la misma en ambas secciones, tenemos $\omega_1 = \omega_2$ o $k_1 v_1 = k_2 v_2$. *a*) Puesto que la cuerda es continua, un punto a una distancia infinitesimal a la izquierda del nudo tiene el mismo desplazamiento en cualquier momento (debido a la onda incidente más la reflejada) que un punto justo a la derecha del nudo (debido a la onda transmitida). Demuestre que $A = A_T + A_R$. *b*) Suponiendo que la pendiente $(\partial D/\partial x)$ de la cuerda justo a la izquierda del nudo es la misma que la pendiente justo a la derecha del nudo, demuestre que la amplitud de la onda reflejada está dada por

$$A_R = \left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\right)A = \left(\frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1}\right)A.$$

c) ¿Cuál es A_T en términos de A?

15–8 Interferencia

41. (I) Los dos pulsos que se muestran en la figura 15-36 se mueven uno hacia el otro. *a*) Bosqueje la forma de la cuerda en el momento cuando se traslapan directamente. *b*) Bosqueje la forma de la cuerda algunos momentos después. *c*) En la figura 15-22a, en el momento cuando los pulsos pasan uno sobre el otro, la cuerda está recta. ¿Qué ocurrió con la energía en ese momento?

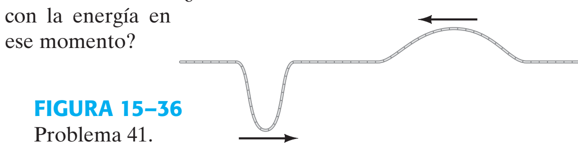


FIGURA 15–36
Problema 41.

42. (II) Suponga que dos ondas lineales de igual amplitud y frecuencia tienen una diferencia de fase ϕ mientras viajan en el mismo medio. Las ondas se representan mediante

$$D_1 = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$
$$D_2 = A \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi).$$

a) Use la identidad trigonométricas en $\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2 = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)\cos\frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_2)$ para demostrar que la onda resultante está dada por

$$D = \left(2A\cos\frac{\phi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right).$$

(*b*) ¿Cuál es la amplitud de esta onda resultante? ¿La onda es meramente sinusoidal o no? *c*) Demuestre que ocurre interferencia constructiva si $\phi = 0, 2\pi, 4\pi$, etcétera, y que ocurre interferencia destructiva si $\phi = \pi, 3\pi, 5\pi$, etcétera. *d*) Describa la onda resultante, mediante una ecuación y en palabras, si $\phi = \pi/2$.

15–9 Ondas estacionarias: Resonancia

43. (I) Una cuerda de violín vibra a 441 Hz cuando no se presiona con el dedo. ¿A qué frecuencia vibrará si se pulsa a un tercio del camino desde el extremo? (Es decir, sólo dos tercios de la cuerda vibran como onda estacionaria).

44. (I) Si una cuerda de violín vibra a 294 Hz como su frecuencia fundamental, ¿cuáles son las frecuencias de los primeros cuatro armónicos?

45. (I) En un terremoto se nota que un puente peatonal oscila de arriba a abajo en un patrón de un solo bucle (onda estacionaria fundamental) cada 1.5 s. ¿Qué otros posibles periodos de movimiento resonantes hay para este puente peatonal? ¿A qué frecuencias corresponden?

46. (I) Una cuerda particular resuena en cuatro bucles a una frecuencia de 280 Hz. Mencione al menos otras tres frecuencias a las que resonará.

47. (II) Una cuerda de 1.0 m de largo tiene dos secciones de igual longitud, con densidades lineales de 0.50 kg/m y 1.00 kg/m. La tensión en toda la cuerda es constante. Los extremos de la cuerda oscilan de manera que en ella se establece una onda estacionaria con un solo nodo donde se unen las dos secciones. ¿Cuál es la razón de las frecuencias oscilatorias?

48. (II) La velocidad de las ondas en una cuerda es 96 m/s. Si la frecuencia de las ondas estacionarias es de 445 Hz, ¿cuán separados están los dos nodos adyacentes?

49. (II) Si dos armónicos sucesivos de una cuerda en vibración son 240 Hz y 320 Hz, ¿cuál es la frecuencia del modo fundamental?

50. (II) Una cuerda de guitarra mide 90.0 cm de largo y tiene una masa de 3.16 g. Desde el puente hasta el poste de soporte $(= \ell)$ hay 60.0 cm y la cuerda está bajo una tensión de 520 N. ¿Cuáles son las frecuencias del modo fundamental y de los dos primeros sobretonos?

51. (II) Demuestre que la frecuencia de las ondas estacionarias en una cuerda de longitud ℓ y densidad lineal μ, que se estira a una tensión F_T, está dada por

$$f = \frac{n}{2\ell}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$$

donde n es un entero.

52. (II) El extremo de una cuerda horizontal con densidad lineal de 6.6×10^{-4} kg/m se une a un pequeño oscilador mecánico de 120 Hz y amplitud pequeña. La cuerda pasa por una polea, a una distancia $\ell = 1.50$ m, y de este extremo se cuelgan pesos, figura 15-37. ¿Qué masa m debe colgarse de este extremo de la cuerda para producir *a*) un bucle, *b*) dos bucles y *c*) cinco bucles de una onda estacionaria? Suponga que la cuerda en el oscilador es un nodo, lo que casi es cierto.

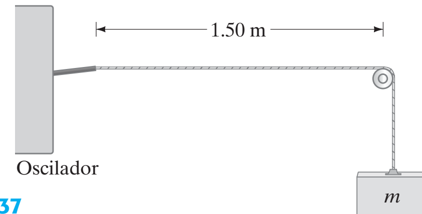


FIGURA 15–37
Problemas 52 y 53.

53. (II) En el problema 52, figura 15-37, la longitud de la cuerda se puede ajustar al mover la polea. Si la masa colgante m se fija en 0.070 kg, ¿cuántos diferentes patrones de onda estacionaria se pueden lograr al variar ℓ entre 10 cm y 1.5 m?

54. (II) El desplazamiento de una onda estacionaria en una cuerda está dado por $D = 2.4\,\text{sen}(0.60x)\cos(42t)$, donde x y D están en centímetros y t en segundos. *a*) ¿Cuál es la distancia (cm) entre nodos? *b*) Indique la amplitud, frecuencia y rapidez de cada una de las ondas componentes. *c*) Determine la rapidez de una partícula de la cuerda en $x = 3.20$ cm cuando $t = 2.5$ s.

55. (II) El desplazamiento de una onda transversal que viaja por una cuerda está representado por $D_1 = 4.2\,\text{sen}(0.84x - 47t + 2.1)$, donde D_1 y x están en centímetros y t en segundos. *a*) Encuentre una ecuación que represente una onda que, cuando viaje en la dirección opuesta, produzca una onda estacionaria cuando se sume a la primera onda. *b*) ¿Cuál es la ecuación que describe la onda estacionaria?

56. (II) Cuando usted agita el agua de ida y vuelta en una tina justo a la frecuencia correcta, el agua se eleva y cae de manera alternada en cada extremo, y permanece relativamente en calma en el centro. Suponga que la frecuencia para producir tal onda estacionaria en una tina de 45 cm de ancho es 0.85 Hz. ¿Cuál es la rapidez de la onda del agua?

57. (II) Una cuerda de violín particular toca a una frecuencia de 294 Hz. Si la tensión aumenta en un 15%, ¿cuál será la nueva frecuencia?

58. (II) Dos ondas viajeras se describen mediante las funciones

$$D_1 = A\,\text{sen}(kx - \omega t)$$
$$D_2 = A\,\text{sen}(kx + \omega t),$$

donde $A = 0.15$ m, $k = 3.5\ \text{m}^{-1}$ y $\omega = 1.8\ \text{s}^{-1}$. *a*) Grafique estas dos ondas desde $x = 0$ hasta un punto x (> 0) que incluya una longitud de onda completa. Elija $t = 1.0$ s. *b*) Grafique la suma de las dos ondas e identifique los nodos y antinodos en la gráfica, y compare con la representación analítica (matemática).

59. (II) Grafique las dos ondas dadas en el problema 58 y su suma, como función del tiempo, desde $t = 0$ hasta $t = T$ (un periodo). Elija *a*) $x = 0$ y *b*) $x = \lambda/4$. Interprete sus resultados.

60. (II) Una onda estacionaria en una cuerda horizontal de 1.64 m de largo despliega tres bucles cuando la cuerda vibra a 120 Hz. El máximo balanceo de la cuerda (de la parte superior a la inferior) en el centro de cada bucle es de 8.00 cm. *a*) ¿Cuál es la función que describe esta onda estacionaria? *b*) ¿Cuáles son las funciones que describen las dos ondas de igual amplitud, que viajan en direcciones opuestas y que conforman la onda estacionaria?

61. (II) En una guitarra eléctrica, un "captador" bajo cada cuerda transforma las vibraciones de la cuerda directamente en una señal eléctrica. Si se coloca un captador a 16.25 cm de uno de los extremos fijos de una cuerda de 65.00 cm de largo, ¿cuál de los armónicos, de $n = 1$ a $n = 12$, no será "captado" por el dispositivo?

62. (II) Una cuerda de guitarra de 65 cm está fija en ambos extremos. En el rango de frecuencias entre 1.0 y 2.0 kHz, la cuerda sólo resuena a frecuencias de 1.2, 1.5 y 1.8 kHz. ¿Cuál es la rapidez de las ondas viajeras en esta cuerda?

63. (II) Dos ondas viajeras dirigidas en sentidos opuestos, dadas por $D_1 = (5.0\,\text{mm})\cos[(2.0\,\text{m}^{-1})x - (3.0\,\text{rad/s})t]$ y $D_2 = (5.0\,\text{mm})\cos[(2.0\,\text{m}^{-1})x + (3.0\,\text{rad/s})t]$ forman una onda estacionaria. Determine la posición de los nodos a lo largo del eje x.

64. (II) Un alambre está compuesto de aluminio con longitud $\ell_1 = 0.600$ m y masa por unidad de longitud $\mu_1 = 2.70$ g/m, y está unido a una sección de acero con longitud $\ell_2 = 0.882$ m y masa por unidad de longitud $\mu_2 = 7.80$ g/m. Este alambre compuesto está fijo en ambos extremos y se mantiene a una tensión uniforme de 135 N. Encuentre la onda estacionaria de frecuencia más baja que pueda existir en este alambre, suponiendo que hay un nodo en la unión entre el aluminio y el acero. ¿Cuántos nodos (incluidos los dos en los extremos) posee esta onda estacionaria?

* 15–10 Refracción

*** 65.** (I) Una onda sísmica P, que viaja a 8.0 km/s, golpea una frontera dentro de la Tierra entre dos tipos de material. Si la onda se aproxima a la frontera con un ángulo incidente de 52° y el ángulo de refracción es de 31°, ¿cuál es la rapidez de la onda en el segundo medio?

*** 66.** (I) En el agua se aproximan ondas a una "repisa" submarina donde la velocidad cambia de 2.8 m/s a 2.5 m/s. Si las crestas de la onda incidente forman un ángulo de 35° con la repisa, ¿cuál será el ángulo de refracción?

*** 67.** (II) Una onda sonora viaja en aire caliente (25°C) cuando golpea una capa de aire frío (–15°C) más denso. Si la onda sonora golpea la interfaz de aire frío a un ángulo de 33°, ¿cuál es el ángulo de refracción? La rapidez del sonido como función de la temperatura se aproxima mediante $v = (331 + 0.60T)$ m/s, donde T está en °C.

*** 68.** (II) Cualquier tipo de onda que llega a una frontera, más allá de la cual aumenta su rapidez, tiene un ángulo incidente máximo si debe transmitirse una onda refractada. Este ángulo incidente máximo θ_{iM} corresponde a un ángulo de refracción igual a 90°. Si $\theta_i > \theta_{iM}$, toda la onda se refleja en la frontera y ninguna se refracta, puesto que esto correspondería a $\text{sen}\,\theta_r > 1$ (donde θ_r es el ángulo de refracción), lo que es imposible. Este fenómeno se conoce como *reflexión total interna*. *a*) Encuentre una expresión para θ_{iM} usando la ley de refracción, ecuación 15-19. *b*) ¿A qué distancia del banco debe colocarse un pescador de truchas (figura 15-38) de manera que las truchas no se asusten con su voz? La rapidez del sonido es aproximadamente 343 m/s en el aire y 1440 m/s en el agua.

FIGURA 15–38
Problema 68b.

*69. (II) Una onda sísmica longitudinal golpea una frontera entre dos tipos de roca a un ángulo de 38°. Conforme la onda cruza la frontera, la gravedad específica de la roca cambia de 3.6 a 2.8. Suponiendo que el módulo elástico es el mismo para ambos tipos de roca, determine el ángulo de refracción.

*15–11 Difracción

*70. (II) Una antena satelital mide aproximadamente 0.5 m de diámetro. De acuerdo con el manual del usuario, la antena tiene que apuntarse en la dirección del satélite, pero se permite un error de unos 2° en cualquier dirección sin pérdida de recepción. Estime la longitud de onda de las ondas electromagnéticas (rapidez = 3×10^8 m/s) recibidas por la antena.

Problemas generales

71. Una onda viajera sinusoidal tiene 880 Hz de frecuencia y 440 m/s de velocidad de fase. *a*) En un tiempo dado, encuentre la distancia entre cualesquiera dos ubicaciones que correspondan a una diferencia de fase de $\pi/6$ rad. *b*) En una ubicación fija, ¿por cuánto cambia la fase durante un intervalo de tiempo de 1.0×10^{-4} s?

72. Cuando usted camina sosteniendo una taza de café (8 cm de diámetro) justo al ritmo correcto de aproximadamente un paso por segundo, el café sube cada vez más en su taza hasta que finalmente comienza a derramarse por el borde superior, figura 15-39. Estime la rapidez de las ondas en el café.



FIGURA 15–39 Problema 72.

73. Dos varillas sólidas tienen el mismo módulo volumétrico, pero una es 2.5 veces más densa que la otra. ¿En cuál varilla será mayor la rapidez de las ondas longitudinales y en qué factor?

74. Dos ondas que viajan a lo largo de una cuerda estirada tienen la misma frecuencia, pero una transporta 2.5 veces la potencia de la otra. ¿Cuál es la razón de las amplitudes de las dos ondas?

75. Un insecto en la superficie de un estanque se mueve hacia arriba y abajo una distancia vertical total de 0.10 m, del punto más bajo al punto más alto, conforme pasa una onda. *a*) ¿Cuál es la amplitud de la onda? *b*) Si la amplitud aumenta a 0.15 m, ¿en qué factor cambia la energía cinética máxima del insecto?

76. Se supone que una cuerda de guitarra debe vibrar a 247 Hz; se hace una medición y se determina que en realidad vibra a 255 Hz. ¿En qué porcentaje se debe cambiar la tensión en la cuerda para llevar la frecuencia al valor correcto?

77. Una onda superficial producida por un terremoto se puede aproximar mediante una onda transversal sinusoidal. Suponiendo una frecuencia de 0.60 Hz (típica de los terremotos, que en realidad incluyen una mezcla de frecuencias), ¿qué amplitud se necesita de manera que los objetos comiencen a perder contacto con el suelo? [*Sugerencia:* Considere que la aceleración $a > g$].

78. Una cuerda uniforme de longitud ℓ y masa m cuelga verticalmente de un soporte. *a*) Demuestre que la rapidez de las ondas transversales en esta cuerda es $\sqrt{gh}$, donde h es la altura sobre el extremo inferior. *b*) ¿Cuánto tarda un pulso en viajar hacia arriba desde un extremo al otro?

79. Un pulso de onda transversal viaja hacia la derecha a lo largo de una cuerda, con una rapidez $v = 2.4$ m/s. En $t = 0$ la forma del pulso está dada por la función

$$D = \frac{4.0\ \mathrm{m}^3}{x^2 + 2.0\ \mathrm{m}^2},$$

donde D y x están en metros. *a*) Grafique D versus x en $t = 0$, desde $x = -10$ m hasta $x = +10$ m. *b*) Determine una fórmula para el pulso de onda en cualquier tiempo t, suponiendo que no hay pérdidas por fricción. *c*) Grafique $D(x, t)$ versus x en $t = 1.00$ s. *d*) Repita las partes *b*) y *c*) suponiendo que el pulso viaja hacia la izquierda.

80. *a*) Demuestre que, si la tensión en una cuerda estirada cambia por una pequeña cantidad ΔF_T, la frecuencia del modo fundamental cambia por una cantidad $\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta F_T/F_T)f$. *b*) ¿En qué porcentaje debe aumentar o disminuir la tensión en una cuerda de piano para elevar la frecuencia de 436 Hz a 442 Hz? *c*) ¿La fórmula de la parte *a*) se aplica también a los sobretonos?

81. Dos cuerdas en un instrumento musical se afinan para tocar a 392 Hz (sol) y 494 Hz (si). *a*) ¿Cuáles son las frecuencias de los primeros dos sobretonos para cada cuerda? *b*) Si las dos cuerdas tienen la misma longitud y están bajo la misma tensión, ¿cuál debe ser la razón de sus masas (m_{sol}/m_{si})? *c*) Si, en vez de ello, las cuerdas tienen la misma masa por unidad de longitud y están bajo la misma tensión, ¿cuál es la razón de sus longitudes (ℓ_{sol}/ℓ_{si})? *d*) Si sus masas y longitudes son las mismas, ¿cuál debe ser la razón de las tensiones en las dos cuerdas?

82. Las ondas en cierto surco a 10.8 cm del centro de un disco de fonógrafo de 33 rpm tienen una longitud de onda de 1.55 mm. ¿Cuál será la frecuencia del sonido emitido?

83. Un alambre de 10.0 m de largo y 152 g de masa se estira bajo una tensión de 255 N. En un extremo se genera un pulso y, 20.0 ms después, en el otro extremo se genera un segundo pulso. ¿Dónde se encontrarán los dos pulsos por primera vez?

84. Una onda, con una frecuencia de 220 Hz y una longitud de onda de 10.0 cm, viaja a lo largo de una cuerda. La máxima rapidez de las partículas en la cuerda es la misma que la rapidez de la onda. ¿Cuál es la amplitud de la onda?

85. Una cuerda puede tener un extremo "libre" si ese extremo se une a un anillo que pueda deslizarse sin fricción sobre un poste vertical (figura 15-40). Determine las longitudes de onda de las vibraciones resonantes de tal cuerda con un extremo fijo y el otro libre.

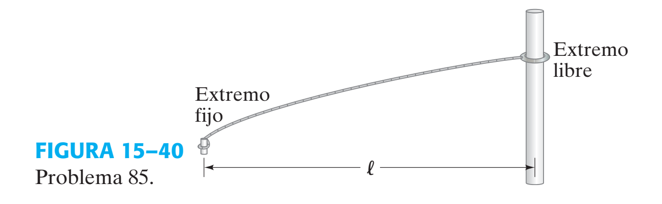
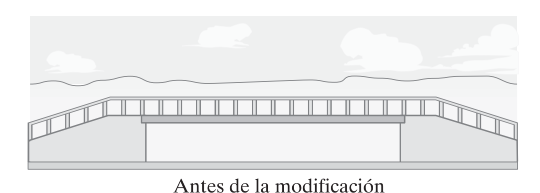


FIGURA 15–40 Problema 85.

86. Se observa que un puente sobre una autopista resuena como un bucle completo $\left(\frac{1}{2}\lambda\right)$ cuando un pequeño terremoto sacude el suelo verticalmente a 3.0 Hz. El departamento de caminos coloca un soporte en el centro del puente y lo ancla al suelo como se muestra en la figura 15-41. ¿Qué frecuencia resonante esperaría usted ahora para el puente? Se nota que rara vez los terremotos tienen sacudidas significativas arriba de 5 o 6 Hz. ¿Las modificaciones en el puente son buenas? Explique.



Antes de la modificación

Soporte añadido

Después de la modificación

FIGURA 15–41 Problema 86.

87. La figura 15-42 muestra la forma de onda en dos instantes de tiempo para una onda sinusoidal que viaja hacia la derecha. ¿Cuál es la representación matemática de esta onda?

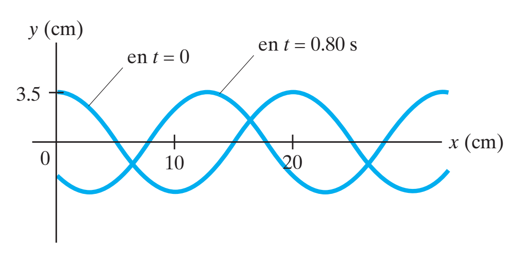


FIGURA 15–42 Problema 87.

88. Estime la potencia promedio de una ola cuando golpea el pecho de un adulto que está de pie dentro del agua en la playa. Suponga que la amplitud de la ola es de 0.50 m, la longitud de onda es 2.5 m y el periodo es 4.0 s.

89. Un tsunami, con 215 km de longitud de onda y 550 km/h de velocidad, viaja a través del Océano Pacífico. Conforme se aproxima a Hawai, las personas observan un inusual descenso en el nivel del mar en los muelles. ¿Aproximadamente cuánto tiempo tienen para correr y ponerse a salvo? (En ausencia de conocimiento y advertencia, las personas mueren durante los tsunamis, algunas de ellas atraídas a la playa para ver los peces y botes varados).

90. Dos pulsos de onda viajan en direcciones opuestas con la misma rapidez de 7.0 cm/s, como se ilustra en la figura 15-43. En $t = 0$, los bordes frontales de los dos pulsos están separados 15 cm. Bosqueje los pulsos de onda en t = 1.0, 2.0 y 3.0 s.

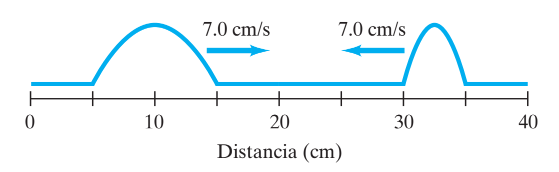


FIGURA 15–43 Problema 90.

91. Para una onda esférica que viaja uniformemente alejándose de una fuente puntual, demuestre que el desplazamiento se representa mediante

$$D = \left(\frac{A}{r}\right)\sin(kr - \omega t),$$

donde r es la distancia radial desde la fuente y A es una constante.

92. ¿Qué frecuencia de sonido tendría una longitud de onda del mismo tamaño que una ventana de 1.0 m de ancho? (La rapidez del sonido es 344 m/s a 20°C.) ¿Qué frecuencias se difractarían a través de la ventana?

* Problemas numéricos/por computadora

*__93.__ (II) Considere una onda generada por la vibración periódica de una fuente, dada por la expresión $D(x, t) = A \operatorname{sen}^2 k(x - ct)$, donde x representa la posición (en metros), t representa el tiempo (en segundos) y c es una constante positiva. Elegimos $A = 5.0$ m y $c = 0.50$ m/s. Use una hoja de cálculo para hacer una gráfica con tres curvas de $D(x, t)$ desde $x = -5.0$ m hasta +5.0 m en aumentos de 0.050 m en los tiempos t = 0.0, 1.0 y 2.0 s. Determine la rapidez, la dirección de movimiento, el periodo y la longitud de onda de la onda.

*__94.__ (II) El desplazamiento de un pulso de onda con forma de campana se describe mediante una relación que implica la función exponencial:

$$D(x, t) = Ae^{-\alpha(x - vt)^2}$$

donde las constantes $A = 10.0$ m, $\alpha = 2.0\ \text{m}^{-2}$ y $v = 3.0$ m/s. *a*) Sobre el rango $-10.0\ \text{m} \leq x \leq +10.0$ m, use una calculadora gráfica o un programa de computadora para graficar $D(x, t)$ en cada uno de los tres tiempos $t = 0$, $t = 1.0$ y $t = 2.0$ s. ¿Demuestran estas tres gráficas la forma de pulso de onda que se mueve a lo largo del eje x por la cantidad esperada sobre el lapso de cada intervalo de 1.0 s? *b*) Repita la parte *a*) suponiendo que $D(x, t) = Ae^{-\alpha(x+vt)^2}$.

Respuestas a los ejercicios

A: *c*).
B: *d*).
C: *c*).
D: *a*).

"Si la música es el alimento de la física, que toque la orquesta". [Véase Shakespeare, *Twelfth Night*, línea 1].

Para generar sus sonidos armónicos, los instrumentos de cuerdas dependen de ondas estacionarias transversales sobre cuerdas. Los sonidos de instrumentos de viento provienen de ondas estacionarias longitudinales de una columna de aire. Los instrumentos de percusión generan ondas estacionarias más complicadas.

Además de analizar las fuentes de sonido, también estudiaremos la escala de intensidad del sonido en decibeles, la interferencia y los *pulsos* de las ondas sonoras, el efecto Doppler, las ondas de choque y el estampido sónico, así como las imágenes con ultrasonido.



CAPÍTULO

16 Sonido

CONTENIDO

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!

Un pianista toca la nota "do central". El sonido es producto de la vibración de la cuerda del piano que se propaga hacia fuera como una vibración del aire (que puede llegar al oído de usted). Al comparar la vibración de la cuerda con la vibración del aire, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son válidas?

a) La vibración de la cuerda y la vibración del aire tienen la misma longitud de onda.
b) Tienen la misma frecuencia.
c) Tienen la misma rapidez.
d) Ni la longitud de onda, ni la frecuencia, ni la rapidez son las mismas en el aire y en la cuerda.

El sonido está asociado con nuestro sentido auditivo y, por lo tanto, con la fisiología del oído y la psicología del cerebro que interpreta las sensaciones que llegan a los oídos. El término *sonido* se refiere también a la sensación física que estimula nuestros oídos, es decir, ondas longitudinales.

Podemos distinguir tres aspectos de cualquier sonido. Primero, debe haber una *fuente* del sonido; como con cualquier onda mecánica, la fuente de una onda sonora es un objeto en vibración. Segundo, la energía se transfiere desde la fuente en forma de *ondas* sonoras longitudinales. Y tercero, el sonido es *detectado* por el oído o por un micrófono. Comenzamos este capítulo viendo algunos aspectos de las ondas sonoras.

16–1 Características del sonido

En el capítulo 15, figura 15-5, vimos cómo un tambor en vibración produce una onda sonora en el aire. De hecho, solemos pensar que las ondas sonoras viajan en el aire, pues normalmente son las vibraciones en el aire lo que fuerza los tímpanos a vibrar. Sin embargo, las ondas sonoras también viajan en otros materiales.

Un nadador bajo la superficie del agua puede escuchar dos piedras que chocan bajo el agua, ya que las vibraciones se transmiten al oído por medio del agua. Cuando usted pone el oído contra el suelo, puede oír un tren o un camión que se acerca. En este caso, el suelo no toca realmente su tímpano, sino que la onda longitudinal transmitida por el suelo es también una onda sonora, y sus vibraciones causan que vibren el oído externo y el aire dentro de éste. El sonido no puede viajar en ausencia de materia. Una campana dentro de un recipiente al vacío, por ejemplo, no puede oírse; el sonido tampoco puede viajar en el vacío del espacio exterior.

La **rapidez del sonido** es diferente en materiales distintos. En el aire a 0°C y 1 atm, el sonido viaja con una rapidez de 331 m/s. En la ecuación 15-4 $\left(v = \sqrt{B/\rho}\right)$ vimos que la rapidez depende del módulo elástico B y de la densidad ρ del material. Entonces, para el helio, cuya densidad es mucho menor que la del aire, pero cuyo módulo elástico no es muy diferente, la rapidez es aproximadamente tres veces mayor que en el aire. En líquidos y sólidos, que son mucho menos compresibles y, por lo tanto, tienen un módulo elástico mucho mayor, la rapidez es aún más grande. En la tabla 16-1 se da la rapidez del sonido en varios materiales. Los valores dependen algo de la temperatura, aunque esto es importante sólo para gases. Por ejemplo, en el aire a temperatura normal (ambiente), la rapidez aumenta aproximadamente 0.60 m/s por cada grado Celsius de incremento en la temperatura:

$$v \approx (331 + 0.60\,T)\ \text{m/s}, \qquad \text{[rapidez del sonido en el aire]}$$

donde T es la temperatura en °C. A menos que se indique lo contrario, en este capítulo supondremos que $T = 20°\text{C}$, por lo que† $v = [331 + (0.60)(20)]\ \text{m/s} = 343\ \text{m/s}$.

TABLA 16–1 Rapidez del sonido en varios materiales (20°C y 1 atm)

Material	Rapidez (m/s)
Aire	343
Aire (0°C)	331
Helio	1005
Hidrógeno	1300
Agua	1440
Agua marina	1560
Hierro y acero	≈ 5000
Vidrio	≈ 4500
Aluminio	≈ 5100
Madera dura	≈ 4000
Concreto	≈ 3000

EJEMPLO CONCEPTUAL 16–1 **Distancia desde la caída de un rayo.** Una regla general que nos indica qué tan cerca ha caído un rayo es "una milla por cada cinco segundos antes de que se escuche el trueno". Explique lo anterior, notando que la rapidez de la luz es tan alta (3×10^8 m/s, casi un millón de veces más rápida que la del sonido), que el tiempo para que la luz llegue a nosotros, es insignificante comparado con el tiempo que le toma al sonido.

RESPUESTA La rapidez del sonido en el aire es aproximadamente de 340 m/s, por lo que para viajar 1 km = 1000 m, se requieren aproximadamente 3 segundos. Una milla es casi igual a 1.6 kilómetros, por lo que el tiempo para que el trueno viaje una milla es aproximadamente $(1.6)(3) \approx 5$ segundos.

FÍSICA APLICADA

¿Qué tan lejos está el relámpago?

EJERCICIO A ¿Cuál sería la regla utilizada en el ejemplo 16-1 en kilómetros?

Dos aspectos de cualquier sonido son inmediatamente evidentes ante quien escucha: la "intensidad" y el "tono", y cada uno se refiere a una sensación en la conciencia de quien escucha. Sin embargo, para cada una de estas sensaciones subjetivas corresponde una cantidad física medible. La **intensidad** está relacionada con la energía por unidad de tiempo que cruza una unidad de área de la onda sonora, como veremos en la sección 16-3.

El **tono** de un sonido se refiere a si es alto, como el sonido de un pícolo o un violín; o bajo como el sonido de un tambor o un contrabajo. La cantidad física que determina el tono es la frecuencia, como lo notó Galileo por primera vez. Cuanto más baja sea la frecuencia, menor será el tono; y cuanto mayor sea la frecuencia, más alto será el tono.‡ El oído humano puede responder a frecuencias desde aproximadamente 20 Hz hasta cerca de 20,000 Hz. (Recuerde que 1 Hz es 1 ciclo por segundo). Esto se llama el **rango audible**. Estos límites varían algo de un individuo a otro. Una tendencia general es que conforme la gente envejece se vuelve menos capaz de escuchar altas frecuencias, por lo que el límite de frecuencia superior puede ser de 10,000 Hz o menor.

†Consideramos los 20°C ("temperatura ambiente") como precisa con dos cifras significativas.

‡Aunque el tono está determinado principalmente por la frecuencia, también depende en menor medida de la intensidad. Por ejemplo, un sonido muy intenso parecería ligeramente más bajo en tono, que un sonido tenue de la misma frecuencia.



No confunda ultrasónico (alta frecuencia) con supersónico (alta rapidez)

Las ondas sonoras cuyas frecuencias están fuera del rango audible pueden llegar al oído, pero en general no se está consciente de ellas. Las frecuencias arriba de 20,000 Hz se llaman **ultrasónicas** (no confundirlas con *supersónicas*, que se usan para un objeto que se mueve con una rapidez mayor que la del sonido). Muchos animales pueden oír frecuencias ultrasónicas; por ejemplo, los perros son capaces de oír sonidos de hasta 50,000 Hz, en tanto que los murciélagos detectan frecuencias de hasta 100,000 Hz. Las ondas ultrasónicas tienen muchas aplicaciones útiles en medicina y otras áreas, como veremos más adelante en este capítulo.



Cámara de autoenfoque

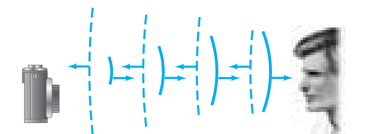


FIGURA 16–1 Ejemplo 16-2. La cámara de autoenfoque emite un pulso ultrasónico. Las líneas llenas representan el frente de onda del pulso de onda de salida que se mueve hacia la derecha; las líneas punteadas representan el frente de onda del pulso reflejado en el rostro de la persona, que regresa hacia la cámara. La información sobre el tiempo le permite al mecanismo de la cámara ajustar el enfoque de lente a la distancia adecuada.

EJEMPLO 16–2 **Autoenfoque con ondas sonoras.** Las cámaras de autoenfoque más antiguas determinan la distancia emitiendo un pulso de sonido de muy alta frecuencia (ultrasónica), que viaja al objeto por fotografiarse e incluye un sensor que detecta el sonido reflejado de retorno, como se indica en la figura 16-1. Para tener una idea de la sensitividad temporal del detector, calcule el tiempo de viaje del pulso para un objeto *a*) a 1.0 m de distancia y *b*) a 20 m de distancia.

PLANTEAMIENTO Si suponemos que la temperatura es aproximadamente de 20°C, la rapidez del sonido es de 343 m/s. Con este valor de rapidez v y la distancia total d, de ida y vuelta en cada caso, se puede obtener el tiempo ($v = d/t$):

SOLUCIÓN *a*) El pulso viaja 1.0 m al objeto y 1.0 m de regreso, para un total de 2.0 m. Despejando t en $v = d/t$, tenemos

$$t = \frac{d}{v} = \frac{2.0\text{ m}}{343\text{ m/s}} = 0.0058\text{ s} = 5.8\text{ ms}.$$

b) La distancia total ahora es 2×20 m $= 40$ m, por lo que

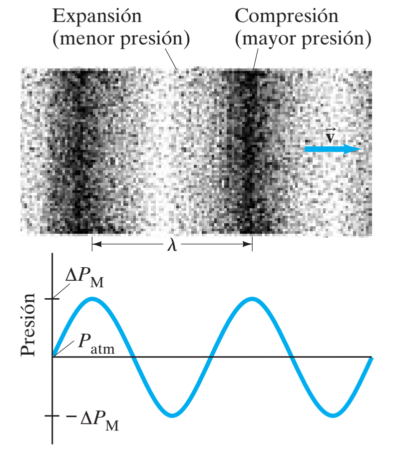
$$t = \frac{40\text{ m}}{343\text{ m/s}} = 0.12\text{ s} = 120\text{ ms}.$$

NOTA Las cámaras de autoenfoque más modernas utilizan luz infrarroja ($v = 3 \times 10^8$ m/s), en vez de ultrasonido, y/o un conjunto de sensores digitales que detectan distintas intensidades de luz entre los receptores adyacentes, conforme el lente se mueve automáticamente hacia delante y hacia atrás, eligiendo la posición del lente que ofrezca diferencias de intensidad máximas (un foco con mayor nitidez).

Las ondas sonoras cuyas frecuencias están debajo del rango audible (es decir, menores que 20 Hz) se llaman **infrasónicas**. Las fuentes de ondas infrasónicas incluyen sismos, truenos, volcanes y ondas producidas por maquinaria pesada en vibración. Esta última fuente se vuelve potencialmente nociva para los trabajadores, pues las ondas infrasónicas, si bien son inaudibles, llegan a causar daños al organismo humano. Estas ondas de baja frecuencia actúan de manera resonante, causando considerable movimiento e irritación de los órganos internos del cuerpo.

16–2 Representación matemática de ondas longitudinales

FIGURA 16–2 Onda sonora longitudinal que viaja hacia la derecha, y su representación gráfica en términos de presión.



En la sección 15-4 vimos que una onda senoidal unidimensional que viaja a lo largo del eje x se puede representar por la relación (ecuación 15-10c)

$$D = A\,\text{sen}(kx - \omega t), \tag{16–1}$$

donde D es el desplazamiento de la onda en la posición x y el tiempo t, y A es su *amplitud* (valor máximo). El número de onda k está relacionado con la longitud de onda λ por $k = 2\pi/\lambda$ y $\omega = 2\pi f$ donde f es la frecuencia. Para una onda transversal —como una onda sobre una cuerda— el desplazamiento D es perpendicular a la dirección de la propagación de la onda a lo largo del eje x. No obstante, para una onda longitudinal el desplazamiento D es *a lo largo de la dirección de la propagación de la onda*. Es decir, D es paralelo a x y representa el desplazamiento de un pequeño elemento de volumen del medio con respecto de su posición de equilibrio.

Las ondas (sonoras) longitudinales también se pueden considerar desde el punto de vista de variaciones en la presión, en vez del desplazamiento. De hecho, a menudo las ondas longitudinales se denominan **ondas de presión**. La variación de la presión es usualmente más fácil de medir que el desplazamiento (véase el ejemplo 16-7). Como se observa en la figura 16-2, en una zona de "compresión" (donde las moléculas están más cerca entre sí), la presión es más alta que la normal; mientras que en una zona en expansión (o rarefacción), la presión es menor que la normal. La figura 16-3 muestra una

representación gráfica de una onda sonora en aire en términos de *a*) desplazamiento y *b*) presión. Observe que el desplazamiento de la onda está un cuarto de longitud de onda, o 90° ($\pi/2$ rad), fuera de fase con la onda de presión: donde la presión es un máximo o un mínimo, el desplazamiento del punto de equilibrio es cero; y donde la variación de la presión es cero, el desplazamiento es un máximo o un mínimo.

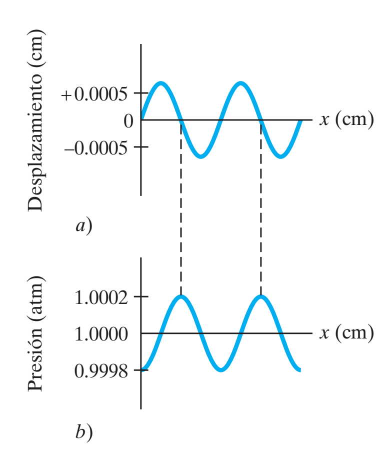


FIGURA 16–3 Representación de una onda sonora en el espacio en un instante dado en términos de *a*) desplazamiento y *b*) presión.

Obtención de la onda de presión

Obtengamos ahora la representación matemática de la variación de la presión en una onda longitudinal viajera. De la definición de módulo volumétrico, B (ecuación 12-7),

$$\Delta P = -B(\Delta V/V),$$

donde ΔP representa la diferencia de presión con respecto de la presión normal P_0 (ninguna onda presente) y $\Delta V/V$ es el cambio fraccional en el volumen del medio debido a un cambio de presión ΔP. El signo negativo refleja el hecho de que el volumen decrece ($\Delta V < 0$) cuando aumenta la presión. Considere ahora una capa de fluido a través del cual está pasando una onda longitudinal (figura 16-4). Si esta capa tiene espesor Δx y área S, entonces, su volumen es $V = S\,\Delta x$. Como resultado de la variación de la presión en la onda, el volumen cambiará una cantidad $\Delta V = S\,\Delta D$, donde ΔD es el cambio en espesor de esta capa, según se comprime o se expande. (Recuerde que D representa el desplazamiento del medio). Así,

$$\Delta P = -B\frac{S\,\Delta D}{S\,\Delta x}.$$

Para ser precisos, tomamos el límite cuando $\Delta x \to 0$, y obtenemos

$$\Delta P = -B\frac{\partial D}{\partial x}, \qquad \textbf{(16–2)}$$

donde usamos la notación de derivada parcial, ya que D es una función tanto de x como de t. Si el desplazamiento D es senoidal, como está dado por la ecuación 16-1, entonces de la ecuación 16-2:

$$\Delta P = -(BAk)\cos(kx - \omega t). \qquad \textbf{(16–3)}$$

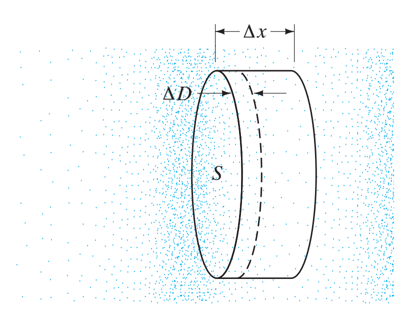
(Aquí A es la amplitud del desplazamiento, no el área que es S). La presión varía entonces también senoidalmente; sin embargo, está fuera de fase con el desplazamiento en 90° o un cuarto de longitud de onda, como en la figura 16-3. La cantidad BAk se denomina la **amplitud de presión** ΔP_M y representa las cantidades máxima y mínima, en las cuales la presión varía con respecto de la presión normal ambiente. Podemos entonces escribir

$$\Delta P = -\Delta P_M \cos(kx - \omega t), \qquad \textbf{(16–4)}$$

donde, usando $v = \sqrt{B/\rho}$ (ecuación 15-4), y $k = \omega/v = 2\pi f/v$ (ecuación 15-12), entonces

$$\begin{aligned}\Delta P_M &= BAk\\ &= \rho v^2 Ak\\ &= 2\pi\rho v\, Af. \qquad \textbf{(16–5)}\end{aligned}$$

FIGURA 16–4 Una onda longitudinal en un fluido se mueve hacia la derecha. Una capa delgada de fluido, en un delgado cilindro de área S y espesor Δx, cambia de volumen como resultado de la variación en la presión conforme pasa la onda. En el momento mostrado, la presión aumentará conforme la onda se mueva hacia la derecha, por lo que el espesor de nuestra capa disminuirá, en una cantidad ΔD.



16–3 Intensidad del sonido: decibeles

La **intensidad** es una sensación en la conciencia de un ser humano y está relacionada con una cantidad físicamente medible: la **intensidad** de la onda. La intensidad se define como la energía transportada por una onda por unidad de tiempo a través de una unidad de área perpendicular al flujo de energía. Como vimos en el capítulo 15, la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda. La intensidad tiene unidades de potencia por unidad de área, o watts/metro^2 (W/m^2).

FÍSICA APLICADA
Rango amplio del oído humano

El oído humano puede detectar sonidos con una intensidad tan baja como 10^{-12} W/m^2 y tan alta como 1 W/m^2 (y aún más alta, aunque en este caso resulta doloroso). Se trata de un rango increíblemente amplio de intensidad, cubriendo un factor de 10^{12} de la más baja a la más alta. Probablemente debido a este amplio rango, lo que percibimos como volumen del sonido no es directamente proporcional a la intensidad. Para producir un sonido que parece ser el doble de fuerte que otro, se requiere una onda sonora que tiene cerca de diez veces la intensidad. Esto es aproximadamente cierto de cualquier nivel de sonido para frecuencias cercanas a la parte media del rango audible. Por ejemplo, una onda sonora con intensidad de 10^{-2} W/m^2 suena a un humano promedio como si fuera aproximadamente el doble de fuerte que otra cuya intensidad es de 10^{-3} W/m^2, y cuatro veces más fuerte que otra de 10^{-4} W/m^2.

Nivel del sonido

Debido a esta relación entre la sensación subjetiva y la cantidad físicamente medible de la intensidad, es frecuente especificar los niveles de intensidad del sonido mediante una escala logarítmica. La unidad en esta escala es un **bel**, en honor de su inventor, Alexander Graham Bell, o más comúnmente, el decibel (dB), que es $\frac{1}{10}$ bel (10 dB = 1 bel). El **nivel de sonido**, β, de cualquier sonido se define en términos de su intensidad, I, como

$$\beta \text{ (in dB)} = 10 \log \frac{I}{I_0}, \qquad \textbf{(16–6)}$$

donde I_0 es la intensidad de algún nivel de referencia y el logaritmo es de base 10. Por lo general, I_0 se toma como la intensidad mínima audible para una persona promedio, o "umbral de audición", que es $I_0 = 1.0 \times 10^{-12}\ \text{W/m}^2$. Entonces, por ejemplo, el nivel de sonido de un sonido cuya intensidad es $I = 1.0 \times 10^{-10}\ \text{W/m}^2$ será

$$\beta = 10 \log\left(\frac{1.0 \times 10^{-10}\ \text{W/m}^2}{1.0 \times 10^{-12}\ \text{W/m}^2}\right) = 10 \log 100 = 20\ \text{dB},$$

CUIDADO

0 dB no significa cero intensidad

ya que log 100 es igual a 2.0. (El apéndice A presenta un breve repaso de los logaritmos). Advierta que el nivel de sonido en el umbral de audición es 0 dB. Es decir, $\beta = 10 \log 10^{-12}/10^{-12} = 10 \log 1 = 0$, puesto que $\log 1 = 0$. Advierta también que un incremento en intensidad por un factor de 10 corresponde a un incremento en el nivel de sonido de 10 dB. Un incremento en intensidad por un factor de 100 corresponde a un incremento en el nivel de sonido de 20 dB. Entonces, un sonido de 50 dB es 100 veces más intenso que un sonido de 30 dB, y así sucesivamente.

Las intensidades y los niveles de sonido para varios sonidos comunes se presentan en la tabla 16-2.

TABLA 16–2 Intensidad de varios sonidos

Fuente del sonido	Nivel del sonido (dB)	Intensidad (W/m^2)
Avión a chorro	140	100
Umbral de dolor	120	1
Concierto de rock a alta intensidad	120	1
Sirena a 30 m	100	1×10^{-2}
Tránsito de camiones	90	1×10^{-3}
Tránsito en una calle muy congestionada	80	1×10^{-4}
Restaurante ruidoso	70	1×10^{-5}
Conversación a 50 cm	65	3×10^{-6}
Radio tranquilo	40	1×10^{-8}
Susurro	30	1×10^{-9}
Murmullo de hojas	10	1×10^{-11}
Umbral de audición	0	1×10^{-12}

EJEMPLO 16–3 Intensidad de sonido en una calle. En una esquina congestionada, el nivel de sonido es de 75 dB. ¿Cuál es la intensidad del sonido aquí?

PLANTEAMIENTO Tenemos que despejar la intensidad I en la ecuación 16-6, recordando que $I_0 = 1.0 \times 10^{-12}\ \text{W/m}^2$.

SOLUCIÓN De la ecuación 16-6,

$$\log \frac{I}{I_0} = \frac{\beta}{10},$$

por lo que

$$\frac{I}{I_0} = 10^{\beta/10}.$$

Con $\beta = 75$,

$$I = I_0 10^{\beta/10} = \left(1.0 \times 10^{-12}\ \text{W/m}^2\right)\left(10^{7.5}\right) = 3.2 \times 10^{-5}\ \text{W/m}^2.$$

NOTA Recuerde que $x = \log y$ es lo mismo que $y = 10^x$ (apéndice A).



Respuesta de un altavoz (± 3 dB)

EJEMPLO 16–4 Respuesta de un altavoz. Un altavoz de alta calidad reproduce, a todo volumen, frecuencias de 30 Hz a 18,000 Hz con intensidad uniforme de ± 3 dB. Esto es, en este rango de frecuencia, el nivel de sonido no varía en más de 3 dB con respecto al promedio. ¿Por qué factor cambia la intensidad para el cambio máximo de nivel de sonido de 3 dB?

PLANTEAMIENTO Llamemos I_1 a la intensidad promedio y β_1 al nivel promedio. La intensidad máxima I_2 corresponde entonces a un nivel $\beta_2 = \beta_1 + 3$ dB. Usamos entonces la relación entre intensidad y nivel de sonido, ecuación 16-6.

SOLUCIÓN La ecuación 16-6 da

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_0} - 10 \log \frac{I_1}{I_0}$$

$$3 \text{ dB} = 10\left(\log \frac{I_2}{I_0} - \log \frac{I_1}{I_0}\right)$$

$$= 10 \log \frac{I_2}{I_1}$$

porque (log a – log b) = log a/b (véase el apéndice A). Esta última ecuación da

$$\log \frac{I_2}{I_1} = 0.30,$$

o bien,

$$\frac{I_2}{I_1} = 10^{0.30} = 2.0.$$

por lo que ± 3 dB corresponde a duplicar (o a dividir entre dos) la intensidad.

Vale la pena destacar que una diferencia de nivel de sonido de 3 dB (que corresponde a duplicar la intensidad, como acabamos de ver), corresponde a sólo un cambio muy pequeño en la sensación subjetiva de intensidad aparente. De hecho, el ser humano promedio puede distinguir una diferencia en nivel de aproximadamente sólo 1 o 2 dB.

EJERCICIO B Si un incremento de 3 dB significa "dos veces más intenso", ¿qué significa un incremento de 6 dB?

EJEMPLO CONCEPTUAL 16–5 **Trompetistas.** Un trompetista toca con un nivel de sonido de 75 dB. Se agregan tres trompetistas con la misma intensidad. ¿Cuál es el nuevo nivel de sonido?

RESPUESTA La intensidad de cuatro trompetas es cuatro veces la intensidad de una trompeta (= I_1) o $4I_1$. El nivel de sonido de las cuatro trompetas sería

$$\beta = 10 \log \frac{4I_1}{I_0} = 10 \log 4 + 10 \log \frac{I_1}{I_0}$$

$$= 6.0 \text{ dB} + 75 \text{ dB} = 81 \text{ dB}.$$

EJERCICIO C De la tabla 16-2 vemos que la conversación ordinaria corresponde a un nivel de sonido de aproximadamente 65 dB. Si dos personas hablan al mismo tiempo, el nivel de sonido es *a*) 65 dB, *b*) 68 dB, *c*) 75 dB, *d*) 130 dB, *e*) 62 dB.

Normalmente la intensidad de un sonido disminuye al alejarse uno de la fuente del sonido. En habitaciones cerradas, el efecto se altera debido a la reflexión de las paredes. No obstante, si una fuente está al aire libre, de manera que el sonido pueda radiarse libremente en todas direcciones, la intensidad decrece según el inverso del cuadrado de la distancia

$$I \propto \frac{1}{r^2},$$

como vimos en la sección 15-3. En grandes distancias, la intensidad disminuye más rápido que $1/r^2$ porque se transfiere algo de la energía en el movimiento irregular de las moléculas de aire. Esta pérdida es mayor para frecuencias altas, de modo que cualquier sonido de frecuencias mezclado será menos "brillante" con la distancia.

FÍSICA APLICADA

Ruido de avión a chorro

EJEMPLO 16–6 **Ruido de un avión.** El nivel de sonido de un avión a chorro a una distancia de 30 m es de 140 dB ¿Cuál será el nivel de sonido a 300 m? (Desprecie las reflexiones del suelo).

PLANTEAMIENTO Dado el nivel del sonido, podemos determinar la intensidad a 30 m con la ecuación 16-6. Puesto que la intensidad disminuye con el cuadrado de la distancia, ignorando las reflexiones, podemos encontrar I a 300 m y de nuevo aplicar la ecuación 16-6 para obtener el nivel de sonido.

SOLUCIÓN La intensidad I a 30 m es

$$140\text{ dB} = 10\log\left(\frac{I}{10^{-12}\text{ W/m}^2}\right)$$

o bien,

$$14 = \log\left(\frac{I}{10^{-12}\text{ W/m}^2}\right).$$

Elevamos ambos lados de esta ecuación a la potencia 10 (recuerde que $10^{\log x} = x$) y tenemos

$$10^{14} = \frac{I}{10^{-12}\text{ W/m}^2},$$

por lo que $I = (10^{14})(10^{-12}\text{ W/m}^2) = 10^2\text{ W/m}^2$. A 300 m, diez veces más lejos, la intensidad será $\left(\frac{1}{10}\right)^2 = 1/100$ o 1 W/m^2. Por consiguiente, el nivel de sonido es

$$\beta = 10\log\left(\frac{1\text{ W/m}^2}{10^{-12}\text{ W/m}^2}\right) = 120\text{ dB}.$$

Aun a 300 m, el sonido está en el umbral del dolor. Por ello, los trabajadores en aeropuertos cubren sus oídos para protegerlos de daños (figura 16-5).

NOTA Hay un enfoque más sencillo que evita la ecuación 16-6: puesto que la intensidad disminuye con el cuadrado de la distancia, a 10 veces la distancia, la intensidad disminuye por $\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$. Se puede usar el resultado de que 10 dB corresponden a un cambio en la intensidad por un factor de 10 (véase justo antes del ejemplo 16-3). Entonces, un cambio en la intensidad por un factor de 100 corresponde a un cambio en el nivel de sonido de (2)(10 dB) = 20 dB. Esto confirma nuestro resultado anterior: 140 dB − 20 dB = 120 dB.



FIGURA 16–5 Ejemplo 16-6. Trabajador de aeropuerto con tapones de oído (auriculares) para reducir la intensidad del sonido.

Intensidad relacionada con la amplitud

La intensidad I de una onda es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda, como lo vimos en el capítulo anterior. Podemos entonces relacionar cuantitativamente la amplitud con la intensidad I o nivel β, como se muestra en el siguiente ejemplo.

FÍSICA APLICADA

Increíble sensibilidad del oído humano

EJEMPLO 16–7 **Cuán pequeño es el desplazamiento.** *a*) Calcule el desplazamiento de las moléculas de aire para un sonido que está en el umbral de audición, con frecuencia de 1000 Hz. *b*) Determine la variación máxima de la presión en tal onda sonora.

PLANTEAMIENTO En la sección 15-3 encontramos una relación entre la intensidad I y la amplitud del desplazamiento A de una onda (ecuación 15-7). Queremos encontrar la amplitud de oscilación de las moléculas de aire, dada la intensidad. La presión se determina con la ecuación 16-5.

SOLUCIÓN *a*) En el umbral de audición $I = 1.0 \times 10^{-12}\text{ W/m}^2$ (tabla 16-2). Despejamos la amplitud A en la ecuación 15-7:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\pi f}\sqrt{\frac{I}{2\rho v}} \\ &= \frac{1}{(3.14)(1.0\times10^3\text{ s}^{-1})}\sqrt{\frac{1.0\times10^{-12}\text{ W/m}^2}{(2)(1.29\text{ kg/m}^3)(343\text{ m/s})}} \\ &= 1.1\times10^{-11}\text{ m}, \end{aligned}$$

donde hemos tomado la densidad del aire como 1.29 kg/m^3 y la rapidez del sonido en el aire (supuesto a 20° C) igual a 343 m/s.

NOTA Vemos ahora qué increíblemente sensible es el oído humano: puede detectar desplazamientos de moléculas de aire que son realmente menores que el diámetro de los átomos (aproximadamente 10^{-10} m).

b) Ahora tratamos el sonido como una onda de presión (sección 16-2). De la ecuación 16-5,

$$\begin{aligned} \Delta P_M &= 2\pi\rho v A f \\ &= 2\pi(1.29\text{ kg/m}^3)(343\text{ m/s})(1.1\times10^{-11}\text{ m})(1.0\times10^3\text{ s}^{-1}) = 3.1\times10^{-5}\text{ Pa} \end{aligned}$$

o bien, 3.1×10^{-10} atm. De nuevo vemos que el oído humano es increíblemente sensible.

Combinando las ecuaciones 15-7 y 16-5, podemos escribir la intensidad en términos de la amplitud de presión, ΔP_{M}:

$$I = 2\pi^2 v\rho f^2 A^2 = 2\pi^2 v\rho f^2 \left(\frac{\Delta P_{\mathrm{M}}}{2\pi\rho v f}\right)^2$$

$$I = \frac{(\Delta P_{\mathrm{M}})^2}{2v\rho}. \qquad \textbf{(16–7)}$$

Cuando se da en términos de la amplitud de presión, la intensidad no depende de la frecuencia.

La respuesta del oído

El oído no es igualmente sensible a todas las frecuencias. Para oír el mismo volumen para sonidos de diferentes frecuencias se requieren diferentes intensidades. Los estudios promediados sobre un gran número de personas produjeron las curvas de la figura 16-6. Sobre esta gráfica, cada curva representa sonidos que parecen ser igualmente intensos. El número que designa cada curva representa el **nivel de intensidad** (las unidades se llaman *fonios*), que es numéricamente igual al nivel de sonido en dB a 1000 Hz. Por ejemplo, la curva con 40 representa sonidos que escucha una persona promedio y que tienen la misma intensidad que un sonido de 1000 Hz con un nivel de sonido de 40 dB. De esta curva de 40 fonios, vemos que un tono de 100 Hz debe estar a un nivel de aproximadamente 62 dB para sonar tan intensamente como un tono de 1000 Hz de sólo 40 dB.

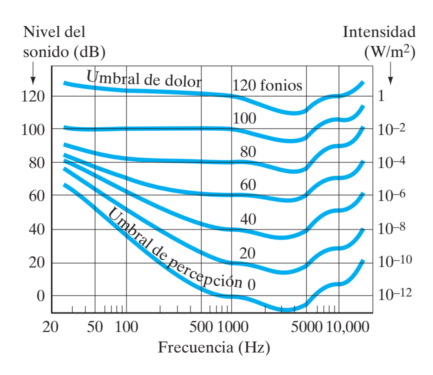


FIGURA 16–6 Sensibilidad del oído humano en función de la frecuencia (vea el texto). Note que la escala de frecuencia es “logarítmica” para poder cubrir un amplio rango de frecuencia.

La curva más abajo en la figura 16-6 (marcada con 0) representa el nivel de sonido, como función de la frecuencia, para el *umbral de* **audición**, el sonido más tenue que es posible oír por un oído muy receptivo. Note que el oído es más sensible a sonidos de frecuencias entre 2000 y 4000 Hz, que son comunes en la plática y en la música. Note también que mientras un sonido de 1000 Hz es audible a un nivel de 0 dB, un sonido de 100 Hz debe ser por lo menos de 40 dB para escucharse. La curva superior en la figura 16-6, designada con 120 fonios, representa el *umbral de dolor*. Los sonidos arriba de este nivel en realidad pueden sentirse y causar dolor.

La figura 16-6 muestra que a niveles de sonido de baja intensidad, nuestros oídos son menos sensibles a las frecuencias altas y bajas relativas a las frecuencias medias. El control del “volumen” en sistemas estereofónicos intenta compensar la insensibilidad al bajo volumen. Conforme disminuye el volumen, el control de la intensidad eleva las frecuencias altas y bajas relativas a las frecuencias medias, de manera que el sonido tenga un balance de frecuencias más “normal”. Sin embargo, muchos oyentes encuentran el sonido más agradable o natural sin el control de la intensidad.

16–4 Fuentes del sonido: Cuerdas vibrantes y columnas de aire

La fuente de cualquier sonido es un objeto en vibración. Casi cualquier objeto puede vibrar y, por lo tanto, ser una fuente de sonido. Analizaremos ahora algunas fuentes de sonido, particularmente instrumentos musicales, en los cuales la fuente se pone en vibración golpeando, punteando, pasando un arco o soplando. Se producen ondas estacionarias y la fuente vibra con sus frecuencias resonantes naturales. La fuente vibrante está en contacto con el aire (u otro medio) y lo empuja para producir ondas sonoras que viajan hacia el exterior. Las frecuencias de las ondas son las mismas que las de la fuente; pero la rapidez y las longitudes de onda pueden ser diferentes. Un tambor tiene una membrana estirada que vibra. Los xilófonos y las marimbas tienen barras metálicas o de madera que se ponen en vibración. Las campanas, timbales y gongs también utilizan metal en vibración. Muchos instrumentos usan cuerdas vibrantes, como el violín, la guitarra, y el piano, o usan columnas vibratorias de aire, como la flauta, la trompeta y el órgano tubular. Ya vimos que el tono de un sonido puro es determinado por la frecuencia. La tabla 16-3 presenta frecuencias típicas de notas musicales en la llamada “escala cromática bien temperada”, para la octava que comienza con el do central. Advierta que una octava corresponde a duplicar la frecuencia. Por ejemplo, el do central tiene una frecuencia de 262 Hz; mientras que el do siguiente tiene una frecuencia doble, de 524 Hz. [El do central es la nota “do” en el centro del teclado de un piano].

TABLA 16–3 Escala cromática igualmente temperada†

Nota	Frecuencia (Hz)
Do	262
Do sostenido o re bemol	277
Re	294
Re sostenido o mi bemol	311
Mi	330
Fa	349
Fa sostenido o sol bemol	370
Sol	392
Sol sostenido o la bemol	415
La	440
La sostenido o si bemol	466
Si	494
Do′	524

†Se incluye sólo una octava.

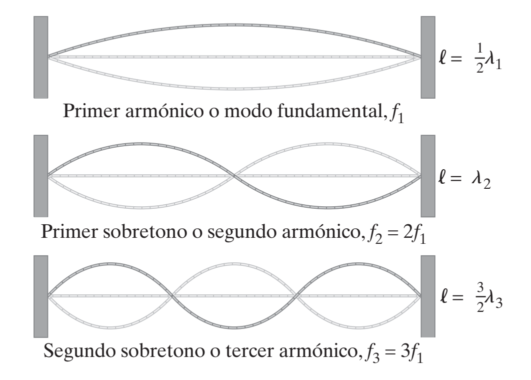


FIGURA 16–7 Ondas estacionarias en una cuerda; sólo se muestran las tres frecuencias más bajas.

Instrumentos de cuerdas

FÍSICA APLICADA
Instrumentos de cuerdas

En el capítulo 15, figura 15-26b, vimos cómo se forman las ondas estacionarias sobre una cuerda, y las mostramos de nuevo aquí en la figura 16-7. Tales ondas estacionarias son la base para todos los instrumentos de cuerdas. El tono se determina normalmente por la menor frecuencia resonante, o **fundamental**, que corresponde a nodos que se presentan sólo en los extremos. La cuerda que vibra arriba y abajo como un todo corresponde a media longitud de onda, como se aprecia en la parte superior de la figura 16-7, así que la longitud de onda del modo fundamental de la cuerda es igual al doble de la longitud de la cuerda; por lo tanto, la frecuencia fundamental es $f_1 = v/\lambda = v/2\ell$, donde v es la rapidez de la onda sobre la cuerda (*no* en el aire). Las posibles frecuencia para las ondas estacionarias en una cuerda estirada son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental:

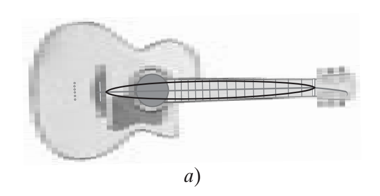
$$f_n = nf_1 = n\frac{v}{2\ell}, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

donde $n = 1$ se refiere al modo fundamental y $n = 2, 3,\ldots$ son los sobretonos. Todas las ondas estacionarias, $n = 1, 2, 3,\ldots$, se llaman armónicos,† como vimos en la sección 15-9.

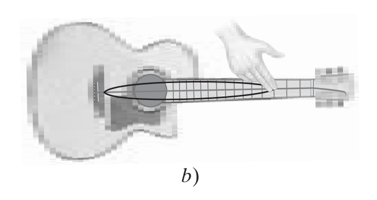
Cuando se coloca un dedo sobre la cuerda de una guitarra o de un violín, se reduce la longitud efectiva de la cuerda. Así, la frecuencia fundamental y el tono son más altos, ya que la longitud de onda de la fundamental es más corta (figura 16-8). Las cuerdas de una guitarra o de un violín son todas de la misma longitud y suenan con un diferente tono debido a que las cuerdas tienen diferente masa por unidad de longitud μ, lo cual afecta la velocidad sobre la cuerda, ecuación 15-2.

$$v = \sqrt{F_T/\mu}. \qquad \text{[cuerda estirada]}$$

Entonces, la velocidad sobre una cuerda más pesada es menor y la frecuencia será menor para la misma longitud de onda. La tensión F_T también puede ser diferente; el ajuste de la tensión es la manera de afinar el instrumento. En pianos y arpas, las cuerdas son cada una de diferente longitud. Para las notas bajas, las cuerdas no son sólo más largas, sino también más pesadas, y la razón se ilustra en el siguiente ejemplo.



a)



b)

FIGURA 16–8 La longitud de onda *a*) de una cuerda sin pulsar es mayor que *b*) la de una cuerda pulsada. Por consiguiente, la frecuencia de la cuerda pulsada es mayor. Sólo se muestra una cuerda en esta guitarra, y sólo se indica la onda estacionaria más simple, o fundamental.

EJEMPLO 16–8 Cuerdas de piano. La tecla más alta en un piano corresponde a una frecuencia de aproximadamente 150 veces la de la tecla más baja. Si la cuerda para la nota más alta es de 5.0 cm de largo, ¿qué longitud debería tener la cuerda para la nota más baja, si la cuerda tuviera la misma masa por unidad de longitud y estuviera bajo la misma tensión?

PLANTEAMIENTO Dado que $v = \sqrt{F_T/\mu}$, la velocidad sería la misma sobre cada cuerda, por lo que la frecuencia es inversamente proporcional a la longitud ℓ de la cuerda $(f = v/\lambda = v/2\ell)$.

SOLUCIÓN Para las frecuencias fundamentales de cada cuerda, podemos escribir la razón

$$\frac{\ell_L}{\ell_H} = \frac{f_H}{f_L},$$

donde los subíndices L y H se refieren a las notas más baja (*low*) y más alta (*high*), respectivamente. Por lo tanto, $\ell_L = \ell_H(f_H/f_L) = (5.0\text{ cm})(150) = 750\text{ cm}$, o 7.5 m. Esto sería demasiado largo (≈ 25 pies) para un piano.

NOTA Las cuerdas más largas de menor frecuencia se hacen más pesadas, con mayor masa por unidad de longitud, por lo que aun en pianos de cola las cuerdas miden menos de 3 metros de largo.

†Cuando las frecuencias resonantes por arriba de la fundamental (es decir, los sobretonos) son múltiplos enteros de ésta, como aquí, se llaman armónicos. Pero si los sobretonos no son múltiplos enteros de la fundamental, como es el caso para la membrana vibratoria de un tambor, no son armónicos.

EJERCICIO D Dos cuerdas tienen las mismas longitud y extensión, pero una es más masiva que la otra. ¿Cuál toca la nota más alta?



Rapidez de la onda estacionaria en la cuerda ≠ rapidez de la onda sonora en el aire

EJEMPLO 16–9 **Frecuencias y longitudes de onda en el violín.** Una cuerda de violín de 0.32 m de longitud está afinada para tocar la nota la arriba del do central a 440 Hz. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda de la vibración fundamental de la cuerda?, y *b*) ¿cuáles son la frecuencia y la longitud de onda de la onda sonora producida? *c*) ¿Por qué hay una diferencia?

PLANTEAMIENTO La longitud de onda de la vibración fundamental de la cuerda es igual al doble de la longitud de la cuerda (figura 16-7). Mientras la cuerda vibra empuja el aire, que entonces se fuerza a oscilar a la misma frecuencia que la cuerda.

SOLUCIÓN *a*) De la figura 16-7, vemos que la longitud de onda del tono fundamental es

$$\lambda = 2\ell = 2(0.32\text{ m}) = 0.64\text{ m} = 64\text{ cm}.$$

Ésta es la longitud de onda de la onda estacionaria sobre la cuerda.

b) La onda de sonido que viaja hacia el exterior en el aire (y llega a nuestros oídos) tiene la misma frecuencia, 440 Hz. Su longitud de onda es

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{343\text{ m/s}}{440\text{ Hz}} = 0.78\text{ m} = 78\text{ cm},$$

donde v es la rapidez del sonido en el aire (que se supone a 20°C), sección 16-1.

c) La longitud de onda de la onda sonora es diferente de la onda estacionaria sobre la cuerda, porque la rapidez del sonido en el aire (343 m/s a 20°C) es diferente de la rapidez de la onda sobre la cuerda ($= f\lambda = 440\text{ Hz} \times 0.64\text{ m} = 280\text{ m/s}$), que depende de la tensión en la cuerda y de su masa por unidad de longitud.

NOTA Las frecuencias en la cuerda y en el aire son la misma: la cuerda y el aire están en contacto, y la cuerda "fuerza" al aire a vibrar a la misma frecuencia. Pero las longitudes de onda son diferentes porque la rapidez de onda en la cuerda es diferente de la rapidez de la onda en el aire.



a)



b)

FIGURA 16–9 (*a*) Piano que muestra la caja armónica, también llamada caja de resonancia, a la que están unidas las cuerdas; *b*) guitarra eléctrica.

Los instrumentos de cuerdas no serían muy sonoros si se confiara en sus cuerdas vibratorias para producir las ondas acústicas, ya que las cuerdas son simplemente demasiado delgadas para comprimir y expandir mucho el aire. Por ello, los instrumentos de cuerdas usan un tipo de amplificador mecánico conocido como *tablero sonoro* (piano) o *caja resonante* (guitarra, violín), cuya función es amplificar el sonido poniendo una mayor área superficial en contacto con el aire (figura 16-9). Cuando las cuerdas se ponen en vibración, la caja o el tablero sonoro también se ponen en vibración. Como tienen un área mucho mayor en contacto con el aire, se produce una onda sonora más intensa. Sobre la guitarra eléctrica, la caja sonora no es tan importante, pues las vibraciones de las cuerdas se amplifican electrónicamente.

Instrumentos de viento

Los instrumentos como instrumentos de viento, de madera, los metales y el órgano tubular producen sonidos por las vibraciones de ondas estacionarias en una columna de aire dentro de un tubo (figura 16-10). Las ondas estacionarias pueden ocurrir en el aire de cualquier cavidad, pero las frecuencias presentes son complicadas, excepto en formas muy simples como las generadas en un tubo uniforme largo y estrecho de una flauta o de un órgano tubular. En algunos instrumentos, una lengüeta en vibración o el labio en vibración del músico ayuda a establecer vibraciones de la columna de aire. En otros, una corriente de aire se dirige contra el borde de una abertura, produciendo turbulencia que establece las vibraciones. Debido a la perturbación, cualquiera que sea su fuente, el aire dentro del tubo vibra con una variedad de frecuencias; pero sólo persistirán las frecuencias que corresponden a ondas estacionarias.

FIGURA 16–10 Instrumentos de viento: flauta (izquierda) y clarinete.



Para una cuerda fija en ambos extremos, figura 16-7, vemos que las ondas estacionarias tienen nodos (ningún movimiento) en los dos extremos, y uno o más antinodos (gran amplitud de vibración) intermedios; un nodo separa antinodos sucesivos. La onda estacionaria de frecuencia más baja, o de *modo fundamental*, corresponde a un solo antinodo. Las ondas estacionarias de frecuencia superior se denominan **sobretonos** o **armónicos**, como vimos en la sección 15-9. Específicamente, el primer armónico es el tono fundamental, el segundo armónico tiene el doble de la frecuencia del tono fundamental, y así sucesivamente.

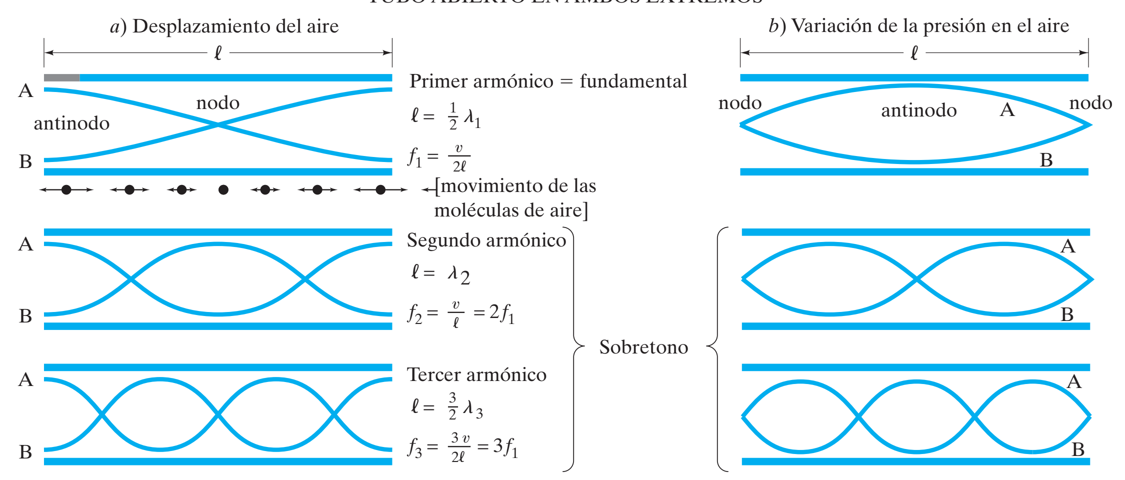


FIGURA 16–11 Gráfica de los tres modos más simples de vibración (ondas estacionarias) para un tubo uniforme abierto en ambos extremos ("tubo abierto"). Estos modos más simples de vibración se muestran en *a*), a la izquierda, en términos del movimiento del aire (desplazamiento); y en *b*), a la derecha, en términos de presión del aire. Cada gráfica, muestra el formato de onda en dos momentos: A y B, separados medio periodo. El movimiento real de las moléculas en el caso fundamental, se muestra justo abajo del tubo arriba a la izquierda.

La situación es similar para una columna de aire en un tubo de diámetro uniforme, pero debemos recordar que ahora es el mismo aire el que está vibrando. Podemos describir las ondas en términos del flujo de aire, es decir, en términos del *desplazamiento* del aire, o en términos de la *presión* en el aire (véanse las figuras 16-2 y 16-3). En términos del desplazamiento, el aire en el extremo cerrado de un tubo es un nodo de desplazamiento, ya que el aire no tiene libertad para moverse ahí; en tanto que cerca del extremo abierto de un tubo habrá un antinodo porque el aire puede moverse libremente para entrar y salir. El aire dentro del tubo vibra en forma de ondas longitudinales estacionarias. Los modos posibles de vibración para un tubo abierto en ambos extremos (llamado **tubo abierto**) se muestran gráficamente en la figura 16-11. Los modos de vibración se muestran para un tubo abierto en un extremo pero cerrado en el otro (llamado **tubo cerrado**) en la figura 16-12. [Un tubo cerrado en *ambos* extremos, sin conexión con el aire exterior, no tendría utilidad como instrumento.] Las gráficas en el inciso *a*) de cada figura (lados izquierdos) representan la amplitud del desplazamiento del aire en vibración en el tubo. Advierta que éstas son gráficas, y que las moléculas de aire mismas oscilan *horizontalmente*, paralelas a la longitud del tubo, como se muestra por las pequeñas flechas en el diagrama superior de la figura 16-11a (a la izquierda). La posición exacta del antinodo cerca del extremo abierto de un tubo depende del diámetro del tubo, pero si el diámetro es pequeño comparado con la longitud, que es el caso usual, el antinodo se presenta muy cerca del extremo, como se indica. Suponemos que éste es el caso en lo que sigue (la posición del antinodo también puede depender ligeramente de la longitud de onda y otros factores).



Instrumentos de viento

Veamos en detalle el tubo abierto en la figura 16-11a, que podría ser una flauta o el tubo de un órgano. Un tubo abierto tiene antinodos de desplazamiento en ambos extremos, ya que el aire tiene libertad para moverse en los extremos abiertos. Debe haber por lo menos un nodo dentro de un tubo abierto para que haya una onda estacionaria. Un sólo nodo corresponde a la *frecuencia fundamental* del tubo. Como la distancia entre dos nodos sucesivos, o entre dos antinodos sucesivos, es $\frac{1}{2}\lambda$, hay una mitad de longitud de onda dentro de la longitud del tubo para el caso más simple de la frecuencia fundamental (diagrama superior en la figura 16-11a): $\ell = \frac{1}{2}\lambda$, o bien, $\lambda = 2\ell$. La frecuencia fundamental es entonces $f_1 = v/\lambda = v/2\ell$, donde v es la velocidad del sonido en el aire (dentro del tubo). La onda estacionaria con dos nodos es el *primer sobretono* o *segundo armónico*, y tiene la mitad de la longitud de onda ($\ell = \lambda$) y dos veces la frecuencia de la fundamental. En efecto, en un tubo uniforme abierto en ambos extremos, la frecuencia de cada sobretono es un múltiplo entero de la frecuencia fundamental, como se muestra en la figura 16-11a. Esto es justamente lo que encontramos para una cuerda.

Para un tubo cerrado (figura 16-12a), que podría ser un tubo de órgano, hay siempre un nodo de desplazamiento en el extremo cerrado (porque el aire no tiene libertad para moverse) y un antinodo en el extremo abierto (donde el aire puede moverse libremente). Como la distancia entre un nodo y el antinodo más cercano es un $\frac{1}{4}\lambda$, vemos que la frecuencia fundamental en un extremo de un tubo cerrado corresponde a sólo un cuarto de una longitud de onda dentro de la longitud del tubo: $\ell = \lambda/4$, y $\lambda = 4\ell$. La frecuencia fundamental es entonces $f_1 = v/4\ell$, o la mitad de lo que es para un tubo abierto de la misma longitud. Hay otra diferencia, pues como observamos en la figura 16-12a, sólo los armónicos impares están presentes en un tubo cerrado: los

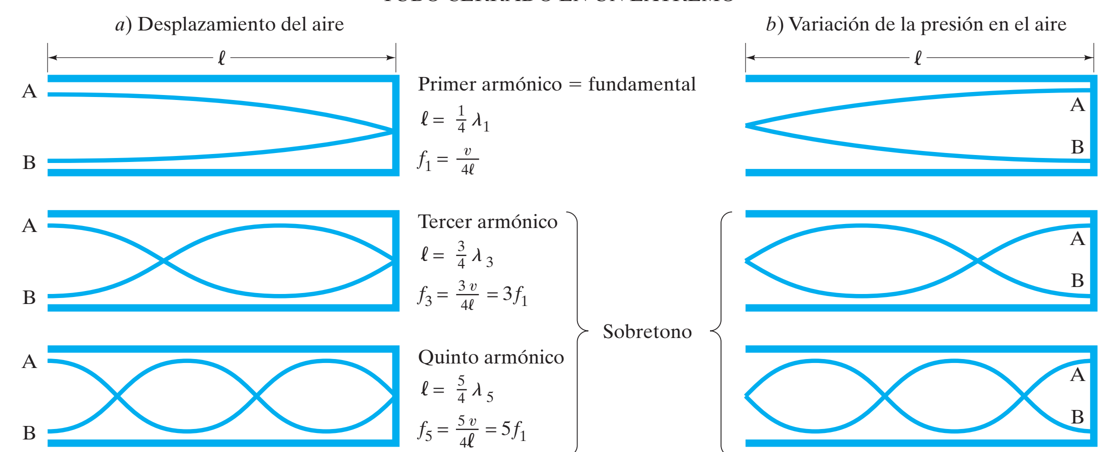


FIGURA 16–12 Modos de vibración (ondas estacionarias) para un tubo cerrado en un extremo ("tubo cerrado"). Vea pie de la figura 16-11.

sobretonos tienen frecuencias iguales a 3, 5, 7,… veces la frecuencia fundamental. No hay manera de que las ondas con 2, 4, 6,… veces la frecuencia fundamental tengan un nodo en un extremo y un antinodo en el otro, por lo que no pueden existir estas ondas estacionarias en un tubo cerrado.

Otra forma de analizar las vibraciones en un tubo uniforme es considerar una descripción en términos de la *presión* en el aire, como en la parte *b*) de las figuras 16-11 y 16-12 (lados derechos). Donde el aire en una onda está comprimido, la presión es mayor; en tanto que en una expansión de onda (o rarefacción), la presión es menor que la normal. El extremo abierto de un tubo está abierto a la atmósfera. Por consiguiente, la variación de presión en un extremo abierto debe ser un *nodo*: la presión no cambia, sino que permanece igual a la presión atmosférica externa. Si un tubo tiene un extremo cerrado, la presión en ese extremo cerrado puede fácilmente alternar y tener valores por arriba o abajo de la presión atmosférica. De manera que hay un *antinodo* de presión en un extremo cerrado de un tubo. Puede haber nodos y antinodos de presión dentro del tubo. Algunos de los nodos vibratorios posibles en términos de presión para un tubo abierto se muestran en la figura 16-11b, y para un tubo cerrado se muestran en la figura 16-12b.

EJEMPLO 16–10 **Tubos de órgano.** ¿Cuál será la frecuencia fundamental y los primeros tres sobretonos para un tubo de órgano de 26 cm de longitud a 20°C, si está *a*) abierto y *b*) cerrado?

PLANTEAMIENTO Todos nuestros cálculos pueden basarse en las figuras 16-11a y 16-12a.

SOLUCIÓN *a*) Para el tubo abierto, figura 16-11a, la frecuencia fundamental es

$$f_1 = \frac{v}{2\ell} = \frac{343\ \text{m/s}}{2(0.26\ \text{m})} = 660\ \text{Hz}.$$

La rapidez v es la rapidez del sonido en el aire (el aire en vibración en el tubo). Los sobretonos, que incluyen todos los armónicos, son 1320 Hz, 1980 Hz, 2640 Hz, y así sucesivamente.

b) Para un tubo cerrado, figura 16-12a, la frecuencia fundamental es

$$f_1 = \frac{v}{4\ell} = \frac{343\ \text{m/s}}{4(0.26\ \text{m})} = 330\ \text{Hz}.$$

Sólo los armónicos impares estarán presentes, por lo que los primeros tres sobretonos serán de 990 Hz, 1650 Hz y 2310 Hz.

NOTA El tubo cerrado toca a 330 Hz, que de la tabla 16-3, es el mi arriba del do central; mientras que el tubo abierto de la misma longitud toca a 660 Hz, una octava arriba.

Los órganos de tubos usan tubos abiertos y cerrados con longitudes diferentes que van desde unos cuantos centímetros hasta 5 m o mayores. Una flauta actúa como un tubo abierto, pues no sólo está abierto donde se sopla sino también en el extremo opuesto. Las diferentes notas de una flauta y de muchos otros instrumentos se obtienen acortando la longitud de la columna de aire en vibración, es decir, destapando agujeros a lo largo del tubo (de manera que un antinodo de desplazamiento pueda ocurrir en el agujero). Cuanto menor sea la longitud de la columna de aire en vibración, mayor será la frecuencia fundamental.

EJEMPLO 16–11 **Flauta.** Una flauta está diseñada para tocar el do central (262 Hz) como la frecuencia fundamental cuando todos los agujeros están cubiertos ¿Qué distancia debe haber aproximadamente de la boquilla hasta el extremo lejano de la flauta? (Esto es sólo aproximado, pues el antinodo no ocurre exactamente en la boquilla.) Suponga que la temperatura es de 20°C.

PLANTEAMIENTO Cuando todos los agujeros están cubiertos, la longitud de la columna de aire en vibración es la longitud completa. La rapidez del sonido en el aire a 20°C es de 343 m/s. Como una flauta está abierta en ambos extremos, usamos la figura 16-11: la frecuencia fundamental f_1 está relacionada con la longitud ℓ de la columna de aire en vibración mediante $f = v/2\ell$.

SOLUCIÓN Despejando ℓ, encontramos

$$\ell = \frac{v}{2f} = \frac{343\ \text{m/s}}{2(262\ \text{s}^{-1})} = 0.655\ \text{m} \approx 0.66\ \text{m}.$$

EJERCICIO E Para entender porque los ejecutantes de instrumentos de viento "calientan" sus instrumentos (de modo que estén afinados), determine la frecuencia fundamental de la flauta del ejemplo 16-11, cuando todos los hoyos están cubiertos y la temperatura es de 10°C, en vez de 20°C.

EJERCICIO F Regrese a la Pregunta de inicio de capítulo, página 424, y respóndala de nuevo. Intente explicar por qué quizás usted la respondió diferente la primera vez.

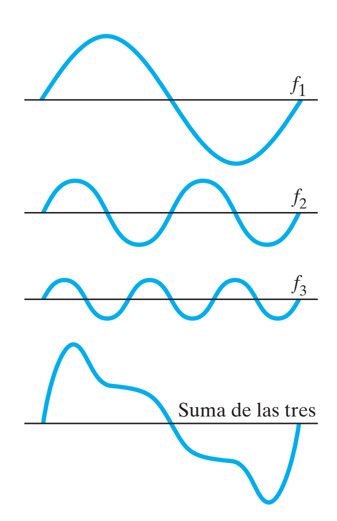


FIGURA 16–13 Las amplitudes de la frecuencia fundamental y de los primeros dos sobretonos se agregan en cada punto, para obtener la "suma" u ondulación compuesta.

*16–5 Calidad del sonido y ruido: Superposición

Siempre que oímos un sonido, particularmente un sonido musical, somos conscientes de su intensidad, de su tono y también de un tercer aspecto llamado *timbre* o "calidad". Por ejemplo, cuando un piano y luego una flauta tocan una nota con la misma intensidad y tono (digamos, el do central), hay una clara diferencia en el sonido total. Nunca confundiríamos un piano con una flauta. Esto es lo significa timbre o *calidad* de un sonido. Para instrumentos musicales se usa también el término *color del tono*.

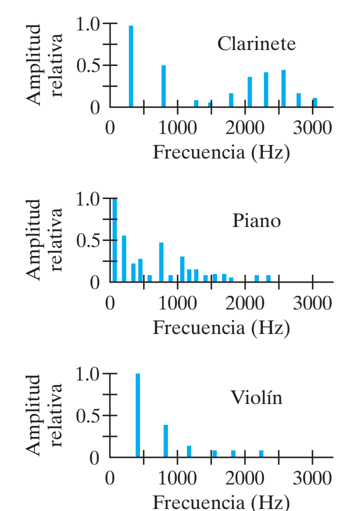
Así como la intensidad y el tono pueden relacionarse con cantidades físicamente medibles, también puede hacerse esto con la calidad. La calidad de un sonido depende de la presencia de sobretonos: de su número y de sus respectivas amplitudes. Generalmente, cuando se toca una nota sobre un instrumento musical, la fundamental y los sobretonos están presentes simultáneamente. En la figura 16-13 vemos cómo el *principio de superposición* (sección 15-6) se aplica a tres formas de ondas, en este caso la fundamental y los primeros dos sobretonos (con amplitudes particulares): se combinan en cada punto para dar una *forma de onda* compuesta. Por supuesto, usualmente están presentes más de dos sobretonos. [Cualquier onda compleja se puede analizar en una superposición de ondas senoidales de amplitudes, longitudes de onda y frecuencias apropiadas. Tal análisis se llama *análisis de Fourier*].

Las amplitudes relativas de los sobretonos para una nota dada son diferentes para distintos instrumentos musicales y ello da a cada instrumento su calidad característica o timbre. Una gráfica de barras que muestra las amplitudes relativas de los armónicos para una nota dada producidos por un instrumento se llama *espectro de sonido*. La figura 16-14 muestra varios ejemplos típicos para diferentes instrumentos. Normalmente, la frecuencia fundamental tiene la amplitud mayor y su frecuencia es lo que se escucha como el tono.

La manera en que se toca un instrumento influye considerablemente en la calidad del sonido. Por ejemplo, al puntear una cuerda de violín, se obtiene un sonido muy diferente que al pasar un arco sobre ella. El espectro de sonido al mero principio (o final) de una nota, como cuando un martillo golpea una cuerda de piano, puede ser muy diferente del subsecuente tono sostenido. Esto también afecta la calidad subjetiva del tono de un instrumento.

Un sonido ordinario, como el producido por dos piedras que chocan entre sí, es un ruido que tiene una cierta calidad, pero no es discernible un tono claro. Tal ruido es una mezcla de muchas frecuencias que tienen poca relación entre sí. Si se hiciera un espectro de este ruido, no mostraría líneas discretas como las de la figura 16-14. Más bien, mostraría un espectro de frecuencias continuo o casi continuo. A dicho sonido lo llamamos "ruido", en comparación con los sonidos más armónicos que contienen frecuencias que son múltiplos simples de la frecuencia fundamental.

FIGURA 16–14 Espectros de sonido para diferentes instrumentos. La forma de los espectros cambia cuando los instrumentos tocan notas diferentes. El clarinete es un tanto complicado; actúa como un tubo cerrado a frecuencias bajas y sólo con armónicos nones, pero a frecuencias más altas se producen todos los armónicos como en un tubo abierto.



16–6 Interferencia de las ondas de sonido: Pulsos

Interferencia en el espacio

En la sección 15-8 vimos que cuando dos ondas pasan simultáneamente por la misma región del espacio, las ondas interfieren entre sí. La interferencia también puede ocurrir con ondas sonoras.

Considere dos altavoces grandes, A y B, separados una distancia d en el escenario de un auditorio como se muestra en la figura 16-15. Supongamos que los dos altavoces emiten ondas sonoras de la misma frecuencia simple y que están en fase: es decir, cuando uno forma una compresión, lo mismo hace el otro. (Ignoramos reflexiones de las paredes, pisos, etcétera). Las líneas curvas en el diagrama representan las crestas de ondas sonoras de cada altavoz en un instante dado. Debemos recordar que para una onda sonora, una cresta es una compresión del aire; mientras que un valle, que cae entre dos crestas, es una rarefacción. Una persona o detector ubicado en un punto como el C, que está a la misma distancia de cada altavoz, captará un sonido intenso porque la interferencia será constructiva: dos crestas alcanzan C en un momento dado, y dos valles se alcanzan en un momento posterior. Por otro lado, en un punto como el D en el diagrama, se escuchará poco sonido porque ahí se presenta interferencia destructiva; las compresiones de una onda encuentran las rarefacciones de la otra, y viceversa (véase la figura 15-24 y el análisis relativo a olas en la sección 15-8).

Un análisis de esta situación es tal vez más claro si representamos gráficamente las formas de onda como en la figura 16-16. En la figura 16-16a se observa que en el punto C ocurre interferencia constructiva, ya que ambas ondas tienen crestas o valles simultáneamente, cuando llegan a C. En la figura 16-16b, vemos que para alcanzar el punto D, La onda del altavoz B debe viajar una mayor distancia que la onda desde A. La onda de B va entonces retrasada con respecto a la de A. En este diagrama, el punto E se elige de manera que la distancia ED es igual a AD. Vemos entonces que si la distancia BE es igual precisamente a media longitud de onda del sonido, las dos ondas estarán exactamente fuera de fase cuando lleguen a D, y ocurre una interferencia destructiva. Éste es entonces el criterio para determinar en qué puntos ocurre una interferencia destructiva: la interferencia destructiva ocurre en cualquier punto cuya distancia de un altavoz sea mayor que su distancia al otro altavoz, en exactamente media longitud de onda. Advierta que si esta distancia adicional (BE en la figura 16-16b) es igual a una longitud de onda completa (o a 2, 3,… longitudes de onda), entonces las dos ondas estarán en fase y ocurrirá una *interferencia constructiva*. Si la distancia BE es igual a $\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, \ldots$ longitudes de onda, ocurrirá entonces una *interferencia destructiva*.

Es importante darse cuenta de que una persona ubicada en el punto D de la figura 16-15 o 16-16 no oye nada en absoluto (o casi nada) a esta frecuencia particular, aunque el sonido procede de los dos altavoces. De hecho, si se apaga uno de los altavoces, el sonido del otro altavoz se escuchará claramente.

Si un altavoz emite un rango completo de frecuencias, sólo algunas longitudes de onda interferirán destructivamente por completo en un punto dado.

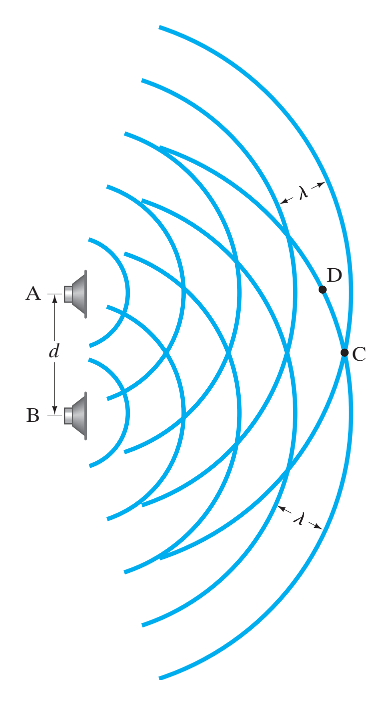
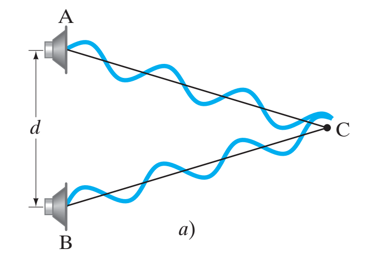


FIGURA 16–15 Las ondas sonoras de dos altavoces interfieren.



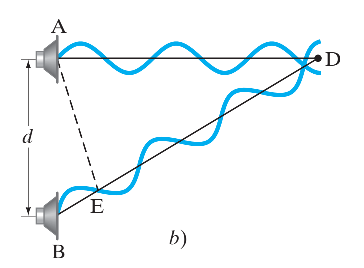


FIGURA 16–16 Las ondas sonoras de una sola frecuencia de los altavoces A y B (véase la figura 16-15) interfieren constructivamente en C y destructivamente en D. [Aquí se muestran representaciones gráficas, no las ondas sonoras longitudinales reales].

EJEMPLO 16–12 Interferencia de altavoces. Dos altavoces están a 1.00 m de distancia. Una persona se halla a 4.00 m de un altavoz ¿Qué tan lejos del segundo altavoz debe estar la persona, para detectar interferencia destructiva cuando los altavoces emiten un sonido de 1150 Hz? Suponga que la temperatura es de 20°C.

PLANTEAMIENTO Para detectar interferencia destructiva, la persona debe estar media longitud de onda más cerca o más lejos de un altavoz que del otro; es decir, a una distancia = 4.00 m ± $\lambda/2$. Es posible determinar λ, pues se conocen f y v.

SOLUCIÓN La rapidez del sonido a 20°C es 343 m/s, por lo que la longitud de onda de este sonido es

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{343\ \text{m/s}}{1150\ \text{Hz}} = 0.30\ \text{m}.$$

Para que ocurra interferencia destructiva, la persona debe estar media longitud de onda más allá de un altavoz que del otro, es decir, a 0.15 m. La persona debe estar entonces a 3.85 m o a 4.15 m del segundo altavoz.

NOTA Si los altavoces están a menos de 0.15 m entre sí, no habría un punto que estuviese 0.15 m más lejos de un altavoz que del otro, y no habría un punto donde se presentara interferencia destructiva.

$f_A = 50$ Hz $f_B = 60$ Hz

$t = 0$ $t = 0.05$ s $t = 0.10$ s $t = 0.15$ s

suma

periodo del pulso (0.10 s)

FIGURA 16–17 Los pulsos ocurren como resultado de la superposición de dos ondas sonoras de frecuencia ligeramente diferente.

Pulsos: Interferencia en el tiempo

Hemos estado analizando la interferencia de las ondas sonoras que tiene lugar en el espacio. Un ejemplo interesante e importante de interferencia que ocurre en el tiempo es el fenómeno conocido como **pulsos**: es decir, si dos fuentes de sonido, por ejemplo dos diapasones, tienen frecuencias cercanas pero no exactamente iguales, las ondas de sonido de las dos fuentes interfieren entre sí y el nivel de sonido en una posición dada se eleva y cae alternadamente, ya que las dos ondas a veces están en fase y a veces están fuera de fase, debido a sus diferentes longitudes de onda. Los cambios de intensidad regularmente espaciados se llaman **pulsos**.

Para saber cómo surgen los pulsos, considere dos ondas sonoras de igual amplitud de frecuencias $f_A = 50$ Hz y $f_B = 60$ Hz, respectivamente. En 1.00 s, la primera fuente efectúa 50 vibraciones; en tanto que la segunda fuente efectúa 60. Ahora examinamos las ondas en un punto en el espacio equidistante de las dos fuentes. La gráfica superior de la figura 16-17 muestra las formas de onda para cada onda como función del tiempo, en una posición fija. La línea de color representa la onda de 50 Hz y la línea negra representa la onda de 60 Hz. La gráfica inferior en la figura 16-17 muestra la suma de las dos ondas en función del tiempo. En el tiempo $t = 0$ las dos ondas se muestran en fase e interfiriendo constructivamente. Como las dos ondas vibran a razones distintas, en el tiempo $t = 0.05$ s ellas están completamente fuera de fase interfiriendo destructivamente. En $t = 0.10$ s, las ondas están de nuevo en fase y la amplitud resultante es grande otra vez. Así, la amplitud resultante aumenta cada 0.10 s y en medio disminuye considerablemente. Este aumento y disminución de la intensidad es lo que se escucha como pulsos.† En este caso, los pulsos están separados a cada 0.10 s. Es decir, la **frecuencia de los pulsos** es de diez pulsos por segundo, o 10 Hz. Este resultado, de que la frecuencia de los pulsos es igual a la diferencia en frecuencia de las dos ondas, se presenta en general como sigue.

Considere las dos ondas, de frecuencias f_1 y f_2, representadas en un punto fijo en el espacio por

$$D_1 = A \operatorname{sen} 2\pi f_1 t$$

y

$$D_2 = A \operatorname{sen} 2\pi f_2 t.$$

Por el principio de superposición, el desplazamiento resultante es

$$D = D_1 + D_2 = A\left(\operatorname{sen} 2\pi f_1 t + \operatorname{sen} 2\pi f_2 t\right).$$

Usando la identidad trigonométrica $\operatorname{sen}\theta_1 + \operatorname{sen}\theta_2 = 2 \operatorname{sen} \lambda(\theta_1 + \theta_2) \cos \lambda(\theta_1 - \theta_2)$, tenemos

$$D = \left[2A \cos 2\pi\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right)t\right] \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)t. \qquad \textbf{(16–8)}$$

Podemos interpretar la ecuación 16-8 como sigue. La superposición de las dos ondas da una onda que vibra con la frecuencia promedio de las dos componentes, $(f_1 + f_2)/2$. Esta vibración tiene una amplitud dada por la expresión entre corchetes, y esta amplitud varía con el tiempo, de cero a un máximo de $2A$ (la suma de las amplitudes separadas), con una frecuencia de $(f_1 - f_2)/2$. Un pulso ocurre siempre que $\cos 2\pi[(f_1 - f_2)/2]t$ es igual a +1 o –1 (véase la figura 16-17); es decir, ocurren dos pulsos por ciclo, de modo que la frecuencia de los pulsos es dos veces $(f_1 - f_2)/2$ que es justamente $f_1 - f_2$, la diferencia en frecuencia de las ondas componentes.

†Se escucharán pulsos aun si no son iguales las amplitudes, siempre que la diferencia en amplitud no sea grande.

Los pulsos pueden ocurrir con cualquier tipo de onda y con ellos se pueden comparar frecuencias. Por ejemplo, para afinar un piano, el afinador escucha los pulsos producidos entre su diapasón estándar y los de una cuerda particular sobre el piano, y sabe que están en tono cuando los pulsos desaparecen. Los miembros de una orquesta pueden afinar escuchando los pulsos entre sus instrumentos y los de un tono estándar [usualmente el tono la (440 Hz) arriba del do central] producido por un piano o un oboe. La frecuencia de un pulso, por lo general, se percibe como una modulación de la intensidad (una oscilación entre suave e intenso) para frecuencias de pulso por abajo de aproximadamente 20 Hz, y como un tono bajo separado para frecuencias de pulso mayores (audible si los tonos son lo suficientemente fuertes).

FÍSICA APLICADA
Afinación de un piano

EJEMPLO 16–13 **Pulsos.** Un diapasón produce un tono permanente de 400 Hz. Cuando se golpea el diapasón y se mantiene cerca de una cuerda de guitarra en vibración, se cuentan veinte pulsos en cinco segundos. ¿Cuáles son las frecuencias posibles producidas por la cuerda de guitarra?

PLANTEAMIENTO Para que ocurran los pulsos, la cuerda debe vibrar a una frecuencia diferente de 400 Hz, para cualquiera que sea la frecuencia de los pulsos.

SOLUCIÓN La frecuencia del pulso es

$$f_{\text{pulso}} = 20 \text{ vibraciones}/5 \text{ segundos} = 4 \text{ Hz}.$$

Ésta es la diferencia de las frecuencias de las dos ondas, y como una onda tiene 400 Hz, la otra onda debe tener 404 Hz o 396 Hz.

16–7 El efecto Doppler

Usted quizás habrá notado que el tono de una sirena de un camión de bomberos disminuye abruptamente al pasar frente a usted y alejarse. O tal vez habrá notado el cambio de tono de un claxon de un automóvil que pasa frente a usted a gran rapidez. El tono del ruido del motor de un auto de carreras cambia al pasar frente a un espectador. Cuando una fuente de sonido se mueve hacia un observador, el tono que el observador escucha es mayor que cuando la fuente está en reposo; y cuando la fuente se aleja del observador, el tono es menor. Este fenómeno se conoce como **efecto Doppler**† y ocurre para todo tipo de ondas. Veamos ahora por qué ocurre dicho efecto y calculemos la diferencia entre la frecuencia percibida y la frecuencia de la fuente, cuando hay movimiento relativo entre la fuente y el observador.

Considere la sirena de un camión de bomberos en reposo, que está emitiendo un sonido de una frecuencia particular en todas direcciones, como se muestra en la figura 16-18a. La onda sonora viaja a la rapidez del sonido (*sound*) en el aire, v_{snd}, que es independiente de la velocidad de la fuente o del observador. Si nuestra fuente, el camión de bomberos, se está moviendo, la sirena emite un sonido a la misma frecuencia que cuando está en reposo. Sin embargo, los frentes de onda del sonido que emite hacia adelante están más cerca entre sí que cuando el camión está en reposo, como se indica en la figura 16-18b. Esto se debe a que cuando el camión de bomberos se mueve, va "persiguiendo" los frentes de onda previamente emitidos, y emite cada cresta más cerca de la anterior. Por lo tanto, un observador en la acera frente al camión detectará que pasan más crestas de onda por segundo, por lo que la frecuencia se escucha más alta. Por otro lado, los frentes de onda emitidos detrás del camión están más separados que cuando el camión está en reposo porque el camión se aleja de ellos. Por consiguiente, menos crestas de onda pasan por segundo por un observador detrás del camión en movimiento (figura 16-18) y el tono percibido es más bajo.

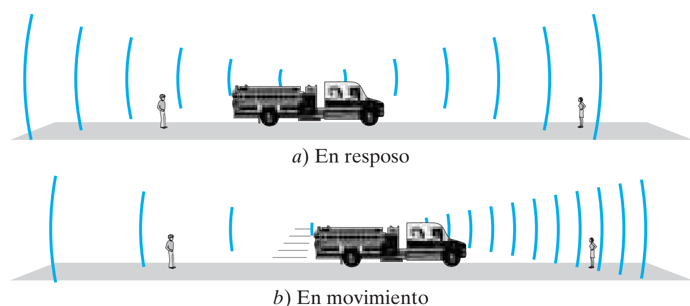
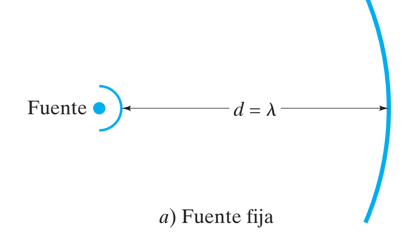


FIGURA 16–18 *a*) Ambos observadores en la acera escuchan la misma frecuencia del camión de bomberos en reposo. *b*) Efecto Doppler: El observador hacia el cual se mueve el camión oye un sonido de mayor frecuencia, y el observador detrás del camión escucha un sonido de frecuencia menor.

†En honor de J. C. Doppler (1803-1853).



a) Fuente fija

Cresta emitida cuando la fuente estaba en el punto 1.

Cresta emitida cuando la fuente estaba en el punto 2.

1 $\vec{\mathbf{v}}_{\text{fuente}}$ 2 λ'

$d_{\text{fuente}} = v_{\text{fuente}}T$

b) Fuente en movimiento

FIGURA 16–19 Determinación del cambio de frecuencia en el efecto Doppler (véase el texto). El punto es la fuente.

Para calcular el cambio de frecuencia percibida, usamos la figura 16-19, y suponemos que el aire (u otro medio) está en reposo en nuestro marco de referencia. (El observador estacionario está más a la derecha.) En la figura 16-19a, la fuente del sonido, que se indica con un punto, está en reposo; se muestran dos crestas de onda sucesivas, la segunda en el proceso de emitirse y aún está cerca de la fuente. La distancia entre esas crestas es λ, la longitud de onda. Si la frecuencia de la fuente es f, entonces el tiempo entre la emisión de dos crestas sucesivas de la onda es

$$T = \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{v_{\text{snd}}}.$$

En la figura 16-19b, la fuente se está moviendo con una velocidad v_{fuente} hacia el observador. En un tiempo T (como se acaba de definir), la primera cresta de onda se ha movido una distancia $d = v_{\text{snd}}T = \lambda$, donde v_{snd} es la velocidad de la onda sonora en el aire (que es la misma, ya sea que la fuente se mueva o no). En este mismo tiempo, la fuente se ha movido una distancia $d_{\text{fuente}} = v_{\text{fuente}}T$. Entonces, la distancia entre crestas de onda sucesivas, que es la longitud de onda ℓ’ que percibirá el observador, es

$$\begin{aligned}\lambda' &= d - d_{\text{fuente}}\\ &= \lambda - v_{\text{fuente}}\,T\\ &= \lambda - v_{\text{fuente}}\frac{\lambda}{v_{\text{snd}}}\\ &= \lambda\left(1 - \frac{v_{\text{fuente}}}{v_{\text{snd}}}\right).\end{aligned}$$

Restamos λ de ambos lados de esta ecuación y encontramos que el desplazamiento en longitud de onda, $\Delta\lambda$, es

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = -\lambda\frac{v_{\text{fuente}}}{v_{\text{snd}}}.$$

De manera que el desplazamiento en longitud de onda es directamente proporcional a la rapidez de la fuente v_{fuente}. La frecuencia f', que percibirá nuestro observador estacionario en el suelo, está dada por

$$f' = \frac{v_{\text{snd}}}{\lambda'} = \frac{v_{\text{snd}}}{\lambda\left(1 - \dfrac{v_{\text{fuente}}}{v_{\text{snd}}}\right)}.$$

Como $v_{\text{snd}}/\lambda = f$, entonces

$$f' = \frac{f}{\left(1 - \dfrac{v_{\text{fuente}}}{v_{\text{snd}}}\right)}. \qquad \left[\begin{array}{l}\text{fuente en movimiento hacia}\\ \text{el observador estacionario}\end{array}\right] \qquad \textbf{(16–9a)}$$

Como el denominador es menor que 1, la frecuencia observada f' es mayor que la frecuencia de la fuente, es decir, $f' > f$. Por ejemplo, si una fuente emite un sonido con frecuencia de 400 Hz cuando está en reposo, entonces cuando la fuente se mueve hacia un observador fijo con rapidez de 30 m/s, el observador escucha una frecuencia (a 20°C) de

$$f' = \frac{400\text{ Hz}}{1 - \dfrac{30\text{ m/s}}{343\text{ m/s}}} = 438\text{ Hz}.$$

Considere ahora una fuente que se *aleja* del observador estacionario con rapidez v_{fuente}. Al usar los mismos argumentos anteriores, la longitud de onda λ' percibida por nuestro observador tendrá el signo menos en d_{fuente} (segunda ecuación en está página) cambiado por más:

$$\begin{aligned}\lambda' &= d + d_{\text{fuente}}\\ &= \lambda\left(1 + \frac{v_{\text{fuente}}}{v_{\text{snd}}}\right).\end{aligned}$$

La diferencia entre las longitudes de onda emitidas y observadas será $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = +\lambda(v_{\text{fuente}}/v_{\text{snd}})$. La frecuencia observada de la onda $f' = v_{\text{snd}}/\lambda'$, será

$$f' = \frac{f}{\left(1 + \dfrac{v_{\text{fuente}}}{v_{\text{snd}}}\right)}. \qquad \left[\begin{array}{l}\text{fuente alejándose del}\\ \text{observador estacionario}\end{array}\right] \qquad \textbf{(16–9b)}$$

Si una fuente que vibra a 400 Hz se aleja de un observador fijo a 30 m/s, el observador oye una frecuencia $f' = (400\text{ Hz})/[1 + (30\text{ m/s})/(343\text{ m/s})] = 368$ Hz.

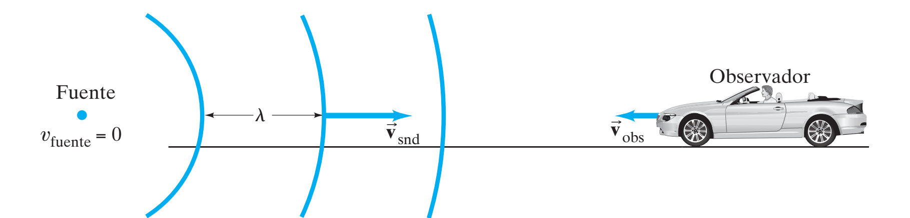


FIGURA 16–20 El observador que se mueve con rapidez v_{obs} hacia una fuente estacionaria detecta crestas de onda que pasan con rapidez $v' = v_{\text{snd}} + v_{\text{obs}}$, donde v_{snd} es la rapidez de las ondas sonoras en el aire.

El efecto Doppler también ocurre cuando la fuente está en reposo y el observador está en movimiento. Si el observador viaja *hacia* la fuente, el tono escuchado es más alto que el de la frecuencia emitida por la fuente; y si el observador se *aleja* de la fuente, el tono escuchado es más bajo. Cuantitativamente, el cambio de frecuencia es diferente que para el caso de una fuente móvil. Con una fuente fija y un observador en movimiento, la distancia entre crestas de ondas, la longitud de onda ℓ, no cambia. No obstante, la velocidad de las crestas con respecto al observador *sí* cambia. Si el observador se mueve hacia la fuente, figura 16-20, la rapidez v' de las ondas con respecto al observador es una simple suma de velocidades: $v' = v_{\text{snd}} + v_{\text{obs}}$, donde v_{snd} es la velocidad del sonido en el aire (suponemos que el aire está quieto) y v_{obs} es la velocidad del observador. Por consiguiente, la frecuencia escuchada es

$$f' = \frac{v'}{\lambda} = \frac{v_{\text{snd}} + v_{\text{obs}}}{\lambda}.$$

Puesto que $\lambda = v_{\text{snd}}/f$, entonces

$$f' = \frac{(v_{\text{snd}} + v_{\text{obs}})f}{v_{\text{snd}}},$$

o bien,

$$f' = \left(1 + \frac{v_{\text{obs}}}{v_{\text{snd}}}\right)f. \qquad \begin{bmatrix}\text{observador moviéndose hacia}\\ \text{la fuente estacionaria}\end{bmatrix} \qquad \textbf{(16–10a)}$$

Si el observador se aleja de la fuente, la velocidad relativa es $v' = v_{\text{snd}} - v_{\text{obs}}$, por lo que

$$f' = \left(1 - \frac{v_{\text{obs}}}{v_{\text{snd}}}\right)f. \qquad \begin{bmatrix}\text{observador moviéndose hacia}\\ \text{la fuente estacionaria}\end{bmatrix} \qquad \textbf{(16–10b)}$$

EJEMPLO 16–14 Sirena en movimiento. La sirena de un auto de policía en reposo emite una frecuencia predominante de 1600 Hz. ¿Qué frecuencia oirá usted si está en reposo y el auto de policía se mueve a 25.0 m/s *a*) hacia usted, y *b*) alejándose de usted?

PLANTEAMIENTO Si el observador está fijo y la fuente está en movimiento, utilizamos las ecuaciones 16-9. La frecuencia que el observador (usted) escucha es la frecuencia emitida f dividida entre el factor $(1 \pm v_{\text{fuente}}/v_{\text{snd}})$, donde v_{fuente} es la rapidez del auto de policía. Se utilizará el signo menos cuando el auto se mueva hacia la persona (lo que proporciona una frecuencia más alta). Se usará el signo más cuando el auto se mueva alejándose de la persona (frecuencia más baja).

SOLUCIÓN *a*) El auto de policía se mueve hacia usted, por lo que usamos la ecuación 16-9a:

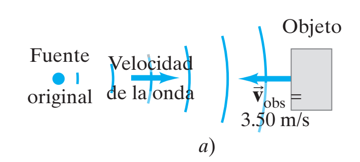
$$f' = \frac{f}{\left(1 - \frac{v_{\text{fuente}}}{v_{\text{snd}}}\right)} = \frac{1600\text{ Hz}}{\left(1 - \frac{25.0\text{ m/s}}{343\text{ m/s}}\right)} = 1726\text{ Hz} \approx 1730\text{ Hz}.$$

b) El auto de policía se aleja de usted, por lo que usamos la ecuación 16-9b:

$$f' = \frac{f}{\left(1 + \frac{v_{\text{fuente}}}{v_{\text{snd}}}\right)} = \frac{1600\text{ Hz}}{\left(1 + \frac{25.0\text{ m/s}}{343\text{ m/s}}\right)} = 1491\text{ Hz} \approx 1490\text{ Hz}.$$

EJERCICIO G Suponga que el auto de policía del ejemplo 16-14 está en reposo y que emite una frecuencia de 1600 Hz. ¿Qué frecuencia escuchará usted si se mueve 25.0 m/s *a*) hacia el auto y *b*) alejándose del auto?

Cuando una onda sonora se refleja desde un obstáculo en movimiento, la frecuencia de la onda reflejada será diferente de la onda incidente debido al efecto Doppler. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.



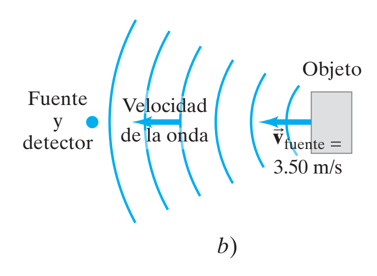


FIGURA 16–21 Ejemplo 16–15.

EJEMPLO 16–15 **Dos desplazamientos Doppler.** Una onda sonora de 5000 Hz es emitida por una fuente estacionaria. Esta onda sonora se refleja desde un objeto que se mueve a 3.50 m/s hacia la fuente (figura 16-21). ¿Cuál es la frecuencia de la onda reflejada por el objeto en movimiento, cuando es captada por un detector en reposo cerca de la fuente?

PLANTEAMIENTO Hay en realidad dos desplazamientos Doppler en esta situación. Primero, el objeto en movimiento actúa como un observador que se mueve hacia la fuente con rapidez v_{obs} = 3.50 m/s (figura 16-21a) que "detecta" una onda sonora de frecuencia (figura 16-10a): $f' = f\left[1 + \left(v_{obs}/v_{snd}\right)\right]$. Segundo, la reflexión de la onda desde el objeto en movimiento es equivalente a que el objeto vuelva a emitir la onda, actuando efectivamente como una fuente móvil con rapidez v_{fuente} = 3.50 m/s (figura 16-21b). La frecuencia final detectada f'', está dada por $f'' = f'/\left[1 - v_{fuente}/v_{snd}\right]$, (ecuación 16-9a).

SOLUCIÓN La frecuencia f' que se "detecta" mediante el objeto en movimiento es (ecuación 16-10a).

$$f' = \left(1 + \frac{v_{obs}}{v_{snd}}\right)f = \left(1 + \frac{3.50\ \mathrm{m/s}}{343\ \mathrm{m/s}}\right)(5000\ \mathrm{Hz}) = 5051\ \mathrm{Hz}.$$

El objeto en movimiento emite (refleja) ahora un sonido de frecuencia (ecuación 16-9a):

$$f'' = \frac{f'}{\left(1 - \dfrac{v_{fuente}}{v_{snd}}\right)} = \frac{5051\ \mathrm{Hz}}{\left(1 - \dfrac{3.50\ \mathrm{m/s}}{343\ \mathrm{m/s}}\right)} = 5103\ \mathrm{Hz}.$$

Por lo tanto, la frecuencia se corre 103 Hz.

NOTA Los murciélagos utilizan esta técnica para estar conscientes de su entorno. Esto también es el principio que fundamenta el radar Dopler en los dispositivos para medir la rapidez de los automóviles y otros objetos.

FÍSICA APLICADA
Medidor Doppler para el flujo sanguíneo y otras aplicaciones médicas

La onda incidente y la onda reflejada en el ejemplo 16-15, al mezclarse entre sí (digamos, electrónicamente), interfieren una con otra y se producen pulsos. La frecuencia del pulso es igual a la diferencia de las dos frecuencias, 103 Hz. Esta técnica Doppler se usa en diversas aplicaciones médicas, usualmente con ondas ultrasónicas en el rango de frecuencias en megahertz. Por ejemplo, las ondas ultrasónicas reflejadas por los glóbulos rojos de la sangre se pueden usar para determinar la velocidad del flujo sanguíneo. Asimismo, la técnica es útil para detectar el movimiento del pecho de un feto joven y monitorear los latidos de su corazón.

Por conveniencia, podemos escribir las ecuaciones 16-9 y 16-10 como una sola ecuación que cubre todos los casos de fuente y observador en movimiento:

$$f' = f\left(\frac{v_{snd} \pm v_{obs}}{v_{snd} \mp v_{fuente}}\right). \qquad \left[\begin{array}{l}\text{fuente y observador}\\ \text{en movimiento}\end{array}\right] \qquad \textbf{(16–11)}$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Obtención de los signos correctos

Para obtener los signos correctos es conveniente recordar, a partir de los experiencia propia, que la frecuencia es más alta conforme el observador y la fuente se aproximan entre sí, y más baja conforme se alejan. Por lo tanto, los signos superiores en el numerador y el denominador se aplican si la fuente y/o el observador se mueven acercándose entre sí; los signos inferiores se aplican si ellos se alejan uno del otro.

EJERCICIO H ¿Qué tan rápido tendría que acercarse una fuente a un observador para que la frecuencia observada sea de una octava por arriba (el doble) de la frecuencia producida? *a*) $\frac{1}{2}v_{snd}$, *b*) v_{snd}, *c*) $2v_{snd}$, *d*) $4v_{snd}$.

Efecto Doppler para la luz

El efecto Doppler ocurre también para otros tipos de ondas. La luz y otros tipos de ondas electromagnéticas (como el radar) exhiben el efecto Doppler: aunque las fórmulas para el desplazamiento de la frecuencia no son idénticas a las ecuaciones 16-9 y 16-10, como veremos en el capítulo 44, el efecto es similar. Una aplicación importante es para la predicción del tiempo por medio del radar. La demora entre la emisión de pulsos de radar y su recepción, después de reflejados desde gotas de agua, indica la posición de la precipitación. Midiendo el desplazamiento Doppler en frecuencia (como en el ejemplo 16-15) nos indica qué tan rápido se mueve la tormenta y en qué dirección.

FÍSICA APLICADA
Efecto Doppler para ondas electromagnéticas y predicción del clima

Otra aplicación importante es en la astronomía, donde las velocidades de galaxias distantes se pueden determinar con la ayuda del desplazamiento Doppler. La luz desde tales galaxias se desplaza hacia frecuencias más bajas, indicando que las galaxias se están alejando de nosotros. Esto se llama **desplazamiento** o **corrimiento al rojo**, ya que el rojo tiene la menor frecuencia de la luz visible. Cuanto mayor sea el desplazamiento de la frecuencia, mayor será la velocidad de recesión. Se encuentra que cuanto más lejos estén las galaxias de la nuestra, más rápido se moverán alejándose de nosotros. Esta observación es la base para la idea de que el Universo se está expandiendo y es una base para la idea de que el Universo comenzó con una gran explosión, llamada comúnmente el "Big Bang" (capítulo 44).

FÍSICA APLICADA
Corrimiento o desplazamiento al rojo en cosmología

*16–8 Ondas de choque y el estampido sónico

Se dice que un objeto como un avión que viaja más rápido que la rapidez del sonido tiene una **rapidez supersónica**. A tal rapidez se conoce a menudo como número **Mach**,[†] que se define como la razón de la rapidez del objeto con respecto de la rapidez del sonido en el medio circundante. Por ejemplo, un avión que viaja a 600 m/s a gran altura en la atmósfera, donde la rapidez del sonido es sólo de 300 m/s, tiene un valor de Mach 2.

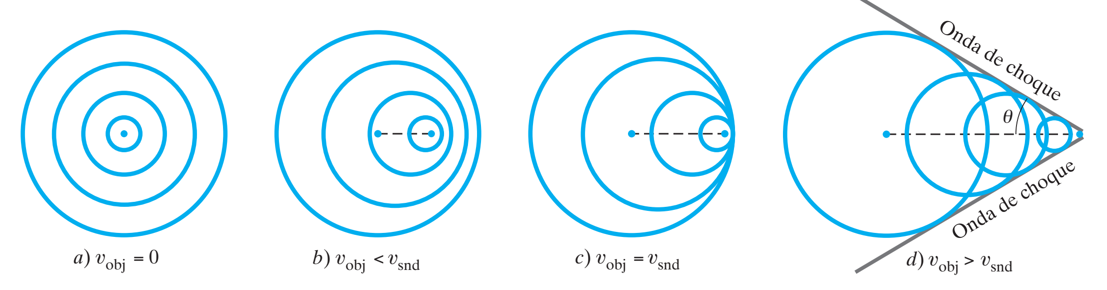
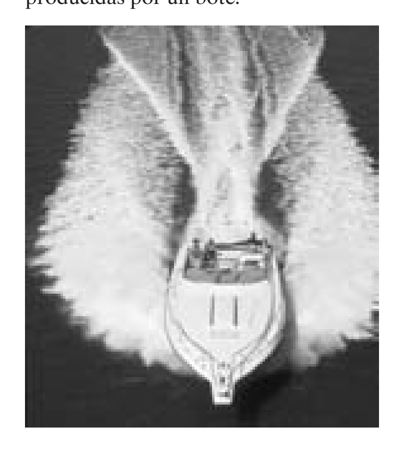


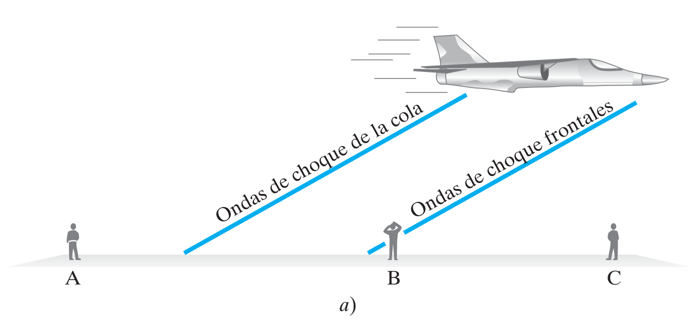
FIGURA 16–22 Las ondas sonoras emitidas por un objeto *a*) en reposo o (b, c y d) en movimiento. *b*) Si la velocidad del objeto es menor que la velocidad del sonido, ocurre el efecto Doppler; *d*); si su velocidad es mayor que la velocidad del sonido, se produce una onda de choque

Cuando una fuente de sonido se mueve a rapidez subsónica (menor que la rapidez del sonido), el tono del sonido se altera, como ya lo hemos visto (efecto Doppler); véanse también las figuras 16-22a y b. No obstante, si una fuente de sonido se mueve más rápido que la rapidez del sonido, ocurre un efecto más dramático conocido como **onda de choque**. En este caso, la fuente está en realidad "rebasando" la onda que produce. Como se muestra en la figura 16-22c, cuando la fuente viaja *a* la rapidez del sonido, los frentes de onda que la fuente emite en la dirección hacia adelante "se apilan" directamente enfrente de ella. Cuando el objeto se mueve más rápido, con rapidez supersónica, los frentes de onda se apilan uno con otro a lo largo de los lados, como se muestra en la figura 16-22d. Las diferentes crestas de onda se traslapan entre sí y forman una sola cresta muy grande, que es la onda de choque. Detrás de esta cresta muy grande se tiene usualmente un valle muy grande. Una onda de choque es esencialmente el resultado de interferencia constructiva de un gran número de frentes de onda. Una onda de choque en el aire es como la estela de un bote que viaja más rápido que la rapidez de las olas que produce, figura 16-23.

FIGURA 16–23 Ondas de la estela producidas por un bote.



[†]En honor del físico austriaco Ernst Mach (1838-1916).



a)

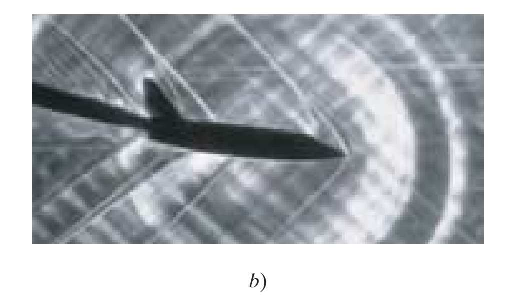

b)

FIGURA 16–24 *a*) El (doble) estampido sónico ya fue escuchado por la persona A a la izquierda. La onda de choque frontal apenas está siendo escuchada por la persona B en el centro. Y poco después será escuchada por la persona C a la derecha. *b*) Foto especial de un avión supersónico que muestra las ondas de choque producidas en el aire. (Varias ondas de choque espaciadas muy cerca entre sí son producidas por diferentes partes del avión).

FÍSICA APLICADA
Estampido sónico

Cuando un avión viaja a rapideces supersónicas, el ruido que hace y su perturbación del aire forman una onda de choque que contiene una enorme cantidad de energía sónica. Cuando una onda de choque pasa por una persona, ésta la oye como un fuerte *estampido sónico*, el cual dura sólo una fracción de segundo, pero la energía que contiene a menudo es suficiente para romper ventanas y ocasionar otros daños. En realidad, un estampido sónico está formado de dos o más estampidos, ya que se pueden formar ondas de choque al frente y atrás del avión, así como en las alas, etcétera (figura 16-24). Las estelas de botes son también múltiples, como se observa en la figura 16-23.

Cuando un avión se aproxima a la rapidez del sonido encuentra una barrera de ondas sonoras frente a sí (véase la figura 16-22c). Para exceder la rapidez del sonido, el avión requiere un empuje extra para pasar a través de esta “barrera del sonido”. Esto se llama “romper la barrera del sonido”. Una vez que se alcanza una rapidez supersónica, esta barrera no impide ya el movimiento. En ocasiones se piensa erróneamente que un estampido sónico se produce sólo en el momento en que un avión rompe la barrera del sonido. En realidad, una onda de choque sigue al avión en todo momento que éste viaja a rapideces supersónicas. Una serie de observadores en el suelo oiría cada uno un “estampido” alto al pasar la onda de choque, figura 16-24. La onda de choque consiste en un cono cuyo vértice está en el avión. El ángulo de este cono, θ, (véase la figura 16-22d) está dado por

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{v_{\text{snd}}}{v_{\text{obj}}}, \qquad \textbf{(16–12)}$$

donde v_{obj} es la velocidad del objeto (el avión) y v_{snd} es la velocidad del sonido en el medio. (La prueba se deja como el problema 75).

* 16–9 Aplicaciones: Sonar, ultrasonido y formación de imágenes en medicina

* Sonar

FÍSICA APLICADA
Sonar: Rastreo en las profundidades y sondeos en la Tierra

La reflexión del sonido se usa en muchas aplicaciones para determinar distancias. El sonar† o técnica de ecos de pulsos se usa para localizar objetos sumergidos. Un transmisor envía un pulso sónico a través del agua, y un detector recibe su reflejo, o eco, poco tiempo después. Este intervalo de tiempo es cuidadosamente medido y con él, se puede determinar la distancia al objeto reflejante, ya que se conoce la rapidez del sonido en el agua. La profundidad del mar, la ubicación de arrecifes, barcos hundidos, submarinos o bancos de peces pueden determinarse de esta manera. La estructura interior de la Tierra se estudia de manera similar, detectando las reflexiones de ondas que viajan a través de la Tierra cuya fuente fue una explosión deliberada (llamadas “sondeos”). El análisis de ondas reflejadas desde varias estructuras y fronteras dentro de la Tierra revela patrones característicos que también son útiles en la exploración de petróleo y minerales.

†Sonar se forma con las iniciales de “*s*ound *n*avigation *r*anging”, que significa “localización de navegación por sonido”.

El sonar hace uso generalmente de frecuencias **ultrasónicas**; es decir, ondas cuyas frecuencias son mayores de 20 kHz, y que están más allá del rango de la detección humana. Para el sonar, las frecuencias están típicamente en el rango de 20 a 100 kHz. Una razón para usar ondas ultrasónicas, aparte del hecho de que no son audibles, es que para longitudes de onda cortas hay menos difracción (sección 15-11), por lo que el haz se dispersa menos y pueden detectarse objetos más pequeños.

*Formación de imágenes médicas con ultrasonido

El uso de ultrasonido en diagnósticos médicos en forma de imágenes (llamadas a veces *sonogramas*) es una importante e interesante aplicación de principios físicos. Se usa una **técnica de pulsos y ecos**, muy parecida al sonar, excepto que las frecuencias utilizadas están en el rango de 1 a 10 MHz (1 MHz = 10^6 Hz). Un pulso de sonido de alta frecuencia se dirige hacia el cuerpo y se detectan sus reflexiones desde fronteras o interfaces entre órganos y otras estructuras, así como lesiones en el cuerpo. Esto permite distinguir tumores y otros crecimientos anormales, o bolsas de fluido; también se puede examinar la acción de las válvulas cardiacas y el desarrollo de un feto; y es posible obtener información acerca de varios órganos del cuerpo, como el cerebro, el corazón, el hígado y los riñones; aunque el ultrasonido no sustituye a los rayos X, para ciertas clases de diagnóstico resulta muy útil. Algunos tipos de tejido o fluido no pueden detectarse en las radiografías de rayos X, sin embargo, las ondas ultrasónicas se reflejan en sus fronteras; las imágenes de ultrasonido "en tiempo real" son como una película de una sección del interior del cuerpo.

FÍSICA APLICADA
Formación de imágenes médicas con ultrasonido

La técnica de pulsos y ecos para la formación de imágenes médicas funciona como sigue. Un breve pulso de ultrasonido es emitido por un transductor que transforma un pulso eléctrico en un pulso de onda sonora. Parte del pulso se refleja como eco en cada interfase del cuerpo y la mayoría del pulso (usualmente) sigue de frente (figura 16-25a). La detección de los pulsos reflejados por el mismo transductor pueden ser exhibidos sobre la pantalla de un monitor, El tiempo transcurrido entre la emisión del pulso y el momento en que se recibe cada reflejo (eco) es proporcional a la distancia a la superficie reflejante. Por ejemplo, si la distancia del transductor a la vértebra es de 25 cm, el pulso viaja una distancia de ida y vuelta de 2×25 cm = 50 cm. La rapidez del sonido en el tejido humano es aproximadamente de 1540 m/s (cercana a la del agua), por lo que el tiempo transcurrido es

$$t = \frac{d}{v} = \frac{(0.50\ \text{m})}{(1540\ \text{m/s})} = 320\ \mu\text{s}.$$

La *intensidad* de un pulso reflejado depende principalmente de la diferencia en densidad de los dos materiales a cada lado de la interfase y puede exhibirse como un pulso o como un punto (figuras 16-25b y c). Cada punto de eco (figura 16-25c) puede representarse como un punto, cuya posición está dada por la demora y cuya brillantez

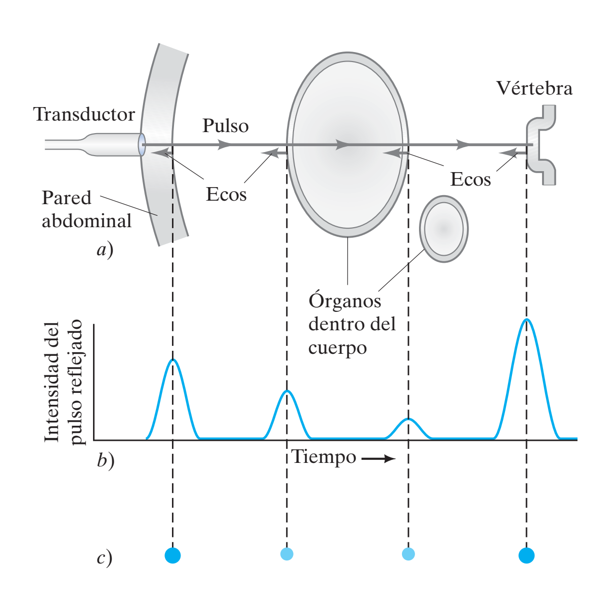


FIGURA 16–25 *a*) Pulso ultrasónico que pasa por el abdomen, reflejándose desde superficies en su trayectoria. *b*) Pulsos reflejados graficados como función del tiempo al ser recibidos por el transductor. Las líneas punteadas verticales señalan qué pulso reflejado va con que superficie. *c*) Exhibición de puntos para los mismos ecos: el brillo de cada punto está relacionado con la intensidad de la señal.

a)

Cuerpos orgánicos

b)

FIGURA 16–26 *a*) Se forman diez trazas a través del abdomen moviendo el transductor, o usando varios transductores. *b*) Los ecos se grafican como puntos para producir la imagen. Trazas espaciadas más cercanamente darían una imagen más detallada.



FIGURA 16–27 *a*) Imagen por ultrasonido de un feto humano dentro del útero.

depende de la intensidad del eco. Puede entonces formarse una imagen bidimensional con esos puntos, a partir de una serie de escaneos. El transductor se mueve y en cada posición envía un pulso y recibe ecos, como se indica en la figura 16-26a. Es posible graficar cada traza, espaciada adecuadamente una abajo de la otra, para formar una imagen sobre una pantalla de monitor, como se muestra en la figura 16-26b. Sólo se incluyen 10 líneas en la figura 10-26, por lo que la imagen es algo burda. Más líneas dan una imagen más precisa.† En la figura 16-27 se presenta una imagen por ultrasonido.

†El radar usado por las aeronaves se basa en una técnica de pulsos y ecos similar, excepto que emplea ondas electromagnéticas (EM) que, al igual que la luz, viajan con una rapidez de 3 × 108 m/s.

Resumen

El sonido viaja como una onda longitudinal en el aire y otros materiales. En el aire, la rapidez del sonido crece con la temperatura: a 20°C es aproximadamente de 343 m/s.

El **tono** de un sonido se determina por la frecuencia; a mayor frecuencia, el tono será más alto.

El **rango audible** de frecuencias para los seres humanos va aproximadamente de 20 Hz a 20,000 Hz (1 Hz = 1 ciclo por segundo).

La **intensidad** de un sonido está relacionada con la amplitud al cuadrado de la onda. Como el oído humano puede detectar intensidades de sonido desde 10^{-12} W/m² hasta 1 W/m², los niveles de sonido se especifican en una escala logarítmica. El **nivel de sonido** β, especificado en decibeles, se define en términos de la intensidad I como

$$\beta(\text{in dB}) = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right), \qquad \textbf{(16–6)}$$

donde la intensidad de referencia I_0 se toma usualmente como 10^{-12} W/m².

Los instrumentos musicales son fuentes simples de sonido en los que se producen *ondas estacionarias*.

Las cuerdas de un instrumento de cuerda pueden vibrar como un todo con nodos sólo en los extremos; la frecuencia a la que ocurre esta onda estacionaria se llama la **fundamental,** que corresponde a una longitud de onda igual al doble de la longitud de la cuerda, $\lambda_1 = 2\ell$. La cuerda puede también vibrar a frecuencias superiores, llamadas **sobretonos** o **armónicos**, en los que hay uno o más nodos adicionales. La frecuencia de cada armónico es un múltiplo entero de la frecuencia fundamental.

En los instrumentos de viento, las ondas estacionarias se forman en la columna de aire dentro del tubo.

El aire en vibración en un **tubo abierto** (abierto en ambos extremos) tiene antinodos de desplazamiento en ambos extremos. La frecuencia fundamental corresponde a una longitud de onda igual a dos veces la longitud del tubo: $\lambda_1 = 2\ell$. Los armónicos tienen frecuencias que son 1, 2, 3, 4,... veces la frecuencia fundamental, tal como en las cuerdas.

Para un **tubo cerrado** (cerrado en un extremo), la frecuencia fundamental corresponde a una longitud de onda cuatro veces la longitud del tubo: $\lambda_1 = 4\ell$. Sólo los armónicos impares están presentes, iguales a 1, 3, 5, 7,… veces la frecuencia fundamental.

Las ondas de sonido de diferentes fuentes pueden interferir entre sí. Si dos sonidos tienen frecuencias ligeramente diferentes, se pueden oír **pulsos** con una frecuencia igual a la diferencia en las frecuencias de las dos fuentes.

El **efecto Doppler** se refiere al cambio en tono de un sonido debido al movimiento de la fuente o del oyente. Si la fuente y el oyente se aproximan entre sí, el tono percibido es más alto; si se están alejando, el tono es más bajo.

[*Las ondas de choque y el estampido sónico ocurren cuando un objeto se mueve a una rapidez supersónica, es decir, más rápido que el sonido. Las ondas sonoras de frecuencia ultrasónica (superior a 20 kHz) se utilizan en muchas aplicaciones, que incluyen el sonar y la formación de imágenes médicas].

Preguntas

1. ¿Cuál es la evidencia de que el sonido viaja como onda?
2. ¿Cuál es la evidencia de que el sonido es una forma de energía?
3. A veces los niños juegan con un “teléfono” hecho en casa, uniendo un cordel a los fondos de dos vasos de cartón. Cuando el cordel está estirado y un niño habla en uno de los vasos, el sonido se puede oír en el otro vaso (figura 16-28). Explique claramente cómo la onda sonora viaja de un vaso al otro.



FIGURA 16–28 Pregunta 3.

4. Cuando una onda de sonido pasa del aire al agua, ¿usted espera que cambie la frecuencia o la longitud de onda?
5. ¿Qué evidencia puede dar usted de que la rapidez del sonido en el aire no depende significativamente de la frecuencia?
6. La voz de una persona que ha inhalado helio suena con un tono muy alto. ¿Por qué?
7. ¿Cuál es la principal razón por la que la rapidez del sonido en hidrógeno sea mayor que la rapidez del sonido en el aire?
8. Dos diapasones oscilan con la misma amplitud, pero uno tiene el doble de la frecuencia del otro. ¿Cuál (si acaso) produce el sonido más intenso?
9. ¿Cómo afectará la temperatura del aire en una habitación el tono de los tubos de un órgano?
10. Explique cómo un tubo podría usarse como un filtro para reducir la amplitud de los sonidos en varios rangos de frecuencia. (Un ejemplo es un mofle de automóvil).
11. ¿Por qué el espaciamiento de los trastes de una guitarra (figura 16-29) se reduce conforme se está más cerca del puente?

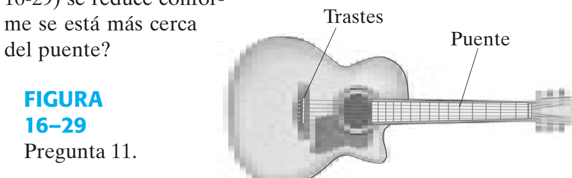


FIGURA 16–29 Pregunta 11.

12. Un camión ruidoso se aproxima desde detrás de un edificio. Inicialmente se escucha pero no puede verse. Cuando emerge y se le ve, su sonido súbitamente es más vibrante: se escucha más el ruido de alta frecuencia. Explique este fenómeno. [*Sugerencia*: Véase la sección 11-5 acerca de la difracción].
13. Se puede decir que las ondas estacionarias son debidas a “interferencia en el espacio”; mientras que los pulsos son debidos a “interferencia en el tiempo”. Explíquelo.
14. En la figura 16-15, si disminuye la frecuencia de los altavoces, ¿los puntos D y C (donde ocurren interferencias destructiva y constructiva) se alejarían o se acercarían?
15. Los métodos tradicionales para proteger el oído de la gente que trabaja en áreas con niveles de ruido muy altos consisten principalmente en bloquear o reducir los niveles de ruido. Con una tecnología relativamente nueva, se usan audífonos que no bloquean el ruido del ambiente. Más bien, se usa un dispositivo que detecta el ruido, lo invierte electrónicamente y lo alimenta a los audífonos *junto con* el ruido del ambiente. ¿Cómo el hecho de agregar *más* ruido puede reducir los niveles de sonido que llegan a los oídos?
16. Considere las dos ondas que se muestran en la figura 16-30. Cada onda se puede considerar como una superposición de dos ondas sonoras con frecuencias ligeramente diferentes, como en la figura 16-17. ¿En qué ondas, a o b, están más separadas las dos frecuencias componentes? Explique su respuesta.

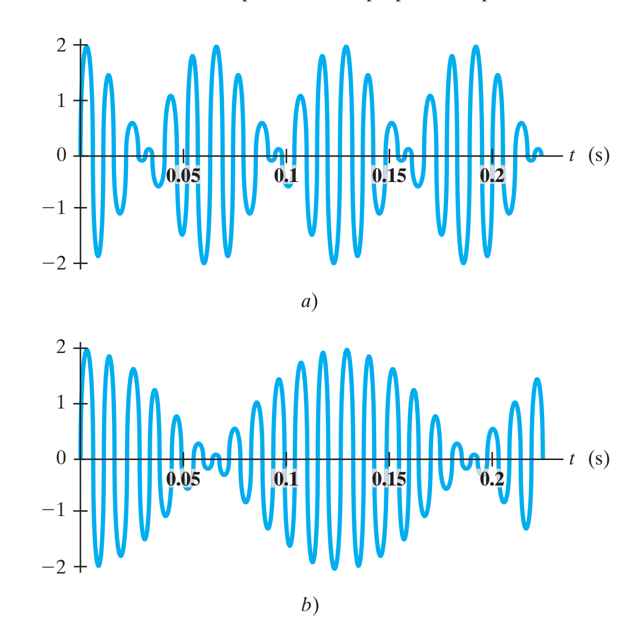
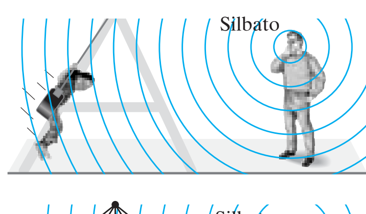


FIGURA 16–30 Pregunta 16.

17. ¿Existe un corrimiento Doppler si la fuente y el observador se mueven en la misma dirección y sentido, con la misma velocidad? Explique su respuesta.
18. Si sopla el viento, ¿alterará ello la frecuencia del sonido escuchado por una persona en reposo con respecto a la fuente? ¿Cambia la longitud de onda o la velocidad?
19. La figura 16-31 muestra varias posiciones de un niño en un columpio que se mueve hacia una persona en el suelo, quien sopla un silbato. De la A a la E, ¿en qué posición oirá el niño la frecuencia mayor del sonido del silbato? Explique su razonamiento.



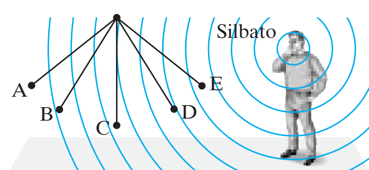


FIGURA 16–31 Pregunta 19.

20. ¿Aproximadamente cuantas “octavas” hay en el rango de audición del ser humano?
21. En una pista de carreras, usted puede estimar la rapidez de los autos, al sólo escuchar la diferencia en los tonos del ruido del motor entre los autos que se acercan y los que se alejan. Suponga que el sonido de cierto auto desciende una octava completa (la mitad de la frecuencia), conforme avanza por un tramo recto. ¿Qué tan rápido va el auto?

Problemas

[A menos que se indique lo contrario, suponga $T = 20°C$ y $v_{sonido} =$ 343 m/s en el aire].

16–1 Características del sonido

1. (I) Una excursionista determina la longitud de un lago escuchando el eco de su grito reflejado por un acantilado en el extremo lejano del lago. Ella oye el eco 2.0 s después del grito. Estime la longitud del lago.

2. (I) Un marinero golpea uno de los lados de su nave justo debajo de la línea de flotación. Después de 2.5 s, escucha el eco del sonido reflejado en el fondo marino que está directamente debajo. ¿Cuán profundo está el océano en este punto? La rapidez del sonido en el agua de mar es de 1560 m/s (tabla 16-1) y no varía significativamente con la profundidad.

3. (I) *a*) Calcule las longitudes de onda en aire a 20°C para sonidos en el rango máximo de audición humana, 20 Hz a 20,000 Hz. *b*) ¿Cuál es la longitud de onda de una onda ultrasónica de 15 MHz?

4. (I) En un día caluroso de verano (27°C), toma 4.70 s para que el eco regrese desde una acantilado frente a un lago. En un día invernal, le toma 5.20 s. ¿Cuál es la temperatura en el día de invierno?

5. (II) Un *sensor de movimiento* puede medir con precisión la distancia d a un objeto de manera repetida usando una técnica de sonar como la del ejemplo 16-2. Se emite un pulso ultrasónico corto y se refleja en cualquier objeto que encuentra, creando pulsos de eco en su regreso al sensor. El sensor mide el intervalo de tiempo t entre la emisión del pulso original y la llegada del primer eco. *a*) El menor intervalo de tiempo t puede medirse con alta precisión de 1.0 ms. ¿Cuál es la menor distancia (a 20°C) que puede medirse con el sensor de movimiento? *b*) Si el sensor de movimiento hace 15 medidas de distancia cada segundo (es decir, emite 15 pulsos de sonido por segundo en intervalos de tiempo uniformemente espaciados), la medición de t debe completarse con el intervalo de tiempo entre las emisiones de pulsos sucesivos. ¿Cuál es la mayor distancia (a 20°C) que puede medirse con el sensor de movimiento? *c*) Suponga que durante un periodo de prueba, la temperatura ambiente se incrementa de 20°C a 23°C. ¿Qué error porcentual introducirá esto en las mediciones de distancia del sensor de movimiento?

6. (II) Un bote pesquero oceánico navega justo sobre un banco de atún en un día brumoso. De pronto, ocurre una explosión en otro bote que está a 1.35 km de distancia (figura 16-32) ¿Cuánto tiempo pasa hasta que la explosión es escuchada *a*) por los peces y *b*) por los pescadores?

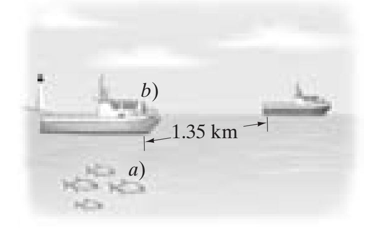


FIGURA 16–32 Problema 6.

7. (II) Se suelta una piedra desde lo alto de un acantilado. El chapoteo que hace al golpear el agua que se encuentra debajo se escucha 3.0 s después. ¿Cuál es la altura del acantilado?

8. (II) Una persona, que está inclinada con la oreja pegada al suelo, ve que una roca enorme golpea el pavimento de concreto. Un momento después oye dos sonidos del impacto: uno viaja en el aire y el otro en el concreto, con una separación de 0.75 s. ¿Qué tan lejos ocurrió el impacto? Véase la tabla 16-1.

9. (II) Calcule el error porcentual cometido en una milla de distancia por la “regla de los 5 segundos” para estimar la distancia a la que se genera un relámpago, si la temperatura es *a*) de 30°C y *b*) 10°C.

16–2 Representación matemática de las ondas

10. (I) La amplitud de presión de una onda sonora en el aire ($\rho = 1.29\ \text{kg/m}^3$) a 0°C es 3.0×10^{-3} Pa. ¿Cuál es la amplitud de desplazamiento, si la frecuencia es *a*) 150 Hz y *b*) 15 kHz?

11. (I) ¿Cuál debe ser la amplitud de presión en una onda sonora en aire (0°C), si las moléculas del aire experimentan un desplazamiento máximo igual al diámetro de una molécula de oxígeno, de aproximadamente 3×10^{-10} m? Suponga una frecuencia de la onda sonora de *a*) 55 Hz y *b*) 5.5 kHz.

12. (II) Escriba una expresión que describa la variación de presión en función de x y t, para las ondas que se mencionan en el problema 11.

13. (II) La variación de la presión en una onda sonora está dada por

$$\Delta P = 0.0035\,\text{sen}(0.38\pi x - 1350\pi t),$$

donde ΔP está en pascales, x en metros y t en segundos. Determine *a*) la longitud de onda, *b*) la frecuencia, *c*) la rapidez y *d*) la amplitud de desplazamiento de la onda. Suponga que la densidad del medio es $\rho = 2.3 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$.

16–3 Intensidad del sonido: Decibeles

14. (I) ¿Cuál es la intensidad de un sonido en el nivel de dolor de 120 dB? Compárela con la de un murmullo de 20 dB.

15. (I) ¿Cuál es el nivel de sonido de un sonido cuya intensidad es $2.0 \times 10^{-6}\ \text{W/m}^2$?

16. (I) ¿Cuáles son las frecuencias mínima y máxima que un oído humano promedio puede detectar cuando el nivel de sonido es de 40 dB? (Véase la figura 16-6).

17. (II) Su sistema auditivo puede detectar un amplio rango de niveles de sonido. ¿Cuál es la razón de la intensidad máxima y la mínima en *a*) 100 Hz, *b*) 5000 Hz? (Véase la figura 16-6).

18. (II) Usted intenta decidir entre dos nuevos amplificadores de estéreo. Uno es de 100 W por canal y el otro de 150 W por canal. En términos de dB, ¿cuánto más fuerte será el amplificador más poderoso cuando ambos estén produciendo sonido en su nivel máximo?

19. (II) En un concierto dolorosamente ruidoso, una onda sonora de 120 dB sale desde un altavoz a 343 m/s. ¿Cuánta energía de la onda sonora está contenida en cada volumen de $1.0\ \text{cm}^3$ de aire en la región cercana a este altavoz.

20. (II) Si dos petardos producen un nivel de sonido de 95 dB al ser disparados simultáneamente en cierto lugar, ¿cuál será el nivel de sonido si uno explota solo?

21. (II) Una persona de pie a cierta distancia de un avión con cuatro motores a chorro igualmente ruidosos experimenta un nivel de sonido de 130 dB. ¿Qué nivel de sonido experimentaría esta persona, si el capitán apaga todos los motores excepto uno?

22. (II) Se dice que un tocacintas tradicional tiene una razón señal a ruido de 62 dB; en tanto que la razón para un reproductor de CD es de 98 dB. ¿Cuál es la razón de intensidades de la señal y el ruido de fondo para cada uno de los aparatos?

23. (II) *a*) Estime la potencia de salida del sonido de una persona que habla en una conversación normal. Use la tabla 16-2 y suponga que el sonido se dispersa en manera aproximadamente uniforme sobre una esfera con centro en la boca. *b*) ¿Cuánta gente produciría una potencia de salida total de sonido de 75 W de conversación ordinaria? [Sugerencia: Sume intensidades; no dB].

24. (II) Una onda sonora de 50 dB golpea un tímpano cuya área es de $5.0 \times 10^{-5}\ \text{m}^2$. *a*) ¿Cuánta energía es absorbida por el tímpano por segundo? *b*) A dicha tasa, ¿cuánto tardaría su tímpano en recibir una energía total de 1.0 J?

25. (II) Un costoso amplificador A tiene 250 W de salida; mientras que el amplificador B más modesto tiene 45 W. *a*) Estime el nivel de sonido en decibeles que usted esperaría en un punto a 3.5 m desde un altavoz conectado por separado a cada amplificador. *b*) ¿El amplificador costoso sonará dos veces más fuerte que el amplificador barato?

26. (II) En un concierto de rock, un medidor de decibeles registró 130 dB cuando estaba colocado a 2.2 m en frente de un altavoz en el escenario. *a*) ¿Cuál fue la potencia de salida del altavoz suponiendo una dispersión esférica uniforme del sonido e ignorando la absorción en el aire? *b*) ¿A qué distancia el nivel del sonido era más razonable, digamos, de 85 dB?

27. (II) Un cohete de fuegos artificiales explota 100 m por encima del suelo, creando una visualización colorida de luces y chispas. ¿Qué tanto más grande es el nivel de sonido de la explosión para una persona que está de pie directamente abajo de la explosión, que para otra persona que está alejada una distancia horizontal de 200 m (figura 16-33)?

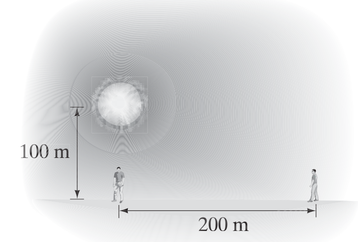


FIGURA 16–33
Problema 27.

28. (II) Si la amplitud de una onda sonora aumenta 2.5 veces, *a*) ¿por qué factor crecerá la intensidad? *b*) ¿En cuántos decibeles se incrementará el nivel del sonido?

29. (II) Dos ondas sonoras tienen amplitudes de desplazamiento iguales, pero una tiene 2.6 veces la frecuencia de la otra. *a*) ¿Cuál tiene la mayor amplitud de presión y por qué factor es mayor? *b*) ¿Cuál es la razón de sus intensidades?

30. (II) ¿Cuál sería el nivel de sonido (en dB) de una onda sonora en el aire, que correspondiera a una amplitud de desplazamiento de moléculas de aire en vibración de 0.13 mm a 380 Hz?

31. (II) *a*) Calcule el desplazamiento máximo de las moléculas de aire cuando pasa una onda sonora de 330 Hz y cuya intensidad está en el umbral de dolor (120 dB). *b*) ¿Cuál es la amplitud de presión en esta onda?

32. (II) Un avión a chorro emite 5.0×10^5 J de energía acústica por segundo. *a*) ¿Cuál es el nivel del sonido a 25 m de distancia? El aire absorbe sonido a una tasa de aproximadamente 7.0 dB/km; calcule cuál será el nivel de sonido *b*) a 1.00 km y *c*) a 7.50 km del avión, tomando en cuenta la absorción del aire.

16–4 Fuentes de sonido: cuerdas y columnas de aire

33. (I) ¿Cuál sería la longitud de un clarinete bajo que estimaría usted, suponiendo que está modelado como un tubo cerrado y que la nota más baja que puede tocar es re bemol, cuya frecuencia es de 69.3 Hz?

34. (I) La cuerda de la nota la de un violín tiene una frecuencia fundamental de 440 Hz. La longitud de la porción en vibración es de 32 cm y tiene una masa de 0.35 g. ¿A qué tensión debe ponerse la cuerda?

35. (I) Un tubo de órgano tiene 124 cm de longitud. Determine la frecuencia fundamental y los tres primeros sobretonos audibles si el tubo está *a*) cerrado en un extremo, y *b*) abierto en ambos extremos.

36. (I) *a*) ¿Qué frecuencia resonante esperaría usted al soplar a través de la parte superior de una botella vacía que tiene 21 cm de profundidad, si se supone que es un tubo cerrado? *b*) ¿Cómo cambiaría esto si la botella estuviera llena de líquido hasta un tercio?

37. (I) Si usted fuera a construir un órgano con tubos abiertos cubriendo el rango de audición humana (20 Hz a 20 kHz), ¿cuál sería el rango de las longitudes de los tubos requeridos?

38. (II) Estime la frecuencia del “sonido del océano”, cuando usted coloca su oído muy cerca de una concha marina de 20 cm de diámetro (figura 16-34).



FIGURA 16–34
Problema 38.

39. (II) Una cuerda de guitarra sin pulsar tiene 0.73 m de largo y está afinada para tocar el mi arriba del do central (330 Hz). *a*) ¿Qué tan lejos del extremo de esta cuerda debe colocarse el dedo para tocar el la arriba del do central (440 Hz)? *b*) ¿Cuál es la longitud de onda sobre la cuerda de esta onda de 440 Hz? *c*) ¿Cuáles son la frecuencia y la longitud de onda de la onda sonora producida en el aire a 25°C por esta cuerda pulsada?

40. (II) *a*) Determine la longitud de un tubo abierto de órgano que emite el do central (262 Hz), cuando la temperatura es de 15°C. *b*) ¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia de la onda estacionaria fundamental en el tubo? *c*) ¿Cuáles son λ y f de la onda sonora viajera producida en el aire exterior?

41. (II) Un órgano está bien afinado a 22.0°C. ¿En qué porcentaje estará la frecuencia fuera de tono a 5.0°C?

42. (II) ¿Qué tan lejos de la boquilla de la flauta en el ejemplo 16-11 debería estar el agujero que debe descubrirse, para sonar fa arriba del do central a 349 Hz?

43. (II) Un clarín es tan sólo un tubo de longitud fija que actúa como si estuviera abierto en ambos extremos. Un clarinista, al ajustar sus labios correctamente y soplar con la presión de aire adecuada, produce un armónico (por lo general, diferente del fundamental) de la columna de aire dentro del tubo para producir sonido fuerte. Las tonadas militares estándares como el toque de diana o de alborada requieren sólo cuatro notas musicales sol-5 (392 HZ), do-6 (523 Hz), mi-6 (659 Hz) y sol-6 (784 Hz). *a*) Para cierta longitud ℓ, un clarín tendrá una secuencia de cuatro armónicos consecutivos, cuyas frecuencias casi iguales a las que están asociadas con las notas sol-4, do-5, mi-5 y sol-5. Determine su ℓ. *b*) ¿Qué armónico es cada una de las notas (aproximadas) sol-5, do-6, mi-6 y sol-6 de este clarín?

44. (II) Un tubo particular de órgano puede resonar a 264 Hz, 440 Hz y 616 Hz; pero no en ninguna otra frecuencia intermedia. *a*) ¿Se trata de un tubo abierto o de uno cerrado? *b*) ¿Cuál es la frecuencia fundamental de este tubo?

45. (II) Cuando el dedo de un músico presiona hacia abajo una cuerda de guitarra sobre el traste, se reduce la longitud de la porción que vibra, por lo que se incrementa la frecuencia fundamental de la cuerda (véase la figura 16-35). La tensión de la cuerda y la masa por unidad de longitud permanecen sin cambio. Si la longitud sin pulsar de la cuerda es $\ell = 65.0$ cm, determine la posición x en las primeras seis marcas del traste, si cada una eleva el tono de la fundamental una nota musical en comparación con el traste contiguo. En la escala cromática igualmente temperada, la razón de las frecuencias de las notas contiguas es $2^{1/12}$.

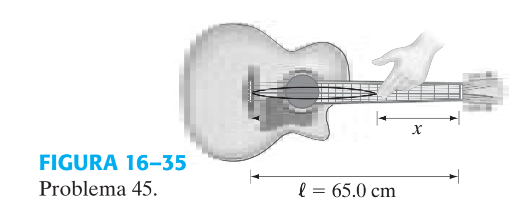


FIGURA 16–35
Problema 45.

46. (II) Un tubo estrecho uniforme de 1.80 m de largo está abierto en ambos extremos y resuena en dos armónicos sucesivos con frecuencias de 275 Hz y 330 Hz. ¿Cuáles son la *a*) frecuencia fundamental, y *b*) la rapidez del sonido en el gas dentro del tubo?

47. (II) Se va a diseñar un tubo en el aire a 23.0°C, para producir dos armónicos sucesivos a 240 Hz y 280 Hz. ¿Qué tan largo debe ser el tubo? ¿Deberá estar cerrado o abierto?

48. (II) ¿Cuántos sobretonos están presentes dentro del rango audible para un tubo de órgano de 2.48 m de largo a 20°C *a*) si está abierto, y *b*) si está cerrado?

49. (II) Determine la frecuencia fundamental y la frecuencia del primer sobretono para un vestíbulo de 8.0 m de largo con las puertas cerradas. Modele el vestíbulo como un tubo cerrado en ambos extremos.

50. (II) En un *oscilador de cuarzo*, usado como un reloj estable en dispositivos electrónicos, una onda sonora permanente (cortante) transversa se excita a través del espesor d de un disco de cuarzo y su frecuencia f se detecta electrónicamente. Las caras paralelas del disco no están apoyadas por lo que actúan como "extremos libres", cuando la onda sonora se refleja en ellas (véase la figura 16-36). Si el oscilador se diseña para operar con el primer armónico, determine el espesor del disco requerido si $f = 12.0$ MHz. La densidad y el modulo de corte del cuarzo son $\rho = 2650 \text{ kg/m}^3$ y $G = 2.95 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$.

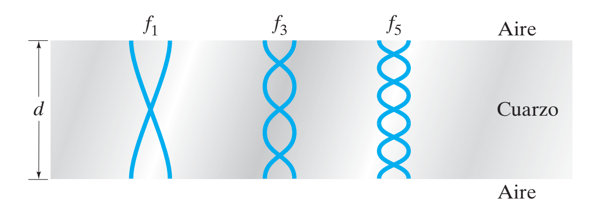


FIGURA 16–36 Problema 50.

51. (III) El canal del oído humano tiene aproximadamente 2.5 cm de longitud y está abierto al exterior y está cerrado en el otro extremo por la membrana del tímpano. Estime las frecuencias (en el rango audible) de las ondas estacionarias en el canal del oído. ¿Cuál es la relación de su respuesta a la información en la gráfica de la figura 16-6?

* 16–5 Calidad del sonido: Superposición

***52.** (II) ¿Cuáles son aproximadamente las intensidades de los primeros dos sobretonos de un violín comparadas con la intensidad de la fundamental? ¿Cuántos decibeles menos tienen el primer y el segundo sobretono comparados con el modo fundamental? (Véase la figura 16-14).

16–6 Interferencia: Pulsos

53. (I) Un afinador de pianos oye un pulso cada 2.0 s al tratar de ajustar dos cuerdas, una de las cuales está sonando a 370 Hz ¿Qué tan lejos en frecuencia está la otra cuerda?

54. (I) ¿Cuál es la frecuencia de pulso si se tocan juntos el do central (262 Hz) y el do sostenido (277 Hz)? ¿Cuál es si cada una se toca a dos octavos menos (que cada frecuencia se reduzca en un factor de 4)?

55. (II) Una cuerda de guitarra produce 4 pulsos/s cuando suena con un diapasón de 350 Hz y 9 pulsos/s cuando suena con un diapasón de 355 Hz. ¿Cuál es la frecuencia vibratoria de la cuerda? Explique su razonamiento.

56. (II) Las dos fuentes de sonido en la figura 16-15 están una frente a la otra y emiten sonidos de igual amplitud e igual frecuencia (294 Hz) pero 180° fuera de fase. ¿Para qué separación mínima de los dos altavoces habrá algún punto en el que ocurra *a*) interferencia constructiva completa y *b*) interferencia destructiva completa? (Suponga que $T = 20$°C).

57. (II) ¿Cuántos pulsos se escucharán si dos flautas idénticas, de 0.66 m de largo, tocan cada una el do central (262 Hz), pero una está a 5.0°C y la otra a 28°C?

58. (II) Dos altavoces están separados 3.00, como se indica en la figura 16-37 y emiten sonidos de 494 Hz en fase. Se coloca un micrófono a 3.20 m de distancia en un punto a la mitad entre ambos altavoces, donde se registra un máximo de intensidad. *a*) ¿Qué tan lejos debe moverse el micrófono hacia la derecha para encontrar el primer mínimo de intensidad? *b*) Suponga que los altavoces se vuelven a conectar de manera que los sonidos de 494 Hz que emiten queden exactamente fuera de fase. ¿En qué posiciones están ahora el máximo y el mínimo de intensidad?

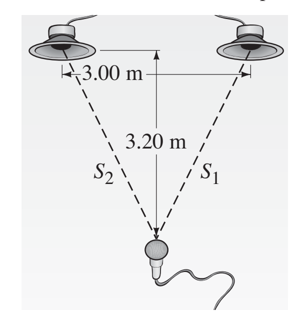


FIGURA 16–37 Problema 58.

59. (II) Dos cuerdas de piano están vibrando supuestamente a 220 Hz, pero un afinador oye tres pulsos cada 2.0 s cuando las cuerdas se tocan juntas. *a*) Si una está vibrando a 220.0 Hz, ¿cuál debe ser la frecuencia de la otra (si hay una sola respuesta)? *b*) ¿En qué porcentaje debe aumentarse o disminuirse la tensión para que queden afinadas?

60. (II) Una fuente emite sonidos de longitudes de onda de 2.64 m y 2.72 m en el aire. *a*) ¿Cuántos pulsos por segundo se escucharán (suponga que $T = 20$°C)? *b*) ¿Qué tan separadas en el espacio están las regiones de intensidad máxima?

16–7 Efecto Doppler

61. (I) La frecuencia predominante de la sirena de cierto camión de bomberos es 1350 Hz cuando está en reposo. ¿Qué frecuencia detectará si usted se mueve con una rapidez de 30.0 m/s *a*) hacia el camión de bomberos, y *b*) alejándose del camión?

62. (I) Un murciélago en reposo envía ondas sonoras ultrasónicas a 50.0 kHz y las recibe de regreso desde un objeto en movimiento que se aleja del murciélago a 30.0 m/s. ¿Cuál es la frecuencia del sonido reflejado?

63. (II) *a*) Compare el desplazamiento en frecuencia si una fuente de 2300 Hz se mueve hacia usted a 18 m/s versus el caso en que usted se esté moviendo hacia la fuente a 18 m/s. ¿Las dos frecuencias son exactamente las mismas? ¿Están cercanas entre sí? *b*) Repita el cálculo para 160 m/s y también para *c*) 320 m/s. ¿Qué puede usted concluir acerca de la asimetría de las fórmulas Doppler? *d*) Muestre que a bajas rapideces (relativas a la rapidez del sonido), las dos fórmulas (fuente acercándose y detector acercándose) dan el mismo resultado.

64. (II) Dos automóviles están equipados con claxons de la misma frecuencia única. Cuando uno está en reposo y el otro se mueve hacia el primero a 15 m/s, el conductor en reposo escucha una frecuencia de pulso de 4.5 Hz. ¿Cuál es la frecuencia que los claxons emiten? Suponga que $T = 20$°C.

65. (II) Un auto de policía que suena una sirena con una frecuencia de 1280 Hz viaja a 120.0 km/h. *a*) ¿Qué frecuencias escucha un observador que está adelante en el camino conforme el auto se aproxima y conforme se aleja? *b*) ¿Qué frecuencias se escuchan en un auto que viaja a 90.0 km/h en la dirección contraria antes y después de que pase el auto de policía? *c*) El auto de policía pasa a un automóvil que viaja en la misma dirección y sentido a 80.0 km/h. ¿Cuáles dos frecuencias se escucharán en este último automóvil?

66. (II) Un murciélago vuela hacia una pared con una rapidez de 7.0 m/s. Mientras vuela, el murciélago emite una onda sonora ultrasónica con frecuencia de 30.0 kHz. ¿Qué frecuencia oye el murciélago en la onda reflejada?

67. (II) En uno de los experimentos Doppler originales, una tuba fue tocada sobre un tren en movimiento a una frecuencia de 75 Hz, y otra segunda tuba idéntica tocó el mismo tono mientras estaba en reposo en la estación ferroviaria. ¿Qué frecuencia de pulso se escuchó, si el tren se aproximó a la estación con una rapidez de 12.0 m/s?

68. (II) Si una bocina colocada en un automóvil emite una canción, ¿con qué rapidez (km/h) el automóvil tiene que moverse el automóvil hacia un oyente estacionario, de manera que éste escuche la canción transportada una nota arriba, en comparación con la canción escuchada por el conductor del automóvil? En la escala cromática igualmente temperada, la razón de las frecuencias de las notas contiguas es $2^{1/12}$.

69. (II) Una onda sobre la superficie del océano con longitud de onda de 44 m viaja hacia el este a una rapidez de 18 m/s en relación con el suelo marino. Si en este tramo de la superficie del océano, una lancha de motor se desplaza a 15 m/s (en relación con el suelo marino), ¿qué tan a menudo la lancha encontrará una cresta de onda, si la lancha viaja *a*) hacia el oeste y *b*) hacia el este?

70. (III) El silbato de una fábrica emite un sonido con frecuencia de 720 Hz. En un día en que la velocidad del viento es de 15.0 m/s desde el norte, ¿qué frecuencia oirán observadores localizados, en reposo, *a*) al norte, *b*) al sur, *c*) al este, y *d*) al oeste, del silbato? ¿Qué frecuencia escucha un ciclista que se dirige *e*) al norte o *f*) al oeste del silbato a 12.0 m/s? Suponga que $T = 20°C$.

71. (III) Para monitorear los latidos de un feto, se usa el efecto Doppler con ondas ultrasónicas de frecuencia de 2.25×10^6 Hz. Se observa una frecuencia de pulsos (máxima) de 260 Hz. Suponiendo que la rapidez del sonido en el tejido es de 1.54×10^3 m/s, calcule la velocidad máxima de la superficie del corazón que late.

* 16–8 Ondas de choque: Estampido sónico

***72.** (II) Un avión vuela a Mach 2.3 donde la rapidez del sonido es de 310 m/s. *a*) ¿Cuál es el ángulo que la onda de choque forma con la dirección del movimiento del avión? *b*) Si el avión está volando a una altura de 6500 m, ¿cuánto tiempo después de que está directamente sobre una persona en el suelo sentirá la persona la onda de choque?

***73.** (II) Una sonda espacial entra a la delgada atmósfera de un planeta donde la rapidez del sonido es tan sólo de 45 m/s. *a*) ¿Cuál es el número de Mach de la sonda, si su rapidez inicial es de 15,000 km/h? *b*) ¿Cuál es el ángulo de la onda de choque en relación con la dirección del movimiento?

***74.** (II) Un meteorito que viaja a 8800 m/s choca contra el océano. Determine el ángulo de la onda de choque que el meteorito produce *a*) en el aire justo antes de entrar al océano, y *b*) en el agua justo después de entrar en ella. Suponga que $T = 20°C$.

***75.** (II) Demuestre que el ángulo θ que forma un estampido sónico con la trayectoria de un objeto supersónico está dado por la ecuación 16-12.

***76.** (II) Usted mira directamente hacia arriba y ve un avión a exactamente 1.25 km arriba del suelo, volando más rápido que la rapidez del sonido. Cuando usted escucha el estampido sónico, el avión ha viajado ya una distancia horizontal de 2.0 km. Véase la figura 16-38. Determine *a*) el ángulo del cono de choque θ, y *b*) la rapidez del avión (el número Mach). Suponga que la rapidez del sonido es de 330 m/s.

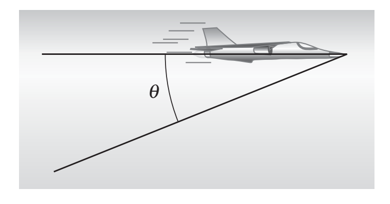


FIGURA 16–38 Problema 76.

***77.** (II) Un avión supersónico que viaja a Mach 2.2 a una altitud de 9500 m pasa directamente sobre un observador sobre el suelo. ¿Dónde estará el avión con respecto al observador cuando éste oye el estampido sónico? (Véase la figura 16-39).

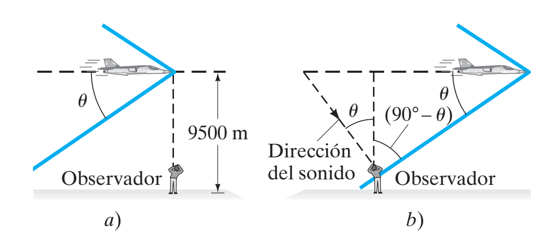


FIGURA 16–39 Problema 77.

Problemas generales

78. Un localizador de peces usa un dispositivo de sonar que envía hacia abajo pulsos de sonido de 20,000 Hz, desde el fondo de su bote y luego recibe ecos. Si la profundidad máxima para la cual está diseñado es de 75 metros, ¿cuál es el tiempo mínimo entre pulsos (en agua dulce)?

79. En un museo de ciencias se tiene una exhibición llamada sinfonía de tubos de alcantarilla (drenaje), que consiste en muchos tubos de plástico de varias longitudes, abiertos en ambos extremos. *a*) Si los tubos tienen longitudes de 3.0 m, 2.5 m, 2.0 m, 1.5 m y 1.0 m, ¿qué frecuencias serán escuchadas por el oído de un visitante colocado cerca de los extremos de los tubos? *b*) ¿Por qué funciona mejor esta exhibición en un día ruidoso que en un día tranquilo?

80. Un mosquito que está a 5.0 m de una persona hace un sonido cercano al umbral de la audición humana (0 dB). ¿Cuál será el nivel de sonido de 100 de tales mosquitos?

81. ¿Cuál es el nivel del sonido resultante cuando un sonido de 82 dB y un sonido de 89 dB se escuchan simultáneamente?

82. El nivel de sonido a 9.00 m de un altavoz, colocado al aire libre, es de 115 dB. ¿Cuál es la potencia de salida acústica (W) del altavoz, suponiendo que irradia igualmente en todas direcciones?

83. Un amplificador estéreo tiene 175 W de salida a 1000 Hz. La potencia de salida disminuye en 12 dB a 15 kHz. ¿Cuál es la potencia de salida en watts a 15 kHz?

84. Quienes trabajan cerca de aviones a chorro suelen utilizar dispositivos protectores en sus oídos. Suponga que el nivel de sonido del motor de un avión a chorro, a una distancia de 30 m, es de 130 dB, y que el oído humano promedio tiene un radio efectivo de 2.0 cm. ¿Cuál sería la potencia interceptada por un oído sin protección a una distancia de 30 m del motor de un avión a chorro?

85. En sistemas de audio y comunicaciones, la *ganancia* β en decibeles se define como

$$\beta = 10 \log\left(\frac{P_{sal}}{P_{ent}}\right),$$

donde P_{ent} es la potencia de entrada y P_{sal} es la potencia de salida. Un amplificador estéreo particular produce 125 W de potencia para una entrada de 1.0 mW. ¿Cuál es su ganancia en dB?

86. Para los grandes conciertos, en ocasiones se utilizan altavoces para amplificar la voz del cantante. El cerebro humano interpreta sonidos que llegan dentro de 50 ms después del sonido original como si provinieran de la misma fuente. Así, si el sonido de un altavoz llega primero a un oyente, sonaría como si el altavoz fuera la fuente del sonido. A la inversa, si el cantante se escucha primero y el altavoz se agrega al sonido dentro de 50 ms, el sonido parecerá provenir del cantante, quien ahora parecería que canta más fuerte. Se prefiere la segunda situación. Como la señal hacia el altavoz viaja a la rapidez de la luz (3×10^8 m/s), que es mucho mayor que la rapidez del sonido, se agrega un retraso a la señal enviada al altavoz. ¿Cuánto retraso debe agregarse si el altavoz está a 3.0 m detrás de cantante y queremos que su sonido llegue 30 ms después del sonido del cantante?

87. Por lo común, los fabricantes elaboran una cuerda de guitarra específica en diversos diámetros, de manera que los músicos puedan afinar sus instrumentos con la tensión de cuerda que prefieran. Una cuerda mi alta de nylon, por ejemplo, está disponible en modelos de baja y alta tensiones con diámetros respectivos de 0.699 mm y 0.724 mm. Suponiendo que la densidad ρ del nailon es la misma para cada modelo, compare (como una razón) la tensión en una cuerda afinada de alta tensión y en una cuerda afinada de baja tensión.

88. En una guitarra la cuerda mi alta está fija en ambos extremos con longitud $\ell = 65.0$ cm y frecuencia fundamental $f_1 = 329.6$ Hz. En una guitarra acústica, está cuerda suele tener un diámetro de 0.33 mm y por lo general está echa de cobre (7760 kg/m^3); en tanto que en una guitarra eléctrica tiene un diámetro de 0.25 mm y está hecha de acero recubierto con níquel (7990 kg/m^3). Compare (como una razón) la tensión de la cuerda mi alta en una guitarra acústica con una guitarra eléctrica.

89. La cuerda de la nota la de un violín tiene 32 cm de largo entre puntos fijos, una frecuencia fundamental de 440 Hz y una masa por unidad de longitud de 7.2×10^{-4} kg/m. *a*) ¿Cuáles son la rapidez de la onda y la tensión en la cuerda? *b*) ¿Cuál es la longitud del tubo de un instrumento simple de viento (digamos, un tubo de órgano) cerrado en un extremo, cuya frecuencia fundamental sea también de 440 Hz, si la rapidez del sonido es 343 m/s en el aire? *c*) ¿Cuál es la frecuencia del primer sobretono de cada instrumento?

90. Un diapasón se pone en vibración sobre un tubo vertical abierto lleno con agua (figura 16-40). Se permite que el nivel del agua caiga lentamente, de manera que el aire en el tubo arriba del nivel del agua se oye entonces resonar con el diapasón cuando la distancia de la abertura del tubo al nivel del agua es de 0.125 m y de nuevo a 0.395 m. ¿Cuál es la frecuencia del diapasón?

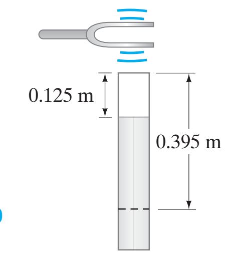


FIGURA 16–40 Problema 90.

91. Dos tubos idénticos, cada uno cerrado en un extremo, tienen una frecuencia fundamental de 349 Hz en 25.0°C. La temperatura del aire se incrementa a 30.0°C en un tubo. Si los dos tubos suenan juntos ahora, ¿cuál es la frecuencia de los pulsos resultantes?

92. Cada cuerda de un violín está afinada a una frecuencia $1\frac{1}{2}$ veces la de su vecina. Si las cuatro cuerdas de igual longitud están bajo la misma tensión, ¿cuál debe ser la masa por unidad de longitud de cada cuerda con respecto a la de la cuerda más baja?

93. El diámetro D de un tubo afecta el nodo en el extremo abierto de un tubo. La corrección del extremo puede aproximarse al agregar $D/3$ a la longitud efectiva del tubo. Para un tubo cerrado con 0.60 m de longitud y diámetro de 3.0 cm, ¿cuáles son los primeros cuatro armónicos, tomado en cuenta la corrección del extremo?

94. Una persona oye un tono puro en el rango de 500 a 1000 Hz proveniente de dos fuentes. El sonido es más intenso en puntos equidistantes de las dos fuentes. Para determinar exactamente cuál es la frecuencia, la persona se mueve alrededor y encuentra que el nivel del sonido es mínimo en un punto 0.36 m más alejado de una fuente que de la otra. ¿Cuál es la frecuencia del sonido?

95. La frecuencia del silbato de un tren que se acerca a usted es de 552 Hz. Después que el tren pasa, su frecuencia es de 486 Hz. ¿Qué tan rápido se movía el tren (suponga velocidad constante)?

96. Dos trenes emiten silbidos de 516 Hz. Un tren está detenido y su conductor escucha una frecuencia de pulso de 3.5 Hz cuando el otro tren se aproxima. ¿Cuál es la rapidez del tren en movimiento?

97. Dos altavoces están en extremos opuestos de un carro de ferrocarril que pasa a 10.0 m/s frente a un observador estacionario, como se muestra en la figura 16-41. Si ellos tienen frecuencias idénticas de sonido de 348 Hz, ¿cuál es la frecuencia del pulso oído por el observador cuando *a*) él escucha desde la posición A, frente al carro; *b*) él está entre los altavoces, en B; y *c*) él escucha los altavoces después que ellos lo han dejado atrás, en C?

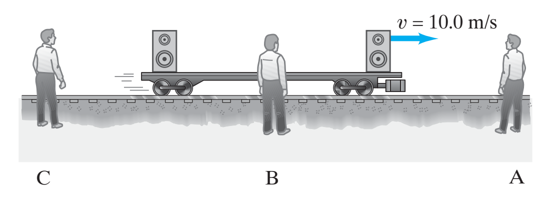


FIGURA 16–41 Problema 97.

98. Dos tubos de órgano abiertos que suenan juntos producen una frecuencia de pulso de 8.0 Hz. El más corto tiene 2.40 m de largo. ¿Cuánto mide el otro?

99. Un murciélago vuela hacia una mariposa nocturna con rapidez de 7.5 m/s mientras la mariposa vuela hacia el murciélago con rapidez de 5.0 m/s. El murciélago emite una onda sonora de 51.35 kHz. ¿Cuál es la frecuencia de la onda detectada por el murciélago después que la onda se refleja en la mariposa?

100. Si la velocidad del flujo de sangre en la aorta es normalmente de 0.32 m/s aproximadamente, ¿qué frecuencia de pulso esperaría usted si se dirigen ondas de ultrasonido de 3.80 MHz a lo largo del flujo y reflejadas por los glóbulos rojos? Suponga que las ondas viajan con una rapidez de 1.54×10^3 m/s?

101. Un murciélago emite una serie de pulsos sonoros de alta frecuencia conforme se acerca a una mariposa nocturna. Los pulsos están separados aproximadamente 70.0 ms y cada uno dura 3.0 ms. ¿Qué tan lejos puede el murciélago detectar a la mariposa, de manera que el eco de un pulso regrese antes de que se emita el siguiente pulso?

102. *a*) Use el desarrollo binomial para demostrar que las ecuaciones 16-9a y 16-10a son esencialmente las mismas para una velocidad relativa pequeña entre la fuente y el observador. *b*) ¿Qué error porcentual resultaría si se usara la ecuación 16-10a, en vez de la ecuación 16-9a, para una velocidad relativa de 18.0 m/s?

103. Dos altavoces están frente a frente en los extremos opuestos de un largo corredor y están conectados a la misma fuente que produce un tono puro de 282 Hz. Una persona camina de un altavoz al otro con una rapidez de 1.4 m/s. ¿Qué frecuencia de "pulso" escucha la persona?

104. Un *medidor de flujo Doppler* se usa para determinar la rapidez del flujo sanguíneo. Se colocan elementos transmisores y receptores sobre la piel, como se muestra en la figura 16-42. Se usan frecuencias de ondas sonora típicas de aproximadamente 5.0 MHz, que tienen una oportunidad razonable de ser reflejadas por los glóbulos rojos. Midiendo la frecuencia de las ondas reflejadas, que están sometidas al efecto Doppler porque los glóbulos rojos se están moviendo, se puede deducir la rapidez del flujo sanguíneo. La rapidez "normal" del flujo sanguíneo es de aproximadamente 0.1 m/s. Suponga que una arteria está parcialmente obstruida, de manera que la rapidez del flujo sanguíneo se incrementa y el medidor de flujo mide un desplazamiento Doppler de 780 Hz. ¿Cuál es la rapidez de la sangre en la región constreñida? El ángulo efectivo entre las ondas sonoras (tanto transmitidas como reflejadas) y la dirección del flujo sanguíneo es de 45°. Suponga que la velocidad del sonido en el tejido humano es de 1540 m/s.

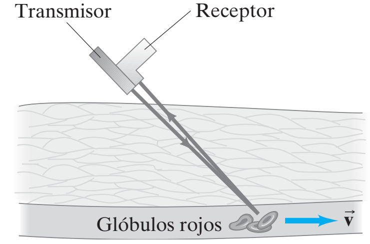


FIGURA 16–42
Problema 104.

105. La estela de una lancha rápida es de 15° en un lago donde la rapidez de las olas es de 2.2 km/h. ¿Cuál es la rapidez del bote?

106. Una fuente de ondas sonoras (longitud de onda λ) está a una distancia ℓ de un detector. El sonido llega directamente al detector y también al reflejarse sobre un obstáculo, como se indica en la figura 16-43. El obstáculo está equidistante de la fuente y del detector. Cuando el obstáculo está a una distancia d a la derecha de la línea de visual entre la fuente y el detector, como se muestra, las dos ondas llegan en fase. ¿Cuánto más a la derecha debe moverse el obstáculo, para que las dos ondas estén fuera de fase $\frac{1}{2}$ longitud de onda y ocurra una interferencia destructiva? (Suponga que $\lambda \ll \ell, d$).

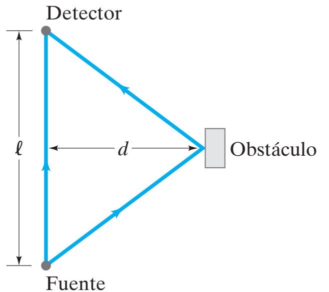


FIGURA 16–43
Problema 106.

107. Una exhibición dramática, llamada "varillas cantoras", implica una varilla larga y delgada de aluminio sostenida por una mano cerca del punto medio de la varilla. La varilla es pulsada con la otra mano. Con un poco de práctica, se puede lograr que la varilla "cante", o emita un sonido claro e intenso. Para una varilla de 75 cm de largo: *a*) ¿cuál es la frecuencia fundamental del sonido? *b*) ¿Cuál es su longitud de onda en la barra, y *c*) ¿cuál es la longitud de onda sonora que viaja en el aire a 20°C?

108. Suponiendo que el desplazamiento máximo de las moléculas de aire en una onda sonora es aproximadamente el mismo que el del cono del altavoz que produce el sonido (figura 16-44), estime qué tanto se mueve el cono de un altavoz para un sonido bastante intenso (105 dB) de *a*) 8.0 kHz, y *b*) 35 kHz.

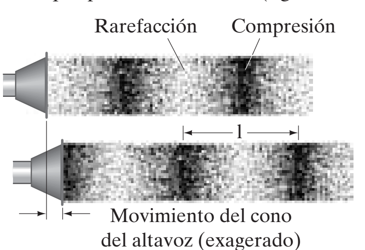


FIGURA 16–44
Problema 108.

*Problemas numéricos/por computadora

*** 109.** (III) La manera en que se pulsa una cuerda determina la mezcla de amplitudes armónicas en la onda resultante. Considere una cuerda de exactamente $\frac{1}{2}$-m de largo que está fija en ambos extremos, localizados en $x = 0.0$ y $x = \frac{1}{2}$ m. Los primeros cinco armónicos de esta cuerda tienen longitudes de onda de $\lambda_1 = 1.0$ m, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ m, $\lambda_3 = \frac{1}{3}$ m, $\lambda_4 = \frac{1}{4}$ m y $\lambda_5 = \frac{1}{5}$ m. De acuerdo con el teorema de Fourier, cualquier forma de esta cuerda puede obtenerse mediante una suma de sus armónicos, donde cada uno de éstos tenga su propia amplitud A única. Limitamos la suma de los primeros cinco armónicos en la expresión

$$D(x) = A_1 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}x\right) + A_2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda_2}x\right) + A_3 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda_3}x\right) + A_4 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda_4}x\right) + A_5 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda_5}x\right),$$

donde D es el desplazamiento de la cuerda en un tiempo $t = 0$. Imagine que se pulsa de esta cuerda en el punto medio (figura 16-45a) o en un punto a dos tercios del extremo izquierdo (figura 19-45b). Usando una calculadora gráfica o un programa de cómputo, demuestre que la expresión anterior puede justa y precisamente representar la forma en *a*) la figura 16-45a, si $A_1 = 1.00$, $A_2 = 0.00$, $A_3 = -0.11$, $A_4 = 0.00$, y $A_5 = 0.040$; y en *b*) la figura 16-45b, si $A_1 = 0.87$, $A_2 = -0.22$, $A_3 = 0.00$, $A_4 = 0.054$, y $A_5 = -0.035$.

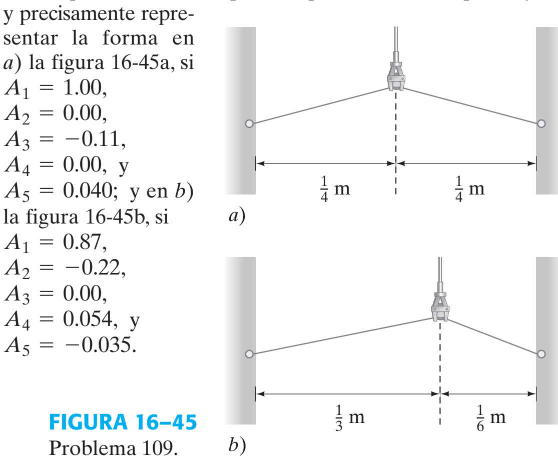


FIGURA 16–45
Problema 109.

Respuestas a los ejercicios

A: km por cada 3 s antes de que se escuche el trueno.
B: 4 veces más intenso.
C: *b*).
D: La de menor masa.
E: 257 Hz.
F: *b*).
G: *a*) 1717 Hz, (*b*) 1483 Hz.
H: *a*).

Calentar el aire dentro de un globo aerostático eleva la temperatura, lo que provoca que el aire se expanda y se vea forzado a salir por la abertura en la parte inferior. La reducida cantidad de aire en el interior significa que su densidad es menor que la del aire en el exterior, de manera que hay una fuerza de flotabilidad neta hacia arriba sobre el globo. En este capítulo estudiaremos la temperatura y sus efectos sobre la materia: la expansión térmica y las leyes de los gases.







Temperatura, expansión térmica y ley del gas ideal

CONTENIDO

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!

Un globo aerostático, abierto en un extremo (véase las fotografías anteriores), se eleva cuando el aire en el interior se calienta con una flama. Indique en qué grado se presentan las siguientes propiedades en el aire dentro del globo en relación con el aire afuera del globo: mayor, menor o igual.

i) Temperatura,
ii) presión,
iii) densidad.

En los siguientes cuatro capítulos, del 17 al 20, estudiaremos la temperatura, el calor y la termodinámica, así como la teoría cinética de los gases.

Con frecuencia se considerará un **sistema** particular, con lo que se entiende un objeto o conjunto de objetos en particular; todo lo demás en el universo se llama "entorno". Podemos describir el **estado** (o condición) de un sistema particular —como el gas en un contenedor— desde un punto de vista microscópico o desde uno macroscópico. Una descripción **microscópica** incluiría detalles del movimiento de todos los átomos o las moléculas que conforman el sistema, lo cual podría ser muy complicado. Una descripción **macroscópica** se da en términos de cantidades como volumen, masa, presión y temperatura, que son detectables directamente por nuestros sentidos y por medio de instrumentos.

La descripción de los procesos en términos de cantidades macroscópicas es el campo de la **termodinámica**. Las cantidades que se pueden usar para describir el estado de un sistema se llaman **variables de estado**. Para describir el estado de un gas puro en un contenedor, por ejemplo, sólo se requieren tres variables de estado, que por lo general son el volumen, la presión y la temperatura. Para describir sistemas más complejos se requieren más de tres variables de estado.

El énfasis en este capítulo está en el concepto de temperatura. Sin embargo, comenzaremos con una breve discusión referente a la teoría de que la materia está constituida por átomos, los cuales están en continuo movimiento aleatorio. Esta teoría se llama *teoría cinética* (como recordará, "cinético" proviene del vocablo griego que significa "movimiento") y la discutiremos con más detalle en el capítulo 18.

17–1 Teoría atómica de la materia

La idea de que la materia está formada de átomos data de los antiguos griegos. De acuerdo con el filósofo griego Demócrito, si una sustancia pura (por ejemplo, un trozo de hierro) se cortara en pedazos cada vez más pequeños, finalmente se obtendría la pieza más pequeña de esa sustancia que ya no se podría dividir más. Ese trozo más pequeño de todos se llamaba **átomo**, que en griego significa "indivisible".[†]

En la actualidad, la teoría atómica es universalmente aceptada. Sin embargo, la evidencia experimental en su favor se generó principalmente en los siglos XVIII, XIX y XX, y gran parte de esa evidencia se obtuvo a partir del análisis de reacciones químicas.

Con frecuencia hablaremos de las masas relativas de átomos y moléculas individuales, a las que nos referiremos como **masa atómica** o **masa molecular**, respectivamente.[‡] Estas masas se basan en la asignación arbitraria del valor exacto de 12.0000 **unidades de masa atómica unificada** (u) al abundante átomo de carbono, ^{12}C. En términos de kilogramos,

$$1\ \text{u} = 1.6605 \times 10^{-27}\ \text{kg}.$$

La masa atómica del hidrógeno es entonces 1.0078 u; los valores para otros átomos se listan en la tabla periódica en los forros de este libro y también en el Apéndice F. La masa molecular de un compuesto es la suma de las masas atómicas de los átomos que conforman las moléculas de ese compuesto.[§]

Una importante pieza de evidencia para la teoría atómica es el **movimiento browniano**, llamado así en honor del biólogo Robert Brown, a quien se acredita su descubrimiento en 1827. Mientras observaba bajo su microscopio pequeños granos de polen suspendidos en agua, Brown notó que los pequeños granos se movían en trayectorias sinuosas (figura 17-1), aun cuando el agua parecía estar en perfecta calma. La teoría atómica explica fácilmente el movimiento browniano si se hace la suposición posterior razonable de que los átomos de cualquier sustancia están en movimiento continuo. Así, los pequeños granos de polen de Brown sufrían empujones por la vigorosa andanada de moléculas de agua que se movía rápidamente.

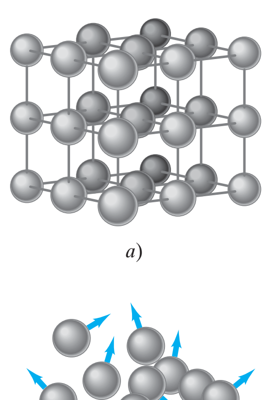
FIGURA 17–1 Trayectoria de una pequeña partícula (un grano de polen, por ejemplo) suspendida en agua. Las líneas rectas conectan las posiciones observadas de la partícula en iguales intervalos de tiempo.

En 1905 Albert Einstein examinó el movimiento browniano desde un punto de vista teórico y fue capaz de calcular, a partir de datos experimentales, el tamaño y la masa aproximados de átomos y moléculas. Sus cálculos demostraron que el diámetro de un átomo típico es de aproximadamente 10^{-10} m.

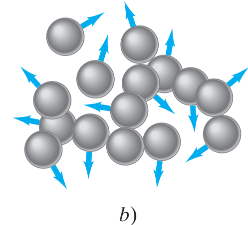
[†]En la actualidad, el átomo no se considera indivisible, sino más bien como constituido por un núcleo (que contiene protones y neutrones) y electrones.

[‡]A veces se usan los términos *peso atómico* y *peso molecular* para estas cantidades; sin embargo, hablando con propiedad, estamos comparando masas.

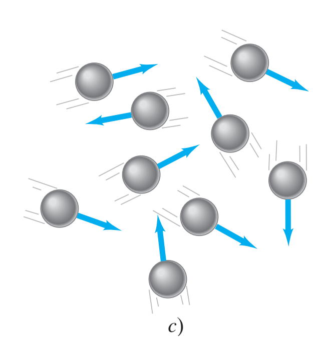
[§]Un *elemento* es una sustancia, como oro, hierro o cobre, que no se puede descomponer en sustancias más simples por medios químicos. Los *compuestos* son sustancias constituidas de elementos y se pueden descomponer en tales elementos; son ejemplos el dióxido de carbono y el agua. La pieza más pequeña de un elemento es un átomo; la pieza más pequeña de un compuesto es una molécula. Las moléculas están formadas de átomos; una molécula de agua, por ejemplo, está compuesta de dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno; su fórmula química es H_2O.



a)



b)



c)

FIGURA 17–2
Ordenamientos atómicos en *a*) un sólido cristalino, *b*) un líquido y *c*) un gas.

Al comienzo del capítulo 13 se distinguieron las tres fases (o estados) comunes de la materia (sólido, líquido y gaseoso) con base en propiedades **macroscópicas**, o de "gran escala". Ahora veremos cómo difieren estas tres fases de la materia desde el punto de vista atómico o **microscópico**. Claramente, los átomos y las moléculas deben ejercer fuerzas de atracción unos sobre otros; si no, ¿de qué otro modo un ladrillo o un bloque de aluminio se podría mantener unido en una pieza? Las fuerzas de atracción entre moléculas son de naturaleza eléctrica (veremos más acerca de esto en capítulos posteriores). Cuando las moléculas se acercan demasiado, la fuerza entre ellas se debe volver repulsiva (hay repulsión eléctrica entre sus electrones exteriores); de otra forma, ¿cómo podría ocupar espacio la materia? De esta manera, las moléculas mantienen una distancia mínima entre sí. En un material sólido, las fuerzas de atracción son lo suficientemente fuertes para que los átomos o las moléculas se muevan (oscilen) sólo ligeramente en torno a posiciones relativamente fijas, con frecuencia en un arreglo conocido como retícula cristalina, como se muestra en la figura 17-2a. En un líquido, los átomos o las moléculas se mueven más rápidamente, o las fuerzas entre ellos son más débiles, de manera que tienen suficiente libertad como para pasar unos sobre otros, como en la figura 17-2b. En un gas, las fuerzas son tan débiles, o las rapideces tan altas, que las moléculas ni siquiera permanecen cercanas. Se mueven rápidamente en todas direcciones (figura 17-2c), de manera que llenan cualquier contenedor y en ocasiones chocan unas con otras. En promedio, las rapideces son tan altas en un gas que, cuando dos moléculas chocan, la fuerza de atracción no es lo suficientemente fuerte como para mantenerlas juntas, por lo que se mueven en nuevas direcciones.

EJEMPLO 17–1 ESTIMACIÓN **Distancia entre átomos.** La densidad del cobre es $8.9 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, y cada átomo de cobre tiene una masa de 63 u. Estime la distancia promedio entre los centros de átomos de cobre vecinos.

PLANTEAMIENTO Consideremos un cubo de cobre de 1 m de lado. A partir de la densidad indicada ρ, es posible calcular la masa m de un cubo de volumen $V = 1\ \mathrm{m^3}$ $(m = \rho V)$. Dividimos esto entre la masa de un átomo (63 u) para obtener el número de átomos en 1 m³. Suponemos que los átomos están en un arreglo uniforme y hacemos que N sea el número de átomos en una longitud de 1 m; entonces $(N)(N)(N) = N^3$ es igual al número de átomos en 1 m³.

SOLUCIÓN La masa de 1 átomo de cobre es $63\ \mathrm{u} = 63 \times 1.66 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 1.05 \times 10^{-25}\ \mathrm{kg}$. Esto significa que, en un cubo de cobre de 1 m de lado (volumen = 1 m³), hay

$$\frac{8.9 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}}{1.05 \times 10^{-25}\ \mathrm{kg/átomos}} = 8.5 \times 10^{28}\ \mathrm{átomos/m^3}.$$

El volumen de un cubo de lado ℓ es $V = \ell^3$, de manera que en un borde del cubo de 1 m de largo hay $\left(8.5 \times 10^{28}\right)^{\frac{1}{3}}$ átomos $= 4.4 \times 10^9$ átomos. Por consiguiente, la distancia entre átomos vecinos es

$$\frac{1\ \mathrm{m}}{4.4 \times 10^9\ \mathrm{átomos}} = 2.3 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}.$$

NOTA Cuidado con las unidades. Aun cuando "átomos" no es una unidad, es útil incluir el término para asegurarse de que el cálculo se realizó correctamente.

17–2 Temperatura y termómetros

FIGURA 17–3 Juntas de expansión en un puente.



En la vida diaria la **temperatura** es una medida que indica qué tan caliente o frío se encuentra algo. Se dice que un horno caliente tiene una temperatura alta, mientras que el hielo de un lago congelado tiene una temperatura baja.

Muchas propiedades de la materia cambian con la temperatura. Por ejemplo, la mayoría de los materiales se expanden cuando se calientan.† Una viga de hierro es más larga cuando está caliente que cuando está fría. Los caminos de concreto y las aceras se expanden y se contraen ligeramente en función de la temperatura, por lo que se colocan espaciadores compresibles o juntas de expansión (figura 17-3) a intervalos regulares. La resistencia eléctrica de la materia cambia con la temperatura (capítulo 25). Lo mismo ocurre con el color radiado por los objetos, al menos a temperaturas altas: tal vez haya notado que el elemento calefactor de una estufa eléctrica brilla con un color rojo cuando está caliente. A temperaturas más altas, los sólidos como el hierro tienen brillo ana-

†La mayoría de los materiales se expanden cuando su temperatura se eleva, pero no todos. El agua, por ejemplo, en el rango de 0 a 4°C se contrae con un aumento de temperatura (véase la sección 17-4).

ranjado o incluso blanco. La luz blanca de una bombilla incandescente ordinaria proviene de un alambre de tungsteno extremadamente caliente. Las temperaturas superficiales del Sol y otras estrellas se pueden medir mediante el color predominante (o, de manera más precisa, mediante las longitudes de onda) de la luz que emiten.

Los instrumentos diseñados para medir la temperatura se llaman **termómetros**. Existen muchos tipos de termómetros, pero su operación siempre depende de alguna propiedad de la materia que cambia con la temperatura. Muchos termómetros comunes se basan en la expansión de un material con un aumento en la temperatura. La primera concepción de un termómetro, atribuida a Galileo, se basó en la expansión de un gas. Los termómetros comunes actuales consisten en un tubo de vidrio hueco con mercurio o con alcohol teñido de rojo, como los primeros termómetros utilizados (figura 17-4).

Dentro de un termómetro común, consistente en un tubo de vidrio con líquido en su interior, el líquido se expande más que el vidrio cuando aumenta la temperatura, de manera que el nivel del líquido se eleva en el tubo (figura 17-5a). Aunque los metales también se expanden con la temperatura, el cambio en la longitud de una varilla metálica, por ejemplo, generalmente es insignificante como para medir con exactitud los cambios ordinarios en la temperatura. Sin embargo, es posible fabricar un termómetro útil con dos metales distintos cuyas tasas de expansión sean diferentes (figura 17-5b). Cuando la temperatura aumenta, las diferentes cantidades de expansión hacen que la tira bimetálica se doble. Con frecuencia la tira bimetálica tiene la forma de una espira, uno de cuyos extremos está fijo, mientras el otro está unido a un puntero (figura 17-6). Este sistema se usa en los termómetros de aire ordinarios, los termómetros de horno, los interruptores automáticos en cafeteras eléctricas y los termostatos de habitaciones para determinar cuándo se debe encender o apagar un calentador o un acondicionador de aire. Los termómetros muy precisos se basan en propiedades eléctricas (capítulo 25), como los termómetros de resistencia, los termopares y los termistores, que por lo general, cuentan con lectores digitales.



FIGURA 17–4 Los termómetros fabricados por la Accademia del Cimento (1657-1667) en Florencia, Italia, están entre los primeros conocidos. Estos sensibles y exquisitos instrumentos contenían alcohol, a veces coloreado, como muchos termómetros actuales.

Escalas de temperatura

Con la finalidad de medir cuantitativamente la temperatura, se debe definir alguna especie de escala numérica. La escala más común en la actualidad es la escala **Celsius**, a veces llamada escala **centígrada**. En Estados Unidos también es común la escala **Fahrenheit**. La escala más importante en el trabajo científico es la escala absoluta, o Kelvin, que se estudiará más adelante en este capítulo.

Una forma de definir una escala de temperatura es asignar valores arbitrarios a dos temperaturas fácilmente reproducibles. Para las escalas Celsius y Fahrenheit estos dos puntos fijos se eligen como el punto de congelación y el punto de ebullición[†] del agua, ambos tomados a presión atmosférica estándar. En la escala Celsius, el punto de congelación del agua se elige en 0°C (“cero grados Celsius”) y el punto de ebullición en 100°C. En la escala Fahrenheit, el punto de congelación se define como 32°F y el punto de ebullición como 212°F. Un termómetro práctico se calibra al colocarlo en ambientes cuidadosamente preparados en cada una de las dos temperaturas y marcar la posición del líquido o del puntero. Para una escala Celsius, la distancia entre las dos marcas se divide en cien intervalos iguales, cada uno de los cuales representa un grado entre 0 y 100°C (de ahí el nombre de “escala centígrada”, que significa “cien escalones”). Para una escala Fahrenheit, los dos puntos se designan como 32 y 212°F y la distancia entre ellos se divide en 180 intervalos iguales. Para temperaturas por debajo del punto de congelación del agua y por arriba del punto de ebullición del agua, las escalas se pueden extender usando los mismos intervalos igualmente espaciados. Sin embargo, los termómetros sólo se pueden usar en un rango limitado de temperaturas, pues tienen ciertas limitaciones; por ejemplo, el mercurio líquido en un termómetro de vidrio se solidifica en algún punto, por debajo del cual el termómetro será inútil. También resulta inútil por arriba de temperaturas donde el fluido, como el alcohol, se vaporiza. Para temperaturas muy bajas o muy altas, se requieren termómetros especializados, algunos de los cuales se mencionan más adelante.

FIGURA 17–5 *a*) Termómetro de mercurio o alcohol en vidrio; *b*) tira bimetálica.

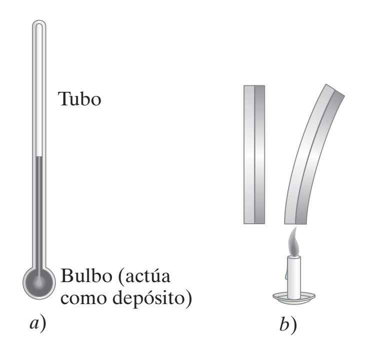
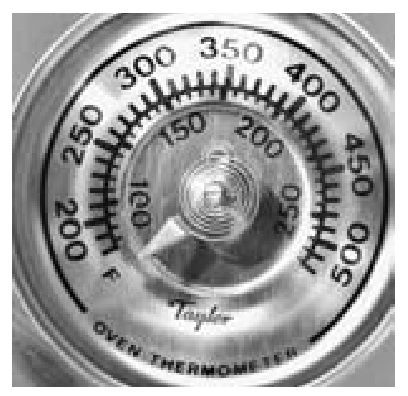


FIGURA 17–6 Fotografía de un termómetro que usa una tira bimetálica enrollada.



[†]El punto de congelación de una sustancia se define como aquella temperatura en la que las fases sólida y líquida coexisten en equilibrio; esto es, cuando no hay ningún cambio neto de líquido a sólido o viceversa. De manera experimental, esto ocurre sólo a una temperatura definida, a una presión dada. De igual modo, el punto de ebullición se define como aquella temperatura a la que el líquido y el gas coexisten en equilibrio. Como tales puntos varían con la presión, se debe especificar la presión (por lo general es de 1 atm).

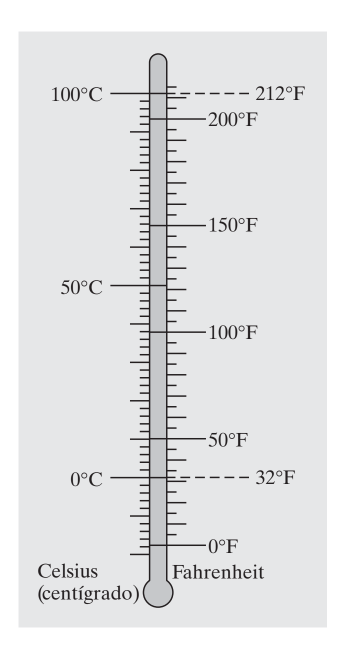


FIGURA 17–7 Comparación de escalas Celsius y Fahrenheit.



CUIDADO

Para realizar conversiones de temperatura, recuerde que 0°C = 32°F *y que un cambio de* 5C° = 9F°

Cada temperatura en la escala Celsius corresponde a una temperatura particular en la escala Fahrenheit (figura 17-7). Es fácil efectuar conversiones entre estas escalas si se recuerda que 0°C corresponde a 32°F y que un rango de 100° en la escala Celsius corresponde a un rango de 180° en la escala Fahrenheit. Por lo tanto, un grado Fahrenheit (1 F°) corresponde a $100/180 = \frac{5}{9}$ de un grado Celsius (1 C°). Esto es, $1\text{ F}° = \frac{5}{9}\text{C}°$. (Note que, cuando nos referimos a una temperatura específica, decimos "grados Celsius", como en 20°C; pero cuando nos referimos a un *cambio* en la temperatura o a un intervalo de temperatura, lo escribimos como 20 C°). La conversión entre las dos escalas de temperaturas se realiza mediante la ecuación

$$T(°\text{C}) = \tfrac{5}{9}[T(°\text{F}) - 32]$$

o

$$T(°\text{F}) = \tfrac{9}{5}T(°\text{C}) + 32.$$

En vez de memorizar estas relaciones (sería fácil confundirlas), por lo general es más sencillo recordar simplemente que 0°C = 32°F y que un cambio de 5 C° = un cambio de 9 F°.

EJEMPLO 17–2 **Toma de temperatura.** La temperatura corporal normal es de 98.6°F. ¿A cuánto equivale esta temperatura en la escala Celsius?

PLANTEAMIENTO Recordamos que 0°C = 32°F y 5 C° = 9 F°.

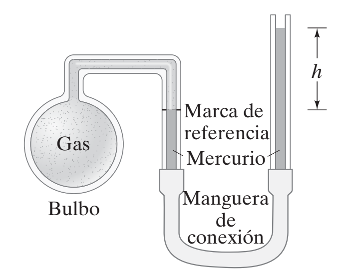
SOLUCIÓN Primero relacionamos la temperatura dada con el punto de congelación del agua (0°C). Esto es, 98.6°F es 98.6 – 32.0 = 66.6 F° sobre el punto de congelación del agua. Como cada F° es igual a $\frac{5}{9}$C°, esto corresponde a $66.6 \times \frac{5}{9} = 37.0$ grados Celsius sobre el punto de congelación. El punto de congelación es 0°C, de manera que la temperatura es 37.0°C.

EJERCICIO A Determine la temperatura a la que ambas escalas dan la misma lectura numérica ($T_C = T_F$).

Diferentes materiales no se expanden de la misma forma dentro de un amplio rango de temperatura. En consecuencia, si calibramos diferentes tipos de termómetros exactamente como se describió antes, es probable que no concuerden con precisión. Por la forma como se les calibra, concordarán en 0°C y 100°C. Sin embargo, debido a diferentes propiedades de expansión, quizá no concuerden de manera precisa en temperaturas intermedias (recuerde que la escala del termómetro se dividió arbitrariamente en 100 partes iguales entre 0 y 100°C). Por ende, un termómetro de mercurio en vidrio calibrado con cuidado puede registrar 52.0°C, mientras que un termómetro de otro tipo, también calibrado cuidadosamente, tal vez indique 52.6°C. Las discrepancias por debajo de 0°C y por arriba de 100°C también pueden ser significativas.

Ante tales discrepancias, es necesario elegir algún tipo de termómetro estándar, de manera que todas las temperaturas se puedan definir con precisión. El estándar elegido para este propósito es el **termómetro de gas a volumen constante**. Como se observa en el diagrama simplificado de la figura 17-8, este termómetro consiste en un bulbo lleno con un gas diluido conectado mediante un tubo delgado a un manómetro de mercurio (sección 13-6). El volumen del gas se mantiene constante al elevar o bajar el tubo del lado derecho del manómetro de manera que el mercurio en el tubo izquierdo coincida con la marca de referencia. Un aumento en la temperatura provoca un aumento proporcional en la presión en el bulbo. Por eso, el tubo se debe levantar más alto para mantener constante el volumen del gas. La altura del mercurio en la columna de la derecha es entonces una medida de la temperatura del gas. Este termómetro da los mismos resultados para todos los gases en el límite en que la presión del gas en el bulbo se reduce hacia cero. La escala resultante sirve como base para la escala de temperatura estándar (sección 17-10).

FIGURA 17–8 Termómetro de gas a volumen constante.



17–3 Equilibrio térmico y la ley cero de la termodinámica

Todo nosotros estamos familiarizados con el hecho de que, si dos objetos a diferentes temperaturas se colocan en contacto térmico (lo que significa que la energía térmica se puede transferir de uno al otro), los dos objetos finalmente alcanzarán la misma temperatura. Se dice entonces que están en **equilibrio térmico**. Por ejemplo, usted coloca un termómetro clínico en su boca hasta que llega a equilibrio térmico con ese entorno, y luego usted lo lee. Dos objetos están en equilibrio térmico si, cuando se colocan en contacto térmico, no fluye energía neta de uno al otro y sus temperaturas no cambian. Los experimentos indican que

> **si dos sistemas están en equilibrio térmico con un tercer sistema, entonces están en equilibrio térmico entre sí.**

Este postulado se llama **ley cero de la termodinámica**. Tiene este nombre inusual porque no fue sino hasta después de que se descubrieron la primera y segunda leyes de la termodinámica (capítulos 19 y 20) que los científicos se dieron cuenta de que era necesario establecer primero este postulado aparentemente obvio.

La temperatura es una propiedad de un sistema que determina si el sistema estará en equilibrio térmico con otros sistemas. Cuando dos sistemas están en equilibrio térmico, sus temperaturas son, por definición, iguales y entre ellos no se intercambiará energía térmica neta. Esto es consistente con la noción cotidiana de temperatura, pues, cuando un objeto caliente y uno frío se ponen en contacto, finalmente alcanzarán la misma temperatura. La importancia de la ley cero reside en que permite una definición útil de temperatura.

17–4 Expansión térmica

La mayoría de las sustancias se expanden cuando se calientan y se contraen cuando se enfrían. No obstante, la cantidad de expansión o contracción varía, dependiendo del material.

Expansión lineal

Los experimentos indican que el cambio en longitud $\Delta\ell$ de casi todos los sólidos es, en una buena aproximación, directamente proporcional al cambio en temperatura ΔT, en tanto ΔT no sea demasiado grande. El cambio en la longitud también es proporcional a la longitud original del objeto, ℓ_0. Esto es, para el mismo aumento de temperatura, una varilla de hierro de 4 m de largo aumentará en longitud el doble que una varilla de hierro de 2 m de largo. Esta proporcionalidad se puede representar como una ecuación:

$$\Delta\ell = \alpha\ell_0\,\Delta T, \qquad \textbf{(17–1a)}$$

donde α, la constante de proporcionalidad, se llama *coeficiente de expansión lineal* para el material particular y tiene unidades de $(\mathrm{C}^\circ)^{-1}$. Al considerar que $\ell = \ell_0 + \Delta\ell$ (figura 17-9), reescribimos esta ecuación como $\ell = \ell_0 + \Delta\ell = \ell_0 + \alpha\ell_0\,\Delta T$, o

$$\ell = \ell_0(1 + \alpha\,\Delta T), \qquad \textbf{(17–1b)}$$

donde ℓ_0 es la longitud inicial, a temperatura T_0, y ℓ es la longitud después de calentar o enfriar a una temperatura T. Si el cambio de temperatura $\Delta T = T - T_0$ es negativo, entonces $\Delta\ell = \ell - \ell_0$ también es negativo; la longitud se acorta conforme la temperatura disminuye.

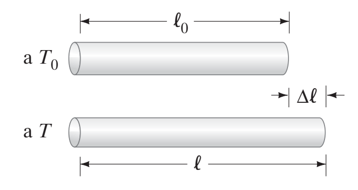


FIGURA 17–9 Una delgada varilla de longitud ℓ_0 a temperatura T_0 se calienta a una nueva temperatura uniforme T y adquiere longitud ℓ, donde $\ell = \ell_0 + \Delta\ell$.

TABLA 17–1 Coeficientes de expansión, cerca de 20°C

Material	Coeficiente de expansión lineal, α $(C°)^{-1}$	Coeficiente de expansión volumétrica, β $(C°)^{-1}$
Sólidos		
Aluminio	25×10^{-6}	75×10^{-6}
Latón	19×10^{-6}	56×10^{-6}
Cobre	17×10^{-6}	50×10^{-6}
Oro	14×10^{-6}	42×10^{-6}
Hierro o acero	12×10^{-6}	35×10^{-6}
Plomo	29×10^{-6}	87×10^{-6}
Vidrio (Pyrex®)	3×10^{-6}	9×10^{-6}
Vidrio (ordinario)	9×10^{-6}	27×10^{-6}
Cuarzo	0.4×10^{-6}	1×10^{-6}
Concreto y ladrillo	$\approx 12 \times 10^{-6}$	$\approx 36 \times 10^{-6}$
Mármol	$1.4–3.5 \times 10^{-6}$	$4–10 \times 10^{-6}$
Líquidos		
Gasolina		950×10^{-6}
Mercurio		180×10^{-6}
Alcohol etílico		1100×10^{-6}
Glicerina		500×10^{-6}
Agua		210×10^{-6}
Gases		
Aire (y la mayoría de otros gases a presión atmosférica)		3400×10^{-6}

Los valores de α para varios materiales a 20°C se listan en la tabla 17-1. En realidad, α varía ligeramente con la temperatura (por lo que los termómetros fabricados con diferentes materiales no concuerdan con precisión). Sin embargo, si el rango de temperatura no es demasiado grande, la variación por lo general se puede ignorar.



Expansión en estructuras

EJEMPLO 17–3 Expansión de un puente. La cama o armadura de acero de un puente de suspensión mide 200 m de largo a 20°C. Si los límites de temperatura a los que podría estar expuesto son −30°C y +40°C, ¿cuánto se contraerá y se expandirá?

PLANTEAMIENTO Suponemos que la cama del puente se expandirá y se contraerá linealmente con la temperatura, de acuerdo con la ecuación 17-1a.

SOLUCIÓN A partir de la tabla 17-1, encontramos que $\alpha = 12 \times 10^{-6}\,(C°)^{-1}$ para el acero. El aumento en longitud cuando esté a 40°C será

$$\Delta\ell = \alpha\ell_0\,\Delta T = \left(12 \times 10^{-6}/\mathrm{C°}\right)(200\,\mathrm{m})(40°\mathrm{C} - 20°\mathrm{C}) = 4.8 \times 10^{-2}\,\mathrm{m},$$

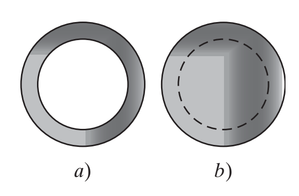
o 4.8 cm. Cuando la temperatura disminuya a −30°C, $\Delta T = -50$ C°. Entonces

$$\Delta\ell = \left(12 \times 10^{-6}/\mathrm{C°}\right)(200\,\mathrm{m})(-50\,\mathrm{C°}) = -12.0 \times 10^{-2}\,\mathrm{m},$$

o una disminución en longitud de 12 cm. El rango total que deben acomodar las juntas de expansión es 12 cm + 4.8 cm ≈ 17 cm (figura 17-3).

EJEMPLO CONCEPTUAL 17–4 ¿Los orificios se expanden o se contraen? Si usted calienta un anillo delgado circular (figura 17-10a) en el horno, ¿el orificio del anillo se hace más grande o más pequeño?

FIGURA 17–10 Ejemplo 17–4.



RESPUESTA Tal vez usted suponga que el metal se expande hacia el orificio, lo que hace que éste reduzca su tamaño. Sin embargo, no es así. Imagine que el anillo es sólido, como una moneda (figura 17-10b). Con una pluma, dibuje un círculo en él, como se muestra. Cuando el metal se expande, el material dentro del círculo se expandirá junto con el resto del metal; de manera que el círculo se expande. El hecho de cortar el metal donde está el círculo deja claro que el agujero en la figura 17-10a aumenta de diámetro.

EJEMPLO 17–5 **Anillo en una varilla.** Un anillo de hierro debe ajustar perfectamente en una varilla cilíndrica de hierro. A 20°C, el diámetro de la varilla es 6.445 cm y el diámetro interior del anillo es 6.420 cm. Para deslizarlo sobre la barra, el anillo debe ser ligeramente mayor que el diámetro de la varilla por aproximadamente 0.008 cm. ¿Qué temperatura debe tener el anillo si su orificio tiene que ser lo suficientemente grande como para permitir que se deslice sobre la varilla?

PLANTEAMIENTO El orificio en el anillo debe aumentar de un diámetro de 6.420 cm a 6.445 cm + 0.008 cm = 6.453 cm. El anillo se debe calentar, puesto que el diámetro del orificio aumentará linealmente con la temperatura (ejemplo 17-4).

SOLUCIÓN Despejamos ΔT en la ecuación 17-1a y encontramos

$$\Delta T = \frac{\Delta \ell}{\alpha \ell_0} = \frac{6.453\text{ cm} - 6.420\text{ cm}}{(12 \times 10^{-6}/\text{C}^\circ)(6.420\text{ cm})} = 430\text{ C}^\circ.$$

Así que se debe elevar al menos a $T = (20°\text{C} + 430\text{ C}°) = 450°\text{C}$.

NOTA Al resolver problemas, no olvide el último paso, sumar la temperatura inicial (20°C en este caso).

EJEMPLO CONCEPTUAL 17–6 **Apertura de una tapa apretada.** Cuando la tapa de un frasco de vidrio está apretada, mantener la tapa bajo agua caliente durante poco tiempo con frecuencia hará más sencilla la apertura (figura 17-11). ¿Por qué?

FÍSICA APLICADA
Apertura de una tapa apretada

RESPUESTA El agua caliente golpea la tapa más directamente que al vidrio, así que la tapa se expande más pronto. Pero incluso si no es así, los metales por lo general se expanden más que el vidrio con el mismo cambio de temperatura (α es mayor; véase la tabla 17-1).

NOTA Si usted coloca un huevo duro en agua fría inmediatamente después de cocerlo, es más fácil pelarlo: las diferentes expansiones térmicas del cascarón y el huevo hacen que éstos se separen.

FÍSICA APLICADA
Pelar un huevo duro



FIGURA 17–11 Ejemplo 17–6.

Expansión volumétrica

El cambio en *volumen* de un material que experimenta un cambio de temperatura está dado por una relación similar a la ecuación 17-1a, a saber

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T, \qquad \textbf{(17–2)}$$

donde ΔT es el cambio en temperatura, V_0 es el volumen original, ΔV es el cambio en volumen y β es el *coeficiente de expansión volumétrica*. Las unidades de β son $(\text{C}°)^{-1}$.

En la tabla 17-1 se presentan los valores de β para varios materiales. Note que, para sólidos, β por lo general es igual a aproximadamente 3α. Para ver por qué, considere un sólido rectangular de longitud ℓ_0, ancho W_0 y altura H_0. Cuando su temperatura cambia por ΔT, su volumen cambia de $V_0 = \ell_0 W_0 H_0$ a

$$V = \ell_0(1 + \alpha \Delta T)W_0(1 + \alpha \Delta T)H_0(1 + \alpha \Delta T),$$

utilizando la ecuación 17-1b y suponiendo que α es igual en todas direcciones. Por lo tanto,

$$\Delta V = V - V_0 = V_0(1 + \alpha \Delta T)^3 - V_0 = V_0\left[3\alpha \Delta T + 3(\alpha \Delta T)^2 + (\alpha \Delta T)^3\right].$$

Si la cantidad de expansión es mucho menor que el tamaño original del objeto, entonces $\alpha \Delta T \ll 1$ y podemos ignorar todo menos el primer término para obtener

$$\Delta V \approx (3\alpha)V_0 \Delta T.$$

Ésta es la ecuación 17-2 con $\beta \approx 3\alpha$. Sin embargo, para sólidos que no son isotrópicos (es decir, que no tienen las mismas propiedades en todas direcciones), la relación $\beta \approx 3\alpha$ no es válida. Note también que la expansión lineal carece de significado para líquidos y gases, pues éstos no tienen formas fijas.

EJERCICIO B Una barra larga y delgada de aluminio a 0°C mide 1.0 m de longitud y tiene un volumen de $1.0000 \times 10^{-3}\text{ m}^3$. Cuando se calienta a 100°C, la longitud de la barra es de 1.0025 m. ¿Cuál es el volumen aproximado de la barra a 100°C? *a*) $1.0000 \times 10^{-3}\text{ m}^3$; *b*) $1.0025 \times 10^{-3}\text{ m}^3$; *c*) $1.0050 \times 10^{-3}\text{ m}^3$; *d*) $1.0075 \times 10^{-3}\text{ m}^3$; *e*) $2.5625 \times 10^{-3}\text{ m}^3$.

Las ecuaciones 17-1 y 17-2 son exactas sólo si $\Delta \ell$ (o ΔV) es pequeño comparado con ℓ_0 (o V_0). Esto es de particular interés para líquidos e incluso más para gases, debido a los grandes valores de β. Más aún, β varía sustancialmente con la temperatura para gases. Por lo tanto, es necesaria una forma más conveniente de tratar con gases, lo que se discutirá al comenzar la sección 17-6.

EJEMPLO 17–7 **Tanque de gasolina bajo los rayos del Sol.** El tanque de gasolina de un automóvil, hecho de acero y con capacidad de 70 litros (L), se llena hasta el tope con gasolina a 20°C. El automóvil se estaciona bajo los rayos del Sol y el tanque alcanza una temperatura de 40°C (104°F). ¿Cuánta gasolina se espera que se derrame del tanque?

FÍSICA APLICADA
Desbordamiento de gasolina en un tanque

PLANTEAMIENTO Tanto la gasolina como el tanque se expanden conforme la temperatura aumenta y suponemos que lo hacen linealmente, como lo describe la ecuación 17-2. El volumen de la gasolina derramada es igual al aumento de volumen de la gasolina menos el aumento de volumen del tanque.

SOLUCIÓN La gasolina se expande en

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T = \left(950 \times 10^{-6}/\text{C}^\circ\right)(70\,\text{L})(40^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) = 1.3\,\text{L}.$$

El tanque también se expande. Podemos considerarlo como un cascarón de acero que experimenta expansión volumétrica ($\beta \approx 3\alpha = 36 \times 10^{-6}/\text{C}^\circ$). Si el tanque fuera sólido, la capa superficial (el cascarón) se expandiría exactamente lo mismo. Por ende, el tanque aumenta en volumen

$$\Delta V = \left(36 \times 10^{-6}/\text{C}^\circ\right)(70\,\text{L})(40^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}) = 0.050\,\text{L},$$

de manera que la expansión del tanque tiene poco efecto. Podría derramarse más de un litro de gasolina.

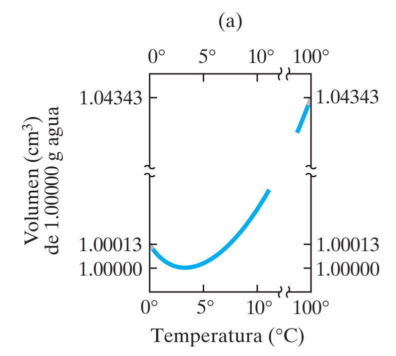
NOTA ¿Quiere ahorrar algo de dinero? Usted paga la gasolina por volumen, así que llene el tanque de su auto cuando haga frío y la gasolina sea más densa: obtendrá más moléculas por el mismo precio. Sin embargo, no llene el tanque por completo.

Comportamiento anómalo del agua por debajo de los 4°C

La mayoría de las sustancias se expanden más o menos uniformemente con un aumento en la temperatura, en tanto no ocurran cambios de fase. Sin embargo, el agua no sigue el patrón habitual. Si se calienta el agua a 0°C, en realidad *disminuye* en volumen hasta que alcanza los 4°C. Arriba de 4°C el agua se comporta de manera normal y expande su volumen conforme aumenta la temperatura (figura 17-12). Por lo tanto, el agua tiene su mayor densidad a 4°C. Este comportamiento anómalo del agua es de gran importancia para la supervivencia de las especies acuáticas durante los inviernos fríos. Cuando el agua en un lago o río está arriba de 4°C y comienza a enfriarse por contacto con el aire frío, el agua en la superficie se hunde a causa de su mayor densidad. Se reemplaza con agua más caliente procedente de abajo. Esta mezcla continúa hasta que la temperatura alcanza los 4°C. Cuando el agua superficial se enfría aún más, permanece en la superficie porque es ahora menos densa que el agua a 4°C que está abajo. Entonces el agua se congela primero en la superficie y el hielo permanece en la superficie porque es menos denso (gravedad específico = 0.917) que el agua. El agua en el fondo permanece en estado líquido a menos que haga tanto frío que todo el cuerpo de agua se congele. Si el agua fuera como la mayoría de las sustancias y se volviera más densa conforme se enfría, el agua en el fondo de un lago se congelaría primero. Los lagos se congelarían más fácilmente, pues la circulación llevaría el agua más caliente a la superficie para ser enfriada eficientemente. El congelamiento completo de un lago provocaría severos daños a la vida vegetal y animal que habita en él. Debido al inusual comportamiento del agua por abajo de los 4°C, es raro que algún cuerpo de agua grande se congele por completo, y a esto ayuda la capa de hielo en la superficie, que actúa como aislador para reducir el flujo de calor desde el agua hacia el aire frío sobre ella. Sin esta peculiar y maravillosa propiedad del agua, la vida en este planeta, como se conoce, no habría sido posible.

FÍSICA APLICADA
Vida bajo el hielo

El agua no sólo se expande conforme se enfría de 4°C a 0°C; se expande incluso más conforme se congela para convertirse en hielo. Por eso los cubos de hielo flotan en el agua y las tuberías se rompen cuando se congela el agua en su interior.



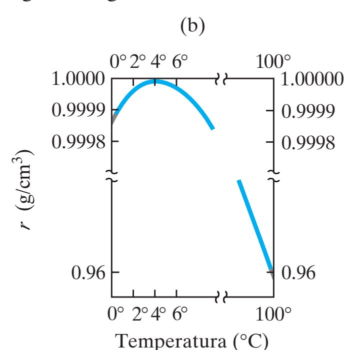


FIGURA 17–12 Comportamiento del agua como función de la temperatura cerca de 4°C. *a*) Volumen de 1.00000 g de agua, como función de la temperatura. *b*) Densidad *versus* temperatura. [Note el cambio de escala en cada eje].

*17–5 Tensiones térmicas

En muchas situaciones, como en los edificios y caminos, los extremos de una viga o losa de material están fijos de manera rígida, lo que limita enormemente la expansión o la contracción. Si la temperatura cambiara, ocurrirían grandes tensiones compresivas, llamadas *tensiones térmicas*. La magnitud de tales tensiones se calcula usando el concepto de módulo elástico desarrollado en el capítulo 12. Para calcular la tensión interna, podemos considerar que este proceso ocurre en dos pasos: (1) la viga intenta expandirse (o contraerse) en una cantidad $\Delta\ell$ dada por la ecuación 17-1; (2) el sólido en contacto con la viga ejerce una fuerza para comprimirla (o expandirla), y mantenerla en su longitud original. La fuerza F requerida está dada por la ecuación 12-4:

$$\Delta\ell = \frac{1}{E}\frac{F}{A}\ell_0,$$

donde E es el módulo de Young para el material. Para calcular la tensión interna, F/A, se iguala $\Delta\ell$ en la ecuación 17-1a con $\Delta\ell$ en la ecuación anterior y se obtiene

$$\alpha\ell_0\,\Delta T = \frac{1}{E}\frac{F}{A}\ell_0.$$

Por lo tanto, la tensión es

$$\frac{F}{A} = \alpha E\,\Delta T.$$

EJEMPLO 17–8 **Tensión en el concreto en un día caluroso.** Se va a construir una autopista con bloques de concreto de 10 m de largo colocados extremo con extremo sin espacio entre ellos que permita su expansión. Si los bloques se colocan a una temperatura de 10°C, ¿qué tensión compresiva ocurrirá si la temperatura alcanza los 40°C? El área de contacto entre cada bloque es de 0.20 m^2. ¿Ocurrirá fractura?

FÍSICA APLICADA
Pandeo de una autopista

PLANTEAMIENTO Usamos la expresión para la tensión F/A recién obtenida y usando el valor de E en la tabla 12-1. Para ver si ocurre fractura, comparamos esta tensión con la resistencia a la ruptura del concreto en la tabla 12-2.

SOLUCIÓN

$$\frac{F}{A} = \alpha E\,\Delta T = \left(12 \times 10^{-6}/\mathrm{C}^\circ\right)\left(20 \times 10^9\,\mathrm{N/m^2}\right)\left(30\,\mathrm{C}^\circ\right) = 7.2 \times 10^6\,\mathrm{N/m^2}.$$

Esta tensión no está lejos de la resistencia a la ruptura del concreto bajo compresión (tabla 12-2) y supera el esfuerzo de tensión y corte. Si el concreto no está perfectamente alineado, parte de la fuerza actuará para cortar y es probable la fractura. Por eso se usan espaciadores suaves o juntas de expansión (figura 17-3) en las aceras, las autopistas y los puentes de concreto.

EJERCICIO C ¿Cuánto espacio permitiría usted entre los bloques de concreto de 10 m de largo, si se espera un rango de temperaturas que va de 0 a 110°F?

17–6 Las leyes de los gases y la temperatura absoluta

La ecuación 17-2 no resulta muy útil para describir la expansión de un gas, en parte porque la expansión puede ser muy grande, y en parte porque los gases generalmente se expanden para llenar cualquier contenedor en el que se encuentran. De hecho, la ecuación 17-2 sólo es significativa si la presión se mantiene constante. El volumen de un gas depende tanto de la presión como de la temperatura. Por eso, es conveniente determinar una relación entre el volumen, la presión, la temperatura y la masa de un gas. Tal relación se llama **ecuación de estado**. (Por *estado* se entiende la condición física del sistema).

Si cambia el estado de un sistema, siempre esperaremos hasta que la presión y la temperatura hayan alcanzado los mismos valores en todo el sistema. Así que sólo se consideran los **estados de equilibrio** de un sistema: cuando las variables que lo describen (como temperatura y presión) son las mismas a través de todo el sistema y no cambian con el tiempo. También notamos que los resultados de esta sección son precisos sólo para gases que no son demasiado densos (en los que la presión no es muy alta, en el orden de una atmósfera o menos) y que no están cerca del punto de licuefacción (o ebullición).

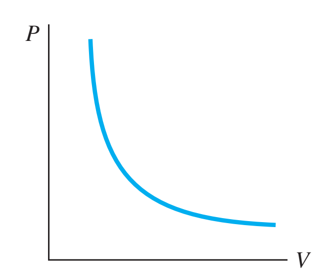


FIGURA 17–13 Presión versus volumen de una cantidad fija de gas a una temperatura constante, que muestra la relación inversa establecida por la ley de Boyle: conforme la presión disminuye, el volumen aumenta.

Para una cantidad determinada de gas, se encuentra experimentalmente que, en una buena aproximación, *el volumen de un gas es inversamente proporcional a la presión absoluta que se le aplica cuando la temperatura se mantiene constante.* Esto es,

$$V \propto \frac{1}{P}, \qquad [T \text{ constante}]$$

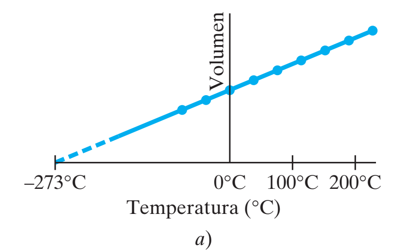
donde P es la presión absoluta (*no* "presión manométrica"; véase la sección 13-4). Por ejemplo, si la presión sobre un gas se duplica, el volumen se reduce a la mitad de su volumen original. Esta relación se conoce como **ley de Boyle**, en honor de Robert Boyle (1627-1691), quien fue el primero en enunciarla sobre la base de sus experimentos. En la figura 17-13 se muestra una gráfica de P versus V para una temperatura fija. La ley de Boyle también se escribe como

$$PV = \text{constante} \qquad [T \text{ constante}]$$

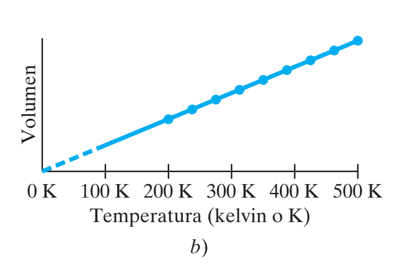
Esto es, a temperatura constante, si se permite la variación de la presión o del volumen de una cantidad fija de gas, la otra variable también cambia de manera que el producto PV permanece constante.

La temperatura también afecta el volumen de un gas; sin embargo, no se encontró una relación cuantitativa entre V y T sino hasta más de un siglo después del trabajo de Boyle. El francés Jacques Charles (1746-1823) encontró que, cuando la presión no es demasiado alta y se mantiene constante, el volumen de un gas aumenta con la temperatura a una tasa casi lineal, como se muestra en la figura 17-14a. Sin embargo, todos los gases se licuan a bajas temperaturas (por ejemplo, el oxígeno se licua a −183°C), así que la gráfica no se puede extender por debajo del punto de licuefacción. No obstante, la gráfica es en esencia una línea recta y, si se proyecta a temperaturas más bajas, como se muestra mediante la línea punteada, cruza el eje en −273°C aproximadamente.

FIGURA 17–14 Volumen de una cantidad fija de gas como función de *a*) temperatura Celsius y *b*) temperatura Kelvin, cuando la presión se mantiene constante.



a)



b)

Tal gráfica se puede dibujar para cualquier gas, y la línea recta siempre se proyecta de vuelta a −273°C a volumen cero. Esto parece implicar que si un gas se pudiera enfriar a −273°C, tendría volumen cero, y que a temperaturas más bajas tendría un volumen negativo, lo que no tiene sentido. Se podría argumentar que −273°C es la temperatura más baja posible; de hecho, muchos otros experimentos más recientes indican que esto es así. Esta temperatura se llama **cero absoluto** de temperatura y su valor se determinó en −273.15°C.

El cero absoluto es la base de una escala de temperatura conocida como **escala absoluta** o **escala Kelvin**, y se usa ampliamente en el trabajo científico. En esta escala, la temperatura se especifica como grados Kelvin o, de preferencia, simplemente como *kelvin* (K), sin el signo de grado. Los intervalos son los mismos que para la escala Celsius, pero el cero en esta escala (0 K) se elige como el cero absoluto. Así, el punto de congelación del agua (0°C) es 273.15 K, y el punto de ebullición del agua es 373.15 K. De hecho, cualquier temperatura en la escala Celsius se puede convertir a kelvin sumándole 273.15:

$$T(\text{K}) = T(°\text{C}) + 273.15.$$

Ahora observemos la figura 17-14b, donde la gráfica del volumen de un gas versus la temperatura absoluta es una línea recta que pasa por el origen. Por consiguiente, en una buena aproximación, *el volumen de una cantidad dada de gas es directamente proporcional a la temperatura absoluta cuando la presión se mantiene constante.* Este enunciado se conoce como **ley de Charles** y se escribe como

$$V \propto T. \qquad [P \text{ constante}]$$

Una tercera ley de los gases, conocida como **ley de Gay-Lussac**, en honor de Joseph Gay-Lussac (1778-1850), afirma que, *a volumen constante, la presión absoluta de un gas es directamente proporcional a la temperatura absoluta*:

$$P \propto T. \qquad [V \text{ constante}]$$

Las leyes de Boyle, Charles y Gay-Lussac en realidad no son leyes en el sentido en que se usa ese término actualmente (de precisión, profundidad y amplio rango de validez). En realidad sólo son aproximaciones que resultan exactas sólo para gases reales, en tanto la presión y la densidad del gas no sean muy altas, y el gas no esté demasiado

cerca de la licuefacción (condensación). Sin embargo, el término *ley* que se aplica a estas tres relaciones se ha vuelto de uso común, así que respetamos ese término.

EJEMPLO CONCEPTUAL 17–9 Por qué no debe lanzarse un frasco de vidrio cerrado a una fogata. ¿Qué ocurre si usted lanza a una fogata un frasco de vidrio vacío con la tapa apretada y por qué?

RESPUESTA El interior del frasco no está vacío, sino lleno de aire. Conforme el fuego calienta el aire en el interior, la temperatura de este último aumenta. El volumen del frasco de vidrio cambia sólo ligeramente a causa del calentamiento. De acuerdo con la ley de Gay-Lussac, la presión P del aire en el interior del frasco puede aumentar drásticamente, lo suficiente como para hacer que el frasco explote, lanzando trozos de vidrio por doquier.

17–7 Ley del gas ideal

Las leyes de Boyle, Charles y Gay-Lussac para los gases se obtuvieron mediante una técnica científica muy útil: mantener una o más variables constantes para ver con claridad los efectos de una de ellas como resultado del cambio en otra variable. Estas leyes ahora se pueden combinar en una sola relación más general entre la presión absoluta, el volumen y la temperatura absoluta de una cantidad fija de gas:

$$PV \propto T.$$

Esta relación indica cómo variará cualquiera de las cantidades P, V o T cuando las otras dos cambien. Esta relación se reduce a la ley de Boyle, de Charles o de Gay-Lussac cuando se mantiene constante T, P o V, respectivamente.

Finalmente, se debe incorporar el efecto de la cantidad de gas presente. Cualquier persona que haya inflado un globo sabe que cuanto más aire se introduzca en el globo, más grande será su tamaño (figura 17-15). De hecho, experimentos cuidadosos demuestran que, a temperatura y presión constantes, el volumen V de un gas encerrado aumenta en proporción directa en relación con la masa m del gas presente. De esta forma, escribimos



FIGURA 17–15 Inflar un globo significa introducir más aire (más moléculas de aire) en el globo, lo que aumenta su volumen. La presión es casi constante (atmosférica), excepto por el pequeño efecto de la elasticidad del globo.

$$PV \propto mT.$$

Esta proporción se convierte en una ecuación al insertar una constante de proporcionalidad. Los experimentos demuestran que esta constante tiene un valor diferente para distintos gases. Sin embargo, la constante de proporcionalidad es la misma para todos los gases si, en vez de la masa m, se usa el número de *moles*.

Un **mol** se define como la cantidad de sustancia que contiene tantos átomos o moléculas como hay precisamente en 12 gramos de carbono 12 (cuya masa atómica es exactamente 12 u). Una definición más sencilla pero equivalente es: 1 mol es aquella cantidad de sustancia cuya masa en gramos es numéricamente igual a la masa molecular de la sustancia (sección 17-1). Por ejemplo, la masa molecular del gas hidrógeno (H_2) es 2.0 u (puesto que cada molécula contiene dos átomos de hidrógeno y cada átomo tiene una masa atómica de 1.0 u). En consecuencia, 1 mol de H_2 tiene una masa de 2.0 g. De igual modo, 1 mol de gas neón tiene una masa de 20 g, y 1 mol de CO_2 tiene una masa de $[12 + (2 \times 16)] = 44$ g, pues el oxígeno tiene masa atómica de 16 (véase la tabla periódica en los forros del libro). El mol es la unidad oficial de la cantidad de sustancia en el SI. En general, el número de moles, n, en una muestra dada de una sustancia pura es igual a la masa de la muestra en gramos dividida entre la masa molecular expresando en gramos por mol:

$$n\,(\text{mol}) = \frac{\text{masa (gramos)}}{\text{masa molecular (g/mol)}}.$$

Por ejemplo, el número de moles en 132 g de CO_2 (masa molecular 44 u) es

$$n = \frac{132\text{ g}}{44\text{ g/mol}} = 3.0\text{ moles}$$

Ahora podemos escribir la proporción discutida anteriormente ($PV \propto mT$) como una ecuación:

LEY DEL GAS IDEAL

$$PV = nRT, \tag{17–3}$$

donde n representa el número de moles y R es la constante de proporcionalidad. R se llama **constante universal de los gases** porque experimentalmente se encontró que su valor es el mismo para todos los gases. El valor de R, en varios conjuntos de unidades (sólo el primer valor es la unidad adecuada del SI), es

$$\begin{aligned} R &= 8.314\ \text{J/(mol}\cdot\text{K)} && \text{[Unidades del SI]} \\ &= 0.0821\ \text{(L}\cdot\text{atm)/(mol}\cdot\text{K)} \\ &= 1.99\ \text{calorías/(mol}\cdot\text{K)}.^{\dagger} \end{aligned}$$

La ecuación 17-3 se llama **ley del gas ideal** o **ecuación de estado para un gas ideal**. Se usa el término "ideal" porque los gases reales no siguen precisamente la ecuación 17-3, en particular a alta presión (y densidad) o cuando están cerca del punto de licuefacción (= punto de ebullición). Sin embargo, a presiones menores que una atmósfera, y cuando T no está cerca del punto de licuefacción del gas, la ecuación 17-3 es bastante precisa y útil para gases reales.

CUIDADO
Siempre indique T en kelvin y P como presión absoluta (no manométrica)

Siempre que utilice la ley del gas ideal, recuerde que las temperaturas se deben estar en kelvin (K) y que la presión P siempre debe ser la presión *absoluta*, no la presión manométrica (sección 13-4).

EJERCICIO D Regrese a la pregunta de inicio del capítulo, página 454, y respóndala de nuevo. Intente explicar por qué quizá la contestó de manera diferente la primera vez.

EJERCICIO E Una esfera de acero contiene un gas ideal a 27.0°C y 1.00 atm de presión absoluta. Si no se permite escapar gas y la temperatura se eleva a 127°C, ¿cuál será la nueva presión? *a*) 1.33 atm; *b*) 0.75 atm; *c*) 4.7 atm; *d*) 0.21 atm; *e*) 1.00 atm.

17–8 Resolución de problemas con la ley del gas ideal

La ley del gas ideal es una herramienta extremadamente útil; ahora veremos algunos ejemplos. Con frecuencia nos referimos a "condiciones estándar" o **presión y temperatura estándar** (**PTE**), lo que significa:

PTE

$$T = 273\ \text{K}\ (0°\text{C}) \qquad \text{y} \qquad P = 1.00\ \text{atm} = 1.013 \times 10^5\ \text{N/m}^2 = 101.3\ \text{kPa}.$$

EJEMPLO 17–10 Volumen de un mol a PTE. Determine el volumen de 1.00 mol de cualquier gas, suponiendo que se comporta como un gas ideal, a PTE.

PLANTEAMIENTO Usamos la ley del gas ideal y despejamos V.

SOLUCIÓN Despejamos V en la ecuación 17-3:

$$V = \frac{nRT}{P} = \frac{(1.00\ \text{mol})(8.314\ \text{J/mol}\cdot\text{K})(273\ \text{K})}{(1.013 \times 10^5\ \text{N/m}^2)} = 22.4 \times 10^{-3}\ \text{m}^3.$$

Como 1 litro (L) es 1000 $\text{cm}^3 = 1.00 \times 10^{-3}\ \text{m}^3$, 1.00 mol de cualquier gas (ideal) tiene volumen $V = 22.4$ L a PTE.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
1 mol de gas a PTE tiene $V = 22.4$ L

Vale la pena recordar el valor de 22.4 L para el volumen de 1 mol de un gas ideal a PTE, porque en ocasiones facilita los cálculos.

EJERCICIO F ¿Cuál es el volumen de 1.00 mol de gas ideal a 546 K (= 2 × 273 K) y 2.0 atm de presión absoluta? *a*) 11.2 L, *b*) 22.4 L, *c*) 44.8 L, *d*) 67.2 L, *e*) 89.6 L.

† Las calorías se definirán en la sección 19-1; en ocasiones es útil emplear R en términos de calorías.

EJEMPLO 17–11 **Globo de helio.** Un globo de helio para fiesta, que se supone como una esfera perfecta, tiene un radio de 18.0 cm. A temperatura ambiente (20°C), su presión interna es de 1.05 atm. Determine el número de moles de helio en el globo y la masa de helio necesaria para inflar el globo a estos valores.

PLANTEAMIENTO Podemos usar la ley del gas ideal para encontrar n, pues se conocen P y T; por otro lado, se puede determinar V a partir del radio indicado.

SOLUCIÓN Obtenemos el volumen V a partir de la fórmula para una esfera:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi\,(0.180\,\mathrm{m})^3 = 0.0244\,\mathrm{m}^3.$$

La presión está dada como 1.05 atm = $1.064 \times 10^5\ \mathrm{N/m^2}$. La temperatura debe expresarse en kelvin, así que convertimos 20°C a (20 + 273) K = 293 K. Finalmente, usamos el valor $R = 8.314\ \mathrm{J/(mol\cdot K)}$ porque estamos empleando unidades del SI. Por lo tanto,

$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{(1.064 \times 10^5\,\mathrm{N/m^2})(0.0244\,\mathrm{m^3})}{(8.314\,\mathrm{J/mol\cdot K})(293\,\mathrm{K})} = 1.066\,\mathrm{mol}.$$

La masa del helio (masa atómica = 4.00 g/mol, como aparece en la tabla periódica o el Apéndice F) se obtiene a partir de

$$\text{masa} = n \times \text{masa molecular} = (1.066\ \mathrm{mol})(4.00\ \mathrm{g/mol}) = 4.26\ \mathrm{g}$$

o 4.26×10^{-3} kg.

EJEMPLO 17–12 **ESTIMACIÓN** **Masa de aire en una habitación.** Estime la masa del aire en una habitación cuyas dimensiones son 5 m × 3 m × 2.5 m de alto, a PTE.

PLANTEAMIENTO Primero determinamos el número de moles n usando el volumen dado. Luego multiplicamos por la masa de un mol para obtener la masa total.

SOLUCIÓN El ejemplo 17-10 nos dice que 1 mol de un gas a 0°C tiene un volumen de 22.4 L. El volumen de la habitación es 5 m × 3 m × 2.5 m, así que

$$n = \frac{(5\,\mathrm{m})(3\,\mathrm{m})(2.5\,\mathrm{m})}{22.4 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3} \approx 1700\,\mathrm{mol}.$$

El aire es una mezcla de aproximadamente 20% oxígeno (O_2) y 80% nitrógeno (N_2). Las masas moleculares son 2 × 16 u = 32 u y 2 × 14 u = 28 u, respectivamente, lo que da un promedio de 29 u. Por lo tanto, 1 mol de aire tiene una masa aproximada de 29 g = 0.029 kg, así que la habitación tiene una masa de aire

$$m \approx (1700\,\mathrm{mol})(0.029\,\mathrm{kg/mol}) \approx 50\,\mathrm{kg}.$$

NOTA ¡Esto es aproximadamente 100 lb de aire!



Masa (y peso) del aire en una habitación

EJERCICIO G En una habitación a 20°C, ¿habrá *a*) más, *b*) menos o *c*) la misma masa de aire que a 0°C?

Con frecuencia, el volumen se especifica en litros y la presión en atmósferas; en vez de convertir estas últimas a unidades del SI, podemos usar el valor de R dado en la sección 17-7 como 0.0821 L·atm/mol·K.



Uso de la ley del gas ideal como proporción

En muchas situaciones no es necesario usar el valor de R en absoluto. Por ejemplo, muchos problemas implican un cambio en la presión, la temperatura y el volumen de una cantidad fija de gas. En este caso, $PV/T = nR$ = constante, puesto que n y R permanecen constantes. Si ahora P_1, V_1 y T_1 representan las variables apropiadas inicialmente, y P_2, V_2 y T_2 representan las variables después de que se realiza un cambio, entonces podemos escribir

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}.$$

Si se conocen cinco de las cantidades en esta ecuación, podemos despejar la sexta. O, si una de las tres variables es constante ($V_1 = V_2$, o $P_1 = P_2$, o $T_1 = T_2$), entonces podemos usar esta ecuación para despejar una incógnita cuando se conocen las otras tres cantidades.

FÍSICA APLICADA
Presión en un neumático caliente



FIGURA 17–16 Ejemplo 17–13.

EJEMPLO 17–13 Medición de la presión de los neumáticos cuando están fríos. El neumático de un automóvil está lleno (figura 17-16) a presión manométrica de 200 kPa a 10°C. Después de conducir 100 km, la temperatura dentro del neumático se eleva a 40°C. ¿Cuál es ahora la presión dentro del neumático?

PLANTEAMIENTO No conocemos el número de moles de gas, ni el volumen del neumático, pero suponemos que son constantes. Empleamos la forma de proporción de la ley de los gases ideales.

SOLUCIÓN Dado que $V_1 = V_2$, entonces

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}.$$

Éste es, casualmente, el enunciado de la ley de Gay-Lussac. Puesto que la presión dada es la presión manométrica (sección 13-4), debemos sumar la presión atmosférica (= 101 kPa) para obtener la presión absoluta $P_1 = (200\text{ kPa} + 101\text{ kPa}) = 301\text{ kPa}$. Convertimos las temperaturas a kelvin sumando 273 y despejamos P_2:

$$P_2 = P_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \left(3.01 \times 10^5\text{ Pa}\right)\left(\frac{313\text{ K}}{283\text{ K}}\right) = 333\text{ kPa}.$$

Al restar la presión atmosférica, encontramos que la presión manométrica resultante es 232 kPa, que representa un 16% de aumento. Este ejemplo demuestra por qué los manuales de los automóviles sugieren medir la presión de los neumáticos cuando éstos se encuentran fríos.

17–9 Ley del gas ideal en términos de moléculas: número de Avogadro

El hecho de que la constante de los gases, R, tenga el mismo valor para todos los gases es un reflejo notable de la simplicidad de la naturaleza. Fue el científico italiano Amedeo Avogadro (1776-1856) quien reconoció esto por primera vez, aunque en una forma ligeramente diferente. Avogadro afirmó que *volúmenes iguales de gas a la misma presión y temperatura contienen igual número de moléculas*. A veces este enunciado se denomina **hipótesis de Avogadro**. Esto es consistente con el hecho de que R sea igual para todos los gases, lo que se puede ver de la siguiente manera. A partir de la ecuación 17-3, $PV = nRT$, vemos que, para el mismo número de moles n y la misma presión y temperatura, el volumen será el mismo para todos los gases, en tanto R sea igual. Segundo, el número de moléculas en 1 mol es el mismo para todos los gases.† Por lo tanto, la hipótesis de Avogadro es equivalente a que R sea igual para todos los gases.

El número de moléculas en un mol de cualquier sustancia pura se conoce como **número de Avogadro**, N_A. Aunque Avogadro concibió la noción, en realidad no logró determinar el valor de N_A. De hecho, no se realizaron mediciones precisas sino hasta el siglo XX.

Número de Avogadro

Se han desarrollado diversos métodos para medir N_A, y el valor aceptado en la actualidad es

$$N_A = 6.02 \times 10^{23}. \qquad \text{[moléculas/mol]}$$

Puesto que el número total de moléculas, N, en un gas es igual al número de moléculas por mol multiplicado por el número de moles ($N = nN_A$), la ley del gas ideal, ecuación 17-3, se puede escribir en términos del número de moléculas presentes:

$$PV = nRT = \frac{N}{N_A}RT,$$

o

LEY DEL GAS IDEAL (en términos de moléculas)

$$PV = NkT, \qquad \textbf{(17–4)}$$

donde $k = R/N_A$ se llama **constante de Boltzman** y tiene el valor

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8.314\text{ J/mol}\cdot\text{K}}{6.02 \times 10^{23}\text{/mol}} = 1.38 \times 10^{-23}\text{ J/K}.$$

†Por ejemplo, la masa molecular del gas H_2 es 2.0 unidades de masa atómica (u), mientras que la del gas O_2 es 32.0 u. Por lo tanto, 1 mol de H_2 tiene una masa de 0.0020 kg y 1 mol de gas O_2, 0.0320 kg. El número de moléculas en un mol es igual a la masa total M de un mol dividida entre la masa m de una molécula; en tanto que esta razón (M/m) es la misma para todos los gases, por la definición de mol, un mol de cualquier gas debe contener el mismo número de moléculas.

EJEMPLO 17–14 **Masa de un átomo de hidrógeno.** Utilice el número de Avogadro para determinar la masa de un átomo de hidrógeno.

PLANTEAMIENTO La masa de un átomo es igual a la masa de 1 mol dividida entre el número de átomos en 1 mol, N_A.

SOLUCIÓN Un mol de átomos de hidrógeno (masa atómica = 1.008 u, sección 17-1 o Apéndice F) tiene una masa de 1.008×10^{-3} kg y contiene 6.02×10^{23} átomos. Por lo tanto, un átomo tiene una masa

$$\begin{aligned} m &= \frac{1.008 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg}}{6.02 \times 10^{23}} \\ &= 1.67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 17–15 **ESTIMACIÓN** **¿Cuántas moléculas hay en una inhalación?** Estime cuántas moléculas respira usted cuando inhala 1.0 L de aire.

FÍSICA APLICADA

Molácules en una inhalación

PLANTEAMIENTO Determinamos qué fracción de un mol es 1.0 L utilizando el resultado del ejemplo 17-19 de que 1 mol tiene un volumen de 22.4 L a PTE, y luego multiplicamos esto por N_A para obtener el número de moléculas en ese número de moles.

SOLUCIÓN Un mol corresponde a 22.4 L a PTE, así que 1.0 L de aire es (1.0 L)/(22.4 L/mol) = 0.045 mol. De manera que 1.0 L de aire contiene

$$(0.045\,\mathrm{mol})(6.02 \times 10^{23}\,\text{moléculas/mol}) \approx 3 \times 10^{22}\,\text{moléculas}.$$

*17–10 Escala de temperatura del gas ideal: un estándar

Es importante tener una escala de temperatura definida con mucha precisión, de manera que las mediciones de temperatura realizadas en diferentes laboratorios alrededor del mundo se puedan comparar con exactitud. Ahora veremos una escala que ha sido aceptada por la comunidad científica en general.

El termómetro estándar para esta escala es el termómetro de gas a volumen constante, del que se habló en la sección 17-2. La escala en sí se llama **escala de temperatura del gas ideal**, pues se basa en la propiedad de un gas ideal de que la presión es directamente proporcional a la temperatura absoluta (ley de Gay-Lussac). Un gas real, que necesitaría usarse en cualquier termómetro de gas real a volumen constante, se aproxima a este ideal a baja densidad. En otras palabras, la temperatura en cualquier punto en el espacio *se define* como proporcional a la presión en el gas (casi) ideal utilizado dentro del termómetro. Para establecer una escala se necesitan dos puntos fijos. Un punto fijo será $P = 0$ a $T = 0$ K. El segundo punto fijo se elige como el **punto triple** del agua, que es aquel punto donde los estados sólido, líquido y gaseoso del agua coexisten en equilibrio. Esto ocurre sólo a una temperatura y presión únicas,† y se puede reproducir en diferentes laboratorios con gran precisión. La presión en el punto triple del agua es 4.58 torr y la temperatura es 0.01°C. Esta temperatura corresponde a 273.16 K, ya que el cero absoluto es aproximadamente −273.15°C. De hecho, el punto triple ahora *se define* exactamente como 273.16 K.

†El agua líquida y el vapor pueden coexistir (el punto de ebullición) en un rango de temperaturas dependiendo de la presión. El agua hierve a una temperatura más baja cuando la presión es menor, como en la cumbre de las montañas. El punto triple representa un punto fijo reproducible con más precisión que el punto de congelación o el punto de ebullición del agua a 1 atm, por ejemplo. Véase la sección 18-3 para una mayor explicación.

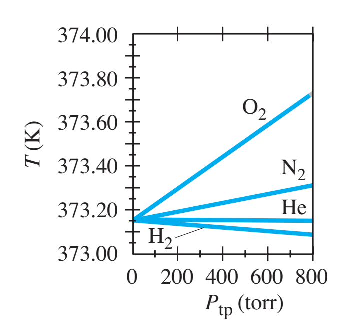


FIGURA 17–17 Las lecturas de temperatura de un termómetro de gas a volumen constante para el punto de ebullición del agua a 1.00 atm se grafican, para diferentes gases, como función de la presión del gas en el termómetro en el punto triple (P_{tp}). Note que conforme se reduce la cantidad de gas en el termómetro, de manera que $P_{tp} \to 0$, todos los gases dan la misma lectura, 373.15 K. Para presiones menores que 0.10 atm (76 torr), la variación que se muestra es menor que 0.07 K.

La temperatura T absoluta o Kelvin en cualquier punto se define entonces, usando un termómetro de gas a volumen constante para un gas ideal, como

$$T = (273.16\text{ K})\left(\frac{P}{P_{tp}}\right). \qquad \text{[gas ideal; volumen constante]} \qquad \textbf{(17–5a)}$$

En esta relación, P_{tp} es la presión del gas en el termómetro a la temperatura del punto triple del agua, y P es la presión en el termómetro cuando está a la temperatura T a la que se quiere medir. Note que si en esta relación dejamos que $P = P_{tp}$, entonces $T = 273.16$ K, cual debe.

La definición de temperatura, ecuación 17-5a, con un termómetro de gas a volumen constante lleno con un gas real sólo es aproximada, ya que obtenemos diferentes resultados para la temperatura dependiendo del tipo de gas que se use en el termómetro. Las temperaturas determinadas de esta forma también varían dependiendo de la cantidad de gas en el bulbo del termómetro: por ejemplo, el punto de ebullición del agua a 1.00 atm, a partir de la ecuación 17-5a, se encuentra en 373.87 K cuando el gas es O_2 y $P_{tp} = 1000$ torr. Si la cantidad de O_2 en el bulbo se reduce de manera que el punto triple $P_{tp} = 500$ torr, el punto de ebullición del agua, a partir de la ecuación 17-5a, se encuentra entonces en 373.51 K. Si en vez de ello se utiliza gas H_2, los valores correspondientes son 373.07 K y 373.11 K (véase la figura 17-17). Pero ahora suponga que usamos un gas real particular y hacemos una serie de mediciones en las que la cantidad de gas en el bulbo del termómetro se reduce a cantidades cada vez más pequeñas, de manera que P_{tp} se vuelve cada vez menor. Experimentalmente se encontró que una extrapolación de tales datos a $P_{tp} = 0$ siempre da el *mismo valor* para la temperatura de un sistema dado (con $T = 373.15$ K para el punto de ebullición del agua a 1.00 atm), como se muestra en la figura 17-17. Por lo tanto, la temperatura T en cualquier punto en el espacio, determinado usando un termómetro de gas a volumen constante que contiene un gas real, se define usando este límite:

$$T = (273.16\text{ K})\lim_{P_{tp}\to 0}\left(\frac{P}{P_{tp}}\right). \qquad \text{[volumen constante]} \qquad \textbf{(17–5b)}$$

Esto define la **escala de temperatura del gas ideal**. Una de las grandes ventajas de esta escala es que el valor para T no depende del tipo de gas empleado. La escala depende de las propiedades de los gases en general. El helio tiene el punto de condensación más bajo de todos los gases; a presiones muy bajas se licua aproximadamente a 1 K, de ma-

Resumen

La teoría atómica de la materia postula que toda la materia está constituida de pequeñas entidades llamadas **átomos**, que por lo general miden 10^{-10} m de diámetro.

Las **masas atómica** y **molecular** se especifican en una escala donde al carbono ordinario (^{12}C) se le asigna arbitrariamente el valor 12.0000 u (unidades de masa atómica).

La distinción entre sólidos, líquidos y gases se puede atribuir a la intensidad de las fuerzas de atracción entre los átomos o las moléculas y a su rapidez promedio.

La **temperatura** es una medida de qué tan caliente o frío está algo. Los **termómetros** se usan para medir temperatura en las escalas **Celsius** (°C), **Fahrenheit** (°F) y **Kelvin** (K). Dos puntos estándar en cada escala son el punto de congelación del agua (0°C, 32°F, 273.15 K) y el punto de ebullición del agua (100°C, 212°F, 373.15 K). Un cambio de un kelvin en la temperatura es igual a un cambio de un grado Celsius o $\frac{9}{5}$ de grados Fahrenheit. Los kelvin se relacionan con los °C mediante $T(\text{K}) = T(°\text{C}) + 273.15$.

El cambio en la longitud $\Delta\ell$ de un sólido cuando su temperatura cambia en una cantidad ΔT, es directamente proporcional al cambio de temperatura y a su longitud original ℓ_0. Esto es,

$$\Delta\ell = \alpha\ell_0\,\Delta T, \qquad \textbf{(17–1a)}$$

donde α es el *coeficiente de expansión lineal*.

El cambio en el volumen de la mayoría de los sólidos, líquidos y gases es proporcional al cambio de temperatura y al volumen original V_0:

$$\Delta V = \beta V_0\,\Delta T. \qquad \textbf{(17–2)}$$

El *coeficiente de expansión volumétrica*, β, es aproximadamente igual a 3α para sólidos uniformes.

El agua tiene un comportamiento insólito porque, a diferencia de la mayoría de los materiales cuyo volumen aumenta con la temperatura, su volumen en realidad disminuye conforme la temperatura aumenta en el rango de 0°C a 4°C.

La **ley del gas ideal**, o **ecuación de estado para un gas ideal**, relaciona la presión P, el volumen V y la temperatura T (en kelvin) de n moles de gas mediante la ecuación

$$PV = nRT, \qquad \textbf{(17–3)}$$

donde $R = 8.314$ J/mol·K para todos los gases. Los gases reales obedecen la ley del gas ideal con bastante precisión si no están a una presión demasiado alta o cerca de su punto de licuefacción.

Un **mol** es aquella cantidad de una sustancia cuya masa en gramos es numéricamente igual a la masa atómica o molecular de esa sustancia.

El **número de Avogadro**, $N_A = 6.02 \times 10^{23}$, es el número de átomos o moléculas en 1 mol de cualquier sustancia pura.

La ley del gas ideal se puede expresar en términos del número de moléculas N en el gas como

$$PV = NkT, \qquad \textbf{(17–4)}$$

donde $k = R/N_A = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K es la constante de Boltzman.

Preguntas

1. ¿Cuál tiene más átomos: 1 kg de hierro o 1 kg de aluminio? Consulte la tabla periódica o el Apéndice F.
2. Mencione varias propiedades de los materiales que podrían aprovecharse para fabricar un termómetro.
3. ¿Cuál es mayor: 1 C° o 1 F°?
4. Si el sistema A está en equilibrio con el sistema B, pero B no está en equilibrio con el sistema C, ¿qué podría usted decir acerca de las temperaturas de A, B y C?
5. Suponga que el sistema C no está en equilibrio con el sistema A ni en equilibrio con el sistema B. ¿Esto implica que A y B no están en equilibrio? ¿Qué puede inferir en cuanto a las temperaturas de A, B y C?
6. En la relación $\Delta\ell = \alpha\ell_0\,\Delta T$, ¿$\ell_0$ debería ser la longitud inicial, la longitud final o no importa?
7. Una tira bimetálica plana consiste en una tira de aluminio fijada a una tira de hierro. Cuando se caliente, la tira se doblará. ¿Cuál metal estará en el exterior de la curva? ¿Por qué?
8. Las largas tuberías de vapor que se fijan en los extremos con frecuencia tienen una sección con forma de ∪. ¿Por qué?
9. Un cilindro uniforme plano de plomo flota en mercurio a 0°C. ¿El plomo flotará más alto o más bajo si la temperatura se eleva?
10. La figura 17-18 muestra un diagrama de un **termostato** simple usado para controlar un horno (u otro sistema de calefacción o enfriamiento). La tira bimetálica consiste en dos tiras unidas de diferentes metales. El interruptor eléctrico (unido a la tira bimetálica) es un recipiente de vidrio que contiene mercurio líquido, el cual conduce electricidad cuando puede fluir para tocar ambos alambres de contacto. Explique cómo este dispositivo controla el horno y cómo se puede fijar a diferentes temperaturas.

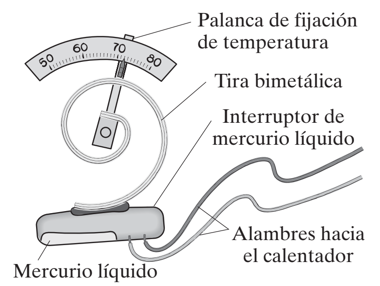


FIGURA 17–18 Un termostato (pregunta 10).

11. Explique por qué es aconsejable agregar agua a un motor de automóvil sobrecalentado sólo con lentitud y sólo con el motor en marcha.
12. Las unidades para los coeficientes de expansión α son $(\text{C}°)^{-1}$ y no hay mención de una unidad de longitud como metros. ¿Los coeficientes de expansión cambiarían si se usaran pies o milímetros en vez de metros?
13. Cuando un termómetro de mercurio en vidrio frío se coloca primero en una tina de agua caliente, el mercurio inicialmente desciende un poco y luego se eleva. Explique.
14. La principal virtud del vidrio Pyrex es que su coeficiente de expansión lineal es mucho menor que el del vidrio ordinario (tabla 17-1). Explique por qué esto da lugar a la mayor resistencia al calor del Pyrex.
15. Un reloj de péndulo, exacto a los 20°C, ¿trabajará rápida o lentamente en un día caluroso (30°C)? El reloj tiene un péndulo sostenido en una varilla larga y delgada de latón.
16. Congelar una lata de bebida gaseosa hará que sus partes inferior y superior se abulten tanto que la lata no podrá sostenerse. ¿Qué ocurrió?
17. ¿Por qué cabe esperar que un termómetro de alcohol en vidrio sea más preciso que un termómetro de mercurio en vidrio?
18. Si la temperatura aumenta de 20 a 40°C, ¿la fuerza de flotabilidad sobre una esfera de aluminio sumergida en agua aumenta, disminuye o permanece igual?
19. Si se mide que un átomo tiene una masa de 6.7×10^{-27} kg, ¿qué átomo cree que es?
20. Desde un punto de vista práctico, ¿realmente importa qué gas se use en un termómetro de gas a volumen constante? Si es así, explique. [*Sugerencia:* Observe la figura 17-17].
21. Un barco cargado navegaba en agua de mar a 4°C; más tarde, navegó por un río en agua dulce, donde se hundió durante una tormenta. Explique por qué es más probable que un barco se hunda en agua dulce que en el mar abierto. [*Sugerencia:* Considere la fuerza de flotabilidad debida al agua].

Problemas

17–1 Teoría atómica

1. (I) ¿Cómo se compara el número de átomos en un anillo de oro de 21.5 g con el número de átomos en un anillo de plata de la misma masa?
2. (I) ¿Cuántos átomos hay en una moneda de cobre de 3.4 g?

17–2 Temperatura y termómetros

3. (I) *a*) La "temperatura ambiente" con frecuencia se considera como 68°F. ¿A cuánto equivale esto en la escala Celsius? *b*) La temperatura del filamento en una bombilla de luz es aproximadamente de 1900°C. ¿A cuánto equivale esto en la escala Fahrenheit?
4. (I) Entre las temperaturas de aire natural más altas y más bajas registradas en la Tierra están 136°F en el desierto de Libia y −129°F en la Antártida. ¿A cuánto equivalen estas temperaturas en la escala Celsius?
5. (I) Un termómetro indica que usted tiene una fiebre de 39.4°C. ¿A cuánto equivale esto en grados Fahrenheit?
6. (II) En un termómetro de alcohol en vidrio, la columna de alcohol tiene una longitud de 11.82 cm a 0.0°C y 21.85 cm de longitud a 100.0°C. ¿Cuál es la temperatura si la columna tiene longitud *a*) de 18.70 cm y *b*) de 14.60 cm?

17–4 Expansión térmica

7. (I) La torre Eiffel (figura 17-19) se construyó con hierro forjado y mide aproximadamente 300 m de alto. Estime cuánto cambia su altura entre enero (temperatura promedio de 2°C) y julio (temperatura promedio de 25°C). Ignore los ángulos de las vigas de hierro y considere la torre como una viga vertical.



FIGURA 17–19 Problema 7. La torre Eiffel en París.

8. (I) Una autopista de concreto se construye con losas de 12 m de largo (20°C). ¿Qué tan anchas deben ser las hendiduras de expansión entre las losas (a 15°C) para evitar el pandeo, si el rango de temperatura va de −30°C a +50°C?

9. (I) El Super Invar™, una aleación de hierro y níquel, es un material fuerte con un coeficiente de expansión térmica muy bajo (0.20×10^{-6}/C°). Una mesa de 1.6 m de largo hecha con esta aleación se usa para hacer mediciones sensibles con láser, donde se requieren tolerancias extremadamente altas. ¿Cuánto se expandirá esta mesa de aleación en su longitud, si la temperatura aumenta 5.0 C°? Compare con mesas hechas de acero.

10. (II) ¿A qué temperatura tendría que calentar una varilla de latón para que sea 1.0% más larga de lo que es a 25°C?

11. (II) La densidad del agua a 4°C es 1.00×10^3 kg/m³. ¿Cuál es la densidad del agua a 94°C? Suponga un coeficiente de expansión volumétrica constante.

12. (II) A una latitud dada, el agua del océano en la llamada "capa de mezcla" (a una profundidad aproximada de 50 m de la superficie) está aproximadamente a la misma temperatura debido a la acción mezcladora de las olas. Suponga que, por el calentamiento global, la temperatura de la capa de mezcla aumenta de manera uniforme en 0.5°C, mientras que la temperatura de las porciones más profundas del océano permanece sin cambio. Estime la elevación resultante en el nivel del mar. El océano cubre aproximadamente el 70% de la superficie de la Tierra.

13. (II) Para hacer un ajuste seguro, con frecuencia se usan remaches que son más grandes que el orificio del remache, de manera que el remache debe enfriarse (por lo general en hielo seco) antes de colocarlo en el orificio. Un remache de acero de 1.872 cm de diámetro se colocará en un orificio de 1.870 cm de diámetro en un metal a 20°C. ¿A qué temperatura se debe enfriar el remache si debe ajustar en el orificio?

14. (II) Una placa rectangular uniforme de longitud ℓ y ancho w tiene un coeficiente de expansión lineal α. Demuestre que, si se desprecian cantidades muy pequeñas, el cambio en el área de la placa debido a un cambio de temperatura ΔT es $\Delta A = 2\alpha\ell w\,\Delta T$. Véase la figura 17-20.

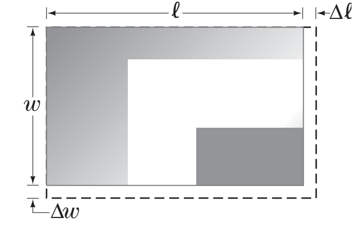


FIGURA 17–20 Problema 14. Una placa rectangular se calienta.

15. (II) Una esfera de aluminio mide 8.75 cm de diámetro. ¿Cuál será su cambio en volumen si se calienta de 30 a 180°C?

16. (II) Un automóvil típico tiene 17 L de refrigerante líquido circulando a una temperatura de 93°C a través del sistema de enfriamiento del motor. Suponga que, en esta condición normal, el refrigerante llena por completo el volumen de 3.5 L del radiador de aluminio y las cavidades internas de 13.5 L dentro del motor de acero. Cuando un automóvil se sobrecalienta, el radiador, el motor y el refrigerante se expanden, y un pequeño depósito conectado al radiador captura cualquier derrame de refrigerante resultante. Estime cuánto refrigerante se derrama al depósito si el sistema se calienta de 93 a 105°C. Modele el radiador y el motor como cascarones huecos de aluminio y acero, respectivamente. El coeficiente de expansión volumétrica para el refrigerante es $\beta = 410 \times 10^{-6}$/C°.

17. (II) Se observa que 55.50 mL de agua a 20°C llenan por completo un contenedor hasta el borde. Cuando el contenedor y el agua se calientan a 60°C, se pierden 0.35 g de agua. *a*) ¿Cuál es el coeficiente de expansión volumétrica del contenedor? *b*) ¿Cuál es el material más probable del contenedor? La densidad del agua a 60°C es 0.98324 g/mL.

18. (II) *a*) Un tapón de latón se colocará en un anillo hecho de hierro. A 15°C, el diámetro del tapón es de 8.753 cm y el del interior del anillo es de 8.743 cm. ¿A qué temperatura común se deben llevar ambos con la finalidad de que ajusten? *b*) ¿Y si el tapón fuera de hierro y el anillo de latón?

19. (II) Si un fluido está contenido en un recipiente largo y estrecho, de manera que pueda expandirse esencialmente sólo en una dirección, demuestre que el coeficiente de expansión lineal efectivo α es aproximadamente igual al coeficiente de expansión volumétrica β.

20. (II) *a*) Demuestre que el cambio en la densidad ρ de un sustancia, cuando la temperatura cambia en ΔT, está dada por $\Delta\rho = -\beta\rho\,\Delta T$. *b*) ¿Cuál es el cambio fraccional en densidad de una esfera de plomo cuya temperatura disminuye de 25°C a −55°C?

21. (II) Las botellas de vino nunca se llenan por completo: en el cuello con forma cilíndrica (diámetro interior $d = 18.5$ mm) de la botella de vidrio se deja un pequeño volumen de aire considerando el coeficiente de expansión térmica bastante grande del vino. La distancia H entre la superficie del contenido líquido y la parte inferior del corcho se llama "altura de la cámara de aire" (figura 17-21) y por lo general es $H = 1.5$ cm para una botella de 750 mL llena a 20°C. Debido a su contenido alcohólico, el coeficiente de expansión volumétrica del vino es aproximadamente el doble del coeficiente del agua; en comparación, la expansión térmica del vidrio se puede despreciar. Estime H si la botella se mantiene *a*) a 10°C, *b*) a 30°C.



FIGURA 17–21 Problema 21.

22. (III) *a*) Determine una fórmula para el cambio en área superficial de una esfera sólida uniforme de radio r, si su coeficiente de expansión lineal es α (que se supone constante) y su temperatura cambia en ΔT. *b*) ¿Cuál es el aumento en el área de una esfera de hierro sólida de 60.0 cm de radio si su temperatura se eleva de 15 a 275°C?

23. (III) El péndulo de un reloj está hecho de latón e indica la hora exacta a 17°C. ¿Cuánto tiempo se gana o se pierde en un año si el reloj se mantiene a 28°C? (Suponga que se aplica la dependencia de la frecuencia como función de la longitud para un péndulo simple).

24. (III) Una rueda cilíndrica de aluminio sólido, de 28.4 kg y radio de 0.41 m, gira en torno a su eje en cojinetes sin fricción con velocidad angular $\omega = 32.8$ rad/s. Si luego su temperatura se eleva de 20.0°C a 95.0°C, ¿cuál es el cambio fraccional en ω?

* 17–5 Tensiones térmicas

***25.** (I) Una barra de aluminio tiene la longitud deseada cuando está a 18°C. ¿Cuánto esfuerzo se requiere para mantenerla a esa longitud si la temperatura aumenta a 35°C?

***26.** (II) *a*) Una viga I horizontal de acero, con área transversal de 0.041 m², se conecta rígidamente a dos vigas de acero verticales. Si la viga I se instaló cuando la temperatura era de 25°C, ¿qué tensión se desarrollará en la viga I cuando la temperatura disminuya a −25°C? *b*) ¿Se supera la resistencia a la ruptura del acero? *c*) ¿Qué tensión se desarrollará si la viga es de concreto y tiene una área transversal de 0.13 m²? ¿Se fracturará?

*27. (III) Un barril de 134.122 cm de diámetro a 20°C se va a cerrar mediante una banda de hierro. La banda circular tiene un diámetro interior de 134.110 cm a 20°C; mide 9.4 cm de ancho y 0.65 cm de grosor. *a*) ¿A qué temperatura se debe calentar la banda de manera que ajuste sobre el barril? *b*) ¿Cuál será la tensión en la banda cuando se enfríe a 20°C?

17–6 Leyes de los gases; temperatura absoluta

28. (I) ¿A cuánto equivalen las siguientes temperaturas en la escala Kelvin: *a*) 66°C, *b*) 92°F, *c*) −55°C, *d*) 5500°C?

29. (I) ¿A qué temperatura corresponde el cero absoluto en la escala Fahrenheit?

30. (II) Las temperaturas típicas en el interior de la Tierra y el Sol son de aproximadamente 4000°C y 15×10^6 °C, respectivamente. *a*) ¿Cuál es el equivalente de estas temperaturas en kelvin? *b*) ¿Qué error porcentual se comete en cada caso si una persona olvida convertir °C a K?

17–7 y 17–8 Ley de los gases ideales

31. (I) Si 3.80 m^3 de un gas inicialmente a PTE se someten a una presión de 3.20 atm, la temperatura del gas se eleva a 38.0°C. ¿Cuál es el volumen?

32. (I) En un motor de combustión interna, el aire a presión atmosférica y una temperatura de aproximadamente 20°C se comprime en el cilindro mediante un pistón a $\frac{1}{8}$ de su volumen original (índice de compresión = 8.0). Estime la temperatura del aire comprimido, suponiendo que la presión alcanza 40 atm.

33. (II) Calcule la densidad del hidrógeno a PTE usando la ley del gas ideal.

34. (II) Si 14.00 moles de gas helio se encuentran a 10.0°C y una presión manométrica de 0.350 atm, calcule *a*) el volumen del gas helio en estas condiciones y *b*) la temperatura si el gas se comprime precisamente a la mitad del volumen a una presión manométrica de 1.00 atm.

35. (II) Un tubo de ensayo tapado atrapa 25.0 cm^3 de aire a una presión de 1.00 atm y 18°C de temperatura. El tapón con forma cilíndrica en la boca del tubo de ensayo tiene un diámetro de 1.50 cm y "botará" del tubo de ensayo si sobre el tapón se aplica una fuerza neta hacia arriba de 10.0 N. ¿A qué temperatura tendría que calentarse el aire atrapado para que "bote" el tapón? Suponga que el aire que rodea al tubo de ensayo siempre está a una presión de 1.00 atm.

36. (II) Un tanque de almacenamiento contiene 21.6 kg de nitrógeno (N_2) a una presión absoluta de 3.85 atm. ¿Cuál será la presión si el nitrógeno se sustituye con una masa igual de CO_2 a la misma temperatura?

37. (II) Un tanque de almacenamiento a PTE contiene 28.5 kg de nitrógeno (N_2). *a*) ¿Cuál es el volumen del tanque? *b*) ¿Cuál es la presión si se agregan 25.0 kg adicionales de nitrógeno sin modificar la temperatura?

38. (II) Un tanque de buceo se llena con aire a una presión de 204 atm cuando la temperatura del aire es de 29°C. Luego, un buzo salta al océano y, después de un corto tiempo en la superficie, comprueba la presión del tanque y descubre que sólo es de 194 atm. Suponiendo que el buzo inhaló una cantidad despreciable de aire del tanque, ¿cuál es la temperatura del agua del océano?

39. (II) ¿Cuál es la presión dentro de un contenedor de 38.0 L que retiene 105.0 kg de gas argón a 20.0°C?

40. (II) Un tanque contiene 30.0 kg de gas O_2 a una presión manométrica de 8.20 atm. Si el oxígeno se sustituye con helio a la misma temperatura, ¿cuántos kilogramos de helio se necesitarán para producir una presión manométrica de 7.00 atm?

41. (II) Un contenedor metálico sellado contiene un gas a 20.0°C y 1.00 atm. ¿A qué temperatura se debe calentar el gas para que la presión se duplique a 2.00 atm? (Ignore la expansión del contenedor).

42. (II) Un neumático se llena con aire a 15°C a una presión manométrica de 250 kPa. Si el neumático alcanza una temperatura de 38°C, ¿qué fracción del aire original se debe eliminar si se debe mantener la presión original de 250 kPa?

43. (II) Si 61.5 L de oxígeno a 18.0°C y una presión absoluta de 2.45 atm se comprimen a 48.8 L y al mismo tiempo la temperatura se eleva a 56.0°C, ¿cuál será la nueva presión?

44. (II) Un globo lleno con helio escapa de la mano de un niño al nivel del mar cuando la temperatura es de 20.0°C. Cuando el globo llega a una altitud de 3600 m, donde la temperatura es de 5.0°C y la presión es sólo de 0.68 atm, ¿cómo se comparará su volumen con el que tenía al nivel del mar?

45. (II) Un contenedor metálico sellado puede soportar una diferencia de presión de 0.50 atm. Inicialmente el contenedor está lleno con un gas ideal a 18°C y 1.0 atm. ¿A qué temperatura puede usted enfriar el contenedor antes de que se colapse? (Ignore cualquier cambio en el volumen del contenedor debido a expansión térmica).

46. (II) Usted compra una bolsa "hermética" de papas fritas empacada a nivel del mar y la lleva consigo en un vuelo de avión. Cuando saca las papas del equipaje, nota que la bolsa se "hinchó" notablemente. Las cabinas de avión por lo general están presurizadas a 0.75 atm, y suponiendo que la temperatura dentro de un avión es aproximadamente la misma que dentro de una planta procesadora de papas fritas, ¿en qué porcentaje se "hinchó" la bolsa en comparación con el volumen que tenía cuando se empacó?

47. (II) Un tanque de buceo típico, cuando está completamente cargado, contiene 12 L de aire a 204 atm. Suponga que un tanque "vacío" contiene aire a 34 atm y se conecta a un compresor de aire a nivel del mar. El compresor toma aire de la atmósfera, lo comprime a alta presión y luego inyecta ese aire a alta presión en el tanque de buceo. Si la tasa de flujo (promedio) del aire desde la atmósfera al puerto de entrada del compresor de aire es de 290 L/min, ¿cuánto tardará en cargarse completamente el tanque de buceo? Suponga que el tanque permanece a la misma temperatura que el aire circundante durante el proceso de llenado.

48. (III) Un recipiente sellado que contiene 4.0 moles de gas se comprime, lo que hace cambiar su volumen de 0.020 a 0.018 m^3. Durante este proceso, la temperatura disminuye en 9.0 K mientras la presión aumenta en 450 Pa. ¿Cuáles eran la presión y la temperatura originales del gas en el contenedor?

49. (III) Compare el valor para la densidad del vapor de agua a exactamente 100°C y 1 atm (tabla 13-1) con el valor predicho a partir de la ley del gas ideal. ¿Por qué esperaría una diferencia?

50. (III) Una burbuja de aire en el fondo de un lago a 37.0 m de profundidad tiene un volumen de 1.00 cm^3. Si la temperatura en el fondo es de 5.5°C y en la superficie de 18.5°C, ¿cuál es el volumen de la burbuja justo antes de llegar a la superficie?

17–9 Ley del gas ideal en términos de moléculas; número de Avogadro

51. (I) Calcule el número de moléculas/m^3 en un gas ideal a PTE.

52. (I) ¿Cuántos moles de agua hay en 1.000 L a PTE? ¿Cuántas moléculas?

53. (II) ¿Cuál es la presión en una región del espacio exterior donde hay 1 molécula/cm^3 y la temperatura es de 3 K?

54. (II) Estime el número de *a*) moles y *b*) moléculas de agua en todos los océanos de la Tierra. Suponga que el agua cubre el 75% de la Tierra con una profundidad promedio de 3 km.

55. (II) La menor presión alcanzable con el uso de las mejores técnicas de vacío disponibles es de aproximadamente 10^{-12} N/m^2. A tal presión, ¿cuántas moléculas hay por cm^3 a 0°C?

56. (II) ¿Un gas es principalmente espacio vacío? Compruébelo al suponer que la extensión espacial de las moléculas de gas común es de aproximadamente $\ell_0 = 0.3$ nm, así que una molécula ocupa un volumen aproximado igual a ℓ_0^3. Suponga PTE.

57. (III) Estime cuántas moléculas de aire hay en cada inhalación de 2.0 L que usted realiza, que también estuvieron presentes en el último aliento de Galileo. [*Sugerencia:* Suponga que la atmósfera tiene aproximadamente 10 km de alto y densidad constante].

*17–10 Escala de temperatura del gas ideal

*58. (I) En un termómetro de gas a volumen constante, ¿cuál es la razón límite entre la presión en el punto de ebullición del agua a 1 atm y la del punto triple? (Conserve cinco cifras significativas).

*59. (I) En el punto de ebullición del azufre (444.6°C), la presión en un termómetro de gas a volumen constante es de 187 torr. Estime *a*) la presión en el punto triple del agua, *b*) la temperatura cuando la presión en el termómetro es de 118 torr.

*60. (II) Use la figura 17-17 para determinar la imprecisión de un termómetro de gas a volumen constante que usa oxígeno, si lee una presión $P = 268$ torr en el punto de ebullición del agua a 1 atm. Exprese la respuesta *a*) en kelvin y *b*) como porcentaje.

*61. (III) Un termómetro de gas a volumen constante se usará para determinar la temperatura del punto de fusión de una sustancia. La presión en el termómetro a esta temperatura es de 218 torr; en el punto triple del agua, la presión es de 286 torr. Ahora se libera algo de gas del bulbo del termómetro, de manera que la presión en el punto triple del agua se vuelve 163 torr. A la temperatura de la sustancia en fusión, la presión es de 128 torr. Estime, de manera tan precisa como sea posible, la temperatura del punto de fusión de la sustancia.

Problemas generales

62. Una taza medidora de Pyrex se calibró a temperatura ambiente normal. ¿Cuánto error se cometerá en una receta que pide 350 mL de agua fría, si el agua y la taza están calientes, a 95°C, y no a temperatura ambiente? Desprecie la expansión del vidrio.

63. Un flexómetro preciso de acero se calibró a 15°C. A 36°C, *a*) ¿su lectura será por arriba o por abajo del volumen correcto y *b*) cuál será el error porcentual?

64. Una caja cúbica de 6.15×10^{-2} m^3 de volumen se llena con aire a presión atmosférica a 15°C. La caja se cierra y se calienta a 185°C. ¿Cuál es la fuerza neta sobre cada lado de la caja?

65. La presión manométrica en un cilindro de gas helio inicialmente es de 32 atm. Después de inflar muchos globos, la presión manométrica disminuyó a 5 atm. ¿Qué fracción del gas original permanece en el cilindro?

66. Si una varilla de longitud original ℓ_1 cambia su temperatura de T_1 a T_2, determine una fórmula para su nueva longitud ℓ_2 en términos de T_1, T_2 y α. Suponga *a*) $\alpha =$ constante, *b*) $\alpha = \alpha(T)$ es una función de la temperatura, y *c*) $\alpha = \alpha_0 + bT$, donde α_0 y b son constantes.

67. Si un buzo llena sus pulmones a plena capacidad de 5.5 L cuando está a 8.0 m bajo la superficie, ¿a qué volumen se expandirían sus pulmones si sube rápidamente a la superficie? ¿Es esto aconsejable?

68. *a*) Use la ley del gas ideal para demostrar que, para un gas ideal a presión constante, el coeficiente de expansión volumétrica es igual a $\beta = 1/T$, donde T es la temperatura kelvin. Compare con la tabla 17-1 para gases a $T = 293$ K. *b*) Demuestre que el módulo volumétrico (sección 12-4) para un gas ideal que se mantiene a temperatura constante es $B = P$, donde P es la presión.

69. Una casa tiene un volumen de 870 m^3. *a*) ¿Cuál es la masa total de aire dentro de la casa a 15°C? *b*) Si la temperatura disminuye a −15°C, qué masa de aire entra o sale de la casa?

70. Suponga que, en un universo alterno, las leyes de la física son muy diferentes de las nuestras y que los gases "ideales" se comportan de la siguiente manera: i) A temperatura constante, la presión es inversamente proporcional al cuadrado del volumen. ii) A presión constante, el volumen varía directamente con la potencia $\frac{2}{3}$ de la temperatura. iii) A 273.15 K y 1.00 atm de presión, 1.00 mol de un gas ideal ocupa 22.4 L. Obtenga la forma de la ley del gas ideal en ese universo alterno, incluido el valor de la constante de gas R.

71. Un cubo de hierro flota en un tazón de mercurio líquido a 0°C. *a*) Si la temperatura se eleva a 25°C, ¿el cubo flotará más alto o más bajo en el mercurio? *b*) ¿En qué porcentaje cambiará la fracción de volumen sumergido?

72. *a*) El tubo de un termómetro de mercurio tiene un diámetro interior de 0.140 mm. El bulbo tiene un volumen de 0.275 cm^3. ¿Cuánto se moverá el hilo de mercurio cuando la temperatura cambie de 10.5°C a 33.0°C? Tome en cuenta la expansión del vidrio Pyrex. *b*) Determine una fórmula para el cambio en la longitud de la columna de mercurio en términos de las variables relevantes. Ignore el volumen del tubo comparado con el volumen del bulbo.

73. A partir del valor conocido de la presión atmosférica en la superficie de la Tierra, estime el número total de moléculas de aire en la atmósfera de la Tierra.

74. Estime la diferencia porcentual en la densidad del hierro a PTE, y cuando es un sólido en la profundidad de la Tierra, donde la temperatura es de 2000°C y la presión de 5000 atm. Suponga que el módulo volumétrico (90×10^9 N/m^2) y el coeficiente de expansión volumétrica no varían con la temperatura y son los mismos que a PTE.

75. ¿Cuál es la distancia promedio entre las moléculas de nitrógeno a PTE?

76. Un globo de helio, que se supone como una esfera perfecta, tiene un radio de 22.0 cm. A temperatura ambiente (20°C), su presión interna es de 1.06 atm. Determine el número de moles de helio en el globo y la masa de helio necesaria para inflar el globo a estos valores.

77. Un cilindro estándar de oxígeno usado en un hospital tiene presión manométrica = 2000 psi (13,800 kPa) y volumen = 14 L (0.014 m^3) a $T = 295$ K. ¿Cuánto durará el cilindro si la tasa de flujo, medida a presión atmosférica, se mantiene constante a 2.4 L/min?

78. Una tapa de latón se enrosca firmemente en un frasco de vidrio a 15°C. Para ayudar a abrir el frasco, se le coloca en un baño de agua caliente. Después de este tratamiento, las temperaturas de la tapa y el frasco son, ambas, de 75°C. El diámetro interior de la tapa es de 8.0 cm. Encuentre el tamaño de la brecha (diferencia en radio) que se produce mediante este procedimiento.

79. La densidad de la gasolina a 0°C es 0.68×10^3 kg/m^3. *a*) ¿Cuál es la densidad en un día caluroso, cuando la temperatura es de 35°C? *b*) ¿Cuál es el cambio porcentual en la densidad?

80. Un globo de helio tiene volumen V_0 y temperatura T_0 a nivel del mar, donde la presión es P_0 y la densidad del aire ρ_0. Se permite que el globo flote en el aire a una altitud y, donde la temperatura es T_1. *a*) Demuestre que el volumen ocupado por el globo es entonces $V = V_0(T_1/T_0)e^{+cy}$ donde $c = \rho_0 g/P_0 = 1.25 \times 10^{-4}\,\mathrm{m}^{-1}$ *b*) Demuestre que la fuerza de flotación no depende de la altitud y. Suponga que las pieles del globo mantiene la presión del helio en un factor constante de 1.05 veces mayor que la presión exterior. [*Sugerencia:* Suponga que el cambio de presión con la altitud es $P = P_0 e^{-cy}$, como en el ejemplo 13-5, capítulo 13].

81. El primer estándar de longitud, adoptado en el siglo XVIII, fue una barra de platino con dos marcas muy finas separadas con lo que se definió exactamente la longitud de un metro. Si esta barra estándar debía ser exacta dentro de un intervalo de $\pm$ 1.0 μm, ¿de qué manera debían controlar los custodios la temperatura? El coeficiente de expansión lineal es 9×10^{-6}/C°.

82. Un tanque de buceo, cuando está completamente lleno, tiene una presión de 180 atm a 20°C. El volumen del tanque es 11.3 L. *a*) ¿Cuál sería el volumen del aire a 1.00 atm y a la misma temperatura? *b*) Antes de entrar al agua, una persona consume 2.0 L de aire en cada respiración, y respira 12 veces por minuto. A esta tasa, ¿cuánto duraría el tanque? *c*) A una profundidad de 20.0 m en agua de mar a una temperatura de 10°C, ¿cuánto durará el mismo tanque, suponiendo que la tasa de respiración no cambia?

83. Un controlador de temperatura, diseñado para trabajar en un ambiente vaporoso, incluye una tira bimetálica fabricada en latón y acero, conectada en sus extremos mediante remaches. Cada uno de los metales tiene 2.0 mm de grosor. A 20°C, la tira mide 10.0 cm de largo y es recta. Encuentre el radio de curvatura r del ensamblado a 100°C. Véase la figura 17-22.

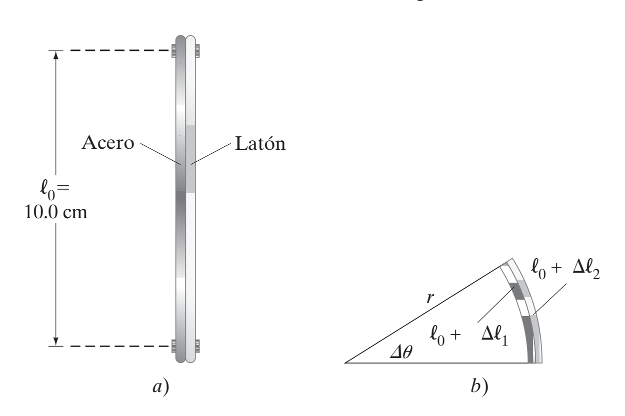


FIGURA 17–22 Problema 83.

84. Un alambre de cobre se comba 50.0 cm entre dos postes separados 30.0 m cuando la temperatura es de −15°C. Estime la cantidad de combado cuando la temperatura es de +35°C. [*Sugerencia:* Realice una estimación suponiendo que la forma del alambre es aproximadamente un arco de círculo; las ecuaciones difíciles a veces se pueden resolver usando valores supuestos].

85. Quienes practican esnórquel respiran a través de cortos tubos de buceo ("esnórquel") mientras nadan bajo el agua muy cerca de la superficie. Un extremo del esnórquel está en la boca de la persona que bucea mientras el otro extremo sobresale de la superficie del agua. Por desgracia, un esnórquel no puede soportar la respiración a mayor profundidad: una persona no puede respirar a través del esnórquel a una profundidad mayor de 30 cm. Con base en esta afirmación, ¿cuál es el cambio fraccional aproximado en el volumen de los pulmones de una persona común cuando respira? Suponga que la presión del aire en los pulmones del individuo que practica el esnórquel coincide con la presión del agua circundante (es decir, las presiones están en equilibrio).

* Problemas numéricos/por computadora

***86.** (II) Un termopar consiste en una unión de dos diferentes tipos de materiales que producen un voltaje dependiendo de su temperatura. Los voltajes de un termopar que se registraron cuando estaba a diferentes temperaturas son los siguientes:

Temperatura (°C)	50	100	200	300
Voltaje (mV)	1.41	2.96	5.90	8.92

Utilice una hoja de cálculo para ajustar estos datos a una ecuación cúbica y determine la temperatura cuando el termopar produce 3.21 mV. Obtenga un segundo valor de la temperatura ajustando los datos a una ecuación cuadrática.

***87.** (III) Usted tiene un frasco con un líquido desconocido que puede ser octano (gasolina), agua, glicerina o alcohol etílico. Usted intenta determinar la identidad del líquido al estudiar cómo se modifica su volumen con los cambios de temperatura. Llena un cilindro graduado Pyrex a 100.00 mL con el líquido cuando éste y el cilindro están a 0.000°C. Eleva la temperatura en incrementos de cinco grados, lo que permite que el cilindro graduado y el líquido lleguen al equilibrio en cada temperatura. Usted lee en el cilindro graduado los volúmenes que se listan abajo para cada temperatura. Tome en cuenta la expansión del cilindro de vidrio Pyrex. Grafique los datos (si lo desea, utilizando un programa de hoja de cálculo) y determine la pendiente de la línea para encontrar el coeficiente de expansión volumétrica β efectivo (combinado). Luego determine β para el líquido y determine qué líquido contiene el frasco.

Temperatura (°C)	Lectura de volumen (mL aparentes)
0.000	100.00
5.000	100.24
10.000	100.50
15.000	100.72
20.000	100.96
25.000	101.26
30.000	101.48
35.000	101.71
40.000	101.97
45.000	102.20
50.000	102.46

Respuestas a los ejercicios

A: −40°.

B: *d*).

C: 8 mm.

D: i) Mayor, ii) igual, iii) menor.

E: *a*).

F: *b*).

G: *b*) Menos.



En esta escena invernal en el parque Yellowstone, se reconocen los tres estados de la materia en el caso del agua: líquido, sólido (nieve y hielo) y gas (vapor). En este capítulo examinamos la teoría microscópica de la materia en términos de átomos y moléculas que están en continuo movimiento; esta teoría se conoce como teoría cinética. Veremos que la temperatura de un gas se relaciona directamente con la energía cinética promedio de sus moléculas. Consideraremos gases ideales, aunque también estudiaremos algunos gases reales y los cambios de fase, incluidos la evaporación, la presión de vapor y la humedad.



Teoría cinética de los gases

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!
La rapidez típica de una molécula de aire a temperatura ambiente (20°C) es

a) casi en reposo (< 10 km/h).
b) del orden de 10 km/h.
c) del orden de 100 km/h.
d) del orden de 1000 km/h.
e) casi la rapidez de la luz.

CONTENIDO

El análisis de la materia en términos de átomos en continuo movimiento aleatorio se llama **teoría cinética**. Ahora investigaremos las propiedades de un gas desde el punto de vista de la teoría cinética, que se basa en las leyes de la mecánica clásica. Sin embargo, aplicar las leyes de Newton a cada molécula del vasto número que existe en un gas ($> 10^{25}/m^3$ a PTE) está más allá de la capacidad de cualquier computadora actual. En vez de ello se emplea un enfoque estadístico y se determinan los promedios de ciertas cantidades; esos promedios corresponden a variables macroscópicas. Desde luego, se demandará que la descripción microscópica corresponda a las propiedades macroscópicas de los gases; de otro modo, la teoría sería de poco valor. Y algo más relevante aún: se llegará a una importante relación entre la energía cinética promedio de las moléculas en un gas y la temperatura absoluta.

18–1 La ley del gas ideal y la interpretación molecular de la temperatura

Haremos las siguientes suposiciones acerca de las moléculas en un gas. Aunque tales suposiciones reflejan una visión simple de un gas, los resultados que predicen corresponden a las características esenciales de los gases reales que están a bajas presiones y lejos del punto de licuefacción. En esas condiciones, los gases reales siguen la ley del gas ideal muy de cerca y, de hecho, el gas descrito a continuación se considera como **gas ideal**.

Las suposiciones que representan los postulados básicos de la teoría cinética para un gas ideal, son:

1. Hay un gran número de moléculas, N, cada una con masa m, que se mueven en direcciones aleatorias con diferente rapidez. Esta suposición está en concordancia con la observación de que un gas llena su contenedor; en el caso del aire en la Tierra, es la fuerza de gravedad la que evita que el aire escape.
2. Las moléculas están, en promedio, alejadas unas de otras. Esto es, su separación promedio es mucho mayor que el diámetro de cada molécula.
3. Se supone que las moléculas obedecen las leyes de la mecánica clásica y que estas moléculas interactúan unas con otras sólo cuando chocan. Aunque las moléculas ejercen mutuamente fuerzas de atracción débiles entre colisiones, la energía potencial asociada con estas fuerzas es pequeña en comparación con la energía cinética, y por el momento se le ignora.
4. Se supone que las colisiones con otra molécula o con la pared del contenedor son perfectamente elásticas, como sucede con las colisiones de bolas de billar (capítulo 9). Suponemos que las colisiones son de muy corta duración en comparación con el tiempo que transcurre entre colisiones. De esta forma, podemos ignorar la energía potencial asociada con las colisiones en comparación con la energía cinética entre colisiones.

Podemos ver cómo esta visión cinética de un gas permite explicar la ley de Boyle (sección 17-6). La presión ejercida sobre la pared de un contenedor del gas se debe al bombardeo constante de las moléculas. Si el volumen se reduce, por ejemplo, a la mitad, las moléculas estarán más cerca unas de otras y el doble de ellas golpeará una área dada de la pared por segundo. En consecuencia, se espera que la presión se duplique, en concordancia con la ley de Boyle.

Ahora calculemos cuantitativamente la presión que ejerce un gas sobre su contenedor con base en la teoría cinética. Imaginemos que las moléculas están dentro de un contenedor rectangular (en reposo) cuyos lados tienen área A y cuya longitud es ℓ, como se muestra en la figura 18-1a. La presión ejercida por el gas sobre las paredes de su contenedor, de acuerdo con nuestro modelo, se debe a las colisiones de las moléculas con las paredes. Ahora enfoquemos la atención en la pared, de área A, en el lado izquierdo del contenedor y examinemos lo que ocurre cuando una molécula golpea esa pared, como se muestra en la figura 18-1b. Esta molécula ejerce una fuerza sobre la pared y, a la vez, de acuerdo con la tercera ley de Newton, la pared ejerce una fuerza igual y opuesta sobre la molécula. La magnitud de esta fuerza sobre la molécula, de acuerdo con la segunda ley de Newton, es igual a la tasa de cambio de la cantidad de movimiento de la molécula, $F = dp/dt$ (ecuación 9-2). Si se supone que la colisión es elástica, sólo cambia el componente x de la cantidad de movimiento de la molécula, y lo hace de $-mv_x$ (se mueve en la dirección x negativa) a $+mv_x$. Por lo tanto, el cambio en la cantidad de movimiento de la molécula, $\Delta(mv)$, que es la cantidad de movimiento final menos la cantidad de movimiento inicial, es

$$\Delta(mv) = mv_x - (-mv_x) = 2mv_x$$

para una colisión. Esta molécula realizará muchas colisiones con la pared, cada una separada por un tiempo Δt, que es el tiempo que tarda la molécula en viajar a través del contenedor y regresar, una distancia (componente x) igual a 2ℓ. Por lo tanto, $2\ell = v_x \Delta t$, o

$$\Delta t = \frac{2\ell}{v_x}.$$

El tiempo Δt entre colisiones es muy corto, de manera que el número de colisiones por segundo es muy grande. De esta forma, la fuerza promedio —calculada a partir de muchas colisiones— será igual al cambio en la cantidad de movimiento durante una colisión dividida entre el tiempo de una colisión a otra (segunda ley de Newton):

$$F = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = \frac{2mv_x}{2\ell/v_x} = \frac{mv_x^2}{\ell}. \qquad \text{[debida a una molécula]}$$

Durante su paso de ida y vuelta a través del contenedor, la molécula puede chocar con las tapas y los lados del contenedor, pero esto no altera su componente x de la cantidad de movimiento y, en consecuencia, no altera el resultado. También choca con otras moléculas, lo que cambia su v_x. Sin embargo, cualquier pérdida (o ganancia) en la cantidad de movimiento será adquirido por otras moléculas, y dado que finalmente sumaremos todas las moléculas, este efecto será incluido. Así que el resultado anterior no se altera.

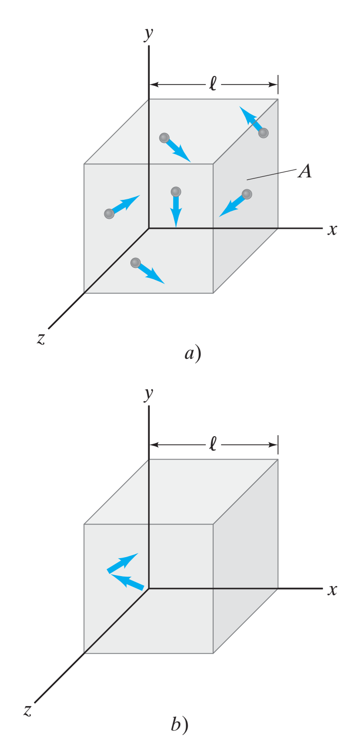


FIGURA 18–1 *a*) Moléculas de un gas que se mueven en un contenedor rectangular. *b*) Las flechas indican la cantidad de movimiento de una molécula conforme rebota en la pared.

La fuerza real debida a una molécula es intermitente; sin embargo, puesto que un gran número de moléculas golpean la pared por segundo, la fuerza es, en promedio, casi constante. Para calcular la fuerza debida a *todas* las moléculas en el contenedor, tenemos que sumar las aportaciones de cada una. Por lo tanto, la fuerza neta sobre la pared es

$$F = \frac{m}{\ell}\left(v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \cdots + v_{xN}^2\right),$$

donde v_{x1} significa v_x para la molécula número 1 (arbitrariamente se asigna a cada molécula un número) y la suma se extiende al número total de moléculas N en el contenedor. El valor promedio del cuadrado del componente x de velocidad es

$$\overline{v_x^2} = \frac{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + \cdots + v_{xN}^2}{N}, \qquad \textbf{(18–1)}$$

donde la barra $(-)$ significa "promedio". Por lo tanto, la fuerza se representa como

$$F = \frac{m}{\ell} N\overline{v_x^2}.$$

Sabemos que el cuadrado de cualquier vector es igual a la suma de los cuadrados de sus componentes (teorema de Pitágoras). En consecuencia, $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ para cualquier velocidad v. Al tomar los promedios, obtenemos

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}.$$

Como se supone que las velocidades de las moléculas en un gas son aleatorias, no existe preferencia por una dirección u otra. Por lo tanto,

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}.$$

Al combinar esta relación con la anterior, obtenemos

$$\overline{v^2} = 3\overline{v_x^2}.$$

Esto se sustituye en la ecuación para la fuerza neta F:

$$F = \frac{m}{\ell} N \frac{\overline{v^2}}{3}.$$

La presión sobre la pared es, entonces,

$$P = \frac{F}{A} = \frac{1}{3}\frac{Nm\overline{v^2}}{A\ell}$$

o

$$P = \frac{1}{3}\frac{Nm\overline{v^2}}{V}, \qquad \textbf{(18–2)}$$

donde $V = \ell A$ es el volumen del contenedor. Éste es el resultado que buscábamos: la presión ejercida por un gas sobre su contenedor expresada en términos de propiedades moleculares.

La ecuación 18-2 se reescribe en una forma más clara si se multiplican ambos lados por V y se reordena el lado derecho:

$$PV = \tfrac{2}{3}N\left(\tfrac{1}{2}m\overline{v^2}\right). \qquad \textbf{(18–3)}$$

La cantidad $\frac{1}{2}m\overline{v^2}$ es la energía cinética promedio $\overline{K}$ de las moléculas en el gas. Si comparamos la ecuación 18-3 con la ecuación 17-4, la ley del gas ideal $PV = NkT$, vemos que las dos concuerdan si

TEMPERATURA RELACIONADA CON LA ENERGÍA CINÉTICA PROMEDIO DE LAS MOLÉCULAS

$$\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{2}m\overline{v^2}\right) = kT,$$

o

$$\overline{K} = \tfrac{1}{2}m\overline{v^2} = \tfrac{3}{2}kT. \qquad \text{[ideal gas]} \quad \textbf{(18–4)}$$

Esta ecuación nos dice que

la energía cinética traslacional promedio de las moléculas en movimiento aleatorio en un gas ideal es directamente proporcional a la temperatura absoluta del gas.

Cuanto mayor sea la temperatura, de acuerdo con la teoría cinética, más rápido se mueven las moléculas en promedio. Esta relación es uno de los triunfos de la teoría cinética.

EJEMPLO 18–1 **Energía cinética molecular.** ¿Cuál es la energía cinética traslacional promedio de las moléculas en un gas ideal a 37°C?

PLANTEAMIENTO Utilizamos la temperatura absoluta en la ecuación 18-4.

SOLUCIÓN Convertimos 37°C a 310 K e incorporamos esto en la ecuación 18-4:

$$\overline{K} = \tfrac{3}{2}kT = \tfrac{3}{2}\left(1.38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}\right)(310\,\mathrm{K}) = 6.42 \times 10^{-21}\,\mathrm{J}.$$

NOTA Un mol de moléculas tendría una energía cinética traslacional total igual a $\left(6.42 \times 10^{-21}\,\mathrm{J}\right)\left(6.02 \times 10^{23}\right) = 3860\,\mathrm{J}$, que es igual a la energía cinética de una piedra de 1 kg que viaja casi a 90 m/s.

EJERCICIO A En una mezcla de los gases oxígeno y helio, ¿cuál enunciado es válido? *a*) Las moléculas de helio se moverán más rápido que las moléculas de oxígeno, en promedio; *b*) ambos tipos de moléculas se moverán con la misma rapidez; *c*) las moléculas de oxígeno, en promedio, se moverán más rápidamente que las moléculas de helio; *d*) la energía cinética del helio superará a la del oxígeno; *e*) ninguno de los enunciados anteriores es válido.

La ecuación 18-4 no sólo se cumple para gases, sino que también se aplica de manera razonablemente precisa a líquidos y sólidos. De esta forma, el resultado del ejemplo 18-1 se aplicaría a moléculas dentro de células vivas a la temperatura corporal (37°C).

La ecuación 18-4 sirve para calcular la rapidez promedio a la que se mueven las moléculas. Note que el promedio en las ecuaciones de la 18-1 a 18-4 es sobre el *cuadrado* de la rapidez. La raíz cuadrada de $\overline{v^2}$ se llama rapidez **cuadrática media**, v_{rms} (rms, por las siglas de *root-mean-square*), ya que se toma la *raíz* cuadrada de la *media* de los *cuadrados* de la rapidez:

$$v_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \qquad \textbf{(18–5)}$$

EJEMPLO 18–2 **Rapidez de las moléculas de aire.** ¿Cuál es la rapidez rms de las moléculas de aire (O_2 y N_2) a temperatura ambiente (20°C)?

PLANTEAMIENTO Para obtener v_{rms}, necesitamos las masas de las moléculas O_2 y N_2 y luego aplicar la ecuación 18-5 al oxígeno y nitrógeno por separado, puesto que tienen diferentes masas.

SOLUCIÓN Las masas de una molécula de O_2 (masa molecular = 32 u) y N_2 (masa molecular = 28 u) son (donde $1\,\mathrm{u} = 1.66 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$)

$$m(\mathrm{O_2}) = (32)\left(1.66 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}\right) = 5.3 \times 10^{-26}\,\mathrm{kg},$$
$$m(\mathrm{N_2}) = (28)\left(1.66 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}\right) = 4.6 \times 10^{-26}\,\mathrm{kg}.$$

Por lo tanto, para el oxígeno

$$v_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{(3)\left(1.38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}\right)(293\,\mathrm{K})}{\left(5.3 \times 10^{-26}\,\mathrm{kg}\right)}} = 480\,\mathrm{m/s},$$

y para el nitrógeno, el resultado es $v_{\mathrm{rms}} = 510$ m/s. Estas rapideces son más de 1700 km/h o 1000 mi/h, y son mayores que la rapidez del sonido ≈340 m/s a 20°C (capítulo 16).

NOTA La rapidez v_{rms} es sólo una magnitud. La *velocidad* de las moléculas promedia cero: la velocidad tiene dirección, y tantas moléculas se mueven hacia la derecha como hacia la izquierda, tantas hacia arriba como hacia abajo y tantas hacia dentro como hacia fuera.

EJERCICIO B Ahora regrese a la pregunta de inicio del capítulo, página 476, y respóndala correctamente. Intente explicar por qué quizá la contestó de manera diferente la primera vez.

EJERCICIO C Si usted duplica el volumen de un gas mientras mantiene constantes la presión y el número de moles, la rapidez promedio (rms) de las moléculas *a*) se duplica, *b*) se cuadruplica, *c*) aumenta por $\sqrt{2}$, *d*) se reduce a la mitad, *e*) es $\frac{1}{4}$.

EJERCICIO D ¿En qué factor debe cambiar la temperatura absoluta para duplicar v_{rms}? *a*) $\sqrt{2}$; *b*) 2; *c*) $2\sqrt{2}$; *d*) 4; *e*) 16.

EJEMPLO CONCEPTUAL 18–3 **Menos gas en el tanque.** Un tanque de helio se utiliza para inflar globos. Conforme cada globo se infla, el número de átomos de helio que permanecen en el tanque disminuye. ¿Cómo afecta esto a la rapidez rms de las moléculas que permanecen en el tanque?

RESPUESTA La rapidez rms está dada por la ecuación 18-5: $v_{rms} = \sqrt{3kT/m}$. Así que sólo importa la temperatura, no la presión P ni el número de moles n. Si el tanque permanece a temperatura constante (ambiente), entonces la rapidez rms permanece constante aun cuando la presión de helio en el tanque disminuya.

En una colección de moléculas, la **rapidez promedio**, $\bar{v}$, es el promedio de las magnitudes de las rapideces; $\bar{v}$ por lo general no es igual a v_{rms}. Para ver la diferencia entre la rapidez promedio y la rapidez rms, considere el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 18–4 **Rapidez promedio y rapidez rms.** Ocho partículas tienen las siguientes rapideces, dadas en m/s: 1.0, 6.0, 4.0, 2.0, 6.0, 3.0, 2.0, 5.0. Calcule *a*) la rapidez promedio y *b*) la rapidez rms.

PLANTEAMIENTO En *a*) sumamos las rapideces y dividimos entre $N = 8$. En *b*) elevamos al cuadrado cada rapidez, sumamos los cuadrados, dividimos entre $N = 8$ y sacamos la raíz cuadrada.

SOLUCIÓN *a*) La rapidez promedio es

$$\bar{v} = \frac{1.0 + 6.0 + 4.0 + 2.0 + 6.0 + 3.0 + 2.0 + 5.0}{8} = 3.6\ \text{m/s}.$$

b) La rapidez rms es (ecuación 18-1):

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{(1.0)^2 + (6.0)^2 + (4.0)^2 + (2.0)^2 + (6.0)^2 + (3.0)^2 + (2.0)^2 + (5.0)^2}{8}}\ \text{m/s}$$
$$= 4.0\ \text{m/s}.$$

En este ejemplo se ve que $\bar{v}$ y v_{rms} no necesariamente son iguales. De hecho, para un gas ideal difieren por aproximadamente 8%. En la siguiente sección veremos cómo calcular $\bar{v}$ para un gas ideal. Ya tenemos la herramienta para calcular v_{rms} (ecuación 18-5).

*Energía cinética cerca de cero absoluto

La ecuación 18-4, $\overline{K} = \frac{3}{2}kT$, implica que, conforme la temperatura tiende a cero absoluto, la energía cinética de las moléculas tiende a cero. Sin embargo, la teoría cuántica moderna nos dice que esto no es así. En vez de ello, conforme el cero absoluto se aproxima, la energía cinética tiende a un valor mínimo muy pequeño distinto de cero. Aun cuando todos los gases reales se convierten en líquido o sólido cerca de 0 K, el movimiento molecular no cesa, incluso en cero absoluto.

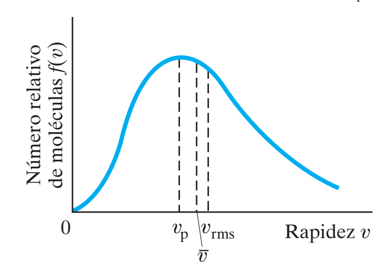
18–2 Distribución de la rapidez molecular

La distribución de Maxwell

Se supone que las moléculas en un gas están en movimiento aleatorio, lo que significa que muchas moléculas tienen rapidez menor que la rapidez promedio y otras tienen rapidez mayor que el promedio. En 1859 James Clerk Maxwell (1831-1879) elaboró una fórmula para la distribución de rapidez más probable en un gas que contiene N moléculas. Aquí no nos detendremos en la deducción de esa fórmula, simplemente se citará su resultado:

$$f(v) = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{1}{2}\frac{mv^2}{kT}} \qquad \textbf{(18–6)}$$

FIGURA 18–2 Distribución de la rapidez molecular en un gas ideal. Nota que $\bar{v}$ y v_{rms} no están en el pico de la curva. Esto se debe a que la curva está sesgada hacia la derecha: no es simétrica. La rapidez en el pico de la curva es la "rapidez más probable", v_p.



donde $f(v)$ se llama **distribución de Maxwell de la rapidez** (o distribución maxwelliana de velocidades), y se grafica en la figura 18-2. La cantidad $f(v)\,dv$ representa el número de moléculas que tienen rapidez entre v y $v + dv$. Note que $f(v)$ no da el número de moléculas con rapidez v; $f(v)$ se debe multiplicar por dv para dar el número de moléculas (el número de moléculas depende del "ancho" o "rango" de velocidades incluido, dv). En la fórmula para $f(v)$, m es la masa de una sola molécula, T es la temperatura absoluta y k es

la constante de Boltzmann. Como N es el número total de moléculas en el gas, cuando sumamos todas las moléculas en el gas debemos obtener N; por lo tanto, tenemos

$$\int_0^{\infty} f(v)\,dv = N.$$

(El problema 22 es un ejercicio para demostrar que esto es cierto).

Los experimentos para determinar la distribución de rapideces en gases reales, que comenzaron en la década de 1920, confirmaron con considerable precisión la distribución de Maxwell (para gases a presión no muy alta) y la proporción directa entre energía cinética promedio y temperatura absoluta (ecuación 18-4).

La distribución de Maxwell para un gas dado sólo depende de la temperatura absoluta. La figura 18-3 muestra la distribución para dos temperaturas diferentes. Así como v_{rms} aumenta con la temperatura, toda la curva de distribución se desplaza hacia la derecha a mayores temperaturas.

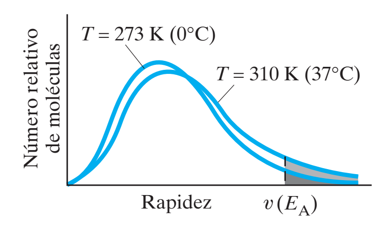


FIGURA 18–3 Distribución de rapidez molecular para dos diferentes temperaturas.

FÍSICA APLICADA
Cómo dependen las reacciones químicas de la temperatura

La figura 18-3 ilustra cómo se puede usar la energía cinética para explicar por qué muchas reacciones químicas, incluidas las de las células biológicas, tienen lugar más rápidamente conforme aumenta la temperatura. La mayoría de las reacciones químicas ocurren en una solución líquida, y las moléculas en un líquido tienen una distribución de rapidez cercana a la distribución de Maxwell. Dos moléculas pueden reaccionar químicamente sólo si sus energías cinéticas son suficientemente grandes de manera que, cuando choquen, penetren de forma parcial una en la otra. La energía mínima requerida se llama *energía de activación*, E_{A}, y tiene un valor específico para cada reacción química. La rapidez molecular que corresponde a una energía cinética de E_{A} para una reacción particular se indica en la figura 18-3. El número relativo de moléculas con energía mayor que este valor está dado por el área bajo la curva a la derecha de $v(E_{\text{A}})$, que se destaca en la figura 18-3 mediante los dos diferentes sombreados. Vemos que el número de moléculas que tienen energías cinéticas por encima de E_{A} aumenta considerablemente sólo con un pequeño aumento de la temperatura. La tasa a la que ocurre la reacción química es proporcional al número de moléculas con energía mayor que E_{A}, y así vemos por qué las tasas de reacción aumentan rápidamente con el incremento de temperatura.

*Cálculos mediante la distribución de Maxwell

Veamos cómo se emplea la distribución de Maxwell para obtener algunos resultados interesantes.

EJEMPLO 18–5 Determinación de $\bar{v}$ y v_{p}. Determine fórmulas para *a*) la rapidez promedio, $\bar{v}$, y *b*) la rapidez más probable, v_{p}, de las moléculas en un gas ideal a temperatura T.

PLANTEAMIENTO *a*) El valor promedio de cualquier cantidad se encuentra al multiplicar cada valor posible de la cantidad (rapidez en este caso) por el número de moléculas que tienen ese valor, y luego sumar todos estos números y dividir entre N (el número total). Para *b*), queremos encontrar dónde tiene pendiente cero la curva de la figura 18-2; así que se hace $df/dv = 0$.

SOLUCIÓN *a*) Se nos da una distribución continua de rapidez (ecuación 18-6), así que la suma de las rapideces se vuelve una integral sobre el producto de v y el número $f(v)\,dv$ que tiene rapidez v:

$$\bar{v} = \frac{\int_0^{\infty} v\,f(v)\,dv}{N} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{1}{2}\frac{mv^2}{kT}}\,dv.$$

Podemos integrar por partes o buscar la integral definida en una tabla, y obtener

$$\bar{v} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2k^2T^2}{m^2}\right) = \sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{kT}{m}} \approx 1.60\sqrt{\frac{kT}{m}}.$$

b) La *rapidez más probable* es la rapidez que ocurre más que cualquier otra; por lo tanto, es aquella rapidez donde $f(v)$ tiene su valor máximo. En el máximo de la curva, la pendiente es cero: $df(v)/dv = 0$. Al tomar la derivada de la ecuación 18-6 se obtiene

$$\frac{df(v)}{dv} = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\left(2ve^{-\frac{mv^2}{2kT}} - \frac{2mv^3}{2kT}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}\right) = 0.$$

Al despejar v, encontramos

$$v_{\text{p}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \approx 1.41\sqrt{\frac{kT}{m}}.$$

(Otra solución es $v = 0$, pero esta corresponde a un mínimo, no a un máximo).

En resumen,

Rapidez más probable, v_p

$$v_p = \sqrt{2\frac{kT}{m}} \approx 1.41\sqrt{\frac{kT}{m}} \qquad \textbf{(18–7a)}$$

Rapidez promedio, $\bar{v}$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{kT}{m}} \approx 1.60\sqrt{\frac{kT}{m}} \qquad \textbf{(18–7b)}$$

y de la ecuación 18-5

Rapidez rms, v_{rms}

$$v_{rms} = \sqrt{3\frac{kT}{m}} \approx 1.73\sqrt{\frac{kT}{m}}.$$

Todo esto se indica en la figura 18-2. A partir de la ecuación 18-6 y la figura 18-2, es claro que la rapidez de las moléculas en un gas varía de cero hasta muchas veces la rapidez promedio, pero, como se observa en la gráfica, la mayoría de las moléculas tienen rapidez que no está lejos del promedio. Menos del 1% de las moléculas superan cuatro veces el valor de v_{rms}.

18–3 Gases reales y cambios de fase

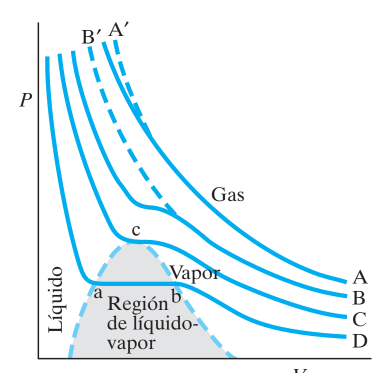


FIGURA 18–4 Diagrama *PV* para una sustancia real. Las curvas A, B, C y D representan la misma sustancia a diferentes temperaturas ($T_A > T_B > T_C > T_D$).

La ley del gas ideal

$$PV = NkT$$

es una descripción precisa del comportamiento de un gas real en tanto la presión no sea demasiado elevada y en tanto la temperatura esté lejos del punto de licuefacción. Sin embargo, ¿qué ocurre cuando estos dos criterios no se satisfacen? Primero analizaremos el comportamiento de un gas real y luego examinaremos cómo la energía cinética ayuda a comprender este comportamiento.

Observe una gráfica de presión versus volumen para una cantidad dada de gas. En tal “diagrama *PV*” (figura 18-4), cada punto representa un estado de equilibrio de la sustancia dada. Las diversas curvas (A, B, C y D) indican cómo varía la presión, conforme el volumen cambia a temperatura constante, para diferentes valores de temperatura. La curva punteada A′ representa el comportamiento de un gas como predice la ley del gas ideal; esto es, PV = constante. La curva sólida A representa el comportamiento de un gas real a la misma temperatura. Note que, a presión elevada, el volumen de un gas real es menor que el que predice la ley del gas ideal. Las curvas B y C en la figura 18-4 representan el gas a temperaturas sucesivamente menores, y vemos que el comportamiento se desvía aun más de las curvas que predice la ley del gas ideal (por ejemplo, B′); la desviación es mayor cuanto más cerca de la licuefacción esté el gas.

Para explicar esto, hacemos notar que, a mayor presión, se espera que las moléculas estén más cerca unas de otras. Y, particularmente a temperaturas más bajas, la energía potencial asociada con las fuerzas de atracción entre las moléculas (que se ignoró antes) ya no es insignificante en comparación con la energía cinética de las moléculas, ahora reducida. Estas fuerzas de atracción tienden a juntar más las moléculas, de manera que, a una presión dada, el volumen es menor que el esperado a partir de la ley del gas ideal, como en la figura 18-4. A temperaturas todavía más bajas, estas fuerzas provocan licuefacción, y las moléculas se acercan más. La sección 18-5 analiza con más detalle el efecto de estas fuerzas moleculares de atracción, así como el efecto del volumen que ocupan las moléculas mismas.

La curva D representa la situación cuando ocurre licuefacción. A baja presión en la curva D (a la derecha en la figura 18-4), la sustancia es un gas y ocupa un gran volumen. Conforme aumenta la presión, el volumen disminuye hasta alcanzar el punto b. Más allá de b, el volumen disminuye sin cambio en la presión; la sustancia cambia gra-

dualmente de la fase gaseosa a la fase líquida. En el punto a, toda la sustancia cambió a líquido. Mayor aumento en la presión reduce el volumen sólo ligeramente (los líquidos son casi incompresibles), de manera que la curva es muy pronunciada a la izquierda, como se observa. El área sombreada bajo la línea punteada representa la región donde las fases gas y líquido coexisten en equilibrio.

La curva C en la figura 18-4 representa el comportamiento de la sustancia a su **temperatura crítica**; el punto c (el único punto donde la curva C es horizontal) se llama **punto crítico**. A temperaturas menores que la temperatura crítica (y ésta es la definición del término), un gas cambiará a la fase líquida si se aplica suficiente presión. Arriba de la temperatura crítica, ninguna cantidad de presión logra que un gas cambie de fase y se convierta en líquido. En la tabla 18-1 se presentan las temperaturas críticas para varios gases. Los científicos intentaron durante muchos años licuar oxígeno, sin embargo, no tuvieron éxito. Sólo después del descubrimiento del comportamiento de las sustancias asociadas con el punto crítico se dieron cuenta de que el oxígeno se licua sólo si primero se enfría por debajo de su temperatura crítica de −118°C.

TABLA 18–1 Temperaturas y presiones críticas

Sustancia	Temperatura crítica °C	Temperatura crítica K	Presión crítica (atm)
Agua	374	647	218
CO_2	31	304	72.8
Oxígeno	−118	155	50
Nitrógeno	−147	126	33.5
Hdrógeno	−239.9	33.3	12.8
Helio	−267.9	5.3	2.3

Con frecuencia se hace una distinción entre los términos "gas" y "vapor": una sustancia por debajo de su temperatura crítica en el estado gaseoso se llama **vapor**; por arriba de la temperatura crítica se llama **gas**.

El comportamiento de una sustancia se puede representar no sólo en un diagrama *PV*, sino también sobre un diagrama *PT*, con frecuencia llamado **diagrama de fase**, que es particularmente útil para comparar las diferentes fases de una sustancia. La figura 18-5 es el diagrama de fase para el agua. La curva marcada *ℓ-v* representa aquellos puntos donde las fases de líquido y vapor están en equilibrio; es, por lo tanto, una gráfica del punto de ebullición versus presión. La curva muestra correctamente que, a una presión de 1 atm, el punto de ebullición es 100°C, y que el punto de ebullición baja cuando disminuye la presión. La curva *s-ℓ* representa puntos donde los estados sólido y líquido existen en equilibrio y, por lo tanto, es una gráfica del punto de congelación versus presión. A 1 atm, el punto de congelación del agua es 0°C, como se indica. Nota también en la figura 18-5 que, a una presión de 1 atm, la sustancia está en la fase líquida si la temperatura está entre 0°C y 100°C, pero está en la fase sólida o de vapor si la temperatura está respectivamente por debajo de 0°C o arriba de 100°C. La curva marcada *s-v* es la curva del *punto de sublimación* versus presión. **Sublimación** se refiere al proceso mediante el cual, a bajas presiones, un sólido cambia directamente a la fase de vapor sin pasar por la fase líquida. Para el agua, la sublimación ocurre si la presión del vapor de agua es menor que 0.0060 atm. El dióxido de carbono, que en la fase sólida se llama hielo seco, se sublima incluso a presión atmosférica (figura 18-6).

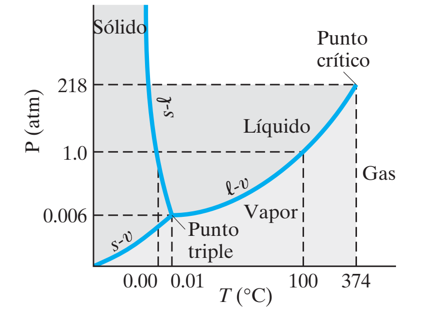
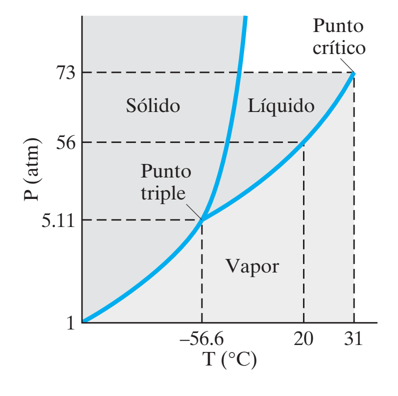


FIGURA 18–5 Diagrama de fase para el agua (las escalas no son lineales).

La intersección de las tres curvas (en la figura 18-5) es el **punto triple**. Para el agua, esto ocurre a $T = 273.16$ K y $P = 6.03 \times 10^{-3}$ atm. Sólo en el punto triple coexisten las tres fases en equilibrio. Puesto que el punto triple corresponde a un valor único de temperatura y presión, es reproducible de manera exacta y con frecuencia se usa como punto de referencia. Por ejemplo, el estándar de temperatura por lo general se especifica exactamente como 273.16 K en el punto triple del agua, y no como 273.15 K en el punto de congelación del agua a 1 atm.

FIGURA 18–6 Diagrama de fase para el dióxido de carbono.



Nota que la curva sólido-líquido (*s-ℓ*) para el agua tiene una pendiente que aumenta la izquierda. Esto es cierto sólo para sustancias que *se expanden* al congelarse: a una presión mayor, se necesita una temperatura menor para hacer que el líquido se congele. Más comúnmente, las sustancias se contraen al congelarse y la curva *s-ℓ* tiene una pendiente que aumenta hacia la derecha, como se muestra para el dióxido de carbono (CO_2) en la figura 18-6.

Las transiciones de fase que se explicaron son las comunes. Sin embargo, algunas sustancias pueden existir en varias formas en la fase sólida. Una transición de una fase a otra ocurre a una temperatura y presión particulares, tal como los cambios de fase ordinarios. Por ejemplo, se ha observado que el hielo adopta al menos ocho formas a presión muy alta. El helio ordinario tiene dos fases líquidas idénticas, llamadas helio I y II. Sólo existen a temperaturas a unos cuantos grados del cero absoluto. El helio II muestra propiedades muy inusuales que se conocen como **superfluidez**. En esencia, tiene viscosidad cero y muestra extrañas propiedades como ascender por los lados de un contenedor abierto. También son interesantes los **cristales líquidos** (usados para monitores de TV y computadora, sección 35-11), que se pueden considerar como una fase entre líquido y sólido.



18–4 Presión de vapor y humedad

Evaporación

Si un vaso con agua se deja a la intemperie toda la noche, en la mañana el nivel del agua habrá descendido. Se dice que el agua se evaporó, lo que significa que parte del agua cambió a la fase de vapor o gas.



La evaporación enfría

Este proceso de **evaporación** se explica sobre la base de la teoría cinética. Las moléculas en un líquido se mueven una sobre otra con diferente rapidez cuyos valores siguen, aproximadamente, la distribución de Maxwell. Entre esas moléculas existen intensas fuerzas de atracción, lo que las mantiene juntas en la fase líquida. Una molécula cerca de la superficie del líquido, en virtud de su rapidez, puede abandonar el líquido momentáneamente. Sin embargo, así como una roca lanzada al aire regresa a la Tierra, las fuerzas de atracción de las otras moléculas pueden tirar de la molécula vagabunda de vuelta a la superficie del líquido; claro está, si su velocidad no es muy alta. Sin embargo, una molécula con una velocidad suficientemente alta, escapará por completo del líquido (al igual que un objeto que sale de la Tierra con una rapidez suficientemente grande, sección 8-7) y se volverá parte de la fase gaseosa. Sólo aquellas moléculas que tengan energía cinética por arriba de un valor particular podrán escapar a la fase de gas. Como hemos visto, la teoría cinética predice que el número relativo de moléculas con energía cinética por arriba de un valor particular (como E_A en la figura 18-3) aumenta con la temperatura. Esto concuerda con la bien conocida observación de que la tasa de evaporación es mayor a temperaturas más elevadas.

Puesto que las moléculas más rápidas son las que escapan de la superficie, la rapidez promedio de las que permanecen es menor. Cuando la rapidez promedio es menor, la temperatura absoluta es menor. Por eso, la teoría cinética predice que *la evaporación es un proceso de enfriamiento*. Sin duda, usted habrá notado este efecto cuando sale de una ducha caliente y siente frío conforme el agua en su cuerpo comienza a evaporarse; o cuando, después de ejercitarse mucho en un día caluroso, incluso una ligera brisa lo hace sentirse fresco a través de la evaporación.

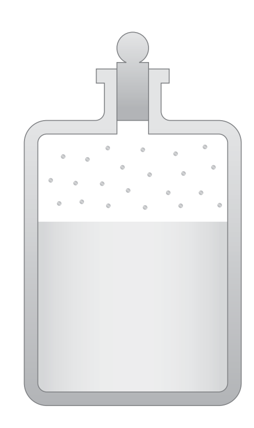


FIGURA 18–7 El vapor aparece sobre un líquido en un contenedor cerrado.

TABLA 18–2 Presión de vapor saturado del agua

Temperatura (°C)	Presión de vapor saturado: torr (= mm-Hg)	Presión de vapor saturado: Pa (= N/m²)
−50	0.030	4.0
−10	1.95	2.60×10^2
0	4.58	6.11×10^2
5	6.54	8.72×10^2
10	9.21	1.23×10^3
15	12.8	1.71×10^3
20	17.5	2.33×10^3
25	23.8	3.17×10^3
30	31.8	4.24×10^3
40	55.3	7.37×10^3
50	92.5	1.23×10^4
60	149	1.99×10^4
70†	234	3.12×10^4
80	355	4.73×10^4
90	526	7.01×10^4
100‡	760	1.01×10^5
120	1489	1.99×10^5
150	3570	4.76×10^5

†Punto de ebullición en la cima del monte Everest.
‡Punto de ebullición a nivel del mar.

Presión de vapor

El aire normalmente contiene vapor de agua (es decir, agua en la fase gaseosa) que proviene sobre todo de la evaporación. Para observar este proceso con mayor detalle, considere un contenedor cerrado que está parcialmente lleno con agua (u otro líquido) y del cual se eliminó el aire (figura 18-7). Las moléculas que se mueven más rápidamente se evaporan más rápido hacia el espacio vacío arriba de la superficie del líquido. Conforme se mueven, algunas de esas moléculas golpean la superficie del líquido y de nuevo se vuelven parte de la fase líquida: a esto se llama **condensación**. El número de moléculas en el vapor aumenta hasta que se alcanza un punto en el que el número de moléculas que regresan al líquido es igual al número que sale en el mismo intervalo de tiempo. Entonces existe equilibrio, y se dice que el espacio sobre la superficie del líquido está *saturado*. La presión del vapor cuando está saturado se llama **presión de vapor saturado** (a veces simplemente presión de vapor).

La presión de vapor saturado no depende del volumen del contenedor. Si el volumen por arriba del líquido se redujera súbitamente, la densidad de las moléculas en la fase de vapor aumentaría temporalmente. Entonces más moléculas golpearían la superficie líquida por segundo. Habría un flujo neto de moléculas de regreso a la fase líquida hasta alcanzar de nuevo el equilibrio, y esto ocurriría en el mismo valor de la presión de vapor saturado, en tanto la temperatura no cambie.

La presión de vapor saturado de cualquier sustancia depende de la temperatura. A mayores temperaturas, más moléculas tienen suficiente energía cinética para pasar de la superficie líquida a la fase de vapor. En consecuencia, el equilibrio se alcanzará a mayor presión. En la tabla 18-2 se indica la presión de vapor saturado del agua a diferentes temperaturas. Note que incluso los sólidos (por ejemplo, el hielo) tienen una presión de vapor saturado susceptible de medición.

En situaciones cotidianas, la evaporación de un líquido tiene lugar en el aire arriba de él y no en el vacío. Esto, en realidad, no altera la explicación anterior en relación con la figura 18-7. El equilibrio se alcanzará cuando haya suficientes moléculas en la fase gaseosa de manera que el número de las que reingresan al líquido iguale al número de las que lo abandonan. La concentración de moléculas particulares (como el agua) en la fase gaseosa no se ve afectada por la presencia de aire, aunque las colisiones con

las moléculas de aire pueden prolongar el tiempo necesario para alcanzar el equilibrio. Por consiguiente, el equilibrio ocurre en el mismo valor de la presión de vapor saturado, como si el aire no estuviera ahí.

Si el contenedor es grande o no está cerrado, es posible que todo el líquido se evapore antes de alcanzar la saturación. Y si el contenedor no está sellado (como, por ejemplo, la habitación de una casa), es improbable que el aire se sature con vapor de agua (a menos que esté lloviendo).

Ebullición

La presión de vapor saturado de un líquido aumenta con la temperatura. Cuando la temperatura se eleva al punto donde la presión de vapor saturado a esa temperatura es igual a la presión externa, ocurre **ebullición** (figura 18-8). Conforme se aproxima el punto de ebullición, tienden a formarse pequeñas burbujas en el líquido, lo que indica un cambio de la fase líquida a la gaseosa. Sin embargo, si la presión de vapor dentro de las burbujas es menor que la presión externa, las burbujas se revientan inmediatamente. Conforme aumenta la temperatura, la presión de vapor saturado dentro de una burbuja termina por igualar o superar a la presión externa. En tal caso, la burbuja no colapsará, sino que subirá a la superficie. Entonces habrá comenzado la ebullición. *Un líquido hierve cuando su presión de vapor saturado es igual a la presión externa.* Para el agua, esto ocurre a una presión de 1 atm (760 torr) a 100°C, como se aprecia en la tabla 18-2.



FIGURA 18–8 Ebullición: burbujas de vapor de agua flotan hacia arriba desde el fondo (donde la temperatura es más elevada).

Es evidente que el punto de ebullición de un líquido depende de la presión externa. A grandes altitudes, el punto de ebullición del agua es un poco menor que a nivel del mar, pues en los lugares altos la presión del aire es menor. Por ejemplo, en la cima del monte Everest (8850 m), la presión del aire es aproximadamente un tercio de la que se registra a nivel del mar; de acuerdo con la tabla 18-2 se sabe que, en ese lugar, el agua hervirá alrededor de los 70°C. Cocinar alimentos mediante ebullición toma más tiempo a grandes alturas, pues la temperatura es menor. Sin embargo, las ollas de presión reducen el tiempo de cocción, porque acumulan una presión hasta de 2 atm, lo que permite alcanzar mayores temperaturas de ebullición.

Presión parcial y humedad

Cuando decimos que el clima es seco o húmedo, nos referimos al contenido de vapor de agua en el aire. En un gas como el aire, que es una mezcla de varios tipos de gases, la presión total es la suma de las *presiones parciales* de cada gas presente.† Por **presión parcial** se entiende la presión que cada gas ejercería si estuviera solo. La presión parcial del agua en el aire puede ser tan baja como cero y variar hasta a un máximo igual a la presión de vapor saturado del agua a la temperatura dada. Así, a 20°C, la presión parcial del agua no puede superar 17.5 torr (véase la tabla 18-2). La **humedad relativa** se define como la razón entre la presión parcial del vapor de agua y la presión de vapor saturado a una temperatura dada. Por lo general, se expresa como un porcentaje:

$$\text{Humedad relativa} = \frac{\text{presión parcial de } H_2O}{\text{presión de vapor saturado de } H_2O} \times 100\%.$$

Por ende, cuando la humedad es cercana al 100%, el aire conserva casi todo el vapor de agua que puede.

EJEMPLO 18–6 **Humedad relativa.** En un día caluroso, la temperatura es de 30°C y la presión parcial del vapor de agua en el aire es de 21.0 torr. ¿Cuál es la humedad relativa?

PLANTEAMIENTO En la tabla 18-2 vemos que la presión de vapor saturado del agua a 30°C es de 31.8 torr.

SOLUCIÓN Por lo tanto, la humedad relativa es

$$\frac{21.0\ \text{torr}}{31.8\ \text{torr}} \times 100\% = 66\%.$$

†Por ejemplo, el 78% (por volumen) de las moléculas del aire son de nitrógeno y el 21% de oxígeno; existen cantidades mucho menores de vapor de agua, argón y otros gases. A una presión de aire de 1 atm, el oxígeno ejerce una presión parcial de 0.21 atm y el nitrógeno de 0.78 atm.

FÍSICA APLICADA
Humedad y comodidad

Los humanos somos sensibles a la humedad. Una humedad relativa del 40 al 50% por lo general es óptima tanto para la salud como en términos de comodidad. La humedad elevada, en particular en un día caluroso, reduce la evaporación de la humedad de la piel, que es uno de los mecanismos vitales del cuerpo para regular la temperatura corporal. Por otra parte, la humedad muy baja reseca la piel y las mucosas.

FÍSICA APLICADA
Clima

El aire está saturado con vapor de agua cuando la presión parcial del agua en el aire es igual a la presión de vapor saturado a esa temperatura. Si la presión parcial del agua supera la presión de vapor saturado, se dice que el aire está **supersaturado**. Esta situación ocurre cuando se registra un descenso en la temperatura. Por ejemplo, suponga que la temperatura es de 30°C y que la presión parcial del agua es de 21 torr, lo que representa una humedad del 66%, como vimos en el ejemplo 18-6. Suponga ahora que la temperatura desciende a 20°C, como sucede al caer la noche. A partir de la tabla 18-2 vemos que la presión de vapor saturado del agua a 20°C es de 17.5 torr. Por lo tanto, la humedad relativa sería mayor del 100%, y el aire supersaturado no puede retener toda esa agua. El exceso de agua se puede condensar y aparecer como rocío, o bien, como niebla o lluvia (figura 18-9).

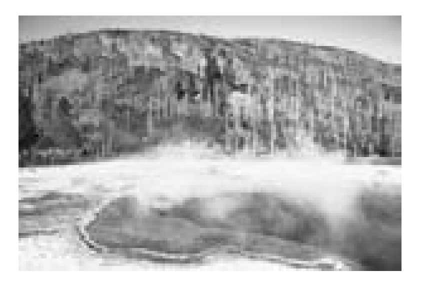


FIGURA 18–9 Niebla o bruma se asienta alrededor de un castillo donde la temperatura disminuyó por debajo del punto de rocío.

Cuando el aire que contiene una cantidad dada de agua se enfría, se alcanza una temperatura donde la presión parcial del agua es igual a la presión de vapor saturado. A esto se le llama **punto de rocío**. La medición del punto de rocío es el medio más preciso de determinar la humedad relativa. Un método utiliza una superficie metálica pulida en contacto con aire, que se enfría gradualmente. La temperatura a la que comienza a aparecer humedad en la superficie es el punto de rocío, y la presión parcial del agua se obtiene entonces a partir de tablas de presión de vapor saturado. Si, por ejemplo, en un día la temperatura es de 20°C y el punto de rocío es 5°C, entonces la presión parcial del agua (tabla 18-2) en el aire a 20°C es de 6.54 torr, mientras que su presión de vapor saturado es de 17.5 torr; por lo tanto, la humedad relativa es 6.54/17.5 = 37%.

EJERCICIO E Conforme el aire se calienta en la tarde, ¿cómo cambiaría la humedad relativa si no hubiera evaporación posterior? *a*) Aumentaría, *b*) disminuiría, *c*) permanecería igual.

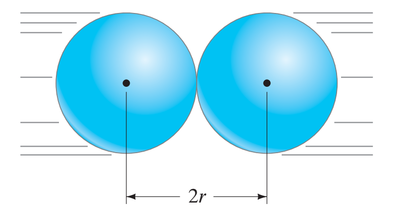
EJEMPLO CONCEPTUAL 18–7 **Sequedad en invierno.** ¿Por qué el aire dentro de los edificios con sistema de calefacción parece muy seco en un frío día invernal?

RESPUESTA Suponga que la humedad relativa a la intemperie en un día a −10°C es del 50%. La tabla 18-2 nos dice que la presión parcial del agua en el aire es aproximadamente de 1.0 torr. Si este aire se lleva al interior y se calienta a +20°C, la humedad relativa es (1.0 torr)/(17.5 torr) = 5.7%. Incluso si el aire exterior estuviera saturado a una presión parcial de 1.95 torr, la humedad relativa interior estaría a un bajo nivel del 11%.

* 18–5 Ecuación de estado de van der Waals

En la sección 18-3 se explicó cómo los gases reales se desvían del comportamiento de gas ideal, en particular a altas densidades o cuando están cerca de condensarse en líquido. La intención es comprender estas desviaciones desde un punto de vista microscópico (molecular). J. D. van der Waals (1837-1923) analizó este problema y, en 1873, determinó una ecuación de estado que se ajusta a los gases reales de manera mucho más exacta que la ley del gas ideal. Su análisis se basa en la teoría cinética, aunque toma en cuenta: (1) el tamaño finito de las moléculas (anteriormente despreciamos el volumen real de las moléculas al compararlo con el volumen total del contenedor, y esta suposición se vuelve más endeble conforme la densidad aumenta y las moléculas se juntan más); (2) el rango de las fuerzas entre moléculas puede ser mayor que el tamaño de las moléculas (anteriormente suponíamos que las fuerzas intermoleculares actuaban sólo durante las colisiones, cuando las moléculas estaban "en contacto"). Ahora veamos más de cerca este análisis para obtener la ecuación de estado de van der Waals.

FIGURA 18–10 Moléculas, de radio r, que chocan.



Suponga que las moléculas en un gas son esféricas y tienen radio r. Si suponemos que esas moléculas se comportan como esferas duras, entonces dos moléculas chocan y rebotan una con la otra si la distancia entre sus centros (figura 18-10) se vuelve tan pequeña como $2r$. Por lo tanto, el volumen real en el que las moléculas se pueden mover es un poco menor que el volumen V del contenedor que retiene al gas. La cantidad de "volumen no disponible" depende del número de moléculas y de su tamaño. Dejemos

que b represente el "volumen no disponible por mol" del gas. Entonces, en la ley del gas ideal, sustituimos V por $(V - nb)$, donde n es el número de moles, y obtenemos

$$P(V - nb) = nRT.$$

Si dividimos entre n, tenemos

$$P\left(\frac{V}{n} - b\right) = RT. \quad \textbf{(18–8)}$$

Esta relación (a veces llamada **ecuación de estado de Clausius**) predice que, para una temperatura T y un volumen V dados, la presión P será mayor que para un gas ideal. Esto tiene sentido, ya que el volumen reducido "disponible" significa que el número de colisiones contra las paredes aumentó.

Ahora consideremos los efectos de las fuerzas de atracción entre moléculas; tales fuerzas son responsables de retener a las moléculas en los estados líquido y sólido a temperaturas más bajas. Estas fuerzas son eléctricas en naturaleza y aunque actúan incluso cuando las moléculas no se tocan, suponemos que su rango es pequeño; esto es, actúan principalmente entre moléculas circunvecinas. Las moléculas en el borde del gas, que dan hacia la pared del contenedor, se frenan por una fuerza neta que tira de ellas de vuelta hacia el gas. Por lo tanto, estas moléculas ejercerán menos fuerza y menos presión sobre la pared que si no hubiera fuerzas de atracción. La presión reducida será proporcional a la densidad de las moléculas en la capa superficial de gas, y también a la densidad en la siguiente capa, que ejerce la fuerza hacia dentro.† Por consiguiente, esperamos que la presión se reduzca en un factor proporcional a la densidad al cuadrado $(n/V)^2$, expresada aquí como moles por volumen. Si la presión P está dada por la ecuación 18-8, entonces deberíamos reducir esto por una cantidad $a(n/V)^2$, donde a es una constante de proporcionalidad. De esta forma, tenemos

$$P = \frac{RT}{(V/n) - b} - \frac{a}{(V/n)^2}$$

o

$$\left(P + \frac{a}{(V/n)^2}\right)\left(\frac{V}{n} - b\right) = RT, \quad \textbf{(18–9)}$$

que es la **ecuación de estado de van der Waals**.

Las constantes a y b en la ecuación de van der Waals son diferentes para distintos gases y se determinan mediante el ajuste a datos experimentales para cada gas. En el caso del gas CO_2, el mejor ajuste se obtiene para $a = 0.36\ \mathrm{N \cdot m^4/mol^2}$ y $b = 4.3 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^3/mol}$. La figura 18-11 muestra un diagrama PV típico para la ecuación 18-9 (un "gas van der Waals") para cuatro temperaturas diferentes, indicadas con mayúscula, y se debe comparar con la figura 18-4 para gases reales.

Ni la ecuación de estado de van der Waals ni las muchas otras ecuaciones de estado que se han propuesto son exactas para todos los gases en todas las condiciones. Sin embargo, la ecuación 18-9 es una relación muy útil. Y, en virtud de que es bastante exacta para muchas situaciones, su deducción nos permite comprender mejor la naturaleza de los gases a nivel microscópico. Note que, a bajas densidades, $a/(V/n)^2 \ll P$ y $b \ll V/n$, así que la ecuación de van der Waals se reduce a la ecuación de estado para un gas ideal, $PV = nRT$.

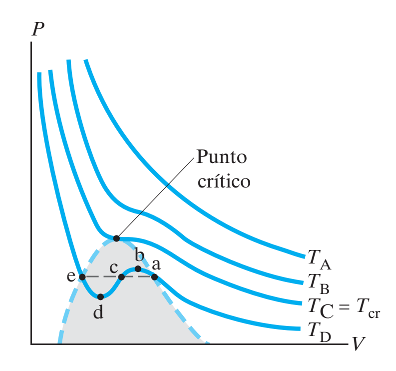


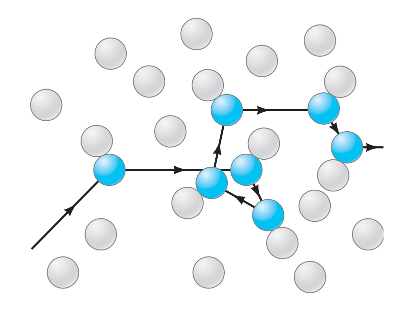
FIGURA 18–11 Diagrama PV para un gas van der Waals, que se muestra para cuatro diferentes temperaturas. Para T_A, T_B y T_C (T_C se elige igual a la temperatura crítica), las curvas se ajustan muy bien a los datos experimentales para la mayoría de los gases. La curva marcada como T_D, una temperatura por debajo del punto crítico, pasa a través de la región líquido-vapor. El máximo (punto b) y el mínimo (punto d) parecerían ser artificiales, ya que por lo general vemos una presión constante, como se indica mediante la línea horizontal punteada (y la figura 18-4). Sin embargo, para vapores supersaturados muy puros o líquidos superenfriados, se han observado las secciones ab y ed, respectivamente. (La sección bd sería inestable y no se ha observado).

* 18–6 Camino libre medio

Si las moléculas de gas verdaderamente fueran partículas puntuales, tendrían sección transversal cero y nunca chocarían unas con otras. Si usted abre una botella de perfume, puede percibir el aroma casi instantáneamente en toda la habitación, pues las moléculas viajan cientos de metros por segundo. En realidad, toma tiempo antes de que usted detecte un olor y, de acuerdo con la teoría cinética, esto se debe a las colisiones entre moléculas de tamaño distinto de cero.

Si siguiéramos la trayectoria de una molécula particular, esperaríamos ver que sigue una trayectoria en zigzag, como se muestra en la figura 18-12. Entre cada colisión la molécula se movería en una trayectoria en línea recta. (Esto no es muy cierto si tomamos en cuenta las pequeñas fuerzas intermoleculares que actúan entre colisiones). Un parámetro importante para una situación dada es el **camino libre medio**, que se define como la distancia promedio que recorre una molécula entre colisiones. Esperaríamos que cuanto mayor sea la densidad del gas y cuanto más grandes sean las moléculas, más corto sería el camino libre medio. Ahora determinaremos la naturaleza de esta relación para un gas ideal.

FIGURA 18–12 Trayectoria en zigzag de una molécula que choca con otras moléculas.



†Esto es similar a la fuerza gravitacional en la que la fuerza sobre la masa m_1 que se debe a la masa m_2 es proporcional al producto de sus masas (ley de gravitación universal de Newton, capítulo 6).

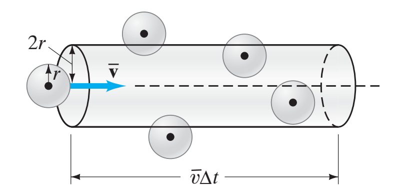


FIGURA 18–13 La molécula a la izquierda se mueve hacia la derecha con rapidez $\bar{v}$. y choca con cualquier molécula cuyo centro esté dentro del cilindro de radio $2r$.

Suponga que el gas está constituido por moléculas que son esferas duras de radio r. Ocurrirá una colisión siempre que los centros de dos moléculas estén dentro de un distancia $2r$ uno de otro. Sigamos una molécula conforme traza una trayectoria en línea recta. En la figura 18-13, la línea punteada representa la trayectoria de nuestra partícula si no tiene colisiones. También se muestra un cilindro de radio $2r$. Si el centro de otra molécula se encuentra dentro de este cilindro, ocurrirá una colisión. (Desde luego, cuando ocurre una colisión, la trayectoria de la partícula cambia de dirección, como lo haría el cilindro imaginario; sin embargo, el resultado no se alteraría al enderezar todos los cilindros zigzaguzantes y enderezarlos para propósitos de cálculo.) Suponga que la molécula en cuestión es una molécula promedio, que se mueve a la rapidez media $\bar{v}$ en el gas. Por el momento, supongamos que las otras moléculas no se mueven y que la concentración de moléculas (número por unidad de volumen) es N/V. Así, el número de moléculas cuyos centros yacen dentro del cilindro de la figura 18-13 es N/V veces el volumen de este cilindro, y esto también representa el número de colisiones que ocurrirán. En un tiempo Δt, la molécula recorre una distancia $\bar{v}\,\Delta t$, de manera que la longitud del cilindro es $\bar{v}\,\Delta t$ y su volumen es $\pi(2r)^2\,\bar{v}\,\Delta t$. Por lo tanto, el número de colisiones que ocurren en un tiempo Δt es $(N/V)\pi(2r)^2\,\bar{v}\,\Delta t$. El **camino libre medio**, ℓ_M, se define como la distancia promedio entre colisiones. Esta distancia es igual a la distancia recorrida $(\bar{v}\,\Delta t)$ en un tiempo Δt dividido entre el número de colisiones registradas en el tiempo Δt:

$$\ell_M = \frac{\bar{v}\,\Delta t}{(N/V)\pi(2r)^2\,\bar{v}\,\Delta t} = \frac{1}{4\pi r^2(N/V)}. \qquad \textbf{(18–10a)}$$

De esta forma, vemos que ℓ_M es inversamente proporcional al área transversal $(= \pi r^2)$ de las moléculas y a su concentración (número/volumen), N/V. Sin embargo, la ecuación 18-10a no es del todo correcta, puesto que se supuso que todas las demás moléculas estaban en reposo. De hecho, están en movimiento, y el número de colisiones en un tiempo Δt debe depender de la rapidez *relativa* de las moléculas que chocan, y no de $\bar{v}$. En consecuencia, el número de colisiones por segundo es $(N/V)\pi(2r)^2 v_{rel}\,\Delta t$ (en vez de $(N/V)\pi(2r)^2\,\bar{v}\,\Delta t$), donde v_{rel} es la rapidez relativa promedio de las moléculas que chocan. Un cálculo cuidadoso demuestra que, para una distribución de Maxwell de rapidez, $v_{rel} = \sqrt{2}\bar{v}$. Por lo tanto, el camino libre medio es

Camino libre medio

$$\ell_M = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}r^2(N/V)}. \qquad \textbf{(18–10b)}$$

EJEMPLO 18–8 ESTIMACIÓN Camino libre medio de moléculas de aire a PTE. Estime el camino libre medio de moléculas de aire a PTE, presión y temperatura estándar (1 atm, 0°C). El diámetro de las moléculas de O_2 y N_2 es aproximadamente de 3×10^{-10} m.

PLANTEAMIENTO En el ejemplo 17-10 vimos que 1 mol de un gas ideal ocupa un volumen de $22.4 \times 10^{-3}\ \text{m}^3$ a PTE. De esta forma, podemos determinar N/V y aplicar la ecuación 18-10b.

SOLUCIÓN

$$\frac{N}{V} = \frac{6.02 \times 10^{23}\ \text{moléculas}}{22.4 \times 10^{-3}\ \text{m}^3} = 2.69 \times 10^{25}\ \text{moléculas/m}^3.$$

Entonces,

$$\ell_M = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}(1.5 \times 10^{-10}\ \text{m})^2(2.7 \times 10^{25}\ \text{m}^{-3})} \approx 9 \times 10^{-8}\ \text{m}.$$

NOTA Esto es aproximadamente 300 veces el diámetro de una molécula de aire.

A densidades muy bajas, como en un contenedor al vacío, el concepto de camino libre medio pierde significado, pues las colisiones con las paredes del contenedor ocurren con mayor frecuencia que las colisiones con otras moléculas. Por ejemplo, en una caja cúbica cuyos lados miden 20 cm y que contiene aire a 10^{-7} torr ($\approx 10^{-10}$ atm), el camino libre medio sería aproximadamente de 900 m, lo que significa que se registran muchas más colisiones con las paredes que con otras moléculas. (No obstante, note que la caja contiene más de 10^{12} moléculas.) Si el concepto de camino libre medio incluyera también las colisiones con las paredes, estaría más cerca de 0.2 m que de los 900 m calculados a partir de la ecuación 18-10b.

*18–7 Difusión

Si usted coloca con cuidado algunas gotas de colorante para alimentos en un contenedor de agua, como en la figura 18-14, verá que el color se dispersa por toda el agua. El proceso tarda algún tiempo (si no se agita el recipiente), pero al final el color se volverá uniforme. Esta mezcla, conocida como **difusión**, es el resultado del movimiento aleatorio de las moléculas. La difusión también ocurre en los gases. Los ejemplos comunes incluyen el perfume, el humo del cigarrillo y el olor de la comida que se cocina en la estufa, los cuales se difunden en el aire; sin embargo, la convección (el movimiento de corrientes de aire) con frecuencia desempeña un papel más determinante en la dispersión de los olores que la difusión. La difusión depende de la concentración, entendida como el número de moléculas o moles por unidad de volumen. En general, *la sustancia que se difunde se mueve desde una región donde su concentración es alta hacia una donde su concentración es baja*.



a)



b)

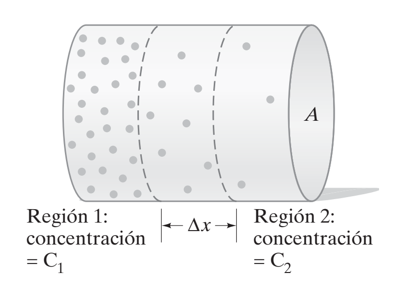


c)

FIGURA 18–14 Algunas gotas de colorante para alimentos *a*) que se dejan caer en agua *b*) se dispersan lentamente por toda el agua, hasta que ésta *c*) toma un color uniforme.

La difusión se comprende fácilmente sobre la base de la teoría cinética y el movimiento aleatorio de las moléculas. Considere un tubo con área transversal A que contiene moléculas en una mayor concentración a la izquierda que a la derecha (figura 18-15). Suponemos que las moléculas están en movimiento aleatorio, por lo que habrá un flujo neto de moléculas hacia la derecha. Para ver por qué esto es cierto, consideremos la pequeña sección intermedia de longitud Δx que se ilustra. Las moléculas de las regiones 1 y 2 cruzan esta sección central como resultado de su movimiento aleatorio. Cuanto mayor sea el número de moléculas en una región, más moléculas golpearán una área determinada o cruzarán una frontera. Como hay una mayor concentración de moléculas en la región 1 que en la región 2, más moléculas cruzan la sección central desde la región 1 que desde la región 2. Entonces, hay un flujo neto de moléculas de izquierda a derecha, de la región de alta concentración hacia la de baja concentración. El flujo neto se vuelve cero sólo cuando las concentraciones se igualan.

FIGURA 18–15 La difusión ocurre de una región de alta concentración a una de concentración más baja. (Sólo se muestra un tipo de molécula).



Se esperaría que, cuanto mayor sea la diferencia en concentración, mayor será la tasa de flujo. De hecho, la tasa de difusión, J (número de moléculas o moles o kg por segundo), es directamente proporcional a la diferencia de concentración por unidad de distancia, $(C_1 - C_2)/\Delta x$ (que se llama **gradiente de concentración**), y al área transversal A (véase la figura 18-15):

$$J = DA\frac{C_1 - C_2}{\Delta x},$$

o, en términos de derivadas,

$$J = DA\frac{dC}{dx}. \quad \textbf{(18–11)}$$

D es una constante de proporcionalidad llamada **constante de difusión**. La ecuación 18-11 se conoce como **ecuación de difusión** o **ley de Fick**. Si las concentraciones se expresan en mol/m^3, entonces J es el número de moles que pasa por un punto dado por segundo. Si las concentraciones están dadas en kg/m^3, entonces J es el movimiento de masa por segundo (kg/s). La longitud Δx está dada en metros. En la tabla 18-3 se presentan los valores de D para varias sustancias.

TABLA 18–3 Constantes de difusión, *D* (20°C, 1 atm)

Moléculas que se difunden	Medio	D (m^2/s)
H_2	Aire	6.3×10^{-5}
O_2	Aire	1.8×10^{-5}
O_2	Agua	100×10^{-11}
Hemoglobina de la sangre	Agua	6.9×10^{-11}
Glicina (un aminoácido)	Agua	95×10^{-11}
ADN (masa 6×10^6 u)	Agua	0.13×10^{-11}

EJEMPLO 18–9 ESTIMACIÓN **Difusión de amoniaco en el aire.** Para tener una idea del tiempo que se requiere para la difusión, estime cuánto tardaría en detectarse amoniaco (NH_3) a 10 cm de una botella luego de que ésta se abre, si se supone que sólo ocurre difusión.

FÍSICA APLICADA
Tiempo de difusión

PLANTEAMIENTO Éste será un cálculo de orden de magnitud. La tasa de difusión J se iguala al número de moléculas N que se difunden a través de una área A en un tiempo t: $J = N/t$. Así, el tiempo $t = N/J$, donde J está dada por la ecuación 18-11. Tendremos que hacer algunas suposiciones y aproximaciones acerca de las concentraciones para usar la ecuación 18-11.

SOLUCIÓN A partir de la ecuación 18-11, obtenemos

$$t = \frac{N}{J} = \frac{N}{DA}\frac{\Delta x}{\Delta C}.$$

La concentración promedio (a la mitad de la distancia entre la botella y la nariz) se puede aproximar mediante $\overline{C} \approx N/V$, donde V es el volumen en el que se mueven las moléculas y es aproximadamente del orden de $V \approx A\,\Delta x$, donde Δx es 10 cm = 0.10 m. Sustituimos $N = \overline{C}V = \overline{C}A\,\Delta x$ en la ecuación anterior:

$$t \approx \frac{(\overline{C}A\,\Delta x)\,\Delta x}{DA\,\Delta C} = \frac{\overline{C}}{\Delta C}\frac{(\Delta x)^2}{D}.$$

La concentración de amoniaco es alta cerca de la botella (C) y baja cerca de la nariz que detecta (≈ 0), de manera que $\overline{C} \approx C/2 \approx \Delta C/2$, o $(\overline{C}/\Delta C) \approx \frac{1}{2}$. Puesto que las moléculas de NH_3 tienen un tamaño entre H_2 y O_2, a partir de la tabla 18-3 se estima $D \approx 4 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}$. Entonces,

$$t \approx \frac{1}{2}\frac{(0.10\ \mathrm{m})^2}{\left(4 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2/s}\right)} \approx 100\ \mathrm{s},$$

o alrededor de un minuto o dos.

NOTA Este resultado parece más bien exagerado a partir de la experiencia, lo que sugiere que las corrientes de aire (convección) son más importantes que la difusión para transmitir olores.

EJEMPLO CONCEPTUAL 18–10 **Anillos coloreados sobre una toalla de papel.** Una niña dibuja una pequeña mancha sobre una toalla de papel húmeda con un marcador café. Más tarde, descubre que, en vez de una mancha café, hay anillos coloreados concéntricos alrededor de la mancha que dibujó. ¿Qué ocurrió?



Cromatografía

RESPUESTA La tinta en un marcador café está compuesta de varias tintas diferentes que se mezclan para dar el color café. Estas tintas se difunden, cada una, a diferentes tasas a través de la toalla de papel húmeda. Después de cierto periodo, las tintas se difunden lo suficiente como para que las diferencias en distancias recorridas sean suficientes para separar los distintos colores. Los químicos y bioquímicos usan una técnica similar, llamada *cromatografía*, para separar sustancias con base en sus tasas de difusión a través de un medio.

Resumen

De acuerdo con la **teoría cinética** de los gases —que se basa en la idea de que un gas está constituido por moléculas que se mueven rápidamente y al azar—, la energía cinética promedio de las moléculas es proporcional a la temperatura Kelvin T:

$$\overline{K} = \tfrac{1}{2}m\overline{v^2} = \tfrac{3}{2}kT \qquad \textbf{(18–4)}$$

donde k es la constante de Boltzman.

En cualquier momento, existe una amplia distribución de la rapidez molecular dentro de un gas. La **distribución de Maxwell de la rapidez** se obtiene a partir de simples suposiciones de la teoría cinética y está en concordancia con los experimentos realizados con gases a una presión no muy alta.

El comportamiento de los gases reales a alta presión, y/o cerca del punto de licuefacción, se desvía de la ley del gas ideal a causa del tamaño finito de las moléculas y de las fuerzas de atracción entre las moléculas.

Por debajo de la **temperatura crítica**, un gas puede cambiar a líquido si se aplica suficiente presión; pero si la temperatura es más alta que la temperatura crítica, ninguna cantidad de presión hará que se forme una superficie líquida.

El **punto triple** de una sustancia se refiere a la temperatura y presión únicas en las que pueden coexistir en equilibrio las tres fases: sólida, líquida y gaseosa. Como es factible reproducir de mane-

ra precisa el punto triple del agua, con frecuencia éste se toma como un punto de referencia estándar.

La **evaporación** de un líquido es resultado del escape de las moléculas que se mueven más rápido y abandonan la superficie. Puesto que la velocidad molecular promedio es menor después de que las moléculas más rápidas escapan, la temperatura disminuye cuando tiene lugar la evaporación.

La **presión de vapor saturado** se refiere a la presión del vapor sobre un líquido cuando las dos fases están en equilibrio. La presión de vapor de una sustancia (como el agua) depende considerablemente de la temperatura y es igual a la presión atmosférica en el punto de ebullición.

La **humedad relativa** del aire en un lugar dado es la razón entre la presión parcial del vapor de agua en el aire y la presión de vapor saturado a esa temperatura; por lo general, se expresa como porcentaje.

[*La **ecuación de estado de van der Waals** toma en cuenta el volumen finito de las moléculas, así como las fuerzas de atracción entre moléculas, para aproximar mejor el comportamiento de los gases reales].

[*El **camino libre medio** es la distancia promedio que una molécula se mueve entre colisiones con otras moléculas].

[*La **difusión** es el proceso mediante el cual las moléculas de una sustancia se mueven (en promedio) de una área a otra como resultado de una diferencia en la concentración de esa sustancia].

Preguntas

1. ¿Por qué el tamaño de las diferentes moléculas no se considera en la ley del gas ideal?
2. Cuando un gas se comprime rápidamente (por ejemplo, al bajar un pistón), su temperatura aumenta. Cuando un gas se expande contra un pistón, se enfría. Explique estos cambios en temperatura usando la teoría cinética e indique en particular lo que ocurre con la cantidad de movimiento de las moléculas cuando golpean el pistón en movimiento.
3. En la sección 18-1 supusimos que las moléculas de gas tenían colisiones perfectamente elásticas con las paredes del contenedor. Esta suposición es innecesaria cuando las paredes están a la misma temperatura que el gas. ¿Por qué?
4. Explique con palabras cómo la ley de Charles se deriva de la teoría cinética y de la relación entre energía cinética promedio y temperatura absoluta.
5. Explique con palabras cómo se deriva la ley de Gay-Lussac a partir de la teoría cinética.
6. Conforme usted sube más alto en la atmósfera de la Tierra, aumenta la proporción entre las moléculas de N_2 y las moléculas de O_2. ¿Por qué?
7. ¿Puede determinar la temperatura de un vacío?
8. La temperatura ¿es una variable macroscópica o microscópica?
9. Explique por qué el pico de la curva para 310 K en la figura 18-3 no es tan alto como para la curva de 273 K. (Suponga que el número total de moléculas es el mismo en ambos casos).
10. La velocidad de escape desde la Tierra se refiere a la rapidez mínima que debe tener un objeto para salir de la Tierra y nunca regresar. *a*) La velocidad de escape desde la Luna es aproximadamente un quinto de lo que es para la Tierra debido a la menor masa de la Luna; explique por qué la Luna prácticamente no tiene atmósfera. *b*) Si alguna vez hubo hidrógeno en la atmósfera de la Tierra, ¿por qué probablemente escapó?
11. Si un contenedor de gas está en reposo, la velocidad promedio de las moléculas debe ser cero. Sin embargo, la rapidez promedio no es cero. Explique.
12. Si la presión en un gas se duplica mientras su volumen se mantiene constante, ¿en qué factor cambian *a*) v_{rms} y *b*) $\overline{v}$?
13. ¿Qué observación cotidiana le indicaría a usted que no todas las moléculas en un material tienen la misma rapidez?
14. Vimos que la presión de vapor saturado de un líquido (por ejemplo, agua) no depende de la presión externa. Sin embargo, la temperatura de ebullición sí depende de la presión externa. ¿Hay alguna contradicción? Explique.
15. El alcohol se evapora más rápidamente que el agua a temperatura ambiente. ¿Qué puede inferir acerca de las propiedades moleculares del alcohol en relación con las del agua?
16. Explique por qué un día caluroso y húmedo provoca mayor incomodidad que un día caluroso y seco a la misma temperatura.
17. ¿Es posible hervir agua a temperatura ambiente (20°C) sin calentarla? Explique.
18. ¿Qué se entiende exactamente cuando se dice que el oxígeno hierve a −183°C?
19. Un alambre largo y delgado se coloca sobre un bloque de hielo (o un cubo de hielo) a 0°C y de los extremos del alambre se cuelgan pesas. La experiencia demuestra que el alambre corta el cubo de hielo, pero deja un bloque sólido de hielo tras de sí. Este proceso se llama *recongelación*. Explique cómo ocurre esto mediante la inferencia de cómo el punto de congelación del agua depende de la presión.
20. Considere dos días en que la temperatura del aire es la misma, aunque la humedad es diferente. ¿Cuál es más denso, el aire seco o el aire húmedo a la misma *T*? Explique.
21. *a*) ¿Por qué la comida se cocina más rápido en una olla de presión? *b*) Por qué la pasta o el arroz necesitan hervir más tiempo a grandes alturas? *c*) ¿Es más difícil hervir agua a grandes alturas?
22. ¿Cómo difieren un gas y un vapor?
23. *a*) A temperaturas y presiones adecuadas, ¿el hielo se puede fundir si se aplica presión? *b*) A temperaturas y presiones adecuadas, ¿el dióxido de carbono se funde aplicando presión?
24. ¿Por qué el hielo seco no dura tanto a temperatura ambiente?
25. ¿En qué condiciones puede existir CO_2 líquido? Sea específico. ¿Puede existir como líquido a temperatura ambiente normal?
26. ¿Por qué el aire exhalado aparece como una pequeña nube blanca en el invierno (figura 18-16)?



FIGURA 18–16
Pregunta 26.

* 27. Discuta por qué las ondas sonoras pueden viajar en un gas sólo si su longitud de onda es un poco mayor que el camino libre medio.

* 28. Mencione varias formas para reducir el camino libre medio en un gas.

Problemas

18–1 Interpretación molecular de la temperatura

1. (I) *a*) ¿Cuál es la energía cinética traslacional promedio de una molécula de oxígeno a PTE? *b*) ¿Cuál es la energía cinética traslacional total de 1.0 mol de moléculas de O_2 a 25°C?

2. (I) Calcule la rapidez rms de los átomos de helio cerca de la superficie del Sol a una temperatura aproximada de 6000 K.

3. (I) ¿En qué factor aumentará la rapidez rms de las moléculas de un gas si la temperatura aumenta de 0°C a 180°C?

4. (I) Un gas está a 20°C. ¿A qué temperatura se debe elevar para triplicar la rapidez rms de sus moléculas?

5. (I) ¿Qué rapidez tendría un sujetapapeles de 1.0 g si tuviera la misma energía cinética que una molécula a 15°C?

6. (I) Una muestra de 1.0 mol de gas hidrógeno tiene una temperatura de 27°C. *a*) ¿Cuál es la energía cinética total de todas las moléculas de gas en la muestra? *b*) ¿Qué tan rápido tendría que correr una persona de 65 kg para tener la misma energía cinética?

7. (I) Doce moléculas tienen las siguientes rapideces, dadas en unidades arbitrarias: 6.0, 2.0, 4.0, 6.0, 0.0, 4.0, 1.0, 8.0, 5.0, 3.0, 7.0 y 8.0. Calcule *a*) la rapidez media y *b*) la rapidez rms.

8. (II) La rapidez rms de las moléculas en un gas a 20.0°C debe aumentar en un 2.0%. ¿A cuánto se debe elevar la temperatura del gas?

9. (II) Si la presión en un gas se triplica mientras su volumen se mantiene constante, ¿en qué factor cambia v_{rms}?

10. (II) Demuestre que la rapidez rms de las moléculas en un gas está dada por $v_{rms} = \sqrt{3P/\rho}$, donde P es la presión en el gas y ρ es la densidad del gas.

11. (II) Demuestre que para una mezcla de dos gases a la misma temperatura, la razón de sus rapideces rms es igual a la razón inversa de las raíces cuadradas de sus masas moleculares.

12. (II) ¿Cuál es la rapidez rms de las moléculas de nitrógeno contenidas en un volumen de 8.5 m^3 a 3.1 atm, si la cantidad total de nitrógeno es de 1800 moles?

13. (II) *a*) Para un gas ideal a temperatura T, demuestre que

$$\frac{dv_{rms}}{dT} = \frac{1}{2}\frac{v_{rms}}{T},$$

y, usando la aproximación $\Delta v_{rms} \approx \frac{dv_{rms}}{dT}\Delta T$, demuestre que

$$\frac{\Delta v_{rms}}{v_{rms}} \approx \frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T}.$$

b) Si la temperatura promedio del aire cambia de −5°C en invierno a 25°C en verano, estime el cambio porcentual en la rapidez rms de las moléculas de aire entre estas estaciones.

14. (II) ¿Cuál es la distancia promedio entre las moléculas de oxígeno a PTE?

15. (II) Dos isótopos de uranio, ^{235}U y ^{238}U (los superíndices se refieren a sus masas atómicas), se pueden separar mediante un proceso de difusión de gas al combinarlos con flúor para formar el compuesto gaseoso UF_6. Calcule la razón de las rapideces rms de estas moléculas para los dos isótopos, a T constante. Use el apéndice F para las masas.

16. (II) ¿Las bolsas de vacío pueden perdurar en un gas ideal? Suponga que una habitación está llena con aire a 20°C y que de algún modo una pequeña región esférica de 1 cm de radio dentro de la habitación queda desprovista de moléculas de aire. Estime cuánto tiempo tardará el aire en rellenar esa región de vacío. Suponga que la masa atómica del aire es 29 u.

17. (II) Calcule *a*) la rapidez rms de una molécula de nitrógeno a 0°C y *b*) determine cuántas veces por segundo en promedio se movería de ida y vuelta a través de una habitación de 5.0 m, si se supone que realiza muy pocas colisiones con otras moléculas.

18. (III) Estime cuántas moléculas de aire rebotan por segundo en una pared de una habitación típica, suponiendo un gas ideal de N moléculas contenido en una habitación cúbica con lados de longitud ℓ a temperatura T y presión P. *a*) Demuestre que la frecuencia f con la que las moléculas de gas golpean una pared es

$$f = \frac{\bar{v}_x}{2}\frac{P}{kT}\ell^2$$

donde $\bar{v}_x$ es el componente x promedio de la velocidad de la molécula. *b*) Demuestre que la ecuación se puede escribir entonces como

$$f \approx \frac{P\ell^2}{\sqrt{4mkT}}$$

donde m es la masa de una molécula de gas. *c*) Suponga que una habitación cúbica llena de aire, que está a nivel del mar, tiene una temperatura de 20°C y lados de longitud $\ell = 3$ m. Determine f.

18–2 Distribución de la rapidez molecular

19. (I) Si usted duplica la masa de las moléculas en un gas, ¿es posible cambiar la temperatura para evitar que cambie la distribución de velocidades? Si es así, ¿qué se necesita hacer a la temperatura?

20. (I) Un grupo de 25 partículas tienen las siguientes rapideces: dos tienen rapidez 10 m/s, siete tienen 15 m/s, cuatro tienen 20 m/s, tres tienen 25 m/s, seis tienen 30 m/s, una tiene 35 m/s y dos tienen 40 m/s. Determine *a*) la rapidez promedio, *b*) la rapidez rms y *c*) la rapidez más probable.

21. (II) Un gas que consiste en 15,200 moléculas, cada una de 2.00 × 10^{-26} kg de masa, tiene la siguiente distribución de rapidez, que aproximadamente imita la distribución de Maxwelliana:

Número de moléculas	Rapidez (m/s)
1600	220
4100	440
4700	660
3100	880
1300	1100
400	1320

a) Determine v_{rms} para esta distribución de rapideces. *b*) Dado su valor para v_{rms}, ¿qué temperatura (efectiva) asignaría a este gas? *c*) Determine la rapidez media $\bar{v}$ de la distribución y use ese valor para asignar una temperatura (efectiva) al gas. ¿La temperatura encontrada aquí es consistente con la que determinó en la parte *b*)?

22. (III) A partir de la distribución de rapideces de Maxwell (ecuación 18-6), demuestre *a*) $\int_0^\infty f(v)\,dv = N$, y *b*)

$$\int_0^\infty v^2 f(v)\,dv/N = 3kT/m.$$

18–3 Gases reales

23. (I) ¿En qué fase existe el CO_2 cuando la presión es de 30 atm y la temperatura es de 30°C (figura 18-6)?

24. (I) *a*) A presión atmosférica, ¿en qué fases puede existir el CO_2? *b*) ¿Para qué rango de presiones y temperaturas el CO_2 puede ser líquido? Consulte la figura 18-6.

25. (I) ¿En qué fase está el agua cuando la presión es de 0.01 atm y la temperatura es *a*) 90°C, *b*) −20°C?

26. (II) Usted tiene una muestra de agua y puede controlar arbitrariamente la temperatura y la presión. *a*) A partir de la figura 18-5, describa los cambios de fase que vería si comienza a una temperatura de 85°C, una presión de 180 atm y disminuye la presión a 0.004 atm mientras mantiene la temperatura fija. *b*) Repita la parte *a*) con la temperatura a 0.0°C. Suponga que usted mantiene el sistema en las condiciones iniciales el tiempo suficiente para que el sistema se estabilice antes de realizar cambios posteriores.

18–4 Presión de vapor y humedad

27. (I) ¿Cuál es la presión parcial del vapor de agua a 30°C, si la humedad es del 85%?

28. (I) ¿Cuál es la presión parcial del agua en un día en el que la temperatura es de 25°C y la humedad relativa es del 55%?

29. (I) ¿Cuál es la presión del aire en un lugar donde el agua hierve a 80°C?

30. (II) ¿Cuál es el punto de rocío si la humedad es del 75% en un día en el que la temperatura es de 25°C?

31. (II) Si la presión del aire en un lugar particular en las montañas es de 0.75 atm, estime la temperatura a la que hierve el agua.

32. (II) ¿Cuál es la masa de agua en una habitación cerrada de 5.0 m × 6.0 m × 2.4 m, cuando la temperatura es de 24.0°C y la humedad relativa es del 65%?

33. (II) ¿Cuál es la presión aproximada dentro de una olla de presión si el agua hierve a una temperatura de 120°C? Suponga que no escapa aire durante el proceso de calentamiento, el cual comenzó a 12°C.

34. (II) Si la humedad en una habitación de 440 m^3 de volumen a 25°C es del 65%, ¿qué masa de agua se puede evaporar aún de una cacerola abierta?

35. (II) Una **olla de presión** es un recipiente cerrado diseñado para cocinar alimentos con el vapor producido por agua hirviendo un poco arriba de 100°C. La olla de presión en la figura 18-17 usa un peso de masa *m* para permitir que el vapor escape a cierta presión a través de un pequeño orificio (de diámetro *d*) en la tapa de la olla. Si d = 3.0 mm, ¿cuál debe ser *m* para cocinar alimentos a 120°C? Suponga que la presión atmosférica afuera de la olla es de 1.01 × 10^5 Pa.



FIGURA 18–17
Problema 35.

36. (II) Cuando se usa un barómetro de mercurio (sección 13-6), por lo general se supone que la presión de vapor del mercurio es cero. A temperatura ambiente, la presión de vapor del mercurio es aproximadamente de 0.0015 mm-Hg. A nivel del mar, la altura *h* del mercurio en un barómetro es aproximadamente de 760 mm. *a*) Si la presión de vapor del mercurio es despreciable, ¿la presión atmosférica real es mayor o menor que el valor indicado en el barómetro? *b*) ¿Cuál es el error porcentual? *c*) ¿Cuál es el error porcentual si se usa un barómetro de agua y se ignora la presión de vapor saturado del agua a PTE?

37. (II) Si la humedad es del 45% a 30.0°C, ¿cuál es el punto de rocío? Use interpolación lineal para encontrar la temperatura del punto de rocío al grado más cercano.

38. (III) El aire que está en su punto de rocío de 5°C entra a un edificio donde se calienta a 20°C. ¿Cuál será la humedad relativa a esa temperatura? Suponga una presión constante de 1.0 atm. Tome en cuenta la expansión del aire.

39. (III) ¿Cuál es la relación matemática entre la temperatura de ebullición del agua y la presión atmosférica? *a*) Con los datos de la tabla 18-2, en el rango de temperatura de 50 a 150°C, grafique ln *P* versus (1/*T*), donde *P* es la presión de vapor saturado del agua (Pa) y *T* es la temperatura en la escala Kelvin. Demuestre que resulta una gráfica en línea recta y determine la pendiente y la intersección con *y* de la línea. *b*) Demuestre que su resultado implica

$$P = Be^{-A/T}$$

donde *A* y *B* son constantes. Utilice la pendiente y la intersección con *y* de su gráfica para demostrar que $A \approx 5\,000$ K y $B \approx 7 \times 10^{10}$ Pa.

* 18–5 Ecuación de estado de van der Waals

* 40. (II) En la ecuación de estado de van der Waals, la constante *b* representa la cantidad de "volumen no disponible" ocupado por las moléculas mismas. Por lo tanto, *V* se sustituye por $(V - nb)$, donde *n* es el número de moles. Para el oxígeno, *b* es aproximadamente 3.2×10^{-5} m^3/mol. Estime el diámetro de una molécula de oxígeno.

* 41. (II) En el caso del gas oxígeno, la ecuación de estado de van der Waals logra su mejor ajuste para $a = 0.14$ N·m^4/mol^2 y $b = 3.2 \times 10^{-5}$ m^3/mol. Determine la presión en 1.0 mol del gas a 0°C, si su volumen es 0.70 L, usando *a*) la ecuación de van der Waals, *b*) la ley del gas ideal.

* 42. (III) Una muestra de 0.5 mol de gas O_2 está en un gran cilindro con un pistón móvil en un extremo, de manera que se puede comprimir. El volumen inicial es lo suficientemente grande como para que no haya una diferencia significativa entre la presión dada por la ley del gas ideal y la presión dada por la ecuación de van der Waals. Conforme el gas se comprime lentamente a temperatura constante (use 300 K), ¿a qué volumen la ecuación de van der Waals da una presión que es diferente en un 5% de la presión de la ley del gas ideal? Sea $a = 0.14$ N·m^4/mol^2 y $b = 3.2 \times 10^{-5}$ m^3/mol.

* 43. (III) *a*) A partir de la ecuación de estado de van der Waals, demuestre que la temperatura y la presión críticas están dadas por

$$T_{cr} = \frac{8a}{27bR}, \qquad P_{cr} = \frac{a}{27b^2}.$$

[*Sugerencia:* Considere el hecho de que la curva *P* versus *V* tiene un punto de inflexión en el punto crítico, de manera que la primera y segunda derivadas son cero.] *b*) Determine *a* y *b* para CO_2 a partir de los valores medidos de T_{cr} = 304 K y P_{cr} = 72.8 atm.

* 44. (III) ¿Qué tan bien describe la ley del gas ideal el aire presurizado en un tanque de buceo? *a*) Para llenar un tanque de buceo típico, un compresor toma aproximadamente 2300 L de aire a 1.0 atm y comprime este gas en el volumen interno de 12 L del tanque. Si el proceso de llenado se realiza a 20°C, demuestre que un tanque contiene aproximadamente 96 moles de aire. *b*) Suponga que el tanque tiene 96 moles de aire a 20°C. Use la ley del gas ideal para predecir la presión del aire dentro del tanque. *c*) Utilice la ecuación de estado de van der Waals para predecir la presión del aire dentro del tanque. Para el aire, las constantes van der Waals son $a = 0.1373$ N·m^4/mol^2 y $b = 3.72 \times 10^{-5}$ m^3/mol. *d*) Si se considera que la presión van der Waals es la presión de aire real, demuestre que la ley del gas ideal predice una presión que está en un error aproximadamente del 3%.

* 18–6 Camino libre medio

*45. (II) ¿Aproximadamente a qué presión el recorrido libre medio de las moléculas de aire sería *a*) de 0.10 m y *b*) igual al diámetro de las moléculas de aire, $\approx 3 \times 10^{-10}$ m? Suponga que $T =$ 20°C.

*46. (II) Por debajo de cierta presión umbral, las moléculas de aire (0.3 nm de diámetro) dentro de una cámara de vacío de investigación están en el "régimen de colisión libre", lo que significa que una molécula de aire particular tiene tanta probabilidad de cruzar el contenedor y chocar primero con la pared opuesta, como de chocar con otra molécula de aire. Estime la presión umbral para una cámara de vacío de 1.0 m de lado a 20°C.

*47. (II) Una cantidad muy pequeña de gas hidrógeno se libera en el aire. Si el aire está a 1.0 atm y 15°C, estime el rcamino libre medio para una molécula de H_2. ¿Qué suposiciones hizo?

*48. (II) *a*) El camino libre medio de las moléculas de CO_2 a PTE se mide en aproximadamente 5.6×10^{-8} m. Estime el diámetro de una molécula de CO_2. *b*) Haga lo mismo con el gas He para el que $\ell_M \approx 25 \times 10^{-8}$ m a PTE.

*49. (II) (*a*) Demuestre que el número de colisiones que realiza una molécula por segundo, que se conoce como *frecuencia de colisión*, *f*, está dado por $f = \bar{v}/\ell_M$, y por lo tanto, $f = 4\sqrt{2}\,\pi r^2\,\bar{v}N/V$. *b*) ¿Cuál es la frecuencia de colisión para moléculas de N_2 en aire a $T = 20°C$ y $P = 1.0 \times 10^{-2}$ atm?

*50. (II) En el ejemplo 18-8 vimos que el rcamino libre medio de las moléculas de aire a PTE, ℓ_M, es aproximadamente 9×10^{-8} m. Estime la frecuencia de colisión, *f*, es decir, el número de colisiones por unidad de tiempo.

*51. (II) Una caja cúbica de 1.80 m de lado se vacía de manera que la presión del aire en el interior es de 10^{-6} torr. Estime cuántas colisiones tienen las moléculas entre sí por cada colisión con la pared (0°C).

*52. (III) Estime la presión máxima permisible en un tubo de rayos catódicos de 32 cm de largo, si el 98% de todos los electrones deben golpear la pantalla sin golpear antes una molécula de aire.

* 18–7 Difusión

*53. (I) ¿Aproximadamente cuánto tardaría en detectarse el amoniaco del ejemplo 18-9 a 1.0 m de la botella una vez abierta? ¿Qué sugiere esto acerca de la importancia relativa de la difusión y la convección para transportar olores?

*54. (II) Estime el tiempo necesario para que una molécula de glicina (véase la tabla 18-3) se difunda una distancia de 15 μm en agua a 20°C, si su concentración varía a lo largo de esa distancia de 1.00 a 0.50 mol/m^3? Compare esta "rapidez" con su rapidez rms (térmica). La masa molecular de la glicina es de aproximadamente 75 u.

*55. (II) El oxígeno se difunde desde la superficie de los insectos hacia el interior a través de pequeños tubos llamados tráqueas. Una tráquea promedio tiene aproximadamente 2 mm de largo y una área transversal de 2×10^{-9} m^2. Si se supone que la concentración del oxígeno en el interior es la mitad de la concentración en el exterior, es decir, en la atmósfera, *a*) demuestre que la concentración de oxígeno en el aire (el 21% del aire es oxígeno) a 20°C es de aproximadamente 8.7 mol/m^3, luego *b*) calcule la tasa de difusión *J* y *c*) estime el tiempo promedio para que una molécula se difunda. Suponga que la constante de difusión es 1×10^{-5} m^2/s.

Problemas generales

56. Una muestra de gas ideal debe contener al menos $N = 106$ moléculas para que la distribución de Maxwell sea una descripción válida del gas y pueda asignársele una temperatura significativa. Para un gas ideal a PTE, ¿cuál es la menor escala de longitud ℓ (volumen $V = \ell^3$) para la que se puede asignar una temperatura válida?

57. En el espacio exterior, la densidad de la materia es de aproximadamente un átomo por cm^3 (principalmente átomos de hidrógeno) y la temperatura es de 2.7 K. Calcule la rapidez rms de estos átomos de hidrógeno y la presión (en atmósferas).

58. Calcule aproximadamente la energía cinética traslacional de todas las moléculas en una bacteria *E. coli* de 2.0×10^{-15} kg de masa, a 37°C. Suponga que el 70% del peso de la célula es agua, y que las otras moléculas tienen una masa molecular promedio del orden de 10^5 u.

59. *a*) *a*) Estime la rapidez rms de un aminoácido, cuya masa molecular es 89 u, en una célula viva a 37°C. *b*) ¿Cuál sería la rapidez rms de una proteína cuya masa molecular es de 85,000 u a 37°C?

60. La rapidez de escape desde la Tierra es 1.12×10^4 m/s, de manera que una molécula de gas que viaja alejándose de la Tierra cerca de la frontera exterior de la atmósfera terrestre, a esa rapidez, lograría escapar del campo gravitacional de nuestro planeta y perderse en la atmósfera. ¿A qué temperatura la rapidez promedio de *a*) las moléculas de oxígeno y *b*) los átomos de helio sería igual a 1.12×10^4 m/s? *c*) ¿Podría explicar por qué la atmósfera contiene oxígeno y no helio?

61. El segundo postulado de la teoría cinética es que las moléculas, en promedio, están alejadas unas de otras. Esto es, su separación promedio es mucho mayor que el diámetro de cada molécula. ¿Es razonable esta suposición? Para comprobarlo, calcule la distancia promedio entre moléculas de un gas a PTE y compárela con el diámetro de una molécula típica de gas, de aproximadamente 0.3 nm. Si las moléculas tuvieran el diámetro de bolas de ping pong, digamos 4 cm, en promedio, ¿qué tan lejos estaría la siguiente bola de ping pong?

62. Una muestra de cesio líquido se calienta en un horno a 400°C y el vapor resultante se usa para producir un haz atómico. El volumen del horno es de 55 cm^3, la presión de vapor del Cs a 400°C es de 17 mm-Hg, y el diámetro de los átomos de cesio en el vapor es de 0.33 nm. *a*) Calcule la rapidez media de los átomos de cesio en el vapor. *b*) Determine el número de colisiones por segundo que experimenta un solo átomo de Cs con otros átomos de cesio. *c*) Determine el número total de colisiones por segundo entre todos los átomos de cesio en el vapor. Note que una colisión implica dos átomos de Cs y suponga que se cumple la ley del gas ideal.

63. Considere un contenedor de gas oxígeno a una temperatura de 20°C que tiene 1.00 m de alto. Compare la energía potencial gravitacional de una molécula en lo alto del contenedor (suponiendo que la energía potencial es cero en el fondo) con la energía cinética promedio de las moléculas. ¿Es razonable despreciar la energía potencial?

64. En climas húmedos, las personas constantemente *deshumedecen* sus sótanos para evitar putrefacción y moho. Si el sótano de una casa (que se mantiene a 20°C) tiene 115 m^2 de espacio de piso y una altura de 2.8 m, ¿cuál es la masa de agua que se debe eliminar del sótano para reducir la humedad del 95% a un porcentaje más razonable del 40%?

65. Si se supone que una molécula típica de nitrógeno u oxígeno mide aproximadamente 0.3 nm de diámetro, ¿qué porcentaje de la habitación en la que usted está sentado ocupa el volumen de las moléculas mismas?

66. Un tanque de buceo tiene un volumen de 3100 cm^3. Para inmersiones muy profundas, el tanque se llena con un 50% (por volumen) de oxígeno puro y un 50% de helio puro. *a*) ¿Cuántas moléculas de cada tipo hay en el tanque, si este último se llena a 20°C y una presión manométrica de 12 atm? *b*) ¿Cuál es la razón entre las energías cinéticas promedio de los dos tipos de moléculas? *c*) ¿Cuál es la razón entre las rapideces rms de los dos tipos de moléculas?

67. Un vehículo espacial que regresa de la Luna entra a la atmósfera con una rapidez aproximada de 42,000 km/h. ¿Qué temperatura estaría asociada con las moléculas (de nitrógeno) que golpean la nariz del vehículo con esa rapidez? (A causa de esta alta temperatura, la nariz de un vehículo espacial debe fabricarse con materiales especiales; de hecho, parte de ella se vaporiza, lo que provoca el brillante resplandor que se observa en el reingreso).

68. A temperatura ambiente, evaporar 1.00 g de agua toma aproximadamente 2.45×10^3 J. Estime la rapidez promedio de las moléculas que se evaporan. ¿Qué múltiplo de v_{rms} (a 20°C) para moléculas de agua representa esto? (Suponga que se cumple la ecuación 18-4).

69. Calcule la presión de vapor total del agua en el aire en los siguientes dos días: *a*) un día caluroso de verano, con 30°C de temperatura y un 65% de humedad relativa; *b*) un día frío de invierno, con 5°C de temperatura y un 75% de humedad relativa.

* **70.** A 300 K, una muestra de 8.50 moles de dióxido de carbono ocupa un volumen de 0.220 m^3. Calcule la presión de gas, primero de acuerdo con la ley del gas ideal, y luego usando la ecuación de estado de van der Waals. (Los valores para a y b se dan en la sección 18-5.) En este rango de presión y volumen, la ecuación de van der Waals es muy exacta. ¿Qué error porcentual cometió al suponer un comportamiento de acuerdo con la ley del gas ideal?

* **71.** La densidad de los átomos, principalmente de hidrógeno, en el espacio interestelar es de aproximadamente un átomo por centímetro cúbico. Estime el camino libre medio de los átomos de hidrógeno, considerando un diámetro atómico de 10^{-10} m.

* **72.** Con la ley del gas ideal, encuentre una expresión para el camino libre medio ℓ_M que incluya presión y temperatura en vez de (N/V). Use esta expresión para encontrar el camino libre medio de moléculas de nitrógeno a una presión de 7.5 atm y 300 K.

73. Un sauna tiene 8.5 m^3 de volumen de aire, y la temperatura es de 90°C. El aire es perfectamente seco. ¿Cuánta agua (en kg) se debe evaporar si se desea aumentar la humedad relativa del 0% al 10%? (Véase la tabla 18-2).

74. Una tapa de 0.50 kg de un bote de basura se mantiene suspendida contra la gravedad mediante pelotas de tenis lanzadas verticalmente hacia arriba contra ella. ¿Cuántas pelotas de tenis por segundo deben rebotar elásticamente en la tapa, si tienen una masa de 0.060 kg y se lanzan a 12 m/s?

* **75.** Las ondas sonoras en un gas sólo se propagan si las moléculas del gas chocan unas con otras en la escala de tiempo del periodo de la onda sonora. Por lo tanto, la frecuencia más alta posible $f_{máx}$ para una onda sonora en un gas es aproximadamente igual al inverso del tiempo promedio de colisión entre moléculas. Suponga que un gas, compuesto de moléculas con masa m y radio r, está a una presión P y temperatura T. *a*) Demuestre que

$$f_{\text{máx}} \approx 16Pr^2\sqrt{\frac{\pi}{mkT}}.$$

b) Determine $f_{máx}$ para aire a 20°C a nivel del mar. ¿Cuántas veces mayor es $f_{máx}$ en comparación con la frecuencia más alta en el rango de audición de los seres humanos (20 kHz)?

* Problemas numéricos/por computadora

* **76.** (II) Use una hoja de cálculo para calcular y graficar la fracción de moléculas en cada intervalo de rapidez de 50 m/s desde 100 m/s hasta 5000 m/s si $T = 300$ K.

* **77.** (II) Utilice integración numérica [sección 2-9] para estimar (dentro de un 2%) la fracción de moléculas en el aire a 1.00 atm y 20°C que tienen una rapidez mayor que 1.5 veces la rapidez más probable.

* **78.** (II) Para gas oxígeno, las constantes de van der Waals son $a = 0.14\ \text{N}\cdot\text{m}^4/\text{mol}^2$ y $b = 3.2 \times 10^{-5}\ \text{m}^3/\text{mol}$. Con estos valores, grafique seis curvas de presión versus volumen entre $V = 2 \times 10^{-5}$ m^3 y 2.0×10^{-4} m^3, para 1 mol de gas oxígeno a temperaturas de 80 K, 100 K, 120 K, 130 K, 150 K y 170 K. A partir de las gráficas, determine aproximadamente la temperatura crítica para el oxígeno.

Respuestas a los ejercicios

A: *a*).

B: *d*).

C: *c*).

D: *d*).

E: *b*).

Cuando hace frío, la ropa abrigadora actúa como aislante para reducir la pérdida de calor del cuerpo hacia el exterior mediante conducción y convección. La radiación del calor proveniente de una fogata calienta tanto al cuerpo como a la ropa. El fuego también transfiere energía directamente, mediante convección y conducción de calor, hacia los alimentos que se cocinan. El calor, al igual que el trabajo, representa una transferencia de energía. El calor se define como una transferencia de energía causada por una diferencia de temperatura. El trabajo es una transferencia de energía por medios mecánicos, no por una diferencia de temperatura. La primera ley de la termodinámica vincula el calor y el trabajo en un enunciado general de conservación de la energía: el calor Q agregado a un sistema menos el trabajo neto W realizado por el sistema es igual al cambio en la energía interna ΔE_{int} del sistema: $\Delta E_{int} = Q - W$. La energía interna E_{int} es la suma total de la energía de las moléculas del sistema.



CAPÍTULO 19

Calor y la primera ley de la termodinámica

CONTENIDO

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!

Un cubo de 5 kg de hierro caliente (60°C) se pone en contacto térmico con un cubo de 10 kg de hierro frío (15°C). ¿Cuál de los siguientes enunciados es válido?

a) El calor fluye espontáneamente del cubo caliente al cubo frío hasta que ambos cubos tienen el mismo contenido de calor.
b) El calor fluye espontáneamente del cubo caliente al cubo frío hasta que ambos cubos tienen la misma temperatura.
c) El calor puede fluir espontáneamente del cubo caliente al cubo frío, aunque también puede fluir espontáneamente del cubo frío al cubo caliente.
d) El calor nunca puede fluir de un objeto (o área) frío a un objeto (o área) caliente.
e) El calor fluye del cubo más grande al más pequeño porque el más grande tiene más energía interna.

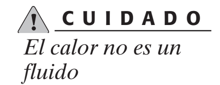
Cuando una olla de agua fría se pone sobre el quemador caliente de una estufa, la temperatura del agua aumenta. Se dice que el calor "fluye" del quemador caliente hacia el agua fría. Cuando dos objetos a diferentes temperaturas se ponen en contacto, el calor fluye espontáneamente del más caliente al más frío. El flujo espontáneo de calor es en la dirección que tiende a igualar la temperatura. Si los dos objetos se mantienen en contacto el tiempo suficiente para que sus temperaturas se igualen, se dice que los objetos están en equilibrio térmico, y a partir de entonces ya no existirá más flujo de calor entre ellos. Por ejemplo, cuando se coloca por primera vez un termómetro clínico en la boca de una persona, el calor fluye de la boca al termómetro. Cuando este último alcanza la misma temperatura que el interior de la boca, el termómetro y la boca están en equilibrio, y ya no fluye más calor.

Con frecuencia se confunden calor y temperatura. Son conceptos muy diferentes, por lo que haremos una clara distinción entre ellos. En este capítulo definimos y comenzamos a usar el concepto de calor. También iniciaremos la discusión de la termodinámica, que es el nombre que se da al estudio de los procesos en los que se transfiere energía como calor y como trabajo.

19–1 El calor como transferencia de energía

Utilizamos el término "calor" en la vida cotidiana como si supiéramos qué significa. Sin embargo, el término con frecuencia se usa de manera inconsistente, así que es importante definir con precisión qué se entiende por calor, además de clarificar los fenómenos y conceptos relacionados con él.

Comúnmente se habla del flujo de calor: el calor fluye del quemador de una estufa a una olla de sopa, del Sol a la Tierra, de la boca de una persona al termómetro. El calor fluye espontáneamente de un objeto con mayor temperatura hacia otro con menor temperatura. De hecho, un modelo de calor propuesto en el siglo XVIII concebía el flujo de calor como el movimiento de una sustancia fluida llamada *calórico*. Sin embargo, el fluido calórico nunca pudo detectarse. En el siglo XIX se encontró que los diversos fenómenos asociados con el calor se podían describir de manera consistente mediante un nuevo modelo que concebía al calor como similar al trabajo, como se explicará en unos momentos. Primero hay que hacer notar que una unidad común para calor, todavía en uso en la actualidad, se nombró en honor al calórico. Se llama **caloría** (cal) y se define como *la cantidad de calor necesaria para elevar la temperatura de 1 gramo de agua en 1 grado Celsius*. [Para ser precisos, se especifica el rango particular de temperatura que va de 14.5 a 15.5°C porque el calor requerido es ligeramente diferente a distintas temperaturas. La diferencia es menor del 1% en el rango de 0 a 100°C y se ignorará para la mayoría de los propósitos]. Con más frecuencia que la caloría, se usa la **kilocaloría** (kcal), la cual equivale a 1000 calorías. Así que *1 kcal es el calor necesario para elevar la temperatura de 1 kg de agua en 1 C°*. Por lo general, una kilocaloría se llama **Caloría** (con C mayúscula), y esta Caloría (o el kJ) se usa para especificar el valor energético de los alimentos. En el sistema inglés de unidades, el calor se mide en unidades térmicas británicas (Btu). Un Btu se define como el calor necesario para elevar la temperatura de 1 lb de agua en 1 F°. Es posible demostrar (problema 4) que 1 Btu = 0.252 kcal = 1056 J.



CUIDADO
El calor no es un fluido

Varios científicos del siglo XIX aceptaron la idea de que el calor estaba relacionado con la transferencia de energía; entre ellos destaca un cervecero inglés, James Prescott Joule (1818-1889). En la figura 19-1 se muestra (simplificado) uno de los experimentos de Joule. El peso que cae provoca que la rueda de paletas gire. La fricción entre el agua y la rueda de paletas hace que la temperatura del agua se eleve ligeramente (Joule apenas logró medir ese aumento). A partir de éste y muchos otros experimentos (algunos de los cuales implicaban energía eléctrica), Joule determinó que una cantidad dada de trabajo realizado siempre era equivalente a una cantidad particular de entrada de calor. En términos cuantitativos, se encontró que 4.186 joules (J) de trabajo eran equivalentes a 1 caloría (cal) de calor. Esto se conoce como el **equivalente mecánico del calor**:

$$4.186 \text{ J} = 1 \text{ cal};$$
$$4.186 \text{ kJ} = 1 \text{ kcal}.$$

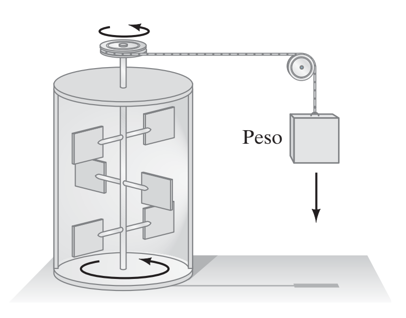
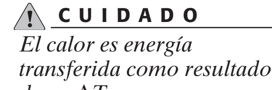


FIGURA 19–1 Experimento de Joule sobre el equivalente mecánico del calor.

Como resultado de éstos y otros experimentos, los científicos, lejos de interpretar el calor como una sustancia o como una forma de energía, determinaron que el calor se refiere a una *transferencia de energía*: cuando el calor fluye de un objeto caliente a uno más frío, es energía lo que se transfiere del objeto caliente al frío. Por lo tanto, el **calor** es *energía transferida de un objeto a otro debido a una diferencia en temperatura.* En unidades del SI, la unidad para calor, como para cualquier forma de energía, es el joule. No obstante, todavía se utilizan las calorías y kcal. En la actualidad, la caloría *se define* en términos del joule (mediante el equivalente mecánico del calor que se acaba de precisar) y no en términos de las propiedades del agua, como se mencionó anteriormente. Aunque esto último es fácil de recordar: 1 cal eleva 1 g de agua en 1 C°, o 1 kcal eleva 1 kg de agua en 1 C°.



CUIDADO
El calor es energía transferida como resultado de un ΔT

El resultado de Joule fue crucial porque extendió el principio trabajo-energía para incluir procesos que implicaban calor; también condujo al establecimiento de la ley de la conservación de la energía, que se explicará con detalle más adelante en este capítulo.

EJEMPLO 19–1 **ESTIMACIÓN** **¡A quemar las calorías adicionales!** Suponga que usted ignoró las recomendaciones y comió demasiado helado y pastel del orden de 500 Calorías. Para compensar, usted quiere realizar una cantidad equivalente de trabajo subiendo escaleras o una montaña. ¿Qué altura debe ascender?



Quema de calorías

PLANTEAMIENTO El trabajo W que necesita realizar al subir escaleras es igual al cambio en energía potencial gravitacional: $W = \Delta PE = mgh$, donde h es la altura vertical escalada. Para esta estimación, aproxime su masa como $m \approx 60$ kg.

SOLUCIÓN 500 Calorías de alimentos son 500 kcal, que en joules es

$$(500\,\text{kcal})\left(4.186 \times 10^3\,\text{J/kcal}\right) = 2.1 \times 10^6\,\text{J}.$$

El trabajo realizado para escalar una altura vertical h es $W = mgh$. Despejamos h:

$$h = \frac{W}{mg} = \frac{2.1 \times 10^6\,\text{J}}{(60\,\text{kg})\left(9.80\,\text{m/s}^2\right)} = 3600\,\text{m}.$$

Éste es un enorme cambio de altura (más de 11,000 ft).

NOTA El cuerpo humano no transforma la energía de los alimentos con un 100% de eficiencia; en realidad, lo hace con un 20% de eficiencia. Como se explicará en el siguiente capítulo, parte de la energía siempre “se desperdicia”, así que en realidad tendría que ascender sólo aproximadamente (0.2)(3600 m) ≈ 700 m, que es más razonable (aproximadamente 2300 ft de altura).

19–2 Energía interna

La suma de la energía de todas las moléculas de un objeto constituye su **energía interna**. (En ocasiones se usa el término **energía térmica** para significar lo mismo). Ahora presentamos el concepto de energía interna, el cual ayudará a clarificar varias ideas acerca del calor.

Distinción entre temperatura, calor y energía interna



Hay que distinguir el calor de la energía interna y de la temperatura

La teoría cinética permite hacer una clara distinción entre temperatura, calor y energía interna. La temperatura (en kelvin) es una medida del *promedio* de energía cinética de moléculas individuales. La energía interna se refiere a la energía *total* de las moléculas dentro del objeto. (Así, dos lingotes de hierro calientes de igual masa pueden tener la misma temperatura; sin embargo, dos lingotes tienen el doble de energía interna que uno solo.) Finalmente, el calor se refiere a una *transferencia* de energía de un objeto a otro como resultado de una diferencia en temperatura.

CUIDADO

La dirección del flujo de calor depende de la temperatura (no de la cantidad de energía interna)

Note que la dirección del flujo de calor entre dos objetos depende de sus temperaturas, no de cuánta energía tenga cada uno. De esta forma, si 50 g de agua a 30°C se ponen en contacto (o se mezclan) con 200 g de agua a 25°C, el calor fluye *del* agua a 30°C *al* agua a 25°C, aun cuando la energía interna del agua a 25°C sea mucho mayor puesto que hay mayor cantidad de ella.

EJERCICIO A Regrese a la pregunta de inicio del capítulo, página 496, y respóndala de nuevo. Intente explicar por qué quizá la contestó de manera diferente la primera vez.

Energía interna de un gas ideal

Calculemos la energía interna de n moles de un gas monoatómico ideal (un átomo por molécula). La energía interna, E_{int}, es la suma de las energías cinéticas traslacionales de todos los átomos.† Esta suma es igual a la energía cinética promedio por molécula, multiplicada por el número total de moléculas, N:

$$E_{\text{int}} = N\left(\tfrac{1}{2}m\overline{v^2}\right).$$

Con la ecuación 18-4, $\overline{K} = \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT$, podemos escribir esto como

$$E_{\text{int}} = \tfrac{3}{2}NkT \qquad \textbf{(19–1a)}$$

†En algunos libros se usa el símbolo U para la energía interna. El uso de E_{int} evita confusión con la U que representa energía potencial (capítulo 8).

o (recuerde la sección 17-9)

$$E_{\text{int}} = \tfrac{3}{2}nRT, \qquad \text{[gas monoatómico ideal]} \qquad \textbf{(19–1b)}$$

donde n es el número de moles. Por lo tanto, la energía interna de un gas ideal depende sólo de la temperatura y del número de moles de gas.

Si las moléculas de gas contienen más de un átomo, entonces también debe tomarse en cuenta la energía rotacional y vibracional de las moléculas (figura 19-2). La energía interna será mayor a una temperatura dada que para un gas monoatómico, aunque un gas ideal sólo una función de la temperatura para.

La energía interna de los gases reales también depende principalmente de la temperatura; sin embargo, cuando los gases reales se desvían del comportamiento del gas ideal, su energía interna también depende un poco de la presión y el volumen (en virtud de la energía potencial atómica).

La energía interna de líquidos y sólidos es bastante complicada, porque incluye energía potencial eléctrica asociada con las fuerzas (o enlaces "químicos") entre átomos y moléculas.

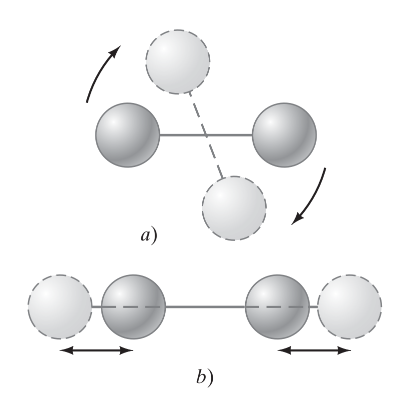


FIGURA 19–2 Además de energía cinética traslacional, las moléculas pueden tener *a*) energía cinética rotacional y *b*) energía vibracional (tanto cinética como potencial).

19–3 Calor específico

Si el calor fluye hacia un objeto, la temperatura del objeto se eleva (suponiendo que no hay cambio de fase). Pero, ¿cuánto se eleva la temperatura? Eso depende de varios factores. Ya en el siglo XVIII los experimentadores reconocieron que la cantidad de calor Q requerida para cambiar la temperatura de un material dado es proporcional a la masa m del material presente y al cambio de temperatura ΔT. Esta notable simplicidad en la naturaleza se expresa en la ecuación

$$Q = mc\,\Delta T, \qquad \textbf{(19–2)}$$

donde c es una cantidad característica del material llamada **calor específico**. Puesto que $c = Q/m\,\Delta T$, el calor específico se expresa en unidades† de J/kg·C° (la unidad adecuada del SI) o kcal/kg·C°. Para el agua a 15°C y a una presión constante de 1 atm, $c = 4.19 \times 10^3$ J/kg·C° o 1.00 kcal/kg·C°, pues, por la definición de cal y joule, se requiere 1 kcal de calor para elevar la temperatura de 1 kg de agua en 1 C°. La tabla 19-1 presenta los valores de calor específico para otros sólidos y líquidos a 20°C. Los valores de c para sólidos y líquidos dependen en cierta medida de la temperatura (así como ligeramente de la presión), aunque para cambios de temperatura que no son muy grandes, c a menudo se considera constante.‡ Los gases son más complicados y se estudian en la sección 19-8.

TABLA 19–1 Calores específicos (a una presión constante de 1 atm y 20°C, a menos que se especifique de otro modo)

Sustancia	Calor específico, c: kcal/kg · C° (= cal/g · C°)	Calor específico, c: J/kg · C°
Aluminio	0.22	900
Alcohol (etílico)	0.58	2400
Cobre	0.093	390
Vidrio	0.20	840
Hierro o acero	0.11	450
Plomo	0.031	130
Mármol	0.21	860
Mercurio	0.033	140
Plata	0.056	230
Madera	0.4	1700
Agua		
Hielo (−5°C)	0.50	2100
Líquida (15°C)	1.00	4186
Vapor (110°C)	0.48	2010
Cuerpo humano (promedio)	0.83	3470
Proteína	0.4	1700

EJEMPLO 19–2 ¿Cómo depende el calor transferido del calor específico? *a*) ¿Cuánta entrada de calor se necesita para elevar la temperatura de una tina vacía de 20 kg, fabricada en hierro, de 10 a 90°C? *b*) ¿Cuánta entrada de calor se necesita si la tina está llena con 20 kg de agua?

PLANTEAMIENTO Aplicamos la ecuación 19-2 a los diferentes materiales implicados.

SOLUCIÓN *a*) El sistema es la tina de hierro sola. A partir de la tabla 19-1, se sabe que el calor específico del hierro es 450 J/kg·C°. El cambio en la temperatura es (90°C − 10°C) = 80 C°. Por lo tanto,

$$Q = mc\,\Delta T = (20\,\text{kg})(450\,\text{J/kg}\cdot\text{C}°)(80\,\text{C}°) = 7.2\times10^5\,\text{J} = 720\,\text{kJ}.$$

b) El sistema es la tina más el agua. El agua sola requeriría

$$Q = mc\,\Delta T = (20\,\text{kg})(4186\,\text{J/kg}\cdot\text{C}°)(80\,\text{C}°) = 6.7\times10^6\,\text{J} = 6700\,\text{kJ},$$

o casi 10 veces lo que requiere una masa igual de hierro. El total, para la tina más el agua, es 720 kJ + 6700 kJ = 7400 kJ.

NOTA En *b*), la tina de hierro y el agua experimentaron el mismo cambio de temperatura, ΔT = 80°C; sin embargo, sus calores específicos son diferentes.

†Note que J/kg·C° significa $\dfrac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{C}°}$ y *no* (J/kg·C° = J?C°/kg (de otro modo lo habríamos escrito de esa forma).

‡Para tomar en cuenta la dependencia de c con respecto a T, la ecuación 19-2 se puede escribir en forma diferencial: $dQ = mc(T)\,dT$, donde $c(T)$ significa que c es función de la temperatura T. Así, el calor requerido Q para cambiar la temperatura de T_1 a T_2 es

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} mc(T)\,dT.$$

Si la tina de hierro en el inciso *a*) del ejemplo 19-2 se *enfría* de 90 a 10°C, 720 kJ de calor habrían fluido hacia *fuera* del hierro. En otras palabras, la ecuación 19-2 es válida para el flujo de calor ya sea de entrada o de salida, con el correspondiente aumento o disminución de temperatura. En la parte *b*) vimos que el agua requiere casi 10 veces más calor que una masa igual de hierro para efectuar el mismo cambio de temperatura. El agua tiene uno de los calores específicos más altos de todas las sustancias, lo que la hace una sustancia ideal para sistemas de calentamiento de espacios y otros usos que requieren una disminución mínima de temperatura para una cantidad dada de transferencia de calor. También es el contenido de agua lo que hace que sea el relleno de manzana de una tarta, y no la cubierta, lo que queme la lengua de una persona mediante transferencia de calor.

FÍSICA APLICADA
Efectos prácticos del alto calor específico del agua

19–4 Calorimetría: Resolución de problemas

Al analizar el calor y la termodinámica, con frecuencia haremos referencia a sistemas particulares. Como ya se mencionó en capítulos anteriores, un **sistema** es cualquier objeto (o conjunto de objetos) que se somete a consideración. Todo lo demás en el universo constituye su "ambiente" o "entorno". Existen varias categorías de sistemas. Un **sistema cerrado** es aquel en el que ninguna masa entra o sale (aunque el sistema puede intercambiar energía con el ambiente). En un **sistema abierto** la masa puede entrar o salir (al igual que la energía). Muchos de los sistemas (idealizados) que se estudian en física son sistemas cerrados. Sin embargo, muchos sistemas, incluidos los animales y las plantas, son sistemas abiertos, pues intercambian materiales (alimento, oxígeno, productos de desecho) con el ambiente. Se dice que un sistema cerrado está **aislado** si ninguna forma de energía pasa a través de sus fronteras; de otro modo, no se le considera aislado.

Cuando diferentes partes de un sistema aislado están a diferentes temperaturas, fluirá calor (es decir, se transferirá energía) de la parte que tiene mayor temperatura hacia la parte a menor temperatura; esto es, dentro del sistema. Si el sistema está verdaderamente aislado, no se transferirá energía hacia dentro ni hacia fuera. Así que la *conservación de la energía* de nuevo desempeña un papel importante: la pérdida de calor en una parte del sistema es igual a la ganancia de calor en otra parte:

$$\text{pérdida de calor} = \text{ganancia de calor}$$

o

$$\text{salida de energía de una parte} = \text{entrada de energía en otra parte}$$

Estas relaciones simples son muy útiles; sin embargo, dependen de la aproximación (con frecuencia muy buena) de que el sistema entero está aislado (no ocurren otras transferencias de energía). Veamos un ejemplo.

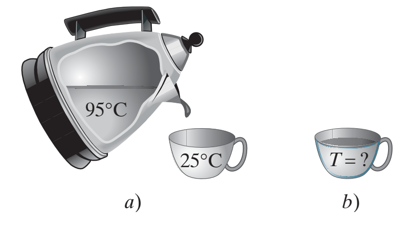


FIGURA 19–3 Ejemplo 19–3.

EJEMPLO 19–3 La taza enfría al té. Si 200 cm³ de té a 95°C se vierten en una taza de vidrio de 150 g inicialmente a 25°C (figura 19-3), ¿cuál será la temperatura final común T del té y la taza cuando se alcance el equilibrio, si se supone que no fluye calor a los alrededores?

PLANTEAMIENTO Aplicamos la conservación de la energía al sistema de té más la taza, que se supone aislado: todo el calor que sale del té fluye hacia la taza. Utilizamos la ecuación de calor específico (ecuación 19-2) para determinar cómo se relaciona el flujo de calor con los cambios de temperatura.

SOLUCIÓN Puesto que el té es principalmente agua, su calor específico es 4186 J/kg·C° (tabla 19-1), y su masa m es su densidad por su volumen ($V = 200\text{ cm}^3 = 200 \times 10^{-6}\text{m}^3$): $m = \rho V = (1.0 \times 10^3\text{ kg/m}^3)(200 \times 10^{-6}\text{ m}^3) = 0.20\text{ kg}$. Usamos la ecuación 19-2, aplicamos la conservación de la energía y consideramos que T es la temperatura final hasta ahora desconocida:

$$\begin{aligned} \text{pérdida de calor del té} &= \text{ganancia de calor de la taza} \\ m_{\text{té}} c_{\text{té}}(95°\text{C} - T) &= m_{\text{taza}} c_{\text{taza}}(T - 25°\text{C}). \end{aligned}$$

Al poner números y usar la tabla 19-1 ($c_{\text{taza}} = 840$ J/kg·C° para el vidrio), despejamos T y obtenemos

$$\begin{aligned} (0.20\text{ kg})(4186\text{ J/kg}\cdot\text{C°})(95°\text{C} - T) &= (0.15\text{ kg})(840\text{ J/kg}\cdot\text{C°})(T - 25°\text{C}) \\ 79{,}500\text{ J} - (837\text{ J/C°})T &= (126\text{ J/C°})T - 3150\text{ J} \\ T &= 86°\text{C}. \end{aligned}$$

El té desciende su temperatura en 9°C al llegar al equilibrio con la taza.

NOTA El aumento de temperatura de la taza es 86°C − 25°C = 61 C°. Este gran cambio de temperatura (en comparación con el del agua del té) se debe a que su calor específico es mucho menor en comparación con el del agua.

NOTA En este cálculo, ΔT (de la ecuación 19-2 $Q = mc\,\Delta T$) es una cantidad positiva en ambos lados de la ecuación de conservación de la energía. A la izquierda hay "pérdida de calor" y ΔT es la temperatura inicial menos la final ($95°\text{C} - T$), mientras que en el lado derecho hay "ganancia de calor" y ΔT es la temperatura final menos la inicial. Ahora, considere el siguiente enfoque alternativo.



Cuando use pérdida de calor = ganancia de calor, ΔT es positivo en ambos lados

Solución alternativa Es posible trabajar este ejemplo (y otros) mediante un enfoque diferente. Podemos indicar que el calor total transferido hacia o desde el sistema aislado es cero:

$$\Sigma Q = 0.$$

Entonces cada término se escribe como $Q = mc(T_f - T_i)$ y $\Delta T = T_f - \Delta T_i$ siempre es la temperatura final menos la inicial; cada ΔT puede ser positivo o negativo. En este ejemplo:

$$\Sigma Q = m_{taza} c_{taza}(T - 25°\text{C}) + m_{té} c_{té}(T - 95°\text{C}) = 0.$$

El segundo término es negativo porque T será menos que 95°C. Al resolver algebraicamente se obtiene el mismo resultado.



Enfoque alternativo: $\Sigma Q = 0$

El intercambio de energía, como se presenta en el ejemplo 19-3, es la base para una técnica conocida como **calorimetría**, que es la medición cuantitativa del intercambio de calor. Para realizar tales mediciones, se usa un **calorímetro**; en la figura 19-4 se muestra un sencillo calorímetro de agua. Es muy importante que el calorímetro esté bien aislado, de manera que casi no se intercambie calor con el entorno. Una aplicación importante del calorímetro es la determinación de los calores específicos de diferentes sustancias. En la técnica conocida como "método de mezclas", una muestra de una sustancia se calienta a alta temperatura, la cual se mide con exactitud, y luego rápidamente se coloca en el agua fría del calorímetro. La pérdida de calor por la muestra la ganarán el agua y el calorímetro. Al medir la temperatura final de la mezcla se puede calcular el calor específico o de la muestra, como se ilustra mediante el siguiente ejemplo.

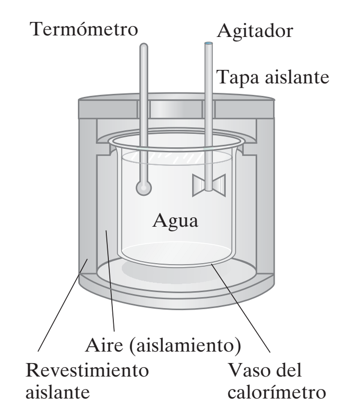


FIGURA 19–4 Calorímetro simple de agua.

EJEMPLO 19–4 Calor específico desconocido determinado por calorimetría. Un ingeniero quiere determinar el calor específico de una nueva aleación metálica. Una muestra de 0.150 kg de la aleación se calienta a 540°C. Luego se coloca rápidamente en 0.400 kg de agua a 10.0°C, que está contenida en un vaso calorimétrico de aluminio de 0.200 kg. (No se necesita conocer la masa del revestimiento aislante, pues se supone que el espacio de aire entre éste y el vaso lo aísla bien, de manera que su temperatura no cambia de forma significativa). La temperatura final del sistema es 30.5°C. Calcule el calor específico de la aleación.

PLANTEAMIENTO Aplicamos la conservación de la energía al sistema, que se considera como la muestra de aleación, el agua y el vaso del calorímetro. Suponemos que el sistema está aislado, así que la pérdida de energía por la aleación caliente es igual a la energía ganada por el agua y el vaso del calorímetro.

SOLUCIÓN La pérdida de calor es igual al calor ganado:

$$\begin{pmatrix}\text{pérdida de calor}\\ \text{de la aleación}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{ganancia de calor}\\ \text{del agua}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{ganancia de calor}\\ \text{del calorímetro}\end{pmatrix}$$

$$m_a c_a \Delta T_a = m_w c_w \Delta T_w + m_{cal} c_{cal} \Delta T_{cal}$$

donde los subíndices a, w y cal se refieren a aleación, agua (water) y calorímetro, respectivamente, y cada $\Delta T > 0$. Cuando se incluyen los valores y se usa la tabla 19-1, esta ecuación se convierte en

$$\begin{aligned}(0.150\,\text{kg})(c_a)(540°\text{C} - 30.5°\text{C}) &= (0.400\,\text{kg})(4186\,\text{J/kg}\cdot\text{C}°)(30.5°\text{C} - 10.0°\text{C})\\ &\quad + (0.200\,\text{kg})(900\,\text{J/kg}\cdot\text{C}°)(30.5°\text{C} - 10.0°\text{C})\\ (76.4\,\text{kg}\cdot\text{C}°)\,c_a &= (34{,}300 + 3690)\,\text{J}\\ c_a &= 497\,\text{J/kg}\cdot\text{C}°.\end{aligned}$$

Al hacer este cálculo, ignoramos cualquier calor transferido al termómetro y al agitador (el cual sirve para acelerar el proceso de transferencia de calor y, por consiguiente, reducir la pérdida de calor al exterior). Se puede tomar en cuenta al sumar términos adicionales al lado derecho de la ecuación anterior, lo que dará por resultado una ligera corrección al valor de c_a.

En todos los ejemplos y problemas de este tipo, asegúrese de incluir *todos* los objetos que ganan o pierden calor (dentro de lo razonable). En este caso, en el lado de "pérdida de calor", sólo está la aleación metálica caliente. En el lado de "ganancia de calor", están tanto el agua como el vaso de aluminio del calorímetro. Por simplicidad, se ignoraron masas muy pequeñas, como la del termómetro y el agitador, lo que afectará el equilibrio de energía sólo muy ligeramente.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Asegúrese de considerar todas las posibles fuentes de transferencia de energía

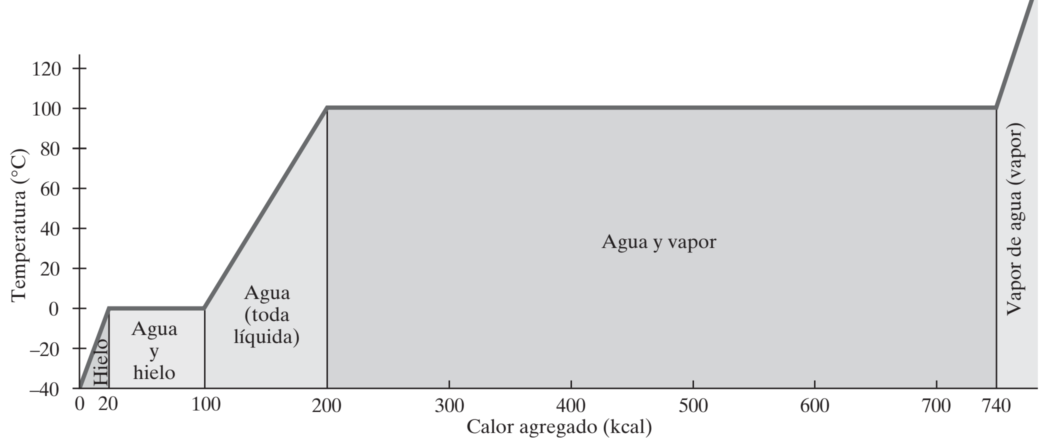


FIGURA 19–5 Temperatura como función del calor agregado para convertir 1.0 kg de hielo a −40°C en vapor arriba de 100°C.

19–5 Calor latente

Cuando un material cambia de fase de sólido a líquido, o de líquido a gas (véase también la sección 18-3), cierta cantidad de energía participa en este **cambio de fase**. Por ejemplo, veamos lo que sucede cuando un bloque de hielo de 1.0 kg a −40°C se calienta a una tasa estable y lenta hasta que todo el hielo se convierte en agua, luego el agua (líquida) se calienta a 100°C y se convierte en vapor; luego se calienta aún más sobre 100°C, todo a 1 atm de presión. Como se muestra en la gráfica de la figura 19-5, conforme el hielo se calienta comenzando en −40°C, su temperatura se eleva a una tasa de aproximadamente 2 C°/kcal de calor agregado (para hielo, $c \approx 0.50$ kcal/kg·C°). Sin embargo, cuando se alcanzan 0°C, la temperatura deja de aumentar aun cuando se siga agregando calor. El hielo gradualmente se convierte en agua en estado líquido, sin cambio en la temperatura. Después de agregar aproximadamente 40 kcal a 0°C, la mitad del hielo permanece y la mitad se habrá convertido en agua. Después de agregar aproximadamente 80 kcal, o 330 kJ, todo el hielo se habrá convertido en agua, todavía a 0°C. Al seguir agregando calor, la temperatura del agua aumenta de nuevo, ahora a una tasa de 1 C°/kcal. Cuando se alcanzan los 100°C, la temperatura de nuevo permanece constante conforme el calor agregado convierte el agua líquida en vapor. Se requieren aproximadamente 540 kcal (2260 kJ) para convertir 1.0 kg de agua completamente en vapor, después de lo cual la gráfica se eleva de nuevo, lo que indica que la temperatura del vapor se eleva conforme se agrega calor.

El calor requerido para convertir 1.0 kg de una sustancia del estado sólido al líquido se llama **calor de fusión** y se denota como L_F. El calor de fusión del agua es 79.7 kcal/kg o, en unidades apropiadas del SI, 333 kJ/kg ($= 3.33 \cdot 10^5$ J/kg). El calor que se requiere para cambiar una sustancia de la fase líquida a vapor se llama **calor de vaporización**, L_V. Para el agua es 539 kcal/kg o 2260 kJ/kg. Otras sustancias siguen gráficas similares a la de la figura 19-5, aunque las temperaturas del punto de fusión y del punto de ebullición son diferentes, como lo son los calores específicos y los calores de fusión y vaporización. En la tabla 19-2 se dan los valores para los calores de fusión y vaporización, que también se llaman **calores latentes**, para algunas sustancias.

Los calores de vaporización y de fusión también se refieren a la cantidad de calor *liberado* por una sustancia cuando cambia de gas a líquido, o de líquido a sólido. Así, el vapor libera 2260 kJ/kg cuando se convierte en agua, y el agua libera 333 kJ/kg cuando se convierte en hielo.

El calor que participa en un cambio de fase depende no sólo del calor latente, sino también de la masa total de la sustancia. Esto es,

$$Q = mL, \qquad \textbf{(19–3)}$$

donde L es el calor latente del proceso y la sustancia particulares, m es la masa de la sustancia y Q es el calor agregado o liberado durante el cambio de fase. Por ejemplo, cuando 5.00 kg de agua se congelan a 0°C, se liberan $(5.00 \text{ kg})(3.33 \times 10^5 \text{ J/kg}) = 1.67 \times 10^6$ J de energía.

TABLA 19–2 Calores latentes (a 1 atm)

Sustancia	Punto de fusión (°C)	Calor de fusión		Punto de ebullición (°C)	Calor de vaporización	
		kcal/kg†	kJ/kg		kcal/kg†	kJ/kg
Oxígeno	−218.8	3.3	14	−183	51	210
Nitrógeno	−210.0	6.1	26	−195.8	48	200
Alcohol etílico	−114	25	104	78	204	850
Amoniaco	−77.8	8.0	33	−33.4	33	137
Agua	0	79.7	333	100	539	2260
Plomo	327	5.9	25	1750	208	870
Plata	961	21	88	2193	558	2300
Hierro	1808	69.1	289	3023	1520	6340
Tungsteno	3410	44	184	5900	1150	4800

†Los valores numéricos en kcal/kg son los mismos en cal/g.

EJERCICIO B Una olla con agua hierve sobre una estufa de gas y luego usted apaga la fuente de calor. ¿Qué ocurre? *a*) La temperatura del agua comienza a subir. *b*) Hay una pequeña disminución en la tasa de pérdida de agua por evaporación. *c*) Aumenta la tasa de pérdida de agua por ebullición. *d*) Hay un aumento apreciable en la tasa de ebullición y en la temperatura del agua. *e*) Ninguna de las opciones anteriores es válida.

En ocasiones, la calorimetría implica un cambio de estado, como muestran los siguientes ejemplos. De hecho, los calores latentes con frecuencia se miden usando calorimetría.

EJEMPLO 19–5 ¿Se fundirá todo el hielo? Un trozo de hielo de 0.50 kg a −10°C se coloca en 3.0 kg de té "helado" a 20°C. ¿A qué temperatura y en qué fase estará la mezcla final? El té se considera como agua. Ignore cualquier flujo de calor con los alrededores, incluido el contenedor.



Determine primero (o estime) el estado final

PLANTEAMIENTO Antes de escribir cualquier ecuación que aplique la conservación de la energía, primero debemos verificar para ver si el estado final será todo hielo, una mezcla de hielo y agua a 0°C, o todo agua. Para llevar los 3.0 kg de agua de 20 a 0°C se requiere una liberación de energía de (ecuación 19-2)

$$m_{\mathrm{w}}c_{\mathrm{w}}(20°\mathrm{C} - 0°\mathrm{C}) = (3.0\,\mathrm{kg})(4186\,\mathrm{J/kg\cdot C°})(20\,\mathrm{C°}) = 250\,\mathrm{kJ}.$$

Por otra parte, para llevar el hielo de −10°C a 0°C se requieren

$$m_{\mathrm{hielo}}c_{\mathrm{hielo}}[0°\mathrm{C} - (-10°\mathrm{C})] = (0.50\,\mathrm{kg})(2100\,\mathrm{J/kg\cdot C°})(10\,\mathrm{C°}) = 10.5\,\mathrm{kJ},$$

y para convertir el hielo en agua a 0°C se requieren

$$m_{\mathrm{hielo}}L_{\mathrm{F}} = (0.50\,\mathrm{kg})(333\,\mathrm{kJ/kg}) = 167\,\mathrm{kJ},$$

para un total de 10.5 kJ + 167 kJ = 177 kJ. Ésta no es suficiente energía para llevar los 3.0 kg de agua a 20°C hasta los 0°C, así que toda la mezcla debe terminar como agua, con una temperatura entre 0 y 20°C.



Luego determine la temperatura final

SOLUCIÓN Para determinar la temperatura final T, aplicamos la conservación de la energía y escribimos: ganancia de calor = pérdida de calor,

$$\begin{pmatrix}\text{calor para}\\ \text{elevar 0.50 kg de}\\ \text{hielo de } -10°\text{C}\\ \text{a } 0°\text{C}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{calor para}\\ \text{convertir}\\ \text{0.50 kg de hielo}\\ \text{en agua}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{calor para}\\ \text{elevar 0.50 kg}\\ \text{de agua de}\\ 0°\text{C a } T\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{pérdida de calor}\\ \text{de 3.0 kg de}\\ \text{agua al enfriarla}\\ \text{de } 20°\text{C a } T\end{pmatrix}.$$

Al usar algunos de los resultados anteriores, obtenemos

$$10.5\,\mathrm{kJ} + 167\,\mathrm{kJ} + (0.50\,\mathrm{kg})(4186\,\mathrm{J/kg\cdot C°})(T - 0°\mathrm{C}) = (3.0\,\mathrm{kg})(4186\,\mathrm{J/kg\cdot C°})(20°\mathrm{C} - T).$$

Al despejar T obtenemos

$$T = 5.0°\mathrm{C}.$$

EJERCICIO C ¿Cuánto más hielo a −10°C se necesitaría en el ejemplo 19-5 para llevar el té a 0°C, justo cuando se funda todo el hielo?

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Calorimetría

1. Asegúrese de tener suficiente información para aplicar la conservación de la energía. Pregúntese: **¿el sistema está aislado** (o muy cerca de ello, lo suficiente como para obtener una buena estimación)? ¿Conocemos o podemos calcular todas las fuentes significativas de transferencia de energía?
2. Aplique la **conservación de energía**:

   ganancia de calor = pérdida de calor.

   Para cada sustancia en el sistema, un término de calor (energía) aparecerá en el lado izquierdo o en el derecho de esta ecuación. [Alternativamente, utilice $\Sigma Q = 0$].
3. Si **no ocurren cambios de fase**, cada término en la ecuación de conservación de la energía (arriba) tendrá la forma

   $$Q(\text{ganancia}) = mc(T_f - T_i)$$

   o

   $$Q(\text{pérdida}) = mc(T_i - T_f)$$

   donde T_i y T_f son las temperaturas inicial y final de la sustancia, y m y c son su masa y calor específico, respectivamente.
4. Si **ocurren** o pueden ocurrir **cambios de fase**, podría haber términos en la ecuación de conservación de la energía de la forma $Q = mL$, donde L es el calor latente. Pero *antes* de aplicar la conservación de la energía, determine (o estime) en qué fase se encontrará el estado final, como se hizo en el ejemplo 19-5 al calcular los diferentes valores que contribuyen al calor Q.
5. Asegúrese de que cada término aparezca en el lado correcto de la **ecuación de energía** (calor ganado o calor perdido) y que cada ΔT sea positivo.
6. Note que, cuando el sistema alcanza **equilibrio** térmico, la **temperatura** final de cada sustancia tendrá el *mismo* valor. Sólo hay una T_f.
7. **Despeje** la incógnita de la ecuación de energía.

EJEMPLO 19–6 Determinación de calor latente. El calor específico del mercurio líquido es 140 J/kg·C°. Cuando 1.0 kg de mercurio sólido en su punto de fusión de −39°C se coloca en un calorímetro de aluminio de 0.50 kg lleno con 1.2 kg de agua a 20.0°C, el mercurio se funde y se descubre que la temperatura final de la combinación es de 16.5°C. ¿Cuál es el calor de fusión del mercurio en J/kg?

PLANTEAMIENTO Siga la anterior Estrategia para Resolución de Problemas anterior.

SOLUCIÓN

1. **¿El sistema está aislado?** El mercurio se coloca en un calorímetro, que se supone bien aislado. El sistema aislado está constituido por el calorímetro, el agua y el mercurio.
2. **Conservación de energía.** El calor ganado por el mercurio = al calor perdido por el agua y el calorímetro.
3. y **4. Cambios de fase.** Hay un cambio de fase (del mercurio) y además usamos ecuaciones de calor específico. El calor ganado por el mercurio (Hg) incluye un término que representa la fusión del Hg,

   $$Q(\text{fusión de Hg sólido}) = m_{Hg} L_{Hg},$$

   más un término que representa el calentamiento del Hg líquido de −39°C a +16.5°C:

   $$\begin{aligned} Q(\text{calentamiento de Hg líquido}) &= m_{Hg}\, c_{Hg}[16.5°\text{C} - (-39°\text{C})] \\ &= (1.0\,\text{kg})(140\,\text{J/kg}\cdot\text{C°})(55.5\,\text{C°}) = 7770\,\text{J}. \end{aligned}$$

   Todo este calor ganado por el mercurio se obtiene del agua y el calorímetro, que se enfrían:

   $$\begin{aligned} Q_{cal} + Q_{agua} &= m_{cal}\, c_{cal}(20.0°\text{C} - 16.5°\text{C}) + m_{agua}\, c_{agua}(20.0°\text{C} - 16.5°\text{C}) \\ &= (0.50\,\text{kg})(900\,\text{J/kg}\cdot\text{C°})(3.5\,\text{C°}) + (1.2\,\text{kg})(4186\,\text{J/kg}\cdot\text{C°})(3.5\,\text{C°}) \\ &= 19{,}200\,\text{J}. \end{aligned}$$
5. **Ecuación de energía.** La conservación de la energía nos indica que el calor que pierden el agua y el calorímetro debe ser igual al calor ganado por el mercurio:

   $$Q_{cal} + Q_w = Q(\text{fusión de Hg sólido}) + Q(\text{calentamiento de Hg líquido})$$

   o

   $$19{,}200\,\text{J} = m_{Hg} L_{Hg} + 7770\,\text{J}.$$
6. **Temperatura de equilibrio.** Se da como 16.5°C, y ya se utilizó.

7. Resuelva. La única incógnita en la ecuación de energía (punto 5) es L_{Hg}, el calor latente de fusión del mercurio. La despejamos colocando $m_{Hg} = 1.0$ kg:

$$L_{Hg} = \frac{19{,}200\ \text{J} - 7770\ \text{J}}{1.0\ \text{kg}} = 11{,}400\ \text{J/kg} \approx 11\ \text{kJ/kg},$$

donde redondeamos a 2 cifras significativas.

Evaporación

El calor latente para convertir un líquido en gas no sólo es necesario en el punto de ebullición. El agua puede cambiar de la fase líquida a la gaseosa incluso a temperatura ambiente. Este proceso se llama **evaporación** (véase también la sección 18-4). El valor del calor de vaporización del agua aumenta ligeramente con una disminución en la temperatura: a 20°C, por ejemplo, es de 2450 kJ/kg (585 kcal/kg), en comparación con 2260 kJ/kg (= 539 kcal/kg) a 100°C. Cuando el agua se evapora, el líquido restante se enfría, porque la energía requerida (el calor latente de vaporización) proviene del agua misma; así que su energía interna y, por consiguiente, su temperatura deben disminuir.[†]

FÍSICA APLICADA
Temperatura corporal

La evaporación del agua de la piel es uno de los mecanismos más importantes que usa el cuerpo para controlar su temperatura. Cuando la temperatura de la sangre se eleva ligeramente por arriba de lo normal, la región del hipotálamo del cerebro detecta este aumento de temperatura y envía una señal a las glándulas sudoríparas para aumentar su producción. La energía requerida (el calor latente) para vaporizar esta agua proviene del cuerpo, de manera que éste se enfría.

Teoría cinética de calores latentes

Podemos usar la teoría cinética para ver por qué es necesaria la energía para fundir o vaporizar una sustancia. En el punto de fusión, el calor latente de fusión no actúa para aumentar la energía cinética promedio (y la temperatura) de las moléculas en el sólido, sino más bien se emplea para superar la energía potencial asociada con las fuerzas entre las moléculas. Esto es, se debe realizar trabajo contra estas fuerzas de atracción para liberar las moléculas de sus posiciones relativamente fijas en el sólido, de manera que puedan moverse libremente una sobre otra en la fase líquida. Asimismo, se requiere energía para que las moléculas que se mantienen juntas en la fase líquida escapen en la fase gaseosa. Este proceso es una reorganización más violenta de las moléculas que la fusión (la distancia promedio entre las moléculas aumenta enormemente) y, en consecuencia, el calor de vaporización por lo general es mucho mayor que el calor de fusión para una sustancia dada.

19–6 La primera ley de la termodinámica

Hasta el momento, en este capítulo, nos hemos ocupado de la energía interna y el calor. Sin embargo, el trabajo también participa a menudo en los procesos termodinámicos.

En el capítulo 8 vimos que se realiza trabajo cuando se transfiere energía de un objeto a otro por medios mecánicos. En la sección 19-1 vimos que el calor es una transferencia de energía de un objeto a otro que está a menor temperatura. De manera que el calor es muy parecido al trabajo. Para distinguirlos, el *calor* se define como una *transferencia de energía que se debe a una diferencia de temperatura*, mientras que el trabajo es una transferencia de energía que no se debe a una diferencia de temperatura.

En la sección 19-2 definimos la energía interna de un sistema como la suma total de la energía de las moléculas dentro del sistema. Se esperaría que la energía interna de un sistema aumentara si se realiza trabajo sobre el sistema, o si se le agrega calor. De igual modo, la energía interna disminuiría si el calor fluye hacia fuera del sistema o si el sistema realiza trabajo sobre el entorno.

[†]De acuerdo con la teoría cinética, la evaporación es un proceso de enfriamiento porque las moléculas que se mueven más rápido son las que escapan de la superficie. Así, la rapidez promedio de las moléculas restantes es menor, así que, por la ecuación 18-4, la temperatura es menor.

Por lo tanto, es razonable extender la conservación de la energía y proponer una importante ley: el cambio en la energía interna de un sistema cerrado, ΔE_{int}, será igual a la energía agregada al sistema mediante calentamiento menos el trabajo realizado por el sistema sobre el entorno. En forma de ecuación se escribe

PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

$$\Delta E_{int} = Q - W \tag{19–4}$$

Calor añadido es +
Calor perdido es –
Trabajo sobre *el sistema es –*
Trabajo por *el sistema es +*

donde Q es el calor neto *agregado* al sistema y W es el trabajo neto realizado *por* el sistema.[†] Debemos tener cuidado y ser consistentes para seguir las convenciones de signos para Q y W. Puesto que W en la ecuación 19-4 es el trabajo realizado *por* el sistema, entonces si se realiza trabajo *sobre* el sistema, W será negativo y E_{int} aumentará. De igual modo, Q es positivo para calor agregado al sistema, de manera que si el calor sale del sistema, Q es negativo.

La ecuación 19-4 se conoce como la **primera ley de la termodinámica**. Es una de las leyes fundamentales de la física y su validez se apoya en experimentos (como los de Joule) en los que no se han encontrado excepciones. Dado que Q y W representan la energía transferida hacia el sistema o desde él, la energía interna cambia en concordancia. De esta forma, la primera ley de la termodinámica es un amplio enunciado de la *ley de conservación de la energía*.

Vale la pena notar que la ley de conservación de la energía no se formuló sino hasta el siglo XIX, porque dependía de la interpretación del calor como una transferencia de energía.

La ecuación 19-4 se aplica a un sistema cerrado. También se aplica a un sistema abierto (sección 19-4) si se toma en cuenta el cambio en la energía interna que se debe al aumento o la disminución en la cantidad de materia. Para un sistema aislado (p. 500), no se realiza trabajo y no entra ni sale calor del sistema, así que $W = Q = 0$, y por lo tanto, $\Delta E_{int} = 0$.

Un sistema dado en cualquier momento se encuentra en un estado particular y se puede decir que tiene cierta cantidad de energía interna, E_{int}. Sin embargo, un sistema no "tiene" cierta cantidad de calor o trabajo. Más bien, cuando se realiza trabajo sobre un sistema (como al comprimir un gas), o cuando se agrega o se elimina calor de un sistema, el estado del sistema *cambia*. Así, trabajo y calor participan en los *procesos termodinámicos* que pueden cambiar el sistema de un estado a otro; no son características del estado en sí. Las cantidades que describen el estado de un sistema, como energía interna E_{int}, presión P, volumen V, temperatura T y masa m o número de moles n, se llaman **variables de estado**. Q y W *no* son variables de estado.

Puesto que E_{int} es una *variable de estado*, que sólo depende del estado del sistema y no de cómo el sistema llegó a ese estado, podemos escribir

$$\Delta E_{int} = E_{int,2} - E_{int,1} = Q - W$$

donde $E_{int,1}$ y $E_{int,2}$ representan la energía interna del sistema en los estados 1 y 2, y Q y W son el calor agregado al sistema y el trabajo realizado por el sistema al pasar del estado 1 al estado 2.

A veces es útil escribir la primera ley de la termodinámica en forma diferencial:

$$dE_{int} = dQ - dW.$$

Aquí, dE_{int} representa un cambio infinitesimal en la energía interna cuando se agrega al sistema una cantidad infinitesimal de calor dQ, y el sistema realiza una cantidad infinitesimal de trabajo dW.[‡]

[†]Esta convención se relaciona históricamente con las máquinas de vapor: el interés estaba en la *entrada* de calor y la *salida* de trabajo, ambas consideradas como positivas. En otros libros podrá ver la primera ley de la termodinámica escrita como $\Delta E_{int} = Q + W$, en cuyo caso W se refiere al trabajo realizado *sobre* el sistema.

[‡]La forma diferencial de la primera ley con frecuencia se escribe

$$dE_{int} = đQ - đW,$$

donde las barras sobre el signo diferencial ($đ$) se usan para recordar que W y Q no son funciones de las variables de estado (como P, V, T y n). La energía interna, E_{int}, es una función de las variables de estado, y así dE_{int} representa la diferencial (llamada *diferencial exacta*) de alguna función E_{int}. Las diferenciales $đW$ y $đQ$ no son diferenciales exactas (no son la diferencial de alguna función matemática); por consiguiente, sólo representan cantidades infinitesimales. Este tema en realidad no entra en los objetivos de este libro.

EJEMPLO 19–7 **Uso de la primera ley.** A un sistema se agregan 2500 J de calor y sobre él se realizan 1800 J de trabajo. ¿Cuál es el cambio en la energía interna del sistema?

PLANTEAMIENTO Aplicamos la primera ley de la termodinámica (ecuación 19-4) al sistema.

SOLUCIÓN El calor agregado al sistema es $Q = 2500$ J. El trabajo W realizado por el sistema es -1800 J. ¿Por qué el signo menos? Porque 1800 J de trabajo realizados *sobre* el sistema (como se indica) equivalen a -1800 J realizados *por* el sistema, y es esto último lo que necesitamos para las convenciones de signo usadas en la ecuación 19-4. Por lo tanto,

$$\Delta E_{\text{int}} = 2500\,\text{J} - (-1800\,\text{J}) = 2500\,\text{J} + 1800\,\text{J} = 4300\,\text{J}.$$

Tal vez intuitivamente haya pensado que los 2500 J y los 1800 J necesitarían agregarse juntos, puesto que ambos se refieren a la energía agregada al sistema. Y así es.

EJERCICIO D ¿Cuál sería el cambio en la energía interna del ejemplo 19-7, si se agregaran al sistema 2500 J de calor y si *el sistema realizara* 1800 J de trabajo (es decir, como salida)?

*La primera ley de la termodinámica extendida

Para escribir la primera ley de la termodinámica en su forma completa, considere un sistema que tiene energía cinética K (hay movimiento) así como energía potencial U. Entonces, la primera ley de la termodinámica tendría que incluir estos términos y se escribiría como

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = Q - W. \tag{19–5}$$

EJEMPLO 19–8 **Energía cinética transformada en energía térmica.** Una bala de 3.0 g que viaja con una rapidez de 400 m/s entra a un árbol y sale por el otro lado de éste con una rapidez de 200 m/s. ¿A dónde va la energía cinética perdida por la bala y cuál fue la energía transferida?

PLANTEAMIENTO Considere la bala y el árbol como el sistema. No hay energía potencial implicada. Ninguna fuerza externa realiza trabajo sobre el sistema (ni el sistema realiza trabajo); tampoco se agrega calor porque no se transfirió energía hacia el sistema o desde él como resultado de una diferencia de temperatura. Por lo tanto, la energía cinética se transformó en energía interna de la bala y el árbol.

SOLUCIÓN A partir de la primera ley de la termodinámica, de acuerdo con la ecuación 19-5, tenemos que $Q = W = \Delta U = 0$, así que

$$\Delta K + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

o, usando subíndices i y f para las velocidades inicial y final,

$$\Delta E_{\text{int}} = -\Delta K = -(K_{\text{f}} - K_{\text{i}}) = \tfrac{1}{2}m(v_{\text{i}}^2 - v_{\text{f}}^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}(3.0 \times 10^{-3}\,\text{kg})\left[(400\,\text{m/s})^2 - (200\,\text{m/s})^2\right] = 180\,\text{J}.$$

NOTA La energía interna de la bala y el árbol se incrementa, conforme ambos experimentan un aumento en la temperatura. Si hubiéramos elegido sólo a la bala como el sistema, se habría realizado trabajo sobre ella y ocurriría transferencia de calor.

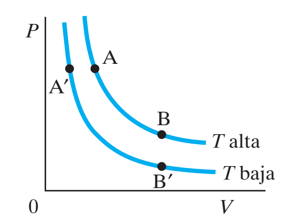
19–7 Aplicaciones de la primera ley de la termodinámica: Cálculo de trabajo

Analicemos algunos procesos sencillos a la luz de la primera ley de la termodinámica.

Procesos isotérmicos ($\Delta T = 0$)

Consideremos primero un proceso idealizado que se efectúa a temperatura constante. Tal proceso se llama proceso **isotérmico** (término que proviene del griego y significa "igual temperatura"). Si el sistema es un gas ideal, entonces $PV = nRT$ (ecuación 17-3), así que, para una cantidad fija de gas que se mantiene a temperatura constante, $PV =$ constante. Por lo tanto, el proceso sigue una curva como AB en el diagrama PV ilustrado en la figura 19-6, que es una curva para $PV =$ constante. Cada punto sobre la curva, como el punto A, representa el estado del sistema en un momento dado; esto es, su presión P y su volumen V. A una temperatura más baja, otro proceso isotérmico se representaría mediante una curva como A′B′ en la figura 19-6 (el producto $PV = nRT =$ constante es menor cuando T es menor). Las curvas que se muestran en la figura 19-6 se conocen como *isotermas*.

FIGURA 19–6 Diagrama PV para un gas ideal que experimenta procesos isotérmicos a dos temperaturas diferentes.



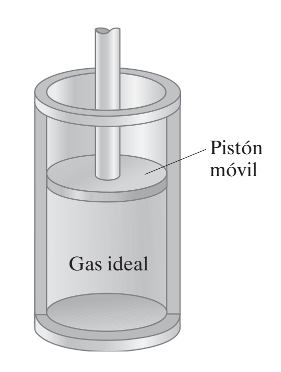


FIGURA 19–7 Un gas ideal en un cilindro ajustado con un pistón móvil.

Supongamos que el gas está encerrado en un contenedor ajustado con un pistón móvil (figura 19-7) y que el gas está en contacto con un **depósito de calor** (un cuerpo cuya masa es tan grande que, idealmente, su temperatura no cambia de manera significativa cuando se intercambia calor con el sistema). Supongamos también que el proceso de compresión (disminución de volumen) o expansión (aumento de volumen) se realiza de manera **cuasiestática** ("casi estáticamente"), es decir, de una forma extremadamente lenta, así que todo el gas se mueve entre una serie de estados de equilibrio, cada uno de los cuales está a la misma temperatura constante. Si una cantidad de calor Q se agrega al sistema y la temperatura permanece constante, el gas se expandirá y realizará una cantidad de trabajo W sobre el ambiente (ejerce una fuerza sobre el pistón y lo mueve a lo largo de cierta distancia). La temperatura y la masa se mantienen constantes, así que, a partir de la ecuación 19-1, la energía interna no cambia: $\Delta E_{\text{int}} = \frac{3}{2}nR\,\Delta T = 0$. Por lo tanto, por la primera ley de la termodinámica (ecuación 19-4), $\Delta E_{\text{int}} = Q - W = 0$, así que $W = Q$: el trabajo realizado por el gas en un proceso isotérmico es igual al calor agregado al gas.

Procesos adiabáticos ($Q = 0$)

Un proceso **adiabático** es aquel en el que no se permite el flujo de calor hacia o desde el sistema: $Q = 0$. Esta situación puede ocurrir si el sistema está extremadamente bien aislado, o cuando el proceso ocurre tan rápido que el calor, que fluye con lentitud, no tiene tiempo de fluir hacia dentro o hacia fuera. La rápida expansión de los gases en un motor de combustión interna es un ejemplo de un proceso que está muy cerca de ser adiabático. Una lenta expansión adiabática de un gas ideal sigue una curva como la AC en la figura 19-8. Dado que $Q = 0$, a partir de la ecuación 19-4, se tiene que $\Delta E_{\text{int}} = -W$. Esto es, la energía interna disminuye si el gas se expande; por consiguiente, la temperatura también disminuye (puesto que $\Delta E_{\text{int}} = \frac{3}{2}nR\,\Delta T$). Esto es evidente en la figura 19-8, donde el producto PV ($= nRT$) es menor en el punto C que en el punto B (la curva AB es para un proceso isotérmico, para el que $\Delta E_{\text{int}} = 0$ y $\Delta T = 0$). En la operación inversa, una compresión adiabática (que va de C a A, por ejemplo), se realiza trabajo *sobre* el gas; en consecuencia, la energía interna aumenta y la temperatura se eleva. En un motor diesel, la mezcla de aire-combustible se comprime rápidamente de manera adiabática en un factor de 15 o más; el aumento de temperatura es tan grande que la mezcla se enciende de manera espontánea.

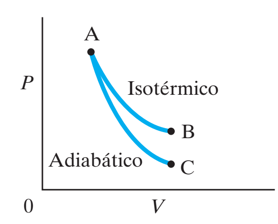
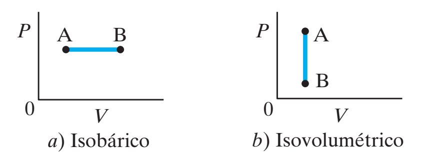


FIGURA 19–8 Diagrama PV para procesos adiabáticos (AC) e isotérmicos (AB) sobre un gas ideal.

Procesos isobáricos e isovolumétricos

Los procesos isotérmicos y adiabáticos son sólo dos posibles procesos. Otros dos procesos termodinámicos simples se ilustran en los diagramas PV de la figura 19-9: *a*) un proceso **isobárico** es aquel en el que la presión se mantiene constante, de manera que el proceso se representa mediante una línea recta horizontal en el diagrama PV (figura 19-9a); *b*) un proceso **isovolumétrico** (o *isocórico*) es aquel en el que el volumen no cambia (figura 19-9b). En éste, y en todos los demás procesos, se cumple la primera ley de la termodinámica.

FIGURA 19–9 *a*) Proceso isobárico ("misma presión"). *b*) Proceso isovolumétrico ("mismo volumen").



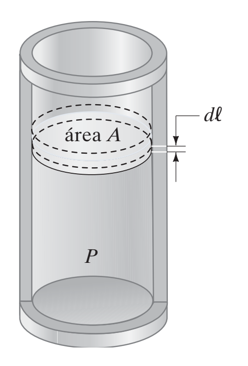
Trabajo realizado en cambios de volumen

Con frecuencia se desea calcular el trabajo realizado en un proceso. Suponga que se tiene un gas confinado en un contenedor cilíndrico ajustado con un pistón móvil (figura 19-10). Siempre debemos tener cuidado en definir con exactitud cuál es el sistema. En este caso, elegimos el gas como el sistema; de manera que las paredes del contenedor y el pistón son parte del ambiente. Ahora calculemos el trabajo realizado por el gas cuando se expande de forma cuasiestática, de manera que P y T están bien definidas para el sistema en todos los instantes.† El gas se expande contra el pistón, cuya área es A. El gas ejerce una fuerza $F = PA$ sobre el pistón, donde P es la presión en el gas. El trabajo realizado por el gas para mover el pistón un desplazamiento infinitesimal $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ es

$$dW = \vec{\mathbf{F}}\cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = PA\,d\ell = P\,dV \qquad \textbf{(19–6)}$$

dado que el aumento infinitesimal en volumen es $dV = A\,d\ell$. Si el gas se *comprimiera* de manera que $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ apuntara hacia el gas, el volumen disminuiría y $dV < 0$. El trabajo realizado por el gas en este caso sería negativo, lo que equivale a decir que se realizó trabajo positivo *sobre* el gas, no por él. Para un cambio finito en el volumen de V_A a V_B, el trabajo W realizado por el gas será

FIGURA 19–10 El trabajo realizado por un gas cuando su volumen aumenta por $dV = A\,d\ell$ es $dW = P\,dV$.



†Si el gas se expande o se comprime rápidamente, habría turbulencia y distintas partes estarían a diferente presión (y temperatura).

$$W = \int dW = \int_{V_A}^{V_B} P\,dV. \qquad \textbf{(19–7)}$$

Las ecuaciones 19-6 y 19-7 son válidas para el trabajo realizado en cualquier cambio de volumen, por un gas, un líquido o un sólido, en tanto se realice de manera cuasiestática.

Para integrar la ecuación 19-7, es necesario conocer cómo varía la presión durante el proceso, y esto depende del tipo de proceso. Consideremos primero una expansión isotérmica cuasiestática de un gas ideal. Este proceso está representado por la curva entre los puntos A y B en el diagrama *PV* de la figura 19-11. El trabajo realizado por el gas en este proceso, de acuerdo con la ecuación 19-7, es justo el área entre la curva *PV* y el eje *V*, que se muestra sombreada en la figura 19-11. Podemos realizar la integral en la ecuación 19-7 para un gas ideal usando la ley del gas ideal, $P = nRT/V$. El trabajo realizado a *T* constante es

$$W = \int_{V_A}^{V_B} P\,dV = nRT \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}. \qquad \begin{bmatrix}\text{proceso isotérmico;}\\ \text{gas ideal}\end{bmatrix} \qquad \textbf{(19–8)}$$

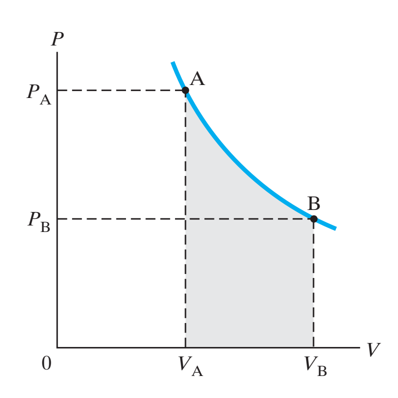
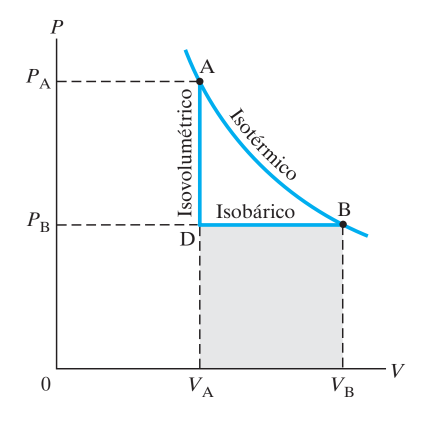


FIGURA 19–11 El trabajo realizado por un gas ideal en un proceso isotérmico es igual al área bajo la curva *PV*. El área sombreada es igual al trabajo realizado por el gas cuando éste se expande de V_A a V_B.

FIGURA 19–12 El proceso ADB consiste en un proceso isovolumétrico (AD) y uno isobárico (DB).



Consideremos ahora una forma diferente de llevar un gas ideal entre los mismos estados A y B. Esta vez, bajemos la presión en el gas de P_A a P_B, como se indica mediante la línea AD en la figura 19-12. (En este proceso *isovolumétrico*, se debe permitir que el calor fluya hacia fuera del gas de manera que su temperatura descienda). Luego dejemos que el gas se expanda de V_A a V_B a presión constante ($= P_B$), lo que se indica mediante la línea DB en la figura 19-12. (En este proceso *isobárico* se agrega calor al gas para elevar su temperatura). En el proceso isovolumétrico AD no se realiza trabajo, puesto que $dV = 0$:

$$W = 0. \qquad \text{[proceso isovolumétrico]}$$

En el proceso isobárico DB la presión permanece constante, de manera que

$$W = \int_{V_A}^{V_B} P\,dV = P_B(V_B - V_A) = P\,\Delta V. \qquad \text{[proceso isobárico]} \qquad \textbf{(19–9a)}$$

El trabajo realizado se representa de nuevo en el diagrama *PV* mediante el área entre la curva (ADB) y el eje *V*, como se indica mediante el sombreado en la figura 19-12. Al usar la ley del gas ideal, también podemos escribir

$$W = P_B(V_B - V_A) = nRT_B\left(1 - \frac{V_A}{V_B}\right). \qquad \begin{bmatrix}\text{proceso isobárico;}\\ \text{gas ideal}\end{bmatrix} \qquad \textbf{(19–9b)}$$

Como se observa a partir de las áreas sombreadas en las figuras 19-11 y 19-12, o al poner números a las ecuaciones 19-8 y 19-9 (inténtelo para $V_B = 2V_A$), el trabajo realizado en estos dos procesos es diferente. Éste es un resultado general. *El trabajo realizado al llevar un sistema de un estado a otro no sólo depende de los estados inicial y final, sino también del tipo de proceso* (*o "trayectoria"*).

Este resultado vuelve a enfatizar el hecho de que el trabajo no se puede considerar una propiedad de un sistema. Lo mismo es cierto para el calor. La entrada de calor requerida para cambiar el gas del estado A al estado B depende del proceso; para el proceso isotérmico de la figura 19-11, la entrada de calor resulta ser mayor que para el proceso ADB de la figura 19-12. En general, *la cantidad de calor agregado o eliminado al llevar un sistema de un estado a otro no sólo depende de los estados inicial y final, sino también de la trayectoria o el proceso*.

EJEMPLO CONCEPTUAL 19–9 **Trabajo en procesos isotérmicos y adiabáticos.** En la figura 19-8 vimos los diagramas *PV* para un gas que se expande en dos formas: isotérmica y adiabáticamente. El volumen inicial V_A fue el mismo en cada caso, y los volúmenes finales fueron iguales ($V_B = V_C$). ¿En cuál proceso el gas realizó más trabajo?

RESPUESTA El sistema es el gas. El gas realizó más trabajo en el proceso isotérmico, lo que podemos constatar en dos formas simples al observar la figura 19-8. Primero, la presión "promedio" fue más alta durante el proceso isotérmico AB, de manera que $W = \overline{P}\,\Delta V$ fue mayor (ΔV es el mismo para ambos procesos). Segundo, se puede observar el área bajo cada curva: el área bajo la curva AB, que representa el trabajo realizado, fue mayor (pues la curva AB es más alta) que el área bajo la curva AC.

EJERCICIO E ¿El trabajo realizado por el gas en el proceso ADB de la figura 19-12 es mayor, menor o igual que el trabajo realizado en el proceso isotérmico AB?

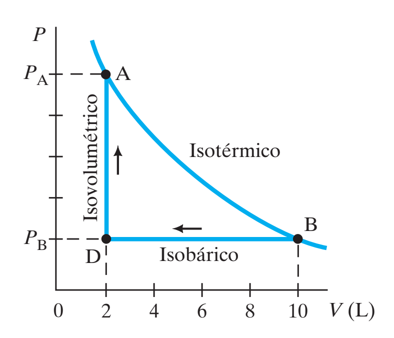


FIGURA 19–13 Ejemplo 19–10.

EJEMPLO 19–10 **La primera ley en procesos isobáricos e isovolumétricos.** Un gas ideal se comprime lentamente a una presión constante de 2.0 atm, de 10.0 L a 2.0 L. Este proceso se representa en la figura 19-13 como la trayectoria B a D. (En este proceso, parte del calor fluye hacia fuera del gas y la temperatura disminuye.) Entonces se agrega calor al gas, manteniendo el volumen constante, y se permite que la presión y la temperatura (línea DA) se eleven hasta que la temperatura alcance su valor original ($T_A = T_B$). Calcule *a*) el trabajo total que realiza el gas en el proceso BDA y *b*) el flujo de calor total en el gas.

PLANTEAMIENTO *a*) El trabajo sólo se realiza en el proceso de compresión BD. En el proceso DA el volumen es constante, de manera que $\Delta V = 0$ y no se realiza trabajo. *b*) Utilizamos la primera ley de la termodinámica (ecuación 19-4).

SOLUCIÓN *a*) Durante la compresión BD, la presión es 2.0 atm = $2(1.01 \times 10^5\ \mathrm{N/m^2})$ y el trabajo realizado es (dado que $1\ \mathrm{L} = 10^3\ \mathrm{cm^3} = 10^{-3}\ \mathrm{m^3}$)

$$W = P\,\Delta V = \left(2.02 \times 10^5\ \mathrm{N/m^2}\right)\left(2.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^3} - 10.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{m^3}\right) = -1.6 \times 10^3\ \mathrm{J}.$$

El trabajo total realizado *por* el gas es -1.6×10^3 J, donde el signo menos significa que se realizan $+1.6 \times 10^3$ J de trabajo *sobre* el gas.

b) Puesto que la temperatura al principio y al final del proceso BDA es la misma, no hay cambio en la energía interna: $\Delta E_{\mathrm{int}} = 0$. A partir de la primera ley de la termodinámica tenemos

$$0 = \Delta E_{\mathrm{int}} = Q - W$$

así que $Q = W = -1.6 \times 10^3$ J. Puesto que Q es negativa, 1600 J de calor fluyen hacia fuera del gas durante todo el proceso, BDA.

EJERCICIO F En el ejemplo 19-10, si la pérdida de calor del gas en el proceso BD es 8.4×10^3 J, ¿cuál es el cambio en la energía interna del gas durante el proceso BD?

EJEMPLO 19–11 **Trabajo realizado en un motor.** En un motor, 0.25 moles de un gas monoatómico ideal en el cilindro se expanden rápida y adiabáticamente contra el pistón. En el proceso, la temperatura del gas desciende de 1150 a 400 K. ¿Cuánto trabajo realiza el gas?

PLANTEAMIENTO Tomamos el gas como el sistema (el pistón es parte del entorno). La presión no es constante y su valor variable no está dado. En vez de ello, podemos usar la primera ley de la termodinámica, pues es posible determinar ΔE_{int} dado $Q = 0$ (el proceso es adiabático).

SOLUCIÓN Determinamos ΔE_{int} a partir de la ecuación 19-1 para la energía interna de un gas monoatómico ideal, usando subíndices f e i para los estados final e inicial:

$$\Delta E_{\mathrm{int}} = E_{\mathrm{int,f}} - E_{\mathrm{int,i}} = \tfrac{3}{2}nR\left(T_{\mathrm{f}} - T_{\mathrm{i}}\right) = \tfrac{3}{2}(0.25\ \mathrm{mol})(8.314\ \mathrm{J/mol\cdot K})(400\ \mathrm{K} - 1150\ \mathrm{K}) = -2300\ \mathrm{J}.$$

Entonces, a partir de la primera ley de la termodinámica (ecuación 19-4),

$$W = Q - \Delta E_{\mathrm{int}} = 0 - (-2300\ \mathrm{J}) = 2300\ \mathrm{J}.$$

La tabla 19-3 da un breve resumen de los procesos analizados.

Expansión libre

Un tipo de proceso adiabático es la llamada **expansión libre** en la que se permite que un gas expanda su volumen de manera adiabática sin realizar trabajo. El aparato para lo-

TABLA 19–3 Procesos termodinámicos simples y la primera ley

Proceso	Constantes:	La primera ley predice:
Isotérmico	T = constante	$\Delta T = 0$ hace que $\Delta E_{\mathrm{int}} = 0$, de manera que $Q = W$
Isobárico	P = constante	$Q = \Delta E_{\mathrm{int}} + W = \Delta E_{\mathrm{int}} + P\,\Delta V$
Isovolumétrico	V = constante	$\Delta V = 0$ por lo que $W = 0$, de manera que $Q = \Delta E_{\mathrm{int}}$
Adiabático	$Q = 0$	$\Delta E_{\mathrm{int}} = -W$

grar una expansión libre se ilustra en la figura 19-14. Consiste en dos compartimientos bien aislados (para asegurar que no fluya calor hacia dentro o hacia fuera) conectados mediante una válvula o llave de paso. Un compartimiento está lleno con gas, el otro está vacío. Cuando la válvula se abre, el gas se expande para llenar ambos contenedores. No fluye calor hacia dentro ni hacia fuera ($Q = 0$), y no se realiza trabajo porque el gas no mueve ningún otro objeto. Por lo tanto, $Q = W = 0$ y por la primera ley de la termodinámica, $\Delta E_{\text{int}} = 0$. *La energía interna de un gas no cambia en una expansión libre*. Para un gas ideal, $\Delta T = 0$ también, ya que E_{int} depende sólo de T (sección 19-2). La expansión libre se ha utilizado de forma experimental para determinar si la energía interna de los *gases reales* sólo depende de T. Los experimentos son muy difíciles de realizar con precisión; sin embargo, se ha encontrado que la temperatura de un gas real disminuye muy ligeramente en una expansión libre. Por ende, la energía interna de los gases reales sí depende, un poco, de la presión o el volumen, así como de la temperatura.

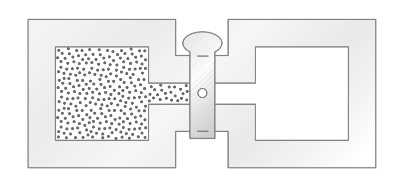


FIGURA 19–14 Expansión libre.

Una expansión libre no se puede graficar en un diagrama PV, porque el proceso es rápido, no cuasiestático. Los estados intermedios no son estados de equilibrio y, por lo tanto, la presión (e incluso el volumen en algunos instantes) no están bien definidas.

19–8 Calores específicos molares para gases y la equipartición de la energía

En la sección 19-3 se explicó el concepto de calor específico y se aplicó a sólidos y líquidos. Los valores del calor específico para gases ·mucho más que para sólidos y líquidos· dependen de cómo se realiza el proceso. Dos procesos importantes son aquellos en los cuales el volumen o la presión se mantienen constantes. Aunque para sólidos y líquidos importa poco, la tabla 19-4 muestra que los calores específicos de los gases a volumen constante (c_V) y a presión constante (c_P) son muy diferentes.

Calores específicos molares para gases

La diferencia en calores específicos para gases se explica bastante bien en términos de la primera ley de la termodinámica y la teoría cinética. La discusión se simplifica si se usan **calores específicos molares**, C_V y C_P, que se definen como el calor requerido para elevar 1 mol del gas en 1 C° a volumen constante y a presión constante, respectivamente. Esto es, en analogía con la ecuación 19-2, el calor Q necesario para elevar la temperatura de n moles de gas en ΔT es

$$Q = nC_V \Delta T \qquad \text{[volumen constante]} \qquad \textbf{(19–10a)}$$

$$Q = nC_P \Delta T. \qquad \text{[presión constante]} \qquad \textbf{(19–10b)}$$

A partir de la definición de calor específico molar (o al comparar las ecuaciones 19-2 y 19-10), es claro que

$$C_V = Mc_V$$

$$C_P = Mc_P,$$

donde M es la masa molecular del gas ($M = m/n$ en gramos/mol). Los valores para calores específicos molares se incluyen en la tabla 19-4, donde se observa que los valores son casi iguales para diferentes gases que tienen el mismo número de átomos por molécula.

TABLA 19–4 Calores específicos de gases a 15°C

Gas	Calores específicos (kcal/kg · K) c_V	c_P	Calores específicos molares (cal/mol · K) C_V	C_P	$C_P - C_V$ (cal/mol · K)	$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$
Monoatómico						
He	0.75	1.15	2.98	4.97	1.99	1.67
Ne	0.148	0.246	2.98	4.97	1.99	1.67
Diatómico						
N_2	0.177	0.248	4.96	6.95	1.99	1.40
O_2	0.155	0.218	5.03	7.03	2.00	1.40
Triatómico						
CO_2	0.153	0.199	6.80	8.83	2.03	1.30
H_2O (100°C)	0.350	0.482	6.20	8.20	2.00	1.32

Ahora utilicemos la teoría cinética e imaginemos que un gas ideal se calienta lentamente mediante dos procesos diferentes: primero a volumen constante y luego a presión constante. En ambos procesos, dejamos que la temperatura aumente en la misma cantidad, ΔT. En el proceso realizado a volumen constante no se realiza trabajo, pues $\Delta V = 0$. Por lo tanto, de acuerdo con la primera ley de la termodinámica, el calor agregado (que se denota como Q_V) se destina a aumentar la energía interna del gas:

$$Q_V = \Delta E_{int}.$$

En el proceso realizado a presión constante se efectúa trabajo, por lo que el calor agregado, Q_P, debe no sólo aumentar la energía interna, sino que también se usa para realizar el trabajo $W = P\,\Delta V$. Por lo tanto, en este proceso a presión constante se debe agregar más calor que en el primer proceso a volumen constante. Para el proceso a presión constante, tenemos, de acuerdo con la primera ley de la termodinámica,

$$Q_P = \Delta E_{int} + P\,\Delta V.$$

Puesto que ΔE_{int} es igual en los dos procesos (se eligió que ΔT fuera igual), podemos combinar las dos ecuaciones anteriores:

$$Q_P - Q_V = P\,\Delta V.$$

Según la ley del gas ideal, $V = nRT/P$, así que, para un proceso a presión constante, tenemos que $\Delta V = nR\,\Delta T/P$. Al poner esto en la ecuación anterior y usar las ecuaciones 19-10, obtenemos

$$nC_P\,\Delta T - nC_V\,\Delta T = P\left(\frac{nR\,\Delta T}{P}\right)$$

o, después de cancelaciones,

$$C_P - C_V = R. \qquad \textbf{(19–11)}$$

Puesto que la constante de gas $R = 8.314$ J/mol·K $= 1.99$ cal/mol·K, la predicción es que C_P será mayor que C_V por aproximadamente 1.99 cal/mol·K. De hecho, esto es un valor muy cercano al que se obtuvo experimentalmente, como se observa en la penúltima columna de la tabla 19-4.

Ahora calculemos el calor específico molar de un gas monoatómico usando la teoría cinética. En un proceso realizado a volumen constante, no se realiza trabajo; así que la primera ley de la termodinámica nos dice que, si se agrega calor Q al gas, la energía interna del gas cambia por

$$\Delta E_{int} = Q.$$

Para un gas monoatómico ideal, la energía interna E_{int} es la energía cinética total de las moléculas,

$$E_{int} = N\left(\tfrac{1}{2}m\overline{v^2}\right) = \tfrac{3}{2}nRT$$

como vimos en la sección 19-2. Entonces, con la ecuación 19-10a, podemos escribir $\Delta E_{int} = Q$ en la forma

$$\Delta E_{int} = \tfrac{3}{2}nR\,\Delta T = nC_V\,\Delta T \qquad \textbf{(19–12)}$$

o

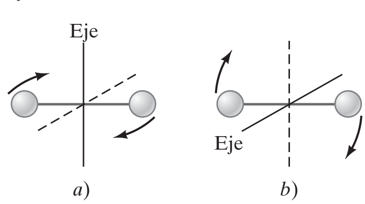
$$C_V = \tfrac{3}{2}R. \qquad \textbf{(19–13)}$$

Dado que $R = 8.314$ J/mol·K $= 1.99$ cal/mol·K, la teoría cinética predice que $C_V = 2.98$ cal/mol·K para un gas monoatómico ideal. Esto está muy cerca de los valores experimentales para gases monoatómicos como helio y neón (tabla 19-4). De la ecuación 19-11, se predice que C_P es aproximadamente 4.97 cal/mol·K, también en concordancia con los experimentos.

Equipartición de la energía

Los calores específicos molares medidos para gases más complejos (tabla 19-4), como los gases diatómicos (de dos átomos) o triatómicos (de tres átomos), aumentan con el número creciente de átomos por molécula. Podemos explicar esto al suponer que la energía interna incluye no sólo energía cinética traslacional, sino también otras formas de energía. Consideremos, por ejemplo, un gas diatómico. Como se ilustra en la figura 19-15, los dos átomos pueden girar en torno a dos ejes diferentes (pero la rotación en torno a un tercer eje que pase a través de los dos átomos daría lugar a muy poca energía, pues el momento de inercia es muy pequeño). Las moléculas pueden tener energía cinética rotacional, así como traslacional. Es útil introducir la idea de **grados de libertad**, los cuales se refieren al número de formas independientes en que las moléculas pueden poseer energía. Por ejemplo, se dice que un gas monoatómico tiene tres grados de libertad, pues un átomo puede tener velocidad a lo largo del eje x, del eje y y del eje z. Éstos se consideran tres movimientos independientes, porque un cambio en cualquiera de los componentes no afectaría a los otros. Una molécula diatómica tiene los mismos tres grados de libertad

FIGURA 19–15 Una molécula diatómica puede girar en torno a dos ejes diferentes.



asociados con la energía cinética traslacional más dos grados de libertad asociados con la energía cinética rotacional, para dar un total de cinco grados de libertad. Un vistazo rápido a la tabla 19-4 indica que el C_V para gases diatómicos es aproximadamente $\frac{5}{3}$ el de un gas monoatómico; esto es, en la misma proporción que su grados de libertad. Este resultado condujo a los físicos del siglo XIX a una importante idea, el **principio de equipartición de la energía**. Este principio afirma que la energía se comparte de forma equitativa entre los grados de libertad activos, y en particular cada grado de libertad activo de una molécula tiene en promedio una energía igual a $\frac{1}{2}kT$. Por lo tanto, la energía promedio para una molécula de un gas monoatómico sería $\frac{3}{2}kT$ (que ya conocíamos) y la de un gas diatómico. $\frac{5}{2}kT$. En consecuencia, la energía interna de un gas diatómico sería $E_{\text{int}} = N\left(\frac{5}{2}kT\right) = \frac{5}{2}nRT$, donde n es el número de moles. Al usar el mismo argumento que para los gases monoatómicos, vemos que, para gases diatómicos, el calor específico molar a volumen constante sería $\frac{5}{2}R = 4.97\text{ cal/mol}\cdot\text{K}$, en concordancia con los valores medidos. Las moléculas más complejas tienen incluso más grados de libertad y, por consiguiente, mayores calores específicos molares.

Sin embargo, la situación se complicó por mediciones que indicaban que, para gases diatómicos a temperaturas muy bajas, C_V tenía un valor de sólo $\frac{3}{2}R$, como si sólo tuviera tres grados de libertad. Y para muy altas temperaturas, C_V sería de $\frac{7}{2}R$, como si hubiera siete grados de libertad. La explicación es que, a bajas temperaturas, casi todas las moléculas tienen sólo energía cinética traslacional. Esto es, la energía no se destina a energía rotacional, así que sólo están "activos" tres grados de libertad. Por otra parte, a temperaturas muy altas, los cinco grados de libertad están activos, más dos adicionales. Los dos nuevos grados de libertad se pueden interpretar como asociados con los dos átomos que vibran como si estuvieran conectados por un resorte, como se ilustra en la figura 19-16. Un grado de libertad viene de la energía cinética del movimiento vibratorio, y el segundo de la energía potencial del movimiento vibratorio $\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$. A temperatura ambiente, estos dos grados de libertad aparentemente no están activos. Véase la figura 19-17.

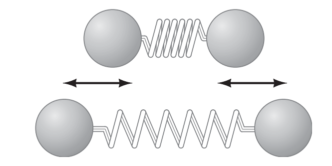


FIGURA 19–16 Una molécula diatómica puede vibrar, como si los dos átomos estuvieran conectados por un resorte. Desde luego, no lo están; más bien, ejercen entre sí fuerzas eléctricas por naturaleza, pero de una forma que recuerda la fuerza de un resorte.

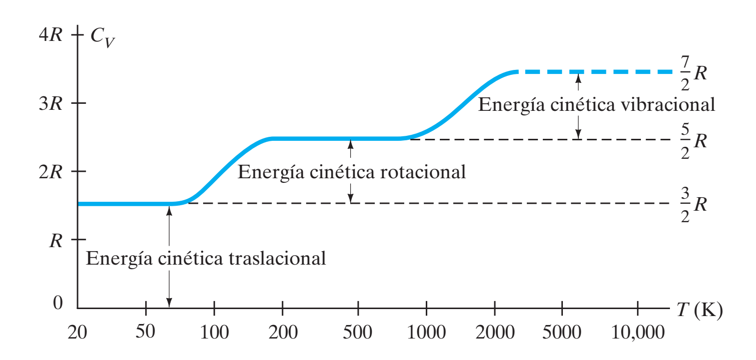


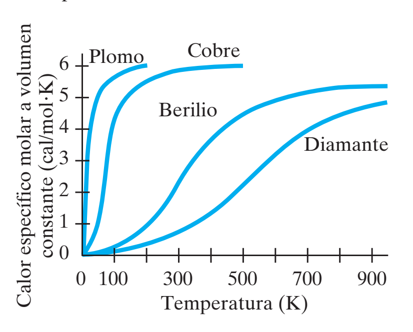
FIGURA 19–17 Calor específico molar C_V como función de la temperatura para moléculas de hidrógeno (H_2). Conforme aumenta la temperatura, parte de la energía cinética traslacional se puede transferir en colisiones a energía cinética rotacional y, a temperaturas todavía mayores, a energía cinética vibracional [Nota: H_2 se disocia en dos átomos a aproximadamente 3200 K, así que la última parte de la curva se muestra punteada].

Einstein, usando la teoría cuántica, finalmente explicó por qué están "activos" menos grados de libertad a temperaturas más bajas. [De acuerdo con la teoría cuántica, la energía no toma valores continuos, sino que está cuantizada: puede tener sólo ciertos valores y hay cierta energía mínima. Las energías rotacional y vibracional mínimas son mayores que para la energía cinética traslacional simple, así que, a temperaturas más bajas y menor energía cinética traslacional, no hay suficiente energía para excitar la energía cinética rotacional o vibracional]. Los cálculos basados en la teoría cinética y el principio de equipartición de la energía (modificados por la teoría cuántica) dan resultados numéricos en concordancia con los experimentos.

* Sólidos

El principio de equipartición de la energía también se aplica a los sólidos. El calor específico molar de cualquier sólido, a alta temperatura, está cerca de $3R$ (6.0 cal/mol·K), figura 19-18. Esto se conoce como el valor *Dulong y Petit*, en honor a los científicos que lo midieron por primera vez en 1819. (Note que la tabla 19-1 da los calores específicos por kilogramo, no por mol.) A altas temperaturas, cada átomo aparentemente tiene seis grados de libertad, aunque algunos no están activos a bajas temperaturas. Cada átomo en un sólido cristalino puede vibrar en torno a su posición de equilibrio como si estuviera conectado mediante resortes a cada uno de sus vecinos. Así, puede tener tres grados de libertad para energía cinética y tres más asociados con la energía potencial de vibración en cada una de las tres direcciones x, y y z, lo que concuerda con los valores medidos.

FIGURA 19–18 Calores específicos molares de sólidos como función de la temperatura.



19–9 Expansión adiabática de un gas

En la figura 19-8 se muestra la curva PV (curva AC) para la expansión adiabática cuasiestática (lenta, $Q = 0$) de un gas ideal. Es un poco más pronunciada que para un proceso isotérmico ($\Delta T = 0$), lo que indica que, para el mismo cambio en el volumen, el cambio en la presión será mayor. Por lo tanto, la temperatura del gas debe disminuir durante una expansión adiabática. Por el contrario, la temperatura se eleva durante una compresión adiabática.

Es posible obtener la relación entre la presión P y el volumen V de un gas ideal al que se le permite expandirse lentamente de manera adiabática. Comencemos con la primera ley de la termodinámica, escrita en forma diferencial:

$$dE_{\text{int}} = dQ - dW = -dW = -P\,dV,$$

puesto que $dQ = 0$ para un proceso adiabático. La ecuación 19-12 da una relación entre ΔE_{int} y C_V, que es válida para cualquier proceso de gas ideal, ya que E_{int} es una función sólo de T para un gas ideal. Escribimos esto en forma diferencial:

$$dE_{\text{int}} = nC_V\,dT.$$

Cuando combinamos estas dos últimas ecuaciones, obtenemos

$$nC_V\,dT + P\,dV = 0.$$

A continuación tomamos la diferencial de la ley del gas ideal, $PV = nRT$, permitiendo que P, V y T varíen:

$$P\,dV + V\,dP = nR\,dT.$$

Despejamos dT en esta relación y sustituimos en la relación anterior para obtener

$$nC_V\left(\frac{P\,dV + V\,dP}{nR}\right) + P\,dV = 0$$

o, al multiplicar por R y reordenar,

$$(C_V + R)P\,dV + C_V V\,dP = 0.$$

A partir de la ecuación 19-11, notamos que $C_V + R = C_P$, así que tenemos

$$C_P P\,dV + C_V V\,dP = 0,$$

o

$$\frac{C_P}{C_V}P\,dV + V\,dP = 0.$$

Definimos

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \qquad \textbf{(19–14)}$$

de manera que la última ecuación se convierte en

$$\frac{dP}{P} + \gamma\frac{dV}{V} = 0.$$

Al integrar esta ecuación se convierte en

$$\ln P + \gamma \ln V = \text{constante}$$

Esto se simplifica (usando las reglas para suma y multiplicación de logaritmos) a

$$PV^{\gamma} = \text{constante} \qquad \begin{bmatrix}\text{proceso adiabático}\\ \text{cuasiestático; gas ideal}\end{bmatrix} \qquad \textbf{(19–15)}$$

Ésta es la relación entre P y V para una expansión o contracción adiabática cuasiestática. Veremos su utilidad cuando estudiemos las máquinas térmicas en el siguiente capítulo. La tabla 19-4 (p. 511) da valores de γ para algunos gases reales. La figura 19-8 compara una expansión adiabática (ecuación 19-15) en la curva AC, con una expansión isotérmica (PV = constante) en la curva AB. Es importante recordar que la ley del gas ideal, $PV = nRT$, se sigue cumpliendo incluso para una expansión adiabática (PV^{γ} = constante); como es evidente, PV no es constante, lo que significa que T no es constante.

EJEMPLO 19–12 **Compresión de un gas ideal.** Un gas monoatómico ideal se comprime desde el punto A en el diagrama PV de la figura 19-19, donde $P_A = 100$ kPa, $V_A = 1.00\ \text{m}^3$ y $T_A = 300$ K. Primero el gas se comprime adiabáticamente al estado B ($P_B = 200$ kPa). Luego el gas se comprime aún más del punto B al punto C ($V_C = 0.50\ \text{m}^3$) en un proceso isotérmico. *a*) Determine V_B. *b*) Calcule el trabajo realizado *sobre* el gas para todo el proceso.

PLANTEAMIENTO El volumen V_B se obtiene con la ecuación 19-15. El trabajo realizado *por* el gas está dado por la ecuación 19-7, $W = \int P\,dV$. El trabajo realizado *sobre* el gas es el negativo de lo anterior: $W_{\text{sobre}} = -\int P\,dV$.

SOLUCIÓN En el proceso adiabático, la ecuación 19-15 nos dice que PV^γ = constante. Por lo tanto, $PV^\gamma = P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma$ donde, para un gas monoatómico, $\gamma = C_P/C_V = (5/2)/(3/2) = \frac{5}{3}$.

a) La ecuación 19-15 da $V_B = V_A(P_A/P_B)^{\frac{1}{\gamma}} = (1.00\text{ m}^3)(100\text{ kPa}/200\text{ kPa})^{\frac{3}{5}} = 0.66\text{ m}^3$.

b) La presión P en cualquier instante durante el proceso adiabático está dada por $P = P_A V_A^\gamma V^{-\gamma}$. El trabajo realizado sobre el gas al pasar de V_A a V_B es

$$W_{AB} = -\int_A^B P\,dV = -P_A V_A^\gamma \int_{V_A}^{V_B} V^{-\gamma}\,dV = -P_A V_A^\gamma\left(\frac{1}{-\gamma+1}\right)\left(V_B^{1-\gamma} - V_A^{1-\gamma}\right).$$

Dado que $\gamma = \frac{5}{3}$, entonces $-\gamma + 1 = 1 - \gamma = -\frac{2}{3}$, de manera que

$$W_{AB} = -\left(P_A V_A^{\frac{5}{3}}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(V_A^{-\frac{2}{3}}\right)\left[\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{-\frac{2}{3}} - 1\right] = +\frac{3}{2}P_A V_A\left[\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{-\frac{2}{3}} - 1\right]$$

$$= +\frac{3}{2}(100\text{ kPa})(1.00\text{ m}^3)\left[(0.66)^{-\frac{2}{3}} - 1\right] = +48\text{ kJ}.$$

Para el proceso isotérmico de B a C, el trabajo se realiza a temperatura constante, así que la presión en cualquier instante durante el proceso es $P = nRT_B/V$ y

$$W_{BC} = -\int_B^C P\,dV = -nRT_B\int_{V_B}^{V_C}\frac{dV}{V} = -nRT_B\ln\frac{V_C}{V_B} = -P_B V_B\ln\frac{V_C}{V_B} = +37\text{ kJ}.$$

El trabajo total realizado sobre el gas es 48 kJ + 37 kJ = 85 kJ.

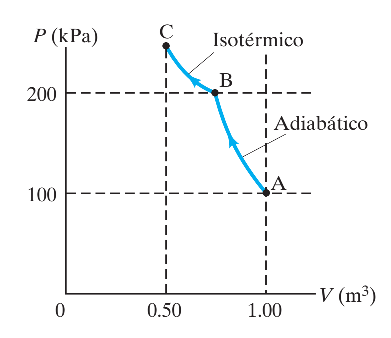


FIGURA 19–19 Ejemplo 19–12.



19–10 Transferencia de calor: Conducción, convección, radiación

El calor se transfiere de un lugar o cuerpo a otro en tres diferentes formas: por *conducción*, *convección* y *radiación*. Ahora explicaremos cada una por separado; sin embargo, en situaciones prácticas, dos de ellas o las tres pueden operar al mismo tiempo. Comenzaremos con la conducción.

Conducción

Cuando un atizador metálico se coloca en el fuego, o una cuchara de plata se introduce en un tazón de sopa caliente, el extremo expuesto del atizador o la cuchara pronto también se calienta, aun cuando no esté directamente en contacto con la fuente de calor. Se dice que el calor se condujo del extremo caliente al extremo frío.

La **conducción** de calor en muchos materiales se puede ver como un transporte mediante colisiones moleculares. Conforme un extremo del objeto se calienta, las moléculas ahí se mueven cada vez más rápido. Conforme chocan con moléculas vecinas de movimiento más lento, transfieren parte de su energía cinética a esas otras moléculas, las cuales, a la vez, transfieren energía mediante colisión a otras moléculas todavía más alejadas en el objeto. En los metales, las colisiones de los electrones libres son las principales responsables de la conducción.

La conducción de calor de un punto a otro tiene lugar sólo si hay una diferencia de temperatura entre los dos puntos. De hecho, experimentalmente se encuentra que la tasa de flujo de calor a través de una sustancia es proporcional a la diferencia en temperatura entre sus extremos. La tasa de flujo de calor también depende del tamaño y la forma del objeto. Para investigar esto cuantitativamente, consideremos el flujo de calor a través de un cilindro uniforme, como se ilustra en la figura 19-20. Experimentalmente se encuentra que el flujo de calor ΔQ durante un intervalo de tiempo Δt está dado por la relación

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = kA\frac{T_1 - T_2}{\ell} \qquad \textbf{(19–16a)}$$

donde A es el área transversal del objeto, ℓ es la distancia entre los dos extremos, que están a las temperaturas T_1 y T_2, y k es una constante de proporcionalidad llamada **conductividad térmica**, que es característica del material. En la ecuación 19-16a vemos que la tasa de flujo de calor (unidades de J/s) es directamente proporcional al área transversal y al gradiente de temperatura $(T_1 - T_2)/\ell$.

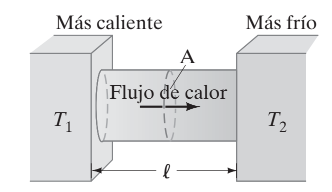
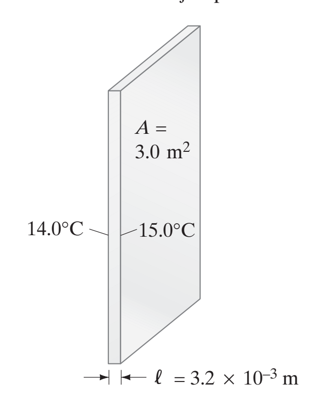


FIGURA 19–20 Conducción de calor entre áreas a temperaturas T_1 y T_2. Si T_1 es mayor que T_2, el calor fluye hacia la derecha; la tasa está dada por la ecuación 19-16a.

TABLA 19–5
Conductividades térmicas

Sustancia	Conductividad térmica, k	
	$\frac{\text{kcal}}{(\text{s}\cdot\text{m}\cdot\text{C}°)}$	$\frac{\text{J}}{(\text{s}\cdot\text{m}\cdot\text{C}°)}$
Plata	10×10^{-2}	420
Cobre	9.2×10^{-2}	380
Aluminio	5.0×10^{-2}	200
Acero	1.1×10^{-2}	40
Hielo	5×10^{-4}	2
Vidrio	2.0×10^{-4}	0.84
Ladrillo	2.0×10^{-4}	0.84
Concreto	2.0×10^{-4}	0.84
Agua	1.4×10^{-4}	0.56
Tejido humano	0.5×10^{-4}	0.2
Madera	0.3×10^{-4}	0.1
Fibra de vidrio	0.12×10^{-4}	0.048
Corcho	0.1×10^{-4}	0.042
Lana	0.1×10^{-4}	0.040
Plumas de ganso	0.06×10^{-4}	0.025
Poliuretano	0.06×10^{-4}	0.024
Aire	0.055×10^{-4}	0.023

FIGURA 19–21 Ejemplo 19–13.





Ventanas térmicas

En algunos casos (como cuando k o A no se pueden considerar constantes), es necesario considerar el límite de una losa infinitesimalmente delgada de grosor dx. Entonces la ecuación 19-16a se convierte en

$$\frac{dQ}{dt} = -kA\frac{dT}{dx}, \qquad \textbf{(19–16b)}$$

donde dT/dx es el gradiente de temperatura[†] y se incluye el signo negativo, pues el "flujo" de calor está en la dirección opuesta al gradiente de temperatura.

En la tabla 19-5 se mencionan las conductividades térmicas, k, para varias sustancias. Las sustancias para las que k es grande conducen el calor rápidamente, y de ellas se dice que son buenos **conductores** térmicos. La mayoría de los metales entran en esta categoría, aunque hay un amplio rango incluso entre ellos, como podrá constatarse al sostener los mangos de una cuchara de plata y una cuchara de acero inoxidable sumergidas en el mismo plato de sopa caliente. Las sustancias para las que k es pequeña, como la lana, la fibra de vidrio, el poliuretano y las plumas de ganso, son pobres conductores de calor y, por consiguiente, son buenos **aislantes** térmicos.

Las magnitudes relativas de k pueden explicar fenómenos simples como por qué un piso de mosaico se siente mucho más frío al pisar sobre él que un piso cubierto con alfombra a la misma temperatura. El mosaico es mejor conductor de calor que la alfombra. El calor que fluye de los pies de una persona a la alfombra no se conduce rápidamente, así que la superficie de la alfombra pronto se calienta hasta alcanzar la temperatura de los pies y la persona se siente cómoda. Por el contrario, el mosaico conduce el calor rápidamente, por lo que de inmediato toma más calor de los pies de una persona, así que la temperatura de la planta de los pies disminuye.

EJEMPLO 19–13 **Pérdida de calor a través de las ventanas.** Una gran fuente de pérdida de calor en una casa la constituyen las ventanas. Calcule la tasa de flujo de calor a través de una ventana de vidrio de 2.0 m × 1.5 m de área y 3.2 mm de grosor, si las temperaturas en las superficies interior y exterior son 15.0 y 14.0°C, respectivamente (figura 19-21).

PLANTEAMIENTO El calor fluye por conducción a través del vidrio desde la temperatura interior más alta hacia la temperatura exterior más baja. Utilizamos la ecuación de conducción de calor, ecuación 19-16a.

SOLUCIÓN Aquí $A = (2.0\ \text{m})(1.5\ \text{m}) = 3.0\ \text{m}^2$ y $\ell = 3.2 \times 10^{-3}$ m. Al usar la tabla 19-5 para obtener k, tenemos

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = kA\frac{T_1 - T_2}{\ell} = \frac{(0.84\ \text{J/s}\cdot\text{m}\cdot\text{C}°)(3.0\ \text{m}^2)(15.0°\text{C} - 14.0°\text{C})}{(3.2 \times 10^{-3}\ \text{m})}$$
$$= 790\ \text{J/s}.$$

NOTA Esta tasa de flujo de calor es equivalente a (790 J/s)/(4.19×10^3 J/kcal) = 0.19 kcal/s, o (0.19 kcal/s) × (3600 s/h) = 680 kcal/h.

Tal vez el lector haya notado en el ejemplo 19-13 que 15°C no es una temperatura muy cálida para la sala de una casa. De hecho, la habitación en sí puede ser mucho más cálida, y la temperatura exterior tal vez sea más fría que 14°C. Pero las temperaturas de 15 y 14°C se especificaron como las de las superficies de la ventana, y por lo general cerca de la ventana hay una considerable caída de temperatura del aire, tanto en el interior como en el exterior. Esto es, la capa de aire en cualquier lado de la ventana actúa como un aislante, y normalmente la mayor parte del descenso en la temperatura entre el interior y el exterior de la casa tiene lugar a través de la capa de aire. Si hay un viento fuerte, el aire afuera de una ventana constantemente será sustituido con aire frío; el gradiente de temperatura a través del vidrio será mayor y habrá una tasa mucho mayor de pérdida de calor. Al aumentar el ancho de la capa de aire, como cuando se utilizan dos paneles de vidrio separados por aire, se reducirá la pérdida de calor más que cuando simplemente se aumenta el grosor del vidrio, puesto que la conductividad térmica del aire es mucho menor que la del vidrio.

Las propiedades aislantes de la ropa se derivan de las propiedades aislantes del aire. Sin ropa, el cuerpo en aire tranquilo calentaría el aire en contacto con la piel y el individuo pronto se sentiría razonablemente cómodo porque el aire es un muy buen

[†]Las ecuaciones 19-16 son muy similares a las relaciones que describen la difusión (sección 18-7) y el flujo de fluidos a través de una tubería (sección 13-12). En estos casos, se encuentra que el flujo de materia es proporcional al gradiente de concentración dC/dx, o al gradiente de presión $(P_1 - P_2)/\ell$. Esta estrecha similitud es una razón por la que se habla del "flujo" de calor. Sin embargo, debemos tener en mente que ninguna sustancia fluye en el caso del calor: es energía lo que se transfiere.

aislante. Sin embargo, dado que el aire se agita (hay brisas y corrientes, y las personas se mueven), el aire caliente se sustituiría por aire frío, lo que aumentaría la diferencia de temperatura y la pérdida de calor del cuerpo. La ropa nos mantiene calientes al atrapar aire de manera que no se pueda mover con facilidad. No es la ropa la que nos aísla, sino el aire que la ropa atrapa. Las plumas de ganso son un excelente aislante porque incluso una pequeña cantidad de ellas se esponja y atrapa una gran cantidad de aire.



La ropa aísla al atrapar una capa de aire

[Para fines prácticos, las propiedades térmicas de los materiales de construcción, en particular cuando se consideran como aislantes, por lo general se especifican mediante valores R (o "resistencia térmica"), definidos para un grosor de material ℓ dado como:

$$R = \ell/k.$$

El valor R de un trozo de material dado se combina con el grosor ℓ y la conductividad térmica k en un número. En Estados Unidos, los valores R se dan en unidades inglesas como $\mathrm{ft^2 \cdot h \cdot F^\circ/Btu}$ (por ejemplo, R-19 significa $R = 19\ \mathrm{ft^2 \cdot h \cdot F^\circ/Btu}$). La tabla 19-6 lista los valores R para algunos materiales de construcción comunes. Los valores R aumentan directamente con el grosor del material: por ejemplo, 2 pulgadas de fibra de vidrio corresponden a R-6, mientras que 4 pulgadas corresponden a R-12].

FÍSICA APLICADA

Valores R de aislamiento térmico

TABLA 19–6 Valores *R*

Material	Grosor	Valor R ($\mathrm{ft^2 \cdot h \cdot F^\circ/Btu}$)
Vidrio	$\frac{1}{8}$ de pulg	1
Ladrillo	$3\frac{1}{2}$ pulgadas	0.6–1
Madera contrachapada	$\frac{1}{2}$ pulgada	0.6
Aislamiento de fibra de vidrio	4 pulgadas	12

Convección

Aunque los líquidos y gases por lo general no son muy buenos conductores del calor, pueden transferirlo rápidamente por convección. La **convección** es el proceso mediante el cual el calor fluye por el movimiento de masa de las moléculas de un lugar a otro. Mientras que en la conducción participan moléculas (y/o electrones) que se mueven sólo a lo largo de distancias cortas y chocan, la convección implica el movimiento de un gran número de moléculas a través de distancias grandes.

Un horno de aire forzado, en el que el aire se calienta y luego se sopla mediante un ventilador hacia una habitación, es un ejemplo de *convección forzada*. También ocurre la *convección natural*, y un ejemplo familiar esque el aire caliente que se eleva. Por ejemplo, el aire sobre un radiador (u otro tipo de calentador) se expande conforme se calienta (capítulo 17) y, en consecuencia, su densidad disminuye. Como su densidad es menor que la del aire más frío circundante, se eleva, al igual que un tronco sumergido en agua flota hacia arriba porque su densidad es menor que la del agua. Las corrientes oceánicas calientes o frías, como la suave Corriente del Golfo, representan convección natural a escala mundial. El viento es otro ejemplo de convección, y el clima en general está enormemente influido por las corrientes de aire convectivas.

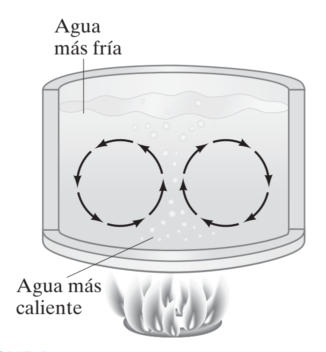


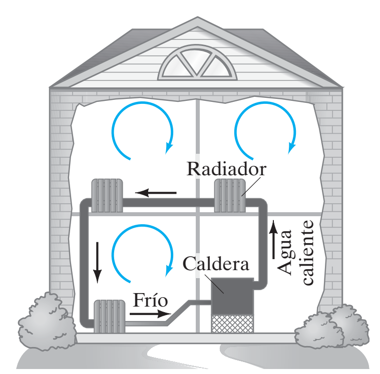
FIGURA 19–22 Corrientes de convección en una olla de agua que se calienta sobre una estufa.

Cuando una olla con agua se calienta (figura 19-22), se establecen corrientes de convección conforme el agua caliente en el fondo de la olla se eleva a causa de su densidad reducida. Esa agua caliente se sustituye con agua más fría proveniente de arriba. Este principio se usa en muchos sistemas de calefacción, como el sistema de radiador de agua caliente que se ilustra en la figura 19-23. El agua se calienta en la caldera y, conforme su temperatura aumenta, se expande y se eleva como se muestra. Esto hace que el agua circule en el sistema de calefacción. El agua caliente entra entonces a los radiadores, se transfiere calor por conducción al aire y el agua fría regresa a la caldera. Así, el agua circula gracias a la convección; a veces se emplean bombas para mejorar la circulación. El aire en toda la habitación también se calienta como resultado de la convección. El aire calentado por los radiadores se eleva y es sustituido por aire más frío, lo que da como resultado corrientes de aire convectivas, como se muestra mediante las flechas azules en la figura 19-23.

FÍSICA APLICADA

Calentamiento doméstico convectivo

FIGURA 19–23 La convección desempeña un papel en el calentamiento de una casa. Las flechas circulares muestran las corrientes de aire convectivas en las habitaciones.



Otros tipos de calderas también dependen de la convección. Las calderas de aire caliente con registros (aberturas) cerca del suelo con frecuencia carecen de ventiladores, aunque dependen de la convección natural, que puede ser considerable. En otros sistemas, se usa un ventilador. En cualquier caso, es importante que el aire frío pueda regresar a la caldera de manera que las corrientes convectivas circulen a través de toda la habitación si se desea que ésta se caliente de manera uniforme. La convección no siempre es favorable. Buena parte del calor de una chimenea, por ejemplo, se escapa hacia el exterior y no hacia la habitación.

Radiación

La convección y la conducción requieren la presencia de materia como medio para transportar el calor desde la región más caliente hacia la más fría. Pero un tercer tipo de transferencia de calor ocurre sin que exista un medio en absoluto. Toda la vida en la Tierra depende de la transferencia de energía del Sol, y esta energía se transfiere a la Tierra a través de espacio vacío (o casi vacío). Esta forma de transferencia de energía es calor, pues la temperatura en la superficie del Sol es mucho mayor (6000 K) que la de la Tierra, y se le conoce como **radiación**. El calor que se recibe de una fogata es principalmente energía radiante.

Como se verá en los capítulos posteriores, la radiación consiste esencialmente en ondas electromagnéticas. Por el momento, es suficiente decir que la radiación del Sol consiste en luz visible y muchas otras longitudes de onda a las que el ojo no es sensible, incluida la radiación infrarroja (IR).

La tasa a la que un objeto radia energía es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura Kelvin, T. Esto es, un objeto a 2000 K, en comparación con uno a 1000 K, radia energía a una tasa de $2^4 = 16$ veces. La tasa de radiación también es proporcional al área A del objeto emisor, de manera que la tasa a la que la energía sale del objeto, $\Delta Q/\Delta t$, es

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \epsilon\sigma A T^4. \qquad \textbf{(19–17)}$$

Ésta es la **ecuación de Stefan-Boltzmann**, y σ es una constante universal llamada **constante de Stefan-Boltzmann**, que tiene el valor

$$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2 \cdot K^4}.$$

El factor ϵ (letra griega épsilon), llamada **emisividad**, es un número entre 0 y 1 que es característico de la superficie del material radiante. Las superficies muy negras, como el carbón, tienen emisividad cercana a 1, mientras que las superficies metálicas brillantes tienen ϵ cercana a cero y, por lo tanto, emiten menos radiación. El valor depende en cierto grado de la temperatura del material.

FÍSICA APLICADA

Ropa oscura versus clara

No sólo las superficies brillantes emiten menos radiación, sino que absorben poca de la radiación que incide sobre ellas (la mayor parte se refleja). Los objetos negros y muy oscuros son buenos emisores ($\epsilon \approx 1$) y también absorben casi toda la radiación que incide sobre ellos; por eso es aconsejable vestir con colores claros y no con oscuros en los días calurosos. Así que **un buen absorbente también es un buen emisor**.

Cualquier objeto no sólo emite energía por radiación, sino que también absorbe energía radiada por otros cuerpos. Si un objeto de emisividad ϵ y área A está a una temperatura T_1, radia energía a una tasa $\epsilon\sigma A T_1^4$. Si el objeto está rodeado por un ambiente a temperatura T_2, la tasa a la que los alrededores radian energía es proporcional a T_2^4, y la tasa a la que el objeto absorbe energía es proporcional a T_2^4. La tasa *neta* de flujo de calor radiante del objeto está dada por

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \epsilon\sigma A\left(T_1^4 - T_2^4\right), \qquad \textbf{(19–18)}$$

donde A es el área superficial del objeto, T_1 su temperatura y ϵ su emisividad (a temperatura T_1), y T_2 es la temperatura del ambiente. Esta ecuación es consistente con el hecho experimental de que el equilibrio entre el objeto y su entorno se alcanza cuando ambos llegan a la misma temperatura. Esto es, $\Delta Q/\Delta t$ debe ser igual a cero cuando $T_1 = T_2$, de manera que ϵ debe ser la misma tanto para la emisión como para la absorción. Esto confirma la idea de que un buen emisor es un buen absorbente. Puesto que tanto el objeto como su entorno radian energía, hay una transferencia neta de energía de uno al otro a menos que todo esté a la misma temperatura.

FÍSICA APLICADA

Pérdida de calor radiado por el cuerpo

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Debe utilizarse la temperatura Kelvin

EJEMPLO 19–14 ESTIMACIÓN Enfriamiento por radiación. Un atleta se sienta sin ropa en un vestidor cuyas paredes oscuras están a una temperatura de 15°C. Estime su tasa de pérdida de calor por radiación, suponiendo que la temperatura de la piel del atleta es de 34°C y que $\epsilon = 0.70$. Considere que el área superficial del cuerpo que no está en contacto con la silla es de 1.5 m².

PLANTEAMIENTO Empleamos la ecuación 19-18, con temperaturas Kelvin.

SOLUCIÓN Tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\Delta Q}{\Delta t} &= \epsilon\sigma A\left(T_1^4 - T_2^4\right)\\ &= (0.70)\left(5.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2\cdot K^4}\right)\left(1.5\,\mathrm{m^2}\right)\left[(307\,\mathrm{K})^4 - (288\,\mathrm{K})^4\right] = 120\,\mathrm{W}.\end{aligned}$$

NOTA La "salida" de esta persona en reposo es un poco más de lo que utiliza una bombilla de 100 W.

Una persona en reposo produce de manera natural calor interno a una tasa de aproximadamente 100 W, que es menor que la pérdida de calor por radiación calculada en el ejemplo 19-14. En consecuencia, la temperatura de la persona descendería, lo que provocaría considerable incomodidad. El cuerpo responde a la pérdida de calor excesiva aumentando su tasa metabólica, y tiritar es un método mediante el cual el cuerpo aumenta su metabolismo. Desde luego, la ropa ayuda mucho. El ejemplo 19-14 ilustra que una persona puede sentirse incómoda incluso en una habitación bastante cálida en la que la temperatura del aire sea de unos 25°C. Si las paredes o el suelo son fríos, la radiación hacia ellos ocurre sin importar la temperatura del aire. De hecho, se estima que la radiación explica aproximadamente el 50% de la pérdida de calor de una persona sedentaria en una habitación normal. Las habitaciones son más confortables cuando las paredes y el suelo son cálidos, aunque el aire no lo sea tanto. Los suelos y las paredes se pueden calentar mediante conductos de agua caliente o elementos calefactores eléctricos. Tales sistemas de calefacción de primera clase se están volviendo más comunes en la actualidad, y es interesante señalar que hace 2000 años los romanos ya usaban conductos de agua caliente y vapor en el piso para calentar sus casas, incluso en las ubicadas en la remota provincia de Gran Bretaña.

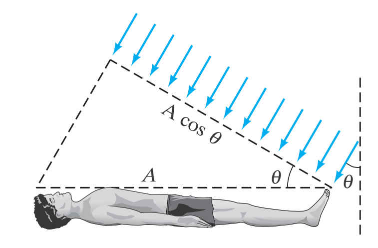


FIGURA 19–24 Energía radiante que incide sobre un cuerpo a un ángulo θ.

El calentamiento de un objeto mediante la radiación proveniente del Sol no se puede calcular con la ecuación 19-18, pues ésta supone una temperatura uniforme, T_2, del ambiente que rodea al objeto, mientras que el Sol, en esencia, es una fuente puntual. En consecuencia, el Sol debe tratarse como una fuente de energía por separado. El calentamiento por el Sol se calcula con el hecho de que aproximadamente 1350 J de energía proveniente de él llegan a la atmósfera de la Tierra por segundo por metro cuadrado de área en ángulos rectos a los rayos del Sol. Esta cifra, 1350 W/m^2, se llama **constante solar**. La atmósfera puede absorber hasta un 70% de esta energía antes de que llegue al suelo, dependiendo de la capa de nubes. En un día despejado, aproximadamente 1000 W/m^2 llegan a la superficie de la Tierra. Un objeto de emisividad ϵ con área A y ubicado frente al Sol absorbe energía solar a una tasa, en watts, de aproximadamente

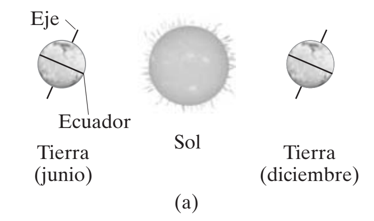
$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \left(1000\ \mathrm{W/m^2}\right)\epsilon A \cos\theta, \qquad \textbf{(19–19)}$$

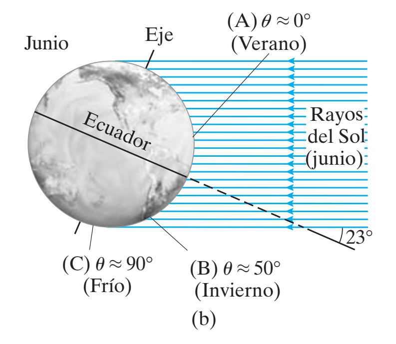
donde θ es el ángulo entre los rayos del Sol y una línea perpendicular al área A (figura 19-24). Esto es, $A \cos\theta$ es el área "efectiva", en ángulos rectos a los rayos del Sol.

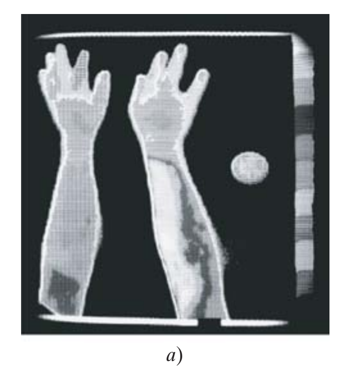
La explicación de las **estaciones** del año y las capas de hielo polar (véase la figura 19-25) depende de este factor $\cos\theta$ en la ecuación 19-19. Las estaciones *no son* resultado de la cercanía de la Tierra con respecto al Sol; de hecho, en el hemisferio norte, el verano se presenta cuando la Tierra está más lejos del Sol. Es el ángulo (es decir, $\cos\theta$) lo que en realidad importa. Más aún, la razón por la que el Sol calienta la Tierra más al mediodía que al amanecer o al atardecer también se relaciona con este factor $\cos\theta$.

Una interesante aplicación de la radiación térmica para el diagnóstico médico es la **termografía**. Un instrumento especial, el termógrafo, escanea el cuerpo, mide la intensidad de la radiación de muchos puntos y forma una imagen parecida a una radiografía (figura 19-26). A menudo en un termograma se pueden detectar las áreas donde la actividad metabólica es alta (por ejemplo, los tumores) como resultado de sus temperaturas elevadas y el consecuente aumento de radiación.

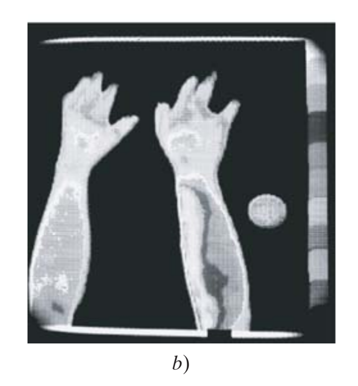
FIGURA 19–25 *a*) Las estaciones del año surgen del ángulo de $23\frac{1}{2}°$ que forma el eje de la Tierra con su órbita alrededor del Sol. *b*) La luz solar de junio forma un ángulo de aproximadamente 23° con el ecuador. Así, θ en el sur de Estados Unidos (A) es cercano a 0° (luz solar directa en verano), mientras que en el hemisferio sur (B), θ es de 50° o 60°, se puede absorber menos calor y, en consecuencia, es invierno. Cerca de los polos (C), nunca hay luz solar directa intensa; $\cos\theta$ varía de aproximadamente $\frac{1}{2}$ en verano a 0 en invierno; así que, con poco calentamiento, se puede formar hielo.







a)



b)

FIGURA 19–26 Termogramas de los brazos y manos de una persona saludable *a*) antes y *b*) después de fumar un cigarrillo, que muestran una disminución de temperatura provocada por un deterioro en la circulación sanguínea asociado con fumar. Los termogramas tienen códigos de color de acuerdo con la temperatura; la escala a la derecha va de azul (frío, que aquí se observa como el pequeño cuadro más oscuro en la parte inferior derecha de ambos termogramas) a blanco (caliente, en el cuadro superior a la derecha).

FÍSICA APLICADA

Astronomía: tamaño de una estrella

EJEMPLO 19–15 ESTIMACIÓN Radio de una estrella. La estrella gigante Betelgeuse emite energía radiante a una tasa 10^4 veces mayor que el Sol, mientras su temperatura superficial sólo es la mitad (2900 K) de la del Sol. Estime el radio de Betelgeuse, suponiendo que $\epsilon = 1$ para ambas estrellas. El radio del Sol es $r_S = 7 \times 10^8$ m

PLANTEAMIENTO Suponemos que tanto Betelgeuse como el Sol son esféricos, con área superficial $4\pi r^2$.

SOLUCIÓN Despejamos A en la ecuación 19-17:

$$4\pi r^2 = A = \frac{(\Delta Q/\Delta t)}{\epsilon \sigma T^4}.$$

Entonces,

$$\frac{r_B^2}{r_S^2} = \frac{(\Delta Q/\Delta t)_B}{(\Delta Q/\Delta t)_S} \cdot \frac{T_S^4}{T_B^4} = (10^4)(2^4) = 16 \times 10^4.$$

En consecuencia, $r_B = \sqrt{16 \times 10^4}\, r_S = (400)(7 \times 10^8\,\text{m}) \approx 3 \times 10^{11}$ m.

NOTA Si Betelgeuse fuera el Sol, envolvería a nuestro planeta (la Tierra está a 1.5×10^{11} m del Sol).

EJERCICIO G Cuando alguien se abanica en un día caluroso se refresca al *a*) aumentar la tasa de radiación de la piel; *b*) aumentar la conductividad; *c*) disminuir el recorrido libre medio del aire; *d*) aumentar la evaporación de la transpiración; *e*) ninguna de las opciones anteriores es válida.

Resumen

La **energía interna**, E_{int}, se refiere a la energía total de las moléculas en un objeto. Para un gas monoatómico ideal,

$$E_{int} = \tfrac{3}{2}NkT = \tfrac{3}{2}nRT \qquad \textbf{(19–1)}$$

donde N es el número de moléculas o n es el número de moles.

El **calor** se refiere a la transferencia de energía de un objeto a otro como resultado de una diferencia de temperatura. Por lo tanto, el calor se mide en unidades de energía, como joules.

El calor y la energía térmica a veces también se especifican en calorías o kilocalorías (kcal), donde

$$1\,\text{kcal} = 4.186\,\text{kJ}$$

es la cantidad de calor necesario para elevar la temperatura de 1 kg de agua en 1 C°.

El **calor específico**, c, de una sustancia se define como la energía (o calor) requerido para cambiar la temperatura de una masa unitaria de sustancia en 1 grado; como ecuación,

$$Q = mc\,\Delta T, \qquad \textbf{(19–2)}$$

donde Q es el calor absorbido o emitido, ΔT es el aumento o la disminución de la temperatura y m es la masa de la sustancia.

Cuando el calor fluye entre las partes de un sistema aislado, la conservación de la energía nos indica que el calor ganado por una parte del sistema es igual al calor perdido por la otra parte del sistema. Éste es el fundamento de la **calorimetría**, que es la medición cuantitativa del intercambio de calor.

Cuando una sustancia sufre un cambio de fase, ocurre intercambio de energía, sin un cambio en la temperatura, siempre que una sustancia cambia de fase. El **calor de fusión** es el calor requerido para fundir 1 kg de un sólido en la fase líquida; también es igual al calor emitido cuando la sustancia cambia de líquido a sólido. El **calor de vaporización** es la energía requerida para cambiar 1 kg de una sustancia de la fase líquida a la de vapor; también es la energía emitida cuando la sustancia cambia de vapor a líquido.

La **primera ley de la termodinámica** afirma que el cambio en la energía interna ΔE_{int} de un sistema es igual al calor *agregado al* sistema, Q, menos el trabajo, W, realizado *por* el sistema:

$$\Delta E_{int} = Q - W. \qquad \textbf{(19–4)}$$

Esta importante ley es una reformulación amplia de la conservación de la energía y se cumple para todos los procesos.

Dos procesos termodinámicos simples son el **isotérmico**, que es un proceso que se realiza a temperatura constante, y el **adiabático**, un proceso en el que no se intercambia calor. Dos procesos más son el **isobárico** (proceso que se realiza a presión constante) y el **isovolumétrico** (proceso a volumen constante).

El trabajo realizado por (o sobre) un gas para cambiar su volumen en dV es $dW = P\,dV$, donde P es la presión.

El trabajo y el calor no son funciones del estado de un sistema (como lo son P, V, T, n y E_{int}), sino dependen del tipo de proceso que lleva a un sistema de un estado a otro.

El **calor específico molar** de un gas ideal a volumen constante, C_V, y a presión constante, C_P, se relacionan mediante

$$C_P - C_V = R, \qquad \textbf{(19–11)}$$

donde R es la constante de los gases. Para un gas monoatómico ideal, $C_V = \frac{3}{2}R$.

Para gases ideales constituidos de moléculas diatómicas o más complejas, C_V es igual a $\frac{1}{2}R$ veces el número de **grados de libertad** de la molécula. A menos que la temperatura sea muy alta, algunos de los grados de libertad pueden no estar activos y, por lo tanto, no contribuyen. De acuerdo con el **principio de equipartición de la energía**, la energía se comparte de forma equitativa entre los grados de libertad activos en una cantidad $\frac{1}{2}kT$ por molécula en promedio.

Cuando un gas ideal se expande (o se contrae) adiabáticamente ($Q = 0$), la relación PV^{γ} = constante se cumple, donde

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}. \qquad \textbf{(19–14)}$$

El calor se transfiere de un lugar (u objeto) a otro en tres formas diferentes: conducción, convección y radiación.

En la **conducción**, la energía se transfiere mediante colisiones de las moléculas o los electrones con mayor energía cinética a los circunvecinos que se mueven más lentamente.

La **convección** es la transferencia de energía por el movimiento (macroscópido) de masa de las moléculas a través de distancias considerables.

La **radiación**, que no requiere la presencia de materia, es transferencia de energía mediante ondas electromagnéticas, como desde el Sol. Todos los objetos radian energía en una cantidad que es proporcional a la cuarta potencia de su temperatura Kelvin (T^4) y a su área superficial. La energía radiada (o absorbida) también depende de la naturaleza de la superficie, que se caracteriza por la emisividad ϵ (las superficies oscuras absorben y radian más que las brillantes).

La radiación del Sol llega a la superficie de la Tierra, en un día despejado, a una tasa de aproximadamente 1000 W/m^2.

Preguntas

1. ¿Qué ocurre con el trabajo realizado sobre una jarra de jugo de naranja cuando se agita vigorosamente?
2. Cuando un objeto caliente calienta un objeto más frío, ¿la temperatura fluye entre ellos? ¿Los cambios de temperatura de los dos objetos son iguales? Explique.
3. *a*) Si dos objetos de diferente temperatura se ponen en contacto, ¿el calor fluirá naturalmente del objeto con mayor energía interna al objeto con menor energía interna? *b*) ¿Es posible que el calor fluya incluso si las energías internas de los dos objetos son iguales? Explique.
4. En regiones calurosas, donde las plantas tropicales crecen, aunque en ocasiones la temperatura puede descender por debajo del punto de congelación en el invierno, la destrucción de las plantas sensibles provocada por la congelación se puede reducir al regarlas en la noche. Explique por qué.
5. El calor específico del agua es bastante grande. Explique por qué este hecho hace al agua particularmente adecuada para sistemas de calefacción (esto es, radiadores de agua caliente).
6. ¿Por qué el agua en una cantimplora permanece más fría si la cubierta que la rodea se mantiene húmeda?
7. Explique por qué las quemaduras de la piel provocadas por vapor a 100°C con frecuencia son más severas que las quemaduras causadas por agua a 100°C.
8. Con los conceptos de calor latente y energía interna, explique por qué el agua se enfría (es decir, su temperatura disminuye) cuando se evapora.
9. ¿Las papas se cocinarán más rápido si el agua hierve más vigorosamente?
10. Muy alto en la atmósfera de la Tierra, la temperatura alcanza los 700°C. Sin embargo, un animal ahí se congelaría hasta morir en vez de quemarse. Explique por qué.
11. ¿Qué ocurre con la energía interna del vapor de agua en el aire que se condensa en el exterior de un vaso de agua fría? ¿Se realiza trabajo o se intercambia calor? Explique.
12. Use la conservación de la energía para explicar por qué la temperatura de un gas bien aislado aumenta cuando se comprime (por ejemplo, al empujar un pistón), mientras que la temperatura disminuye cuando el gas se expande.
13. En un proceso isotérmico, un gas ideal realiza 3700 J de trabajo. ¿Es ésta información suficiente para decir cuánto calor se agregó al sistema? Si es así, ¿cuánta?
14. Los exploradores en las expediciones fallidas al Ártico han sobrevivido al cubrirse con nieve. ¿Por qué harían esto?
15. ¿Por qué es más refrescante caminar sobre la arena húmeda en la playa que sobre la arena seca?
16. Cuando se usan calderas de aire caliente para calentar una casa, ¿por qué es importante que haya un respiradero para que el aire regrese a la caldera? ¿Qué ocurre si este respiradero se bloquea con un librero?
17. ¿Es posible que la temperatura de un sistema permanezca constante aun cuando el calor fluya hacia dentro o hacia fuera de él? Si es así, dé ejemplos.
18. Discuta cómo puede aplicar la primera ley de la termodinámica al metabolismo en los seres humanos. En particular, note que una persona realiza trabajo W, pero muy poco calor Q se agrega al cuerpo (en vez de ello, tiende a fluir hacia fuera). ¿Por qué, entonces, la energía interna no disminuye drásticamente con el tiempo?
19. Explique con palabras por qué C_P es mayor que C_V.
20. Explique por qué la temperatura de un gas aumenta cuando se comprime adiabáticamente.
21. Se permite que un gas monoatómico ideal se expanda lentamente al doble de su volumen (1) isotérmicamente; (2) adiabáticamente; (3) isobáricamente. Grafique cada caso en un diagrama PV. ¿En cuál proceso ΔE_{int} es el mayor de todos, y en cuál ΔE_{int} es el menor de todos? ¿En cuál W es el mayor y en cuál el menor? ¿En cuál Q es el mayor y en cuál el menor?
22. Los ventiladores de techo a veces son reversibles, de manera que llevan el aire hacia abajo en una estación del año y lo llevan hacia arriba en otra estación. ¿De qué forma se debe configurar el ventilador para el verano? ¿Y para el invierno?
23. Las bolsas para dormir y las parkas (abrigos impermeables) con plumas de ganso con frecuencia se especifican con el número de pulgadas o centímetros de *alto*, que se refiere al grosor real de la prenda cuando está esponjada. Explique.
24. Los chips de microprocesadores tienen un “disipador de calor” adherido en la parte superior, que parece una serie de aletas. ¿Por qué se le da esa forma?
25. Con frecuencia, en los días soleados, se generan brisas marinas en las orillas de un gran cuerpo de agua. Explique esto a la luz del hecho de que la temperatura de la tierra se eleva más rápidamente que la del agua cercana.
26. La Tierra se enfría en la noche mucho más rápidamente cuando está despejado que cuando está nublado. ¿Por qué?
27. Explique por qué las lecturas de la temperatura del aire siempre se toman con el termómetro a la sombra.
28. Un bebé prematuro en una incubadora se puede enfriar hasta niveles peligrosos aun cuando la temperatura del aire en la incubadora sea cálida. Explique por qué.
29. El piso de una casa sobre un cimiento bajo el cual el puede fluir aire con frecuencia es más frío que un piso que descansa directamente sobre el suelo (como un cimiento de losas de concreto). Explique por qué.
30. ¿Por qué es plateado el revestimiento de un **termo** (figura 19-27) y por qué hay un vacío entre sus dos paredes?



FIGURA 19–27 Pregunta 30.

31. Un día a 22°C es cálido, mientras que el agua a 22°C en una alberca se siente fría. ¿Por qué?

32. En el hemisferio norte, la cantidad de calor requerida para calentar una habitación donde las ventanas dan hacia el norte es mucho mayor que la requerida para calentar una habitación donde las ventanas dan hacia el sur. Explique por qué.

33. La pérdida de calor ocurre a través de las ventanas mediante los siguientes procesos: (1) ventilación alrededor de los bordes; (2) a través del marco, particularmente si es de metal; (3) a través de los paneles de vidrio; y (4) radiación. *a*) Para los primeros tres, ¿cuál es el mecanismo (o mecanismos) implicado(s): conducción, convección o radiación? *b*) ¿Las cortinas gruesas reducen alguna de estas pérdidas de calor? Explique con detalle.

34. Temprano en el día, después de que el Sol alcanza la pendiente de una montaña, tiende a haber un suave movimiento de aire hacia arriba. Más tarde, cuando la pendiente entra en la sombra, hay una suave corriente de aire descendente. Explique.

35. Una pieza de madera que se encuentra bajo los rayos del Sol absorbe más calor que una pieza de metal brillante. Sin embargo, el metal se siente más caliente que la madera cuando usted lo levanta. Explique por qué.

36. Una “manta de emergencia” es una delgada hoja de plástico brillante (recubierta de metal). Explique cómo esta manta puede ayudar a mantener caliente a una persona inmóvil.

37. Explique por qué las ciudades situadas cerca del océano tienden a registrar menos temperaturas extremas que las ciudades tierra adentro en la misma latitud.

Problemas

19–1 Calor como transferencia de energía

1. (I) ¿A qué temperatura elevarán 8700 J de calor 3.0 kg de agua que inicialmente están a 10.0°C?

2. (II) Cuando un buzo salta al océano, el agua que entra en la brecha entre la piel del buzo y su traje forma una capa de agua de aproximadamente 0.5 mm de grosor. Si se supone que el área superficial total del traje que cubre al buzo es de aproximadamente 1.0 m^2, y que el agua del océano entra al traje a 10°C y el buzo la calienta a la temperatura de su piel que es de 35°C, estime cuánta energía (en unidades de barras de dulce = 300 kcal) se requieren para este proceso de calentamiento.

3. (II) Un persona activa promedio consume aproximadamente 2500 Cal al día. *a*) ¿Cuánto es esto en joules? *b*) ¿Cuánto es esto en kilowatt-horas? *c*) Si su compañía eléctrica le cobra aproximadamente $0.10 por kilowatt-hora, ¿cuánto costaría su energía por día, si usted la comprara a la compañía eléctrica? ¿Podría alimentarse con esta cantidad de dinero al día?

4. (II) Una unidad térmica británica (Btu) es una unidad de calor en el sistema inglés de unidades. Un Btu se define como el calor necesario para elevar 1 lb de agua en 1 F°. Demuestre que

$$1 \text{ Btu} = 0.252 \text{ kcal} = 1056 \text{ J}.$$

5. (II) ¿Cuántos joules y kilocalorías se generan cuando los frenos se usan para llevar un automóvil de 1200 kg al reposo desde una rapidez de 95 km/h?

6. (II) Un pequeño calentador de inmersión se clasifica a 350 W. Estime cuánto le tomará calentar un tazón de sopa (suponga que la sopa está hecha con 250 mL de agua) de 15 a 75°C.

19–3 y 19–4 Calor específico; calorimetría

7. (I) El sistema de enfriamiento de un automóvil contiene 18 L de agua. ¿Cuánto calor absorbe si su temperatura se eleva de 15 a 95°C?

8. (I) ¿Cuál es el calor específico de una sustancia metálica si se necesitan 135 kJ de calor para elevar 5.1 kg del metal de 18.0 a 37.2°C?

9. (II) *a*) ¿Cuánta energía se requiere para llevar una olla de 1.0 L de agua de 20 a 100°C? *b*) ¿Durante cuánto tiempo esta cantidad de energía podría activar una bombilla de 100 W?

10. (II) Muestras de cobre, aluminio y agua experimentan la misma elevación de temperatura cuando absorben la misma cantidad de calor. ¿Cuál es la razón de sus masas?

11. (II) ¿Cuánto tarda una cafetera eléctrica de 750 W en llevar al hervor 0.75 L de agua inicialmente a 8.0°C? Suponga que la parte de la olla que se calienta con el agua está hecha de 280 g de aluminio, y que el agua no llega a consumirse.

12. (II) Una herradura de hierro caliente (masa = 0.40 kg), recién forjada (figura 19-28), se deja caer en 1.05 L de agua en una olla de hierro de 0.30 kg inicialmente a 20.0°C. Si la temperatura de equilibrio final es de 25.0°C, estime la temperatura inicial de la herradura caliente.



FIGURA 19–28 Problema 12.

13. (II) Un termómetro de vidrio de 31.5 g indica 23.6°C antes de colocarlo en 135 mL de agua. Cuando el agua y el termómetro llegan al equilibrio, el termómetro indica 39.2°C. ¿Cuál era la temperatura original del agua? [*Sugerencia:* Ignore la masa de fluido dentro del termómetro de vidrio].

14. (II) Estime el contenido calórico de 65 g de dulce a partir de las siguientes mediciones. Una muestra de 15 g del dulce se coloca en un pequeño contenedor de aluminio de 0.325 kg de masa lleno con oxígeno. El contenedor se coloca en 2.00 kg de agua en el vaso de un calorímetro de aluminio de 0.624 kg de masa a una temperatura inicial de 15.0°C. La mezcla oxígeno-dulce en el pequeño contenedor se “enciende”, y la temperatura final de todo el sistema es 53.5°C.

15. (II) Cuando una pieza de hierro de 290 g a 180°C se coloca en el vaso de un calorímetro de aluminio de 95 g que contiene 250 g de glicerina a 10°C, se observa que la temperatura final es de 38°C. Estime el calor específico de la glicerina.

16. (II) La *capacidad calorífica*, *C*, de un objeto se define como la cantidad de calor necesaria para elevar su temperatura en 1 C°. Por ende, para elevar la temperatura en ΔT se requiere un calor *Q* dado por

$$Q = C\,\Delta T.$$

a) Escriba la capacidad calorífica *C* en términos del calor específico, *c*, del material. *b*) ¿Cuál es la capacidad calorífica de 1.0 kg del agua? *c*) ¿De 35 kg de agua?

17. (II) La cabeza de un martillo de 1.20 kg tiene una rapidez de 7.5 m/s justo antes de golpear un clavo (figura 19-29) y se lleva al reposo. Estime el aumento de temperatura de un clavo de hierro de 14 g generado por 10 de tales golpes de martillo efectuados en rápida sucesión. Suponga que el clavo absorbe toda la energía.

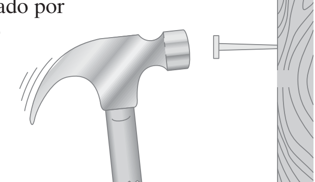


FIGURA 19–29 Problema 17.

19–5 Calor latente

18. (I) ¿Cuánto calor se necesita para fundir 26.50 kg de plata que inicialmente está a 25°C?

19. (I) Durante el ejercicio, una persona puede emitir 180 kcal de calor en 25 min mediante evaporación de agua de la piel. ¿Cuánta agua se perdió?

20. (II) Un cubo de hielo de 35 g en su punto de fusión se deja caer en un contenedor aislado de nitrógeno líquido. ¿Cuánto nitrógeno se evapora si está en su punto de ebullición de 77 K y tiene un calor latente de vaporización de 200 kJ/kg? Por simplicidad, suponga que el calor específico del hielo es una constante y es igual a su valor cerca de su punto de fusión.

21. (II) Los escaladores de montañas no comen nieve, sino que siempre la funden primero en una hornilla. Para ver por qué, calcule la energía absorbida por su cuerpo si *a*) usted come 1.0 kg de nieve a -10°C que su cuerpo calienta a temperatura corporal de 37°C; *b*) usted funde 1.0 kg de nieve a -10°C usando una estufa y luego bebe el resultante 1.0 kg de agua a 2°C, que su cuerpo tiene que calentar a 37°C.

22. (II) Un calentador de hierro de 180 kg de masa contiene 730 kg de agua a 18°C. Un quemador suministra energía a una tasa de 52,000 kJ/h. ¿Cuánto tardará el agua *a*) en alcanzar el punto de ebullición y *b*) en convertirla toda en vapor?

23. (II) En una carrera en un día caluroso, un ciclista consume 8.0 L de agua durante un intervalo de 3.5 horas. Si hacemos la aproximación de que toda la energía del ciclista se destina a evaporar esta agua como sudor, ¿cuánta energía, en kcal, usa el ciclista durante el recorrido? (Como la eficiencia del ciclista sólo es cercana al 20%, la mayor parte de la energía consumida se convierte en calor, así que la aproximación no es disparatada).

24. (II) El calor específico del mercurio es 138 J/kg·C°. Determine el calor latente de fusión del mercurio usando los siguientes datos de un calorímetro: 1.00 kg de Hg sólido en su punto de fusión de -39.0°C se coloca en un calorímetro de aluminio de 0.620 kg con 0.400 kg de agua a 12.80°C; la temperatura de equilibrio resultante es 5.06°C.

25. (II) En la escena de un crimen, el investigador forense nota que la bala de plomo de 7.2 g que se detuvo en el marco de una puerta aparentemente se fundió por completo en el impacto. Si se supone que la bala se disparó a temperatura ambiente (20°C), ¿cuánto calcula el investigador que fue la velocidad mínima de salida de la boquilla del arma?

26. (II) Un patinador de hielo de 58 kg que se mueve a 7.5 m/s se desliza hasta detenerse. Si se supone que el hielo está a 0°C y que el 50% del calor generado por fricción lo absorbe el hielo, ¿cuánto hielo se funde?

19–6 y 19–7 Primera ley de la termodinámica

27. (I) Bosqueje un diagrama *PV* del siguiente proceso: 2.0 L de gas ideal a presión atmosférica se enfrían a presión constante a un volumen de 1.0 L, y luego se expanden isotérmicamente de nuevo a 2.0 L, con lo cual la presión aumenta de nuevo a volumen constante hasta alcanzar la presión original.

28. (I) Un gas está encerrado en un cilindro ajustado con un pistón ligero sin fricción y se mantiene a presión atmosférica. Cuando se agregan 1250 kcal de calor al gas, se observa que el volumen aumenta lentamente de 12.0 a 18.2 m^3. Calcule *a*) el trabajo realizado por el gas y *b*) el cambio en energía interna del gas.

29. (II) La presión en un gas ideal se disminuye lentamente a la mitad, mientras se mantiene en un contenedor con paredes rígidas. En el proceso salen del gas, 365 kJ de calor. *a*) ¿Cuánto trabajo se realizó durante este proceso? *b*) ¿Cuál fue el cambio en la energía interna del gas durante este proceso?

30. (II) Un volumen de 1.0 L de aire inicialmente a 3.5 atm de presión (absoluta) se expande isotérmicamente hasta que la presión es de 1.0 atm. Luego se comprime a presión constante a su volumen inicial y por último se lleva de nuevo a su presión original mediante calentamiento a volumen constante. Dibuje el proceso en un diagrama *PV*, incluidos los nombres de los ejes y la escala.

31. (II) Considere el siguiente proceso de dos pasos. Se permite que fluya calor hacia fuera de un gas ideal a volumen constante, de manera que su presión disminuye de 2.2 a 1.4 atm. Luego, el gas se expande a presión constante, de un volumen de 5.9 a 9.3 L, donde la temperatura alcanza su valor original. Véase la figura 19-30. Calcule *a*) el trabajo total que realiza el gas en el proceso, *b*) el cambio en la energía interna del gas en el proceso y *c*) el flujo de calor total hacia dentro o hacia fuera del gas.

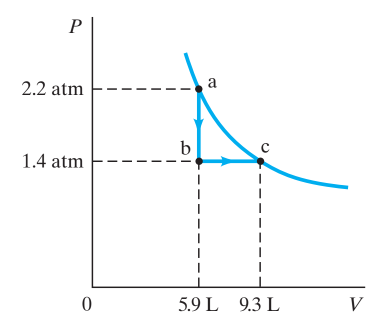


FIGURA 19–30 Problema 31.

32. (II) El diagrama *PV* de la figura 19-31 muestra dos posibles estados de un sistema que contiene 1.55 moles de un gas monoatómico ideal $(P_1 = P_2 = 455\ \mathrm{N/m^2},\ \ V_1 = 2.00\ \mathrm{m^3},\ \ V_2 = 8.00$ m^3). *a*) Dibuje el proceso que muestre una expansión isobárica del estado 1 al estado 2, y desígnelo como el proceso A. *b*) Determine el trabajo realizado por el gas y el cambio en la energía interna del gas en el proceso A. *c*) Dibuje el proceso de dos pasos que muestre una expansión isotérmica del estado 1 al volumen V_2, seguido por una aumento isovolumétrico en la temperatura al estado 2, y designe este proceso como B. *d*) Determine el cambio en la energía interna del gas para el proceso B que consta de dos pasos.

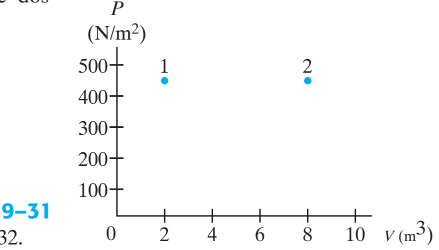


FIGURA 19–31 Problema 32.

33. (II) Suponga que 2.60 moles de un gas ideal de volumen $V_1 =$ 3.50 m^3 a $T_1 = 290$ K se expanden isotérmicamente a $V_2 = 7.00$ m^3 a $T_2 = 290$ K. Determine *a*) el trabajo que realiza el gas, *b*) el calor agregado al gas y (*c*) el cambio en la energía interna del gas.

34. (II) En un motor, un gas casi ideal se comprime adiabáticamente a la mitad de su volumen. Al hacerlo, se realizan 2850 J de trabajo sobre el gas. *a*) ¿Cuánto calor fluye hacia dentro o hacia fuera del gas? *b*) ¿Cuál es el cambio en la energía interna del gas? *c*) ¿Su temperatura aumenta o disminuye?

35. (II) Un mol y medio de un gas monoatómico ideal se expanden adiabáticamente, y realizan 7500 J de trabajo en el proceso. ¿Cuál es el cambio en la temperatura del gas durante esta expansión?

36. (II) Determine *a*) el trabajo realizado y *b*) el cambio en la energía interna de 1.00 kg de agua cuando toda hierve a vapor a 100°C. Suponga una presión constante de 1.00 atm.

37. (II) ¿Cuánto trabajo realiza una bomba para comprimir, lenta e isotérmicamente, 3.50 L de nitrógeno a 0°C y 1.00 atm a 1.80 L a 0°C?

38. (II) Cuando un gas se lleva de a a c a lo largo de la trayectoria curva en la figura 19-32, el trabajo que realiza el gas es $W = -35$ J y el calor agregado al gas es $Q = -63$ J. A lo largo de la trayectoria abc, el trabajo realizado es $W = -54$ J. *a*) ¿Cuál es Q para la trayectoria abc? *b*) Si $P_c = \frac{1}{2}P_b$, ¿cuál es W para la trayectoria cda? *c*) ¿Cuál es Q para la trayectoria cda? *d*) ¿Cuál es $E_{int,a} - E_{int,c}$? *e*) Si $E_{int,d} - E_{int,c} = 12$ J, ¿cuál es Q para la trayectoria da?

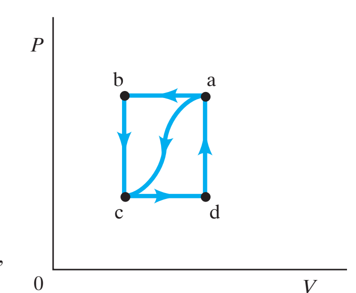


FIGURA 19–32 Problemas 38, 39, y 40.

39. (III) En el proceso de llevar un gas del estado a al estado c a lo largo de la trayectoria curva que se muestra en la figura 19-32, 85 J de calor salen del sistema y 55 J de trabajo se realizan *sobre* el sistema. *a*) Determine el cambio en la energía interna, $E_{int,a} - E_{int,c}$. *b*) Cuando el gas se lleva a lo largo de la trayectoria cda, el trabajo que realiza el gas es $W = 38$ J. ¿Cuánto calor Q se agrega al gas en el proceso cda? *c*) Si $P_a = 2.2P_d$, ¿cuánto trabajo realiza el gas en el proceso abc? *d*) ¿Cuánto vale Q para la trayectoria abc? *e*) Si $E_{int,a} - E_{int,b} = 15$ J, ¿cuánto vale Q para el proceso bc? He aquí un resumen de los datos:

$$Q_{a\to c} = -85\text{ J}$$
$$W_{a\to c} = -55\text{ J}$$
$$W_{cda} = 38\text{ J}$$
$$E_{int,\,a} - E_{int,\,b} = 15\text{ J}$$
$$P_a = 2.2P_d.$$

40. (III) Suponga que un gas se lleva en el sentido horario alrededor del ciclo rectangular que se muestra en la figura 19-32, comenzando en b, luego a a, d, c y de regreso a b. Use los valores del problema 39 y *a*) describa cada fase del proceso, y luego calcule *b*) el trabajo neto realizado durante el ciclo, *c*) el cambio en la energía interna total durante el ciclo y *d*) el flujo de calor neto durante el ciclo. *e*) ¿Qué porcentaje de la *entrada* de calor se convirtió en trabajo utilizable; es decir, cuán eficiente (en términos porcentuales) es este ciclo "rectangular"?

* **41.** (III) Determine el trabajo que realiza 1.00 mol de un gas van der Waals (sección 18-5) cuando se expande del volumen V_1 al V_2 isotérmicamente.

19–8 Calor específico molecular para gases; equipartición de la energía

42. (I) ¿Cuál es la energía interna de 4.50 moles de un gas diatómico ideal a 645 K, si se supone que todos los grados de libertad están activos?

43. (I) Si un calentador suministra 1.80×10^6 J/h a una habitación de 3.5 m × 4.6 m × 3.0 m que contiene aire a 20°C y 1.0 atm, ¿en cuánto aumentará la temperatura en una hora, si se supone que no hay pérdidas de calor o de masa de aire con el exterior? Suponga que el aire es un gas diatómico ideal con masa molecular 29.

44. (I) Demuestre que, si las moléculas de un gas tienen n grados de libertad, entonces la teoría predice $C_V = \frac{1}{2}nR$ y $C_P = \frac{1}{2}(n + 2)R$.

45. (II) Cierto gas monoatómico tiene calor específico $c_V = 0.0356$ kcal/kg·C°, que cambia poco dentro de un amplio rango de temperatura. ¿Cuál es la masa atómica de este gas? ¿De qué gas se trata?

46. (II) Demuestre que el trabajo realizado por n moles de un gas ideal cuando se expande adiabáticamente es $W = nC_V(T_1 - T_2)$, donde T_1 y T_2 son las temperaturas inicial y final, y C_V es el calor específico molar a volumen constante.

47. (II) Una audiencia de 1800 personas llena una sala de conciertos de 22,000 m^3 de volumen. Si no hubiera ventilación, ¿en cuánto se elevaría la temperatura del aire durante un periodo de 2.0 h como resultado del metabolismo de las personas (70 W/persona)?

48. (II) El calor específico a volumen constante de un gas particular es 0.182 kcal/kg·K a temperatura ambiente, y su masa molecular es 34. *a*) ¿Cuál es su calor específico a presión constante? *b*) ¿Cuál cree que es la estructura molecular de este gas?

49. (II) Una muestra de 2.00 moles de gas N_2 a 0°C se calienta a 150°C a presión constante (1.00 atm). Determine *a*) el cambio en la energía interna, *b*) el trabajo que realiza el gas y *c*) el calor que se le agrega.

50. (III) Una muestra de 1.00 mol de un gas diatómico ideal a una presión de 1.00 atm y temperatura de 420 K experimenta un proceso en el que su presión aumenta linealmente con la temperatura. La temperatura y la presión finales son 720 K y 1.60 atm. Determine *a*) el cambio en la energía interna, *b*) el trabajo que realiza el gas y *c*) el calor agregado al gas. (Suponga cinco grados de libertad activos).

19–9 Expansión adiabática de un gas

51. (I) Una muestra de 1.00 mol de un gas diatómico ideal, originalmente a 1.00 atm y 20°C, se expande adiabáticamente a 1.75 veces su volumen inicial. ¿Cuáles son la presión y la temperatura finales para el gas? (Suponga que no hay vibración molecular).

52. (II) Demuestre, con las ecuaciones 19-6 y 19-15, que el trabajo realizado por un gas que se expande lentamente de manera adiabática de la presión P_1 y el volumen V_1, a P_2 y V_2, está dado por $W = (P_1V_1 - P_2V_2)/(\gamma - 1)$.

53. (II) Una muestra de 3.65 moles de un gas diatómico ideal se expande adiabáticamente de un volumen de 0.1210 a 0.750 m^3. Inicialmente la presión era de 1.00 atm. Determine *a*) las temperaturas inicial y final; *b*) el cambio en la energía interna; *c*) la pérdida de calor por el gas; *d*) el trabajo realizado *sobre* el gas. (Suponga que no hay vibración molecular).

54. (II) Un gas monoatómico ideal, que consiste en 2.8 moles con volumen de 0.086 m^3, se expande adiabáticamente. Las temperaturas inicial y final son 25 y −68°C. ¿Cuál es el volumen final del gas?

55. (III) Una muestra de 1.00 mol de un gas monoatómico ideal, originalmente a una presión de 1.00 atm, experimenta un proceso de tres pasos: (1) se expande adiabáticamente de $T_1 = 588$ K a $T_2 = 389$ K; (2) se comprime a presión constante hasta que su temperatura alcanza T_3; (3) luego regresa a su presión y temperatura originales mediante un proceso a volumen constante. *a*) Grafique estos procesos sobre un diagrama PV. *b*) Determine T_3. *c*) Calcule el cambio en la energía interna, el trabajo que realiza el gas y el calor agregado al gas para cada proceso, y *d*) para el ciclo completo.

56. (III) Considere una **parcela de aire** que se mueve a una altitud diferente y en la atmósfera de la Tierra (figura 19-33). Conforme la parcela cambia de altitud adquiere la presión P del aire circundante. A partir de la ecuación 13-4 tenemos

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g$$

donde ρ es la densidad de masa dependiente de la altitud de la parcela. Durante este movimiento, el volumen de la parcela cambiará y, como el aire es un conductor deficiente, suponemos que esta expansión o contracción tendrá lugar de manera adiabática. *a*) A partir de la ecuación 19-15, PV^{γ} = constante, demuestre que, para un gas ideal que experimenta un proceso adiabático, $P^{1-\gamma}T^{\gamma}$ = constante. Luego demuestre que la presión y la temperatura de la parcela se relacionan mediante

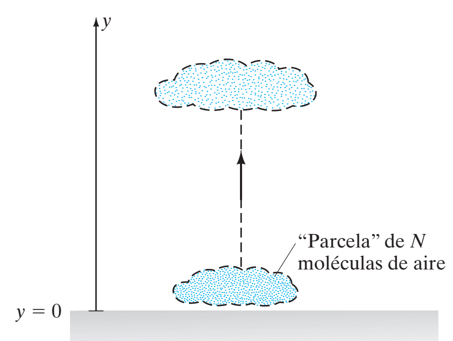


FIGURA 19–33 Problema 56.

$$(1-\gamma)\frac{dP}{dy} + \gamma\frac{P}{T}\frac{dT}{dy} = 0$$

y, por lo tanto,

$$(1-\gamma)(-\rho g) + \gamma\frac{P}{T}\frac{dT}{dy} = 0.$$

b) Use la ley del gas ideal con el resultado del inciso *a*) para demostrar que el cambio en la temperatura de la parcela con el cambio en altitud está dado por

$$\frac{dT}{dy} = \frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{mg}{k}$$

donde m es la masa promedio de una molécula de aire y k es la constante de Boltzmann. *c*) Dado que el aire es un gas diatómico con una masa molecular promedio de 29, demuestre que $dT/dy = -9.8$ C°/km. Este valor se llama **gradiente adiabático** para aire seco. *d*) En California, los vientos occidentales prevalecientes descienden de una de las elevaciones más altas (la montañas de la Sierra Nevada de 4000 m) a una de las elevaciones más bajas (Death Valley, −100 m) en la zona continental de Estados Unidos. Si un viento seco tiene una temperatura de −5°C en lo alto de la Sierra Nevada, ¿cuál es la temperatura del viento después de descender a Death Valley?

19–10 Conducción, convección, radiación

57. (I) *a*) ¿Cuánta potencia radia una esfera de tungsteno (emisividad $\epsilon = 0.35$) de 16 cm de radio a una temperatura de 25°C? *b*) Si la esfera está encerrada en una habitación cuyas paredes se mantienen a −5°C, ¿cuál es la tasa de flujo de energía *neta* hacia fuera de la esfera?

58. (I) Un extremo de una varilla de cobre de 45 cm de largo, con un diámetro de 2.0 cm, se mantiene a 460°C, y el otro extremo se sumerge en agua a 22°C. Calcule la tasa de conducción térmica a lo largo de la varilla.

59. (II) ¿Cuánto tarda el Sol en fundir un bloque de hielo a 0°C con una área horizontal plana de 1.0 m^2 y 1.0 cm de grosor? Suponga que los rayos del Sol forman un ángulo de 35° con la vertical y que la emisividad del hielo es 0.050.

60. (II) *Conducción de calor a la piel*. Suponga que 150 W de calor fluyen por conducción de los capilares sanguíneos bajo la piel al área superficial del cuerpo de 1.5 m^2. Si la diferencia de temperatura es de 0.50 C°, estime la distancia promedio de los capilares bajo la superficie de la piel.

61. (II) Una tetera de cerámica ($\epsilon = 0.70$) y una brillante ($\epsilon = 0.10$) contienen, cada una, 0.55 L de té a 95°C. *a*) Estime la tasa de pérdida de calor de cada tetera y *b*) estime la disminución de temperatura después de 30 min para cada una. Considere sólo la radiación y suponga que el entorno está a 20°C.

62. (II) Una varilla de cobre y una de aluminio de la misma longitud y área transversal se unen extremo con extremo (figura 19-34). El extremo de cobre se coloca en un horno que se mantiene a una temperatura constante de 225°C. El extremo de aluminio se coloca en un baño de hielo que se mantiene a temperatura constante de 0.0°C. Calcule la temperatura en el punto donde se unen las dos varillas.

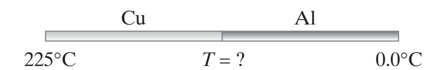


FIGURA 19–34 Problema 62.

63. (II) *a*) Con la constante solar, estime la tasa a la que toda la Tierra recibe energía del Sol. *b*) Suponga que la Tierra irradia una cantidad igual de vuelta hacia el espacio (esto es, la Tierra está en equilibrio). Luego, suponiendo que la Tierra es un emisor perfecto ($\epsilon = 1.0$), estime su temperatura superficial promedio. [*Sugerencia:* Use área $A = 4\pi r_E^2$, y fundamente por qué].

64. (II) Una bombilla de 100 W genera 95 W de calor, que se disipan a través de un bulbo de vidrio que tiene un radio de 3.0 cm y 0.50 mm de grosor. ¿Cuál es la diferencia en la temperatura entre las superficies interior y exterior del vidrio?

65. (III) Un termostato doméstico normalmente se fija a 22°C, pero en la noche se baja a 12°C durante 9.0 h. Estime cuánto más calor se produciría (como porcentaje de uso diario) si el termostato no se bajara en la noche. Suponga que la temperatura exterior promedia 0°C durante las 9.0 h en la noche y 8°C para el resto del día, y que la pérdida de calor de la casa es proporcional a la diferencia en temperatura entre el interior y el exterior. Para obtener una estimación a partir de los datos, tendrá que hacer otras suposiciones simplificadoras; indique cuáles son esas suposiciones.

66. (III) ¿Aproximadamente cuánto tardarán en fundirse 9.5 kg de hielo a 0°C, cuando se colocan en una hielera de poliestireno, de 25 cm × 35 cm × 55 cm, sellada cuidadosamente, cuyas paredes miden 1.5 cm de grosor? Suponga que la conductividad del poliestireno duplica la del aire y que la temperatura exterior es de 34°C.

67. (III) Una tubería cilíndrica tiene radio interior R_1 y radio exterior R_2. El interior de la tubería transporta agua caliente a temperatura T_1. La temperatura exterior es T_2 ($< T_1$). *a*) Demuestre que la tasa de pérdida de calor para una longitud L de tubería es

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi k(T_1 - T_2)L}{\ln(R_2/R_1)},$$

donde k es la conductividad térmica de la tubería. *b*) Suponga que la tubería es de acero con $R_1 = 3.3$ cm, $R_2 = 4.0$ cm y $T_2 = 18°\text{C}$. Si la tubería contiene agua quieta a $T_1 = 71°\text{C}$, ¿cuál será la tasa inicial de cambio de su temperatura? *c*) Suponga que agua a 71°C entra a la tubería y se mueve a una rapidez de 8.0 cm/s. ¿Cuál será su descenso de temperatura por centímetro de viaje?

68. (III) Suponga que las cualidades aislantes de la pared de una casa provienen principalmente de una capa de ladrillo de 4.0 pulgadas y una capa de aislante *R*-19, como se muestra en la figura 19-35. ¿Cuál es la tasa total de pérdida de calor a través de esa pared, si su área total es de 195 ft^2 y la diferencia de temperatura a través de ella es de 12 F°?

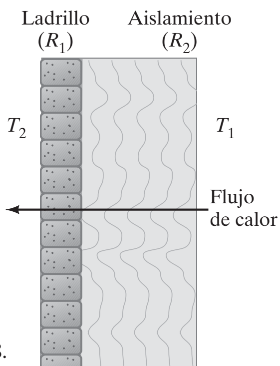


FIGURA 19–35 Problema 68. Dos capas que aíslan una pared.

Problemas generales

69. Una lata de bebida refrescante contiene aproximadamente 0.20 kg de líquido a 5°C. Beber este líquido en realidad puede consumir algo de la grasa en el cuerpo, pues se necesita energía para calentar el líquido a la temperatura corporal (37°C). ¿Cuántas Calorías debe tener la bebida de manera que esté en perfecto equilibrio con el calor necesario para calentar el líquido (en esencia, agua)?

70. *a*) Encuentre la potencia total radiada al espacio por el Sol, si se supone que es un emisor perfecto a $T = 5500$ K. El radio del Sol es 7.0×10^8 m. *b*) A partir de esto, determine la potencia por unidad de área que llega a la Tierra, a 1.5×10^{11} m de distancia.

71. Para tener una idea de cuánta energía térmica está contenida en los océanos del mundo, estime el calor liberado cuando un cubo de agua de océano, de 1 km por lado, se enfría en 1 K. (Aproxime el agua del océano como agua pura para esta estimación).

72. Un alpinista viste una chamarra de plumas de ganso de 3.5 cm de grosor, con área superficial total de 0.95 m^2. La temperatura en la superficie de la vestimenta es de −18°C y en la piel es de 34°C. Determine la tasa de flujo de calor por conducción a través de la chamarra *a*) si se supone que está seca y que la conductividad térmica k es la de las plumas de ganso, y *b*) si se supone que la chamarra está húmeda, de manera que k es la del agua, y la chamarra se reduce a 0.50 cm de grosor.

73. Durante actividad ligera, una persona de 70 kg puede generar 200 kcal/h. Si se supone que el 20% de esto se destina a trabajo útil y el otro 80% se convierte en calor, estime el aumento de temperatura del cuerpo después de 30 min, si nada de este calor se transfiere al ambiente.

74. Estime la tasa a la que se puede conducir calor desde el interior del cuerpo hasta la superficie. Suponga que el grosor del tejido es de 4.0 cm, que la piel está a 34°C, el interior está a 37°C, y que el área superficial es de 1.5 m^2. Compare esto con el valor medido de aproximadamente 230 W que debe disipar una persona que trabaja ligeramente. Esto demuestra con claridad la necesidad de que la sangre efectúe un enfriamiento por convección.

75. Una corredora de maratón tiene una tasa metabólica promedio de aproximadamente 950 kcal/h durante una carrera. Si la corredora tiene una masa de 55 kg, estime cuánta agua perdería por evaporación de la piel en una carrera que dura 2.2 h.

76. Una casa tiene paredes bien aisladas de 19.5 cm de grosor (suponga conductividad del aire) y 410 m^2 de área, un techo de madera de 5.5 cm de grosor y 280 m^2 de área, y ventanas descubiertas de 0.65 cm de grosor y 33 m^2 de área total. *a*) Si se supone que el calor se pierde sólo por conducción, calcule la tasa a la que se debe suministrar calor para que esta casa mantenga su temperatura interior a 23°C, si la temperatura exterior es de −15°C. *b*) Si la casa inicialmente está a 12°C, estime cuánto calor se debe suministrar para elevar la temperatura a 23°C en un lapso de 30 min. Suponga que sólo el aire necesita calentarse y que su volumen es de 750 m^3. *c*) Si el gas natural cuesta $0.080 por kilogramo y su calor de combustión es de 5.4×10^7 J/kg, ¿cuánto es el costo mensual para mantener la casa como en el inciso *a*) durante las 24 h del día, suponiendo que el 90% del calor producido se utiliza para calentar la casa? Considere 0.24 kcal/kg·C° el calor específico del aire.

77. En un juego típico de squash (figura 19-36), dos personas golpean una pelota de caucho suave hacia una pared hasta que están a punto de caer por deshidratación y agotamiento. Suponga que la bola golpea la pared a una velocidad de 22 m/s y rebota con una velocidad de 12 m/s, y que la pérdida de energía cinética en el proceso calienta la bola. ¿Cuál será el aumento de temperatura de la bola después de rebotar? (El calor específico del caucho es de aproximadamente 1200 J/kg·C°).



FIGURA 19–36 Problema 77.

78. Una bomba de bicicleta es un cilindro de 22 cm de largo y 3.0 cm de diámetro. La bomba contiene aire a 20.0°C y 1.0 atm. Si la salida en la base de la bomba está bloqueada y la manija se empuja muy rápidamente de manera que comprime el aire a la mitad de su volumen original, ¿cuánto se calienta el aire en la bomba?

79. Un horno de microondas se usa para calentar 250 g de agua. En su configuración máxima, el horno puede elevar la temperatura del agua líquida de 20°C a 100°C en 1 min 45 s (= 105 s). *a*) ¿A qué tasa el horno introduce energía en el agua líquida? *b*) Si la entrada de potencia del horno al agua permanece constante, determine cuántos gramos de agua se evaporarán si el horno se opera durante 2 min (en vez de sólo 1 min 45 s).

80. La temperatura dentro de la corteza de la Tierra aumenta aproximadamente 1.0 C° por cada 30 m de profundidad. La conductividad térmica de la corteza es de 0.80 W/C°·m. *a*) Determine el calor transferido del interior a la superficie para toda la Tierra en 1.0 h. *b*) Compare este calor con la cantidad de energía que incide en la Tierra en 1.0 h por la radiación del Sol.

81. En un lago se forma una capa de hielo. El aire arriba de la capa está a −18°C, mientras que el agua está a 0°C. Suponga que el calor de fusión del agua que se congela en la superficie inferior se conduce a través de la capa al aire que hay arriba. ¿Cuánto tiempo tardará en formarse una capa de hielo de 15 cm de grosor?

82. Un meteorito de hierro se funde cuando entra en la atmósfera de la Tierra. Si su temperatura inicial era de −105°C afuera de la atmósfera de la Tierra, calcule la velocidad mínima que debió tener el meteorito antes de entrar en la atmósfera terrestre.

83. Un buzo libera una burbuja (esférica) de aire de 3.60 cm de diámetro desde una profundidad de 14.0 m. Suponga que la temperatura es constante a 298 K, y que el aire se comporta como un gas ideal. *a*) ¿De qué tamaño es la burbuja cuando alcanza la superficie? *b*) Bosqueje un diagrama *PV* para el proceso. *c*) Aplique la primera ley de la termodinámica a la burbuja, y determine el trabajo que realiza el aire al elevarse a la superficie, el cambio en su energía interna y el calor agregado o eliminado del aire en la burbuja conforme ésta se eleva. Considere que la densidad del agua es de 1000 kg/m^3.

84. Un compresor "reciprocante" es un dispositivo que comprime aire mediante un movimiento en línea recta de ida y vuelta, como un pistón en un cilindro. Considere un compresor reciprocante que corre a 150 rpm. Durante una carrera de compresión, se comprime 1.00 mol de aire. La temperatura inicial del aire es de 390 K, el motor del compresor suministra 7.5 kW de potencia para comprimir el aire y se elimina calor a una tasa de 1.5 kW. Calcule el cambio de temperatura por carrera de compresión.

85. La temperatura de la superficie de vidrio de una bombilla de 75 W es 75°C cuando la temperatura ambiente es de 18°C. Estime la temperatura de una bombilla de 150 W con un bulbo de vidrio del mismo tamaño. Considere sólo radiación y suponga que el 90% de la energía se emite como calor.

86. Suponga que 3.0 moles de neón (un gas monoatómico ideal) a PTE se comprimen lenta e isotérmicamente a 0.22 del volumen original. Luego se permite que el gas se expanda rápida y adiabáticamente de nuevo a su volumen original. Determine las temperaturas y presiones máxima y mínima logradas por el gas; muestre en un diagrama *PV* dónde se registran estos valores.

87. A temperaturas muy bajas, el calor específico molar de muchas sustancias varía como el cubo de la temperatura absoluta:

$$C = k\frac{T^3}{T_0^3},$$

que a veces se llama ley de Debye. Para sal de roca, $T_0 = 281$ K y $k = 1940$ J/mol·K. Determine el calor necesario para elevar 2.75 moles de sal de 22.0 a 48.0 K.

88. Un motor diesel logra ignición sin una bujía, mediante una compresión adiabática del aire a una temperatura por arriba de la temperatura de ignición del diesel, que se inyecta en el cilindro en el punto de máxima compresión. Suponga que el aire se introduce en el cilindro a 280 K y volumen V_1, y se comprime adiabáticamente a 560°C (≈ 1 000°F) y volumen V_2. Si se supone que el aire se comporta como un gas ideal cuya razón C_P a C_V es 1.4, calcule la tasa de compresión V_1/V_2 del motor.

89. Cuando 6.30×10^5 J de calor se agregan a un gas encerrado en un cilindro ajustado con un pistón ligero sin fricción que se mantiene a presión atmosférica, se observa que el volumen aumenta de 2.2 m^3 a 4.1 m^3. Calcule *a*) el trabajo realizado por el gas y *b*) el cambio en la energía interna del gas. *c*) Grafique este proceso en un diagrama *PV*.

90. En un ambiente frío, una persona puede perder calor por conducción y radiación a una tasa de aproximadamente 200 W. Estime cuánto tardaría la temperatura corporal en disminuir de 36.6 a 35.6°C si el metabolismo casi se detuviera. Suponga una masa de 70 kg. (Véase la tabla 19-1).

*Problemas numéricos/por computadora

***91.** (II) Suponga que 1.0 mol de vapor a 100°C y 0.50 m^3 de volumen se expande isotérmicamente a 1.00 m^3 de volumen. Suponga que el vapor obedece la ecuación de van der Waals $(P + n^2a/V^2)(V/n - b) = RT$, (ecuación 18-9) con $a = 0.55$ N·m^4/mol^2 y $b = 3.0 \times 10^{-5}$ m^3/mol. Con la expresión $dW = P\,dV$, determine numéricamente el trabajo total realizado W. Su resultado debe concordar dentro del 2% con el resultado obtenido mediante integración de la expresión para dW.

Respuestas a los ejercicios

A: *b*).

B: *c*).

C: 0.21 kg.

D: 700 J.

Menor.

F: -6.8×10^3 J.

G: *d*).

Existen muchos usos para una máquina térmica, como en los antiguos trenes de vapor y las modernas plantas eléctricas que queman carbón. Las máquinas de vapor producen vapor que realiza trabajo: sobre las turbinas para generar electricidad y sobre los pistones que mueven las bielas para impulsar las ruedas de una locomotora. La eficiencia de cualquier máquina, sin importar el cuidado con el que se diseñe, es limitada por naturaleza, como se describe en la segunda ley de la termodinámica. Esta gran ley se establece mejor en términos de una cantidad llamada entropía, que es diferente a cualquier otra. La entropía no se conserva, sino que, en vez de ello, siempre se ve forzada a aumentar en cualquier proceso real. La entropía es una medida del desorden. La segunda ley de la termodinámica nos dice que, conforme el tiempo se mueve hacia delante, el desorden en el universo aumenta.

En este capítulo analizaremos muchos asuntos prácticos, incluyendo las máquinas térmicas, las bombas de calor y la refrigeración.





Segunda ley de la termodinámica

CONTENIDO

PREGUNTA DE INICIO DE CAPÍTULO: ¡Adivine ahora!

Las plantas generadoras de electricidad que queman combustible fósil producen “contaminación térmica”. Parte del calor producido por la quema de combustible no se convierte en energía eléctrica. La razón para este desperdicio es

a) La eficiencia es mayor si se permite escapar parte del calor.
b) La tecnología de la ingeniería todavía no alcanza el punto en el que es posible la recuperación del 100% del calor desperdiciado.
c) *Debe* producirse algo de calor de desecho: ésta es una propiedad fundamental de la naturaleza cuando se convierte calor a trabajo útil.
d) Las plantas dependen de combustibles fósiles, no de combustible nuclear.
e) Ninguno de los enunciados anteriores es verdadero.

En este capítulo final acerca del calor y la termodinámica, estudiaremos la famosa segunda ley de la termodinámica, así como la cantidad “entropía” que surgió de esta ley fundamental y que es la quintaesencia de su expresión. También estudiaremos las máquinas térmicas —las máquinas que transforman calor en trabajo en las plantas eléctricas, los trenes y los vehículos automotores—, ya que fueron las primeras en mostrar que era necesaria una nueva ley. Al final, se discute brevemente la tercera ley de la termodinámica.

20–1 La segunda ley de la termodinámica: Introducción

La primera ley de la termodinámica afirma que la energía se conserva. Sin embargo, podríamos imaginar muchos procesos que conservan energía pero que no ocurren en la naturaleza. Por ejemplo, cuando un objeto caliente se pone en contacto con un objeto frío, el calor fluye desde el más caliente hasta el más frío, nunca espontáneamente a la inversa. Si el calor abandonara el objeto más frío y pasara al más caliente, la energía todavía se podría conservar. Sin embargo, esto no ocurre de manera espontánea.[†] Como segundo ejemplo, considere lo que ocurre cuando suelta una piedra y ésta golpea el suelo. La energía potencial inicial de la piedra cambia a energía cinética conforme la piedra cae. Cuando la piedra golpea el suelo, esta energía, a la vez, se transforma en energía interna de la piedra y el suelo en la vecindad del impacto; las moléculas se mueven más rápido y la temperatura se eleva ligeramente. Sin embargo, ¿alguna vez ha visto que ocurra lo contrario: que una piedra en reposo sobre el suelo súbitamente se eleve en el aire porque la energía térmica de las moléculas se transformó en energía cinética de la piedra como un todo? En este proceso se podría conservar la energía, aunque nunca se ha visto que esto ocurra.

Existen muchos otros ejemplos de procesos que tienen lugar en la naturaleza pero cuyo inverso no ocurre. He aquí dos más. (1) Si usted pone una capa de sal dentro de un frasco y encima coloca una capa de granos de pimienta de igual tamaño, cuando agita el frasco obtiene una mezcla homogénea. Sin importar cuánto lo agite, la mezcla no se separará en dos capas de nuevo. (2) Las tazas de café y los vasos se rompen espontáneamente si se dejan caer. Sin embargo, los trozos no vuelven a unirse de manera espontánea (figura 20-1).



a) Estado inicial.



b) Más tarde: la taza se vuelve a armar y se eleva.



c) Más tarde todavía: la copa regresa a la mesa.

FIGURA 20–1 ¿Alguna vez ha observado este proceso: una taza rota que espontáneamente se vuelve a armar y sube a una mesa? Este proceso podría conservar energía y obedecer otras leyes de la mecánica.

La primera ley de la termodinámica (conservación de la energía) no se violaría si alguno de estos procesos ocurriera a la inversa. Para explicar esta falta de reversibilidad, los científicos de la última mitad del siglo XIX formularon un nuevo principio conocido como la segunda ley de la termodinámica.

La **segunda ley de la termodinámica** es un enunciado acerca de cuáles procesos ocurren en la naturaleza y cuáles no. Se puede expresar en varias formas, todas ellas equivalentes. Un enunciado, formulado por R. J. E. Clausius (1822-1888), dice que

SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA (enunciado de Clausius)

> **el calor puede fluir espontáneamente de un objeto caliente a uno frío; el calor no fluirá espontáneamente de un objeto frío a uno caliente.**

Como este enunciado se aplica a un proceso particular, no es obvio cómo se aplica a otros procesos. Es necesario un enunciado más general que incluya otros posibles procesos de una forma más obvia.

El desarrollo de un enunciado general de la segunda ley de la termodinámica se basó en parte en el estudio de las máquinas térmicas. Una **máquina térmica** es cualquier dispositivo que convierte energía térmica en trabajo mecánico, como las máquinas de vapor o los motores de los automóviles. Ahora se examinarán las máquinas térmicas desde un punto de vista práctico y se mostrará su importancia en el desarrollo de la segunda ley de la termodinámica.

[†] Al decir "de manera espontánea" debe entenderse "por sí mismo", sin entrada de trabajo de ninguna índole. (Un refrigerador sí mueve calor de un ambiente frío a uno más caliente, pero sólo porque su motor realiza trabajo, sección 20-4).

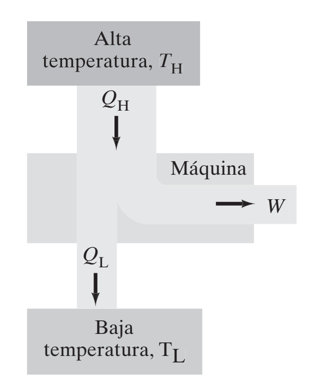


FIGURA 20–2 Diagrama de transferencia de energía para una máquina térmica.

CUIDADO

Nueva convención de signos:
$Q_H > 0, Q_L > 0, W > 0$

20–2 Máquinas térmicas

Es fácil generar energía térmica al realizar trabajo: por ejemplo, con el solo hecho de frotar sus manos vigorosamente o mediante cualquier proceso de fricción. Sin embargo, obtener trabajo a partir de la energía térmica es más difícil, y un dispositivo práctico para lograrlo se inventó alrededor del año 1700; se trata de la máquina de vapor.

La idea básica detrás de cualquier máquina térmica es que se puede obtener energía mecánica a partir de la energía térmica sólo cuando se permite que el calor fluya de una temperatura alta a una temperatura baja. En el proceso, parte del calor se transforma en trabajo mecánico, como se representa en el esquema de la figura 20-2. Aquí sólo se nos referiremos a las máquinas que corren en *ciclo* repetitivo (esto es, aquellas en las que el sistema regresa de manera recurrente a su punto de partida) y, por lo tanto, pueden funcionar de manera continua. En cada ciclo el cambio en la energía interna del sistema es $\Delta E_{int} = 0$ porque el sistema regresa al estado inicial. Así, una entrada de calor Q_H a una temperatura alta T_H se transforma parcialmente en trabajo W y una parte se expulsa como una salida de calor Q_L a una temperatura más baja T_L (figura 20-2). Por conservación de la energía, $Q_H = W + Q_L$. Las temperaturas alta y baja, T_H y T_L, se llaman **temperaturas operativas** de la máquina. Hay que advertir que ahora se emplea una nueva convención de signos: Q_H, Q_L y W se consideran siempre positivos. La dirección de cada transferencia de energía se muestra mediante la flecha en el diagrama correspondiente, como la figura 20-2.

Motor de vapor y motor de combustión interna



FÍSICA APLICADA
Motores

En la figura 20-3 se ilustra la operación de un motor de vapor. Los motores de vapor son de dos tipos principales, cada uno utiliza vapor calentado por combustión de carbón, petróleo o gas, o bien, por energía nuclear. En un motor reciprocante (figura 20-3a), el vapor calentado pasa a través de la válvula de admisión y se expande contra un pistón, forzándolo a moverse. Conforme el pistón regresa a su posición original, fuerza a los gases a salir por la válvula de escape. Una turbina de vapor (figura 20-3b) es muy similar, excepto que el pistón reciprocante se sustituye por una turbina giratoria que recuerda una rueda de paletas con muchos conjuntos de álabes (o aspas). La mayor parte de la electricidad actual se genera mediante turbinas de vapor.† El material que se calienta y se enfría, vapor en este caso, se llama **sustancia operativa**.

†Incluso las plantas eléctricas nucleares utilizan turbinas de vapor; el combustible nuclear, uranio, simplemente sirve como combustible para calentar el vapor.

a) Tipo reciprocante

Alta temperatura
Caldera
Vapor
Agua
Entrada de calor
Válvula de admisión (abierta durante la expansión)
Pistón
Válvula de escape (cerrada durante la expansión)
Bomba
Agua
Condensador
Baja temperatura

b) Turbina (no se muestra la caldera ni el condensador)



FIGURA 20–3 Motores de vapor.

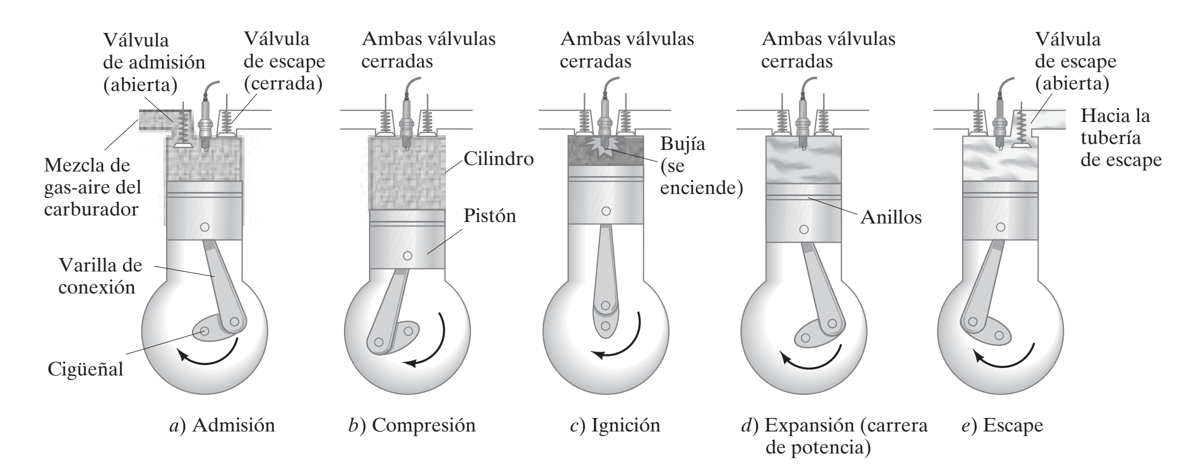


FIGURA 20–4 Motor de combustión interna con ciclo de cuatro tiempos: *a*) la mezcla gasolina-aire fluye hacia el cilindro conforme baja el pistón; *b*) el pistón se mueve hacia arriba y comprime el gas; *c*) el breve instante cuando se prende la bujía enciende la mezcla gasolina-aire sumamente comprimida; *d*) los gases, ahora a alta temperatura y presión, se expanden contra el pistón en una "carrera de potencia"; *e*) los gases quemados se empujan fuera hacia la tubería de escape; cuando el pistón alcanza la parte superior, la válvula de escape se cierra y la válvula de admisión se abre; entonces, todo el ciclo se repite. *a*), *b*), *d*) y *e*) son los cuatro tiempos del ciclo.

En un motor de combustión interna (que se usa en la mayoría de los automóviles), la alta temperatura se logra al quemar la mezcla de gasolina y aire en el cilindro mismo (se enciende por medio de la bujía), como se describe en la figura 20-4.

Por qué se necesita un Δ para impulsar una máquina térmica

Para ver por qué se requiere una *diferencia de temperatura* para poner en marcha un motor, examinemos el motor de vapor. En el motor reciprocante, por ejemplo, suponga que no hay condensador o bomba (figura 20-3a), y que el vapor está a la misma temperatura a lo largo de todo el sistema. Esto significaría que la presión del gas que se expulsa sería igual que la de admisión. Así, aunque el gas realice trabajo *sobre* el pistón cuando se expande, *el pistón* tendría que realizar una cantidad igual de trabajo para forzar al vapor a salir por el escape; de esta forma, no se realizaría trabajo neto. En un motor real, el gas expulsado se enfría a una menor temperatura y se condensa de manera que la presión de escape sea menor que la presión de admisión. Así, aunque el pistón debe realizar trabajo sobre el gas para expulsarlo en la carrera de escape, es menor que el trabajo realizado por el gas sobre el pistón durante la admisión. Así que se puede obtener una cantidad neta de trabajo, pero sólo si existe una diferencia de temperatura. De igual modo, si el gas no se enfría en la turbina de gas, la presión en cada lado de los álabes sería la misma. Al enfriar el gas en el lado del escape, la presión en el lado posterior del álabe es menor y entonces la turbina gira.

Eficiencia y la segunda ley

La **eficiencia**, e, de cualquier máquina térmica se define como la razón entre el trabajo que realiza, W, y la entrada de calor a la temperatura alta, Q_H (figura 20-2):

$$e = \frac{W}{Q_H}.$$

Ésta es una definición razonable, pues W es la salida (lo que se obtiene del motor), mientras que Q_H es lo que se coloca y por lo que se paga en combustible quemado. Puesto que la energía se conserva, la entrada de calor Q_H debe ser igual al trabajo realizado más el calor que fluye hacia fuera a la temperatura baja (Q_L):

$$Q_H = W + Q_L.$$

Por lo tanto, $W = Q_H - Q_L$, y la eficiencia de una máquina es

$$e = \frac{W}{Q_H} \qquad \textbf{(20–1a)}$$

$$= \frac{Q_H - Q_L}{Q_H} = 1 - \frac{Q_L}{Q_H}. \qquad \textbf{(20–1b)}$$

Para obtener la eficiencia como porcentaje, multiplicamos las ecuaciones 20-1 por 100. Note que e podría ser 1.0 (o 100%) sólo si Q_L fuera cero; esto es, sólo si no se expulsara calor al ambiente.

EJEMPLO 20–1 **Eficiencia de un automóvil.** El motor de un automóvil tiene una eficiencia del 20% y produce un promedio de 23,000 J de trabajo mecánico por segundo durante su operación. *a*) ¿Cuánta entrada de calor se requiere y *b*) cuánto calor por segundo descarga este motor como desecho?

PLANTEAMIENTO Queremos determinar la entrada de calor Q_H así como la salida de calor Q_L, dados $W = 23{,}000$ J cada segundo y una eficiencia $e = 0.20$. Podemos usar la definición de eficiencia (ecuación 20-1) en varias de sus formas para encontrar primero Q_H y luego Q_L.

SOLUCIÓN *a*) A partir de la ecuación 20-1a, $e = W/Q_H$, y despejamos Q_H:

$$Q_H = \frac{W}{e} = \frac{23{,}000\ \text{J}}{0.20}$$
$$= 1.15 \times 10^5\ \text{J} = 115\ \text{kJ}.$$

El motor requiere 115 kJ/s = 115 kW de entrada de calor.

b) Ahora usamos la ecuación 20-1b ($e = 1 - Q_L/Q_H$) y despejamos Q_L:

$$Q_L = (1 - e)Q_H = (0.80)115\ \text{kJ} = 92\ \text{kJ}.$$

El motor descarga calor al ambiente a una tasa de 92 kJ/s = 92 kW.

NOTA De los 115 kJ que entran al motor por segundo, sólo 23 kJ realizan trabajo útil, mientras que 92 kJ se desperdician como calor de salida.

NOTA El problema se enunció en términos de energía por unidad de tiempo. También se pudo haber planteado en términos de potencia, puesto que 1 J/s = 1 W.

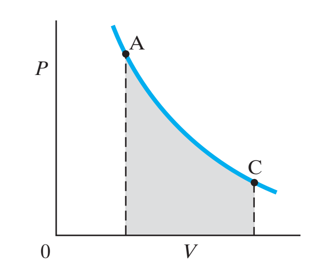


FIGURA 20–5 Proceso adiabático, ejercicio A.

EJERCICIO A Un proceso adiabático se define como aquel en el que no fluye calor hacia o desde el sistema. Si un gas ideal se expande como se indica en la figura 20-5 (véase también la figura 19-8), el trabajo W realizado en esta expansión es igual al área bajo la curva, que aparece sombreada. La eficiencia de este proceso sería $e = W/Q$, mucho mayor que el 100% (= ∞ puesto que $Q = 0$). ¿Es ésta una violación de la segunda ley?

A partir de la ecuación 20-1b, $e = 1 - Q_L/Q_H$, es claro que la eficiencia de una máquina será mayor si Q_L se reduce. Sin embargo, a partir de la experiencia con una amplia variedad de sistemas, no ha sido posible reducir Q_L a cero. Si Q_L pudiera reducirse a cero, se tendría una máquina 100% eficiente, como la que se representa en la figura 20-6. El hecho de que tal máquina perfecta (que corra de manera continua en un ciclo) no sea posible es otra forma de expresar la segunda ley de la termodinámica:

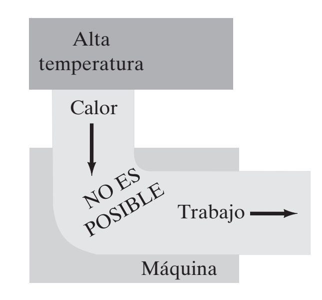


FIGURA 20–6 Diagrama de una hipotética máquina térmica perfecta en la que toda la entrada de calor se usaría para realizar trabajo.

SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA (enunciado de Kelvin-Planck)

No es posible que exista un dispositivo cuyo único efecto sea transformar por completo una cantidad dada de calor en trabajo.

Éste se conoce como el **enunciado de Kelvin-Planck de la segunda ley de la termodinámica**. Dicho de otra forma, *no puede haber una máquina térmica perfecta (100% eficiente)* como la de la figura 20-6.

Si la segunda ley no fuera verdadera, de manera que pudiera construirse una máquina perfecta, podrían ocurrir cosas extraordinarias. Por ejemplo, si la máquina de un barco no necesitara un depósito de baja temperatura que permita que el calor escape, el barco podría navegar por el mar utilizando los vastos recursos de la energía interna del agua del océano. De hecho, ¡no habría problemas de combustible en absoluto!

20–3 Procesos reversibles e irreversibles; la máquina de Carnot

A principios del siglo XIX, el científico francés N. L. Sadi Carnot (1796-1832) estudió en detalle el proceso de transformar calor en energía mecánica. Su objetivo era determinar cómo aumentar la eficiencia de las máquinas térmicas; sin embargo, sus estudios pronto lo condujeron a investigar los fundamentos de la termodinámica. En 1824 Carnot inventó (en papel) un tipo idealizado de máquina que ahora se conoce como *máquina de Carnot*. En realidad no existe ninguna máquina de Carnot, pero como planteamiento teórico desempeñó un importante papel en el establecimiento y la comprensión de la segunda ley de la termodinámica.

Procesos reversibles e irreversibles

La máquina de Carnot implica *procesos reversibles*, así que antes de explicarla se debe aclarar lo que se entiende por procesos reversibles e irreversibles. Un **proceso reversible** es aquel que se realiza de manera infinitamente lenta, de manera que el proceso se puede considerar como una serie de estados de equilibrio, y todo el proceso se podría realizar a la inversa sin cambio en la magnitud del trabajo efectuado o del calor intercambiado. Por ejemplo, un gas contenido en un cilindro ajustado con un pistón apretado y móvil, aunque sin fricción, se podría comprimir isotérmicamente en una forma reversible si se hace de manera infinitamente lenta. No obstante, no todos los procesos muy lentos (cuasiestáticos) son reversibles. Si existe fricción, por ejemplo (como entre el pistón móvil y el cilindro recién mencionados), el trabajo realizado en una dirección (que va de algún estado A al estado B) no será el negativo del trabajo realizado en la dirección inversa (del estado B al estado A). Tal proceso no se consideraría reversible. Un proceso perfectamente reversible no es posible en la realidad, porque requeriría de un tiempo infinito; sin embargo, los procesos reversibles se pueden aproximar tanto como queramos, y son muy importantes desde el punto de vista teórico.

Todos los procesos reales son **irreversibles**: no se realizan de manera infinitamente lenta. Podría haber turbulencia en el gas, o tal vez fricción, entre otras situaciones. Cualquier proceso podría no realizarse de manera precisa a la inversa, pues la pérdida de calor por fricción no se revertiría por sí sola, la turbulencia sería diferente, etcétera. Para cualquier volumen dado no habría una presión P y una temperatura T bien definidas, pues el sistema no siempre estaría en estado de equilibrio. Por eso, un proceso real irreversible no se puede graficar en un diagrama PV, excepto en la medida en que se pueda aproximar a un proceso reversible ideal. Sin embargo, un proceso reversible (en tanto que es una serie cuasiestática de estados de equilibrio), siempre se puede graficar en un diagrama PV; y un proceso reversible, cuando se realiza a la inversa, vuelve a trazar la misma trayectoria en un diagrama PV. Aunque todos los procesos reales son irreversibles, los procesos reversibles son importantes desde el punto de vista conceptual, tal como lo es el concepto de un gas ideal.

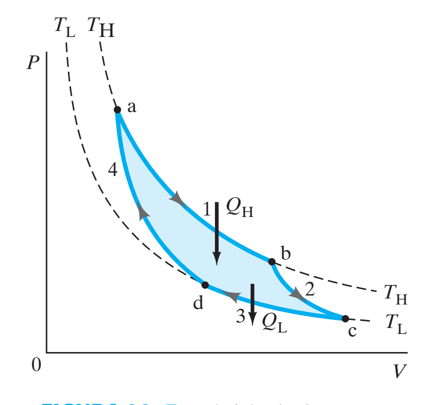


FIGURA 20–7 El ciclo de Carnot. Las máquinas térmicas trabajan en un ciclo, y el ciclo para la máquina de Carnot comienza en el punto a sobre este diagrama PV. (1) Primero, el gas se expande isotérmicamente, con la adición de calor Q_H, a lo largo de la trayectoria ab a temperatura T_H. (2) A continuación el gas se expande adiabáticamente de b a c, no se intercambia calor, sino que la temperatura disminuye a T_L. (3) Luego, el gas se comprime a temperatura constante T_L, trayectoria cd, y fluye hacia fuera calor Q_L. (4) Finalmente, el gas se comprime adiabáticamente, trayectoria da, de regreso a su estado original. En realidad, no existe ninguna máquina de Carnot, pero como planteamiento teórico desempeñó un importante papel en el desarrollo de la termodinámica.

Máquina de Carnot

Ahora observemos una máquina de Carnot idealizada. La **máquina de Carnot** utiliza un **ciclo reversible**, por lo que se entiende una serie de procesos reversibles que llevan a una sustancia dada (la *sustancia operativa*) de un estado de equilibrio inicial a través de muchos otros estados de equilibrio para luego devolverla al mismo estado inicial. En particular, la máquina de Carnot utiliza el **ciclo de Carnot**, que se ilustra en la figura 20-7, con un gas ideal como sustancia operativa. Consideremos el punto a como el estado inicial. Primero, el gas se expande isotérmica y reversiblemente, trayectoria ab, a la temperatura T_H, conforme se le agrega calor Q_H. A continuación el gas se expande adiabática y reversiblemente, trayectoria bc; no se intercambia calor, y la temperatura del gas se reduce a T_L. El tercer paso es una compresión isotérmica reversible, trayectoria cd, durante la cual el calor Q_L fluye hacia fuera de la sustancia operativa. Por último, el gas se comprime adiabáticamente, trayectoria da, de regreso a su estado original. Así, un ciclo de Carnot consta de dos procesos isotérmicos y dos adiabáticos.

El trabajo neto realizado en un ciclo por una máquina de Carnot (o cualquier otro tipo de máquina que use un ciclo reversible) es igual al área encerrada por la curva que representa el ciclo en el diagrama PV, la curva abcd en la figura 20-7. (Véase la sección 19-7).

Eficiencia de Carnot y la segunda ley de la termodinámica

La eficiencia de una máquina de Carnot, como la de cualquier otra máquina térmica, está dada por la ecuación 20-1b:

$$e = 1 - \frac{Q_L}{Q_H}.$$

Sin embargo, para una máquina de Carnot que utilice un gas ideal, podemos demostrar que la eficiencia sólo depende de las temperaturas de los depósitos de calor, T_H y T_L. En el primer proceso isotérmico ab en la figura 20-7, el trabajo realizado por el gas es (véase la ecuación 19-8)

$$W_{ab} = nRT_H \ln \frac{V_b}{V_a},$$

onde n es el número de moles del gas ideal usado como sustancia operativa. Puesto que la energía interna de un gas ideal no cambia cuando la temperatura permanece constante, la primera ley de la termodinámica nos dice que el calor agregado al gas es igual al trabajo realizado por el gas:

$$Q_H = nRT_H \ln \frac{V_b}{V_a}.$$

De igual modo, la pérdida de calor por el gas en el proceso isotérmico cd es

$$Q_L = nRT_L \ln \frac{V_c}{V_d}.$$

Las trayectorias bc y da son adiabáticas, así que, a partir de la ecuación 19-15, tenemos:

$$P_b V_b^\gamma = P_c V_c^\gamma \quad \text{y} \quad P_d V_d^\gamma = P_a V_a^\gamma,$$

donde $\gamma = C_P/C_V$ es la razón de los calores específicos molares (ecuación 19-14). Además, a partir de la ley del gas ideal,

$$\frac{P_b V_b}{T_H} = \frac{P_c V_c}{T_L} \quad \text{y} \quad \frac{P_d V_d}{T_L} = \frac{P_a V_a}{T_H}.$$

Cuando se dividen estas últimas ecuaciones, término por término, con el correspondiente conjunto de ecuaciones del renglón anterior, obtenemos

$$T_H V_b^{\gamma-1} = T_L V_c^{\gamma-1} \quad \text{y} \quad T_L V_d^{\gamma-1} = T_H V_a^{\gamma-1}.$$

A continuación dividimos la ecuación a la izquierda entre la ecuación de la derecha para obtener

$$\left(\frac{V_b}{V_a}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_c}{V_d}\right)^{\gamma-1}$$

o

$$\frac{V_b}{V_a} = \frac{V_c}{V_d}.$$

Al insertar este resultado en las ecuaciones para Q_H y Q_L presentadas antes, obtenemos

$$\frac{Q_L}{Q_H} = \frac{T_L}{T_H}. \qquad \text{[ciclo de Carnot]} \quad \textbf{(20–2)}$$

En consecuencia, la eficiencia de una máquina de Carnot reversible, ahora se puede escribir

$$e_{ideal} = 1 - \frac{Q_L}{Q_H}$$

o

$$e_{ideal} = 1 - \frac{T_L}{T_H}. \qquad \begin{bmatrix}\text{eficiencia de Carnot;} \\ \text{temperaturas Kelvin}\end{bmatrix} \quad \textbf{(20–3)}$$

Las temperaturas T_L y T_H son las temperaturas absolutas o Kelvin medidas en la escala de temperatura del gas ideal. Así, la eficiencia de una máquina de Carnot depende sólo de las temperaturas T_L y T_H.

Podríamos imaginar otros posibles ciclos reversibles adecuados para una máquina reversible ideal. De acuerdo con un teorema establecido por Carnot:

Todas las máquinas reversibles que operan entre las mismas dos temperaturas constantes, T_H y T_L, tienen la misma eficiencia. Cualquier máquina irreversible que opere entre las mismas dos temperaturas fijas tendrá una eficiencia menor que esto.

Este enunciado se conoce como el **teorema de Carnot**† y nos dice que la ecuación 20-3, $e = 1-(T_L/T_H)$, se aplica a cualquier máquina reversible ideal con temperaturas de entrada y salida fijas, T_H y T_L, y que esta ecuación representa una eficiencia máxima posible para una máquina real (es decir, irreversible).

En la práctica, la eficiencia de las máquinas reales siempre es menor que la eficiencia de Carnot. Las máquinas bien diseñadas alcanzan tal vez del 60 al 80% de la eficiencia de Carnot.

EJEMPLO 20–2 **¿Una afirmación engañosa?** Un fabricante de motores afirma lo siguiente: La entrada de calor por segundo de un motor es de 9.0 kJ a 435 K. La salida de calor por segundo es de 4.0 kJ a 285 K. ¿Usted cree estas afirmaciones?

PLANTEAMIENTO La eficiencia del motor se calcula a partir de la definición (ecuaciones 20-1). Debe ser menor que la máxima posible (ecuación 20-3).

SOLUCIÓN La eficiencia anunciada del motor es (ecuación 20-1b)

$$e = 1 - \frac{Q_L}{Q_H} = 1 - \frac{4.0\,\text{kJ}}{9.0\,\text{kJ}} = 0.56,$$

o del 56%. Sin embargo, la eficiencia máxima posible está dada por la eficiencia de Carnot (ecuación 20-3):

$$e_{\text{ideal}} = 1 - \frac{T_L}{T_H} = 1 - \frac{285\,\text{K}}{435\,\text{K}} = 0.34,$$

o del 34%. La afirmación del fabricante viola la segunda ley de la termodinámica y no es creíble.

EJERCICIO B Un motor funciona con una temperatura de admisión $T_H = 400$ K y una temperatura de escape $T_L = 300$ K. ¿Cuál de las siguientes *no* es una posible eficiencia para la máquina? *a*) 0.10; *b*) 0.16; *c*) 0.24; *d*) 0.30.

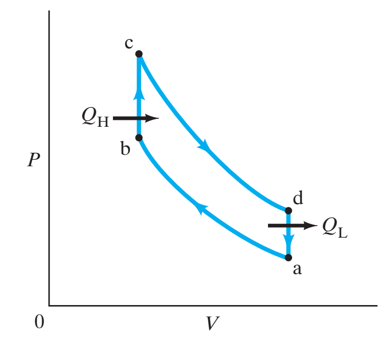
De acuerdo con la ecuación 20-3, a todas luces resulta imposible que exista una máquina 100% eficiente. Sólo si la temperatura de escape T_L fuera de cero absoluto sería posible un 100% de eficiencia. Sin embargo, alcanzar el cero absoluto es una imposibilidad práctica (así como teórica).‡ Por lo tanto, podemos afirmar, como en la sección 20-2, que **no es posible que exista un dispositivo cuyo único efecto sea transformar por completo una cantidad dada de calor en trabajo.** Como vimos en la sección 20-2, esto se conoce como el *enunciado de Kelvin-Planck de la segunda ley de la termodinámica*. En otras palabras, no puede existir una máquina térmica perfecta (con un 100% de eficiencia) tal como se representa en la figura 20-6.

EJERCICIO C Regrese a la pregunta de inicio del capítulo, página 528, y respóndala de nuevo. Intente explicar por qué quizá la contestó de manera diferente la primera vez.

*El ciclo de Otto

La operación de un motor de combustión interna de un automóvil (figura 20-4) se puede aproximar mediante un ciclo reversible conocido como *ciclo de Otto*, cuyo diagrama *PV* se muestra en la figura 20-8. A diferencia del ciclo de Carnot, las temperaturas de admisión y escape del ciclo de Otto *no* son constantes. Las trayectorias ab y cd son adiabáticas, y las trayectorias bc y da son a volumen constante. El gas (una mezcla de gasolina y aire) entra al cilindro en el punto a y se comprime adiabáticamente (carrera de compresión) al punto b. En b ocurre la ignición (se produce la chispa de la bujía) y la quema del gas agrega calor Q_H al sistema a volumen constante (aproximadamente en un motor real). La temperatura y la presión aumentan, y luego, en la carrera de potencia, cd, el gas se expande adiabáticamente. En la carrera de escape, da, el calor Q_L se expulsa al ambiente (en un motor real, el gas sale del motor y se sustituye por una nueva mezcla de aire y combustible).

FIGURA 20–8 El ciclo de Otto.



†Es posible demostrar que el teorema de Carnot se deduce directamente del enunciado de Clausius o del enunciado de Kelvin-Planck de la segunda ley de la termodinámica.

‡Este resultado se conoce como *tercera ley de la termodinámica*, que se explicará en la sección 20-10.

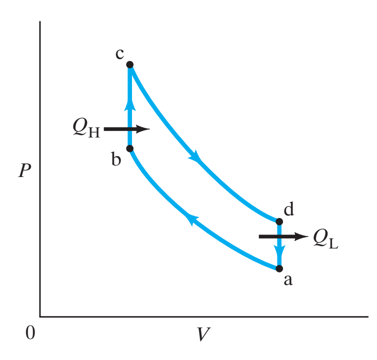


FIGURA 20–8 (repetida para el ejemplo 20-3) El ciclo de Otto.

EJEMPLO 20–3 **El ciclo de Otto.** *a*) Demuestre que, para un gas ideal como sustancia operativa, la eficiencia de una máquina con ciclo de Otto es

$$e = 1 - \left(\frac{V_a}{V_b}\right)^{1-\gamma}$$

donde γ es la razón de calores específicos ($\gamma = C_P/C_V$, ecuación 19-14) y V_a/V_b es la *razón de compresión*. *b*) Calcule la eficiencia para una razón de compresión $V_a/V_b = 8.0$ en el caso de un gas diatómico como O_2 y N_2.

PLANTEAMIENTO Utilizamos la definición original de la eficiencia y los resultados del capítulo 19 para volumen constante y procesos adiabáticos (secciones 19-8 y 19-9).

SOLUCIÓN Los intercambios de calor tienen lugar a volumen constante en el ciclo de Otto ideal, así que de la ecuación 19-10a:

$$Q_H = nC_V(T_c - T_b) \quad \text{y} \quad Q_L = nC_V(T_d - T_a).$$

Entonces, de la ecuación 20-1b,

$$e = 1 - \frac{Q_L}{Q_H} = 1 - \left[\frac{T_d - T_a}{T_c - T_b}\right].$$

Para obtener esto en términos de la razón de compresión, V_a/V_b, usamos el resultado de la sección 19-9, ecuación 19-15, PV^γ = constante durante los procesos adiabáticos ab y cd. Por lo tanto,

$$P_a V_a^\gamma = P_b V_b^\gamma \quad \text{y} \quad P_c V_c^\gamma = P_d V_d^\gamma.$$

Usamos la ley del gas ideal, $P = nRT/V$, y sustituimos P en estas dos ecuaciones

$$T_a V_a^{\gamma-1} = T_b V_b^{\gamma-1} \quad \text{y} \quad T_c V_c^{\gamma-1} = T_d V_d^{\gamma-1}.$$

Entonces, la eficiencia (véase arriba) es

$$e = 1 - \left[\frac{T_d - T_a}{T_c - T_b}\right] = 1 - \left[\frac{T_c(V_c/V_d)^{\gamma-1} - T_b(V_b/V_a)^{\gamma-1}}{T_c - T_b}\right].$$

Los procesos bc y da son a volumen constante, así que $V_c = V_b$ y $V_d = V_a$. En consecuencia, $V_c/V_d = V_b/V_a$ y

$$e = 1 - \left[\frac{(V_b/V_a)^{\gamma-1}(T_c - T_b)}{T_c - T_b}\right] = 1 - \left(\frac{V_b}{V_a}\right)^{\gamma-1} = 1 - \left(\frac{V_a}{V_b}\right)^{1-\gamma}.$$

b) Para moléculas diatómicas (sección 19-8), $\gamma = C_P/C_V = 1.4$, así que

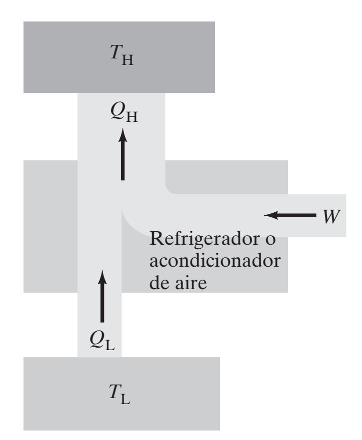
$$e = 1 - (8.0)^{1-\gamma} = 1 - (8.0)^{-0.4} = 0.56.$$

Las máquinas reales no alcanzan esta alta eficiencia porque no siguen de manera perfecta el ciclo de Otto; además, hay fricción, turbulencia, pérdida de calor y combustión incompleta de los gases.

20–4 Refrigeradores, acondicionadores de aire y bombas térmicas

El principio operativo de los refrigeradores, los acondicionadores de aire y las bombas térmicas es justo el inverso del principio de una máquina térmica. Cada uno opera para transferir calor de un ambiente frío hacia un ambiente caliente. Como se indica en la figura 20-9, al realizar trabajo W, el calor se toma de una región de baja temperatura, T_L (como el interior de un refrigerador), y se expulsa una mayor cantidad de calor a una temperatura alta, T_H (la habitación). Con frecuencia usted puede sentir este aire caliente soplar por debajo de un refrigerador. El trabajo W por lo general se realiza mediante un motor eléctrico que comprime un fluido, como se ilustra en la figura 20-10.

FIGURA 20–9 Diagrama de transferencia de energía para un refrigerador o acondicionador de aire.



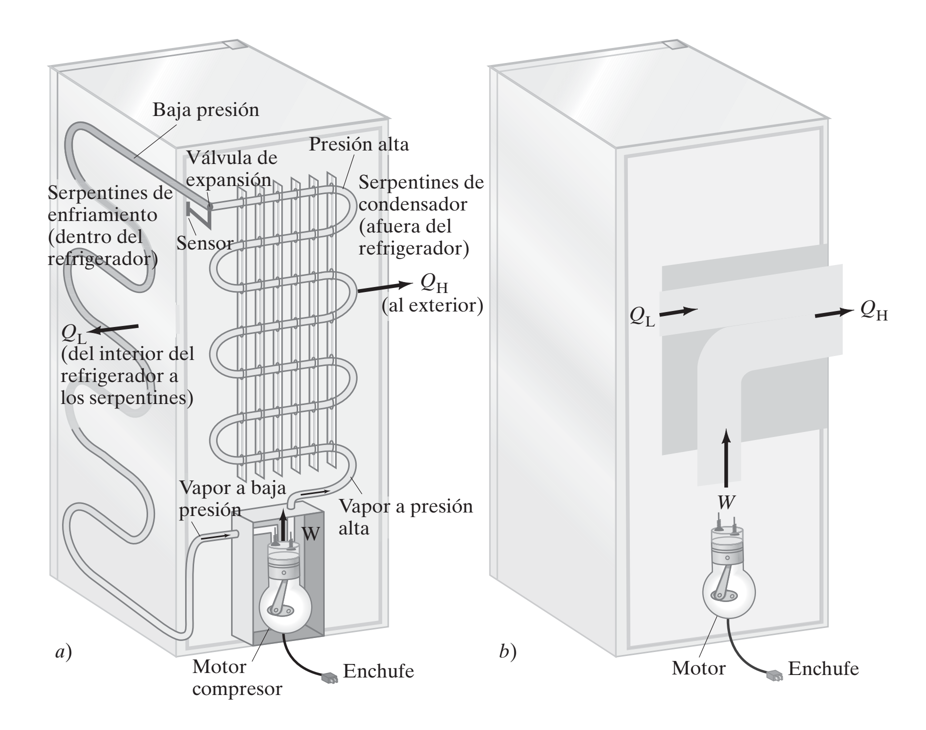


FIGURA 20–10 *a*) Sistema de un refrigerador típico. El motor compresor eléctrico fuerza a un gas a alta presión a través de un intercambiador de calor (condensador) en la pared exterior trasera del refrigerador, donde se arroja Q_H y el gas se enfría para volverse líquido. El líquido pasa de una región de alta presión, mediante una válvula, a unos tubos de baja presión en las paredes interiores del refrigerador; el líquido se evapora a esta presión más baja y, por lo tanto, absorbe calor (Q_L) del interior del refrigerador. El fluido regresa al compresor, donde el ciclo comienza de nuevo. *b*) Diagrama esquemático como la figura 20-9.

No es posible que exista un **refrigerador** perfecto, es decir, uno en el que no se requiera trabajo para llevar calor desde la región de baja temperatura a la región de alta temperatura. Éste es el **enunciado de Clausius de la segunda ley de la termodinámica**, ya mencionado en la sección 20-1, que se puede expresar formalmente como

SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA (enunciado de Clausius)

Es imposible que exista un dispositivo cuyo único efecto sea transferir calor de un sistema a una temperatura T_L a un segundo sistema a una temperatura más alta T_H.

Para hacer que fluya calor de un objeto (o sistema) a baja temperatura a uno a mayor temperatura, se debe realizar trabajo. Por lo tanto, *no puede haber un refrigerador perfecto*.

FÍSICA APLICADA
Refrigerador

El **coeficiente de operación** (COP, por las siglas de *coefficient of performance*) de un refrigerador se define como el calor Q_L removido del área de baja temperatura (dentro de un refrigerador) dividido entre el trabajo W realizado para remover el calor (figura 20-9 o 20-10b):

$$\text{COP} = \frac{Q_L}{W}. \qquad \begin{bmatrix}\text{refrigerador y} \\ \text{acondicionador de aire}\end{bmatrix} \qquad \textbf{(20–4a)}$$

Esto tiene sentido porque, cuanto más calor Q_L se pueda remover del interior del refrigerador mediante una cantidad dada de trabajo, más eficiente será el refrigerador. La energía se conserva, así que, de acuerdo con la primera ley de la termodinámica, podemos escribir (véase la figura 20-9 o 20-10b) $Q_L + W = Q_H$, o $W = Q_H - Q_L$. Así, la ecuación 20-4a se convierte en

$$\text{COP} = \frac{Q_L}{W} = \frac{Q_L}{Q_H - Q_L}. \qquad \begin{bmatrix}\text{refrigerador y} \\ \text{acondicionador de aire}\end{bmatrix} \qquad \textbf{(20–4b)}$$

Para un refrigerador ideal (no uno perfecto, que es imposible), lo mejor que se puede hacer es

$$\text{COP}_{\text{ideal}} = \frac{T_L}{T_H - T_L}, \qquad \begin{bmatrix}\text{refrigerador y} \\ \text{acondicionador de aire}\end{bmatrix} \qquad \textbf{(20–4c)}$$

análogo a una máquina ideal (de Carnot), ecuaciones 20-2 y 20.3.

FÍSICA APLICADA
Acondicionador de aire

Un **acondicionador de aire** funciona en forma muy parecida a un refrigerador, aunque los detalles de la construcción real son diferentes: un acondicionador de aire lleva calor Q_L desde el interior de una habitación o edificio a baja temperatura, y deposita calor Q_H afuera, en el ambiente a una temperatura más alta. Las ecuaciones 20-4 también describen el coeficiente de operación para un acondicionador de aire.

EJEMPLO 20–4 **Elaboración de hielo.** Un congelador tiene un COP de 3.8 y utiliza 200 W de potencia. ¿Cuánto tardaría este congelador (de otra forma vacío) en congelar una charola de cubos de hielo que contiene 600 g de agua a 0°C?

PLANTEAMIENTO En la ecuación 20-4b, Q_L es el calor que se debe transferir hacia fuera del agua para que se convierta en hielo. Para determinar Q_L, utilizamos el calor latente de fusión L del agua y la ecuación 19-3, $Q = mL$.

SOLUCIÓN De la tabla 19-2, $L = 333$ kJ/kg. Por lo tanto, $Q = mL = (0.600\,\text{kg})(3.33 \times 10^5\,\text{J/kg}) = 2.0 \times 10^5$ J es la energía total que se necesita remover del agua. El congelador funciona a la tasa de 200 W = 200 J/s = W/t, que es el trabajo W que puede realizar en t segundos. Despejamos t: $t = W/(200\text{ J/s})$. Para W, usamos la ecuación 20-4a: $W = Q_L/\text{COP}$. Por lo tanto,

$$t = \frac{W}{200\,\text{J/s}} = \frac{Q_L/\text{COP}}{200\,\text{J/s}} = \frac{(2.0 \times 10^5\,\text{J})/(3.8)}{200\,\text{J/s}} = 260\,\text{s},$$

o aproximadamente $4\frac{1}{2}$ min.



Bomba térmica

El calor fluye naturalmente de una temperatura alta a una temperatura baja. Los refrigeradores y los acondicionadores de aire realizan trabajo para lograr lo opuesto: hacer que el calor fluya de una región fría a una caliente. Se puede decir que "bombean" calor de las áreas frías a las áreas más calientes, contra la tendencia natural del calor de fluir de las áreas calientes a las áreas frías, de la misma forma como el agua se puede bombear cuesta arriba, contra la tendencia natural de fluir cuesta abajo. El término **bomba térmica** por lo general se reserva para un dispositivo que puede calentar una casa en invierno utilizando un motor eléctrico que efectúa trabajo W para llevar calor Q_L del exterior a baja temperatura y entregar calor Q_H al interior de la casa, que se encuentra más caliente; véase la figura 20-11. Como en un refrigerador, hay un intercambiador de calor adentro y otro afuera (serpentines del refrigerador) y un motor compresor eléctrico. El principio operativo es como el de un refrigerador o acondicionador de aire; sin embargo, el objetivo de una bomba de calor es calentar (entregar Q_H) en vez de enfriar (remover Q_L). Por eso, el coeficiente de operación de una bomba térmica se define de manera diferente al de un acondicionador de aire, pues ahora lo que importa es el calor Q_H entregado al interior de la casa:

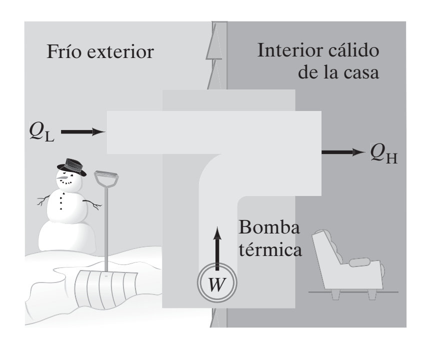


FIGURA 20–11 Una bomba térmica usa un motor eléctrico para "bombear" calor del frío exterior al interior cálido de una casa.

$$\text{COP} = \frac{Q_H}{W}. \qquad \text{[bomba térmica]} \quad \textbf{(20–5)}$$

El COP necesariamente es mayor que 1. La mayoría de las bombas térmicas se pueden "invertir" y utilizarse como acondicionadores de aire en el verano.

CUIDADO

Las bombas térmicas y los acondicionadores de aire tienen diferentes definiciones de COP

EJEMPLO 20–5 **Bomba térmica.** Una bomba térmica tiene un coeficiente de operación de 3.0 y se clasifica para trabajar a 1500 W. *a*) ¿Cuánto calor puede agregar a una habitación por segundo? *b*) Si la bomba térmica se invierte para actuar como acondicionador de aire en el verano, ¿cuál sería su coeficiente de operación, si se supone que todo lo demás permanece igual?

PLANTEAMIENTO Usamos las definiciones de coeficiente de operación, que son diferentes para los dos dispositivos en *a*) y *b*).

SOLUCIÓN *a*) Usamos la ecuación 20-5 para la bomba térmica y, dado que el dispositivo realiza 1500 J de trabajo por segundo, puede verter calor en la habitación a una tasa de

$$Q_H = \text{COP} \times W = 3.0 \times 1500\,\text{J} = 4500\,\text{J}$$

por segundo, o a una tasa de 4500 W.

b) Si el dispositivo se invierte en verano, puede llevar calor Q_L del interior de la casa, realizando 1500 J de trabajo por segundo, para luego descargar $Q_H = 4500$ J por segundo al exterior caliente. La energía se conserva, de manera que $Q_L + W = Q_H$ (véase la figura 20-11, pero invierta el interior y el exterior de la casa). Entonces,

$$Q_L = Q_H - W = 4500\text{ J} - 1500\text{ J} = 3000\text{ J}.$$

El coeficiente de operación como acondicionador de aire sería entonces (ecuación 20-4a)

$$\text{COP} = \frac{Q_L}{W} = \frac{3000\text{ J}}{1500\text{ J}} = 2.0.$$

20–5 Entropía

Hasta el momento, la segunda ley de la termodinámica se planteó en el marco de situaciones específicas. Lo que realmente necesitamos es un enunciado general de la segunda ley de la termodinámica que cubra todas las situaciones, incluidas aquellas analizadas anteriormente en este capítulo que no se observan en la naturaleza, aun cuando no violen la primera ley de la termodinámica. No fue sino hasta la última mitad del siglo XIX que finalmente se enunció la segunda ley de la termodinámica en una forma general, en términos de una cantidad llamada **entropía**, que introdujo Clausius en la década de 1860. En la sección 20-7 veremos que la entropía se puede interpretar como una medida del orden o el desorden de un sistema.

Cuando se trata con la entropía, al igual que con la energía potencial, lo importante es el *cambio* en la entropía durante un proceso, no la cantidad absoluta. De acuerdo con Clausius, el cambio en la entropía S de un sistema, cuando se le *agrega* una cantidad de calor Q mediante un proceso reversible a temperatura constante, está dado por

$$\Delta S = \frac{Q}{T}, \tag{20–6}$$

donde T es la temperatura Kelvin.

Si la temperatura no es constante, la entropía S se define por la relación

$$dS = \frac{dQ}{T}. \tag{20–7}$$

Entonces, el cambio en la entropía de un sistema es un proceso reversible entre dos estados a y b está dado por[†]

$$\Delta S = S_b - S_a = \int_a^b dS = \int_a^b \frac{dQ}{T}. \quad \text{[proceso reversible]} \tag{20–8}$$

Un análisis cuidadoso (véase la siguiente página) indica que el cambio en la entropía, cuando un sistema pasa por un proceso reversible de cualquier estado a a otro estado b, no depende del proceso. Esto es, $\Delta S = S_b - S_a$ sólo depende de los estados a y b del sistema. Por lo tanto, la entropía (a diferencia del calor) es una *variable de estado*. Cualquier sistema en un estado determinado tiene una temperatura, un volumen, una presión y también tiene un valor particular de entropía.

Es fácil ver por qué la entropía es una variable de estado para un ciclo de Carnot. En la ecuación 20-2 vimos que $Q_L/Q_H = T_L/T_H$, que se reescribe como

$$\frac{Q_L}{T_L} = \frac{Q_H}{T_H}.$$

En el diagrama PV para un ciclo de Carnot (figura 20-7), el cambio en la entropía $\Delta S = Q/T$ al pasar del estado a al estado c a lo largo de la trayectoria abc ($= Q_H/T_H + 0$) es, por consiguiente, el mismo que al recorrer la trayectoria adc. Esto es, el cambio en la entropía es independiente de la trayectoria: sólo depende de los estados inicial y final del sistema.

[†]La ecuación 20-8 no dice nada acerca del valor absoluto de S; sólo da el cambio en S. Esto es muy parecido a la energía potencial (capítulo 8). Sin embargo, una forma de la llamada *tercera ley de la termodinámica* (véase también la sección 20-10) afirma que, conforme $T \to 0,\ S \to 0$.

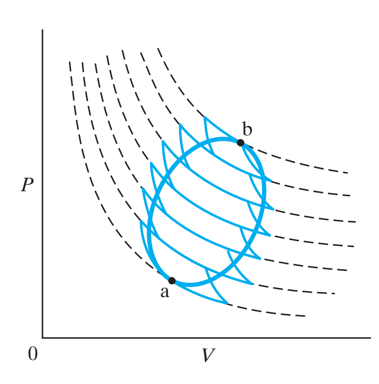


FIGURA 20–12 Cualquier ciclo reversible se puede aproximar como una serie de ciclos de Carnot. (Las líneas punteadas representan isotermas).

*Demostración de que la entropía es una variable de estado

En el estudio del ciclo de Carnot encontramos (ecuación 20-2) que $Q_L/Q_H = T_L/T_H$. Reescribimos esto como

$$\frac{Q_H}{T_H} = \frac{Q_L}{T_L}.$$

En esta relación, tanto Q_H como Q_L son positivos. Pero ahora recordemos la convención original que se utilizó en la primera ley (sección 19-6), que Q es positivo cuando representa un flujo de calor hacia el sistema (como Q_H) y negativo para un flujo de calor hacia fuera del sistema (como $-Q_L$). Entonces esta relación se convierte en

$$\frac{Q_H}{T_H} + \frac{Q_L}{T_L} = 0. \qquad \text{[ciclo de Carnot]} \quad \textbf{(20–9)}$$

Ahora considere *cualquier* ciclo reversible, representado mediante la curva suave (de forma oval) en la figura 20-12. Cualquier ciclo reversible se puede aproximar como una serie de ciclos de Carnot. La figura 20-12 muestra sólo seis —las isotermas (líneas punteadas) están conectadas mediante trayectorias adiabáticas para cada una—, y la aproximación se vuelve cada vez mejor si incrementamos el número de ciclos de Carnot. La ecuación 20-9 es válida para cada uno de estos ciclos, así que podemos escribir

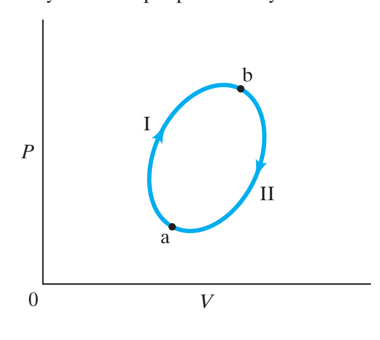
$$\Sigma \frac{Q}{T} = 0 \qquad \text{[ciclos de Carnot]} \quad \textbf{(20–10)}$$

para la suma de todos estos ciclos. Sin embargo, note que la salida de calor Q_L de un ciclo cruza la frontera debajo de él y es aproximadamente igual al negativo de la entrada de calor, Q_H, del ciclo debajo de él (la igualdad real ocurre en el límite de un número infinito de ciclos de Carnot infinitamente delgados). De esta forma, el calor que fluye en las trayectorias interiores de todos estos ciclos de Carnot se cancela, así que el calor neto transferido, y el trabajo realizado, es igual para la serie de ciclos de Carnot que para el ciclo original. En consecuencia, en el límite de un número infinito de ciclos de Carnot, la ecuación 20-10 se aplica a cualquier ciclo reversible. En este caso, la ecuación 20-10 se convierte en

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0, \qquad \text{[ciclo reversible]} \quad \textbf{(20–11)}$$

donde dQ representa un flujo de calor infinitesimal.† El símbolo $\oint$ significa que la integral se toma alrededor de una trayectoria cerrada; la integral puede comenzar en cualquier punto en la trayectoria, como en a o b en la figura 20-12, y procede en cualquier dirección. Si dividimos el ciclo de la figura 20-12 en dos partes, como se indica en la figura 20-13, entonces

FIGURA 20–13 La integral, $\oint dS$, de la entropía para un ciclo reversible es cero. Por lo tanto, la diferencia en la entropía entre los estados a y b, $S_b - S_a = \int_a^b dS$, es la misma para la trayectoria I que para la trayectoria II.



$$\underset{\text{I}}{\int_a^b} \frac{dQ}{T} + \underset{\text{II}}{\int_b^a} \frac{dQ}{T} = 0.$$

El primer término es la integral desde el punto a hasta el punto b a lo largo de la trayectoria I en la figura 20-13, y el segundo término es la integral de b de regreso hasta a, a lo largo de la trayectoria II. Si la trayectoria II se toma a la inversa, dQ en cada punto se convierte en $-dQ$, pues la trayectoria es reversible. Por lo tanto,

$$\underset{\text{I}}{\int_a^b} \frac{dQ}{T} = \underset{\text{II}}{\int_a^b} \frac{dQ}{T}. \qquad \text{[trayectorias reversibles]} \quad \textbf{(20–12)}$$

La integral de dQ/T entre cualesquiera dos estados de equilibrio, a y b, no depende de la trayectoria del proceso. Al definir la entropía como $dS = dQ/T$ (ecuación 20-7), vemos, de acuerdo con la ecuación 20-12, que el cambio en la entropía entre cualesquiera dos estados a lo largo de una trayectoria reversible es *independiente de la trayectoria entre dos puntos a y b*. Por lo tanto, la *entropía es una variable de estado*, su valor sólo depende del estado del sistema y no del proceso o de la forma como llegó ahí.‡ Ésta es una clara distinción con Q y W, que *no* son variables de estado; sus valores sí dependen de los procesos efectuados.

†Con frecuencia, dQ se escribe $đQ$: éase la nota a pie de página al final de la sección 19-6.

‡Los procesos reales son irreversibles. Puesto que la entropía es una variable de estado, el cambio en la entropía ΔS para un proceso irreversible se puede determinar al calcular ΔS para un proceso reversible entre los mismos dos estados.

20–6 Entropía y la segunda ley de la termodinámica

Definimos una nueva cantidad, S, la entropía, que se puede usar para describir el estado del sistema, junto con P, T, V, E_{int} y n. Pero, ¿qué tiene que ver con la segunda ley de la termodinámica esta cantidad más bien abstracta? Para responder esto, considere algunos ejemplos en los que calculamos los cambios de entropía durante procesos particulares. Advierta antes que la ecuación 20-8 se puede aplicar sólo a procesos reversibles. ¿Cómo, entonces, calculamos $\Delta S = S_b - S_a$ para un proceso real que es irreversible? Lo que podemos hacer es lo siguiente: imaginamos algún otro proceso *reversible* que lleve al sistema entre los mismos dos estados y calculamos ΔS para ese proceso reversible. Esto igualará ΔS para el proceso irreversible, pues ΔS depende sólo de los estados inicial y final del sistema.

Si la temperatura varía durante un proceso, con frecuencia se puede calcular una suma del flujo de calor con base en la temperatura cambiante, usando el cálculo o una computadora. Sin embargo, si el cambio de temperatura no es muy grande, se puede hacer una aproximación razonable usando el valor promedio de la temperatura, como se indica en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 20–6 ESTIMACIÓN Cambio en la entropía cuando se mezcla agua. Una muestra de 50.0 kg de agua a 20.00°C se mezcla con 50.0 kg de agua a 24.00°C. Estime el cambio en la entropía.

PLANTEAMIENTO La temperatura final de la mezcla será 22.00°C, pues comenzamos con iguales cantidades de agua. Usamos el calor específico del agua y los métodos de calorimetría (secciones 19-3 y 19-4) para determinar el calor transferido. Luego, usamos la temperatura promedio de cada muestra de agua para estimar el cambio en la entropía ($\Delta Q/T$).

SOLUCIÓN Una cantidad de calor,

$$Q = mc\,\Delta T = (50.0\,\text{kg})(4186\,\text{J/kg}\cdot\text{C}^\circ)(2.00\,\text{C}^\circ) = 4.186 \times 10^5\,\text{J},$$

fluye hacia fuera del agua caliente conforme ésta se enfría de 24 a 22°C, y ese calor fluye hacia el agua fría conforme se calienta de 20 a 22°C. El cambio total en la entropía, ΔS, será la suma de los cambios en la entropía del agua caliente, ΔS_H, y del agua fría, ΔS_C:

$$\Delta S = \Delta S_H + \Delta S_C.$$

Estimamos los cambios en la entropía al escribir $\Delta S = Q/\overline{T}$, donde $\overline{T}$ es una temperatura "promedio" para cada proceso, que debe dar una estimación razonable, ya que el cambio de temperatura es pequeño. Para el agua caliente usamos una temperatura promedio de 23°C (296 K) y para el agua fría una temperatura promedio de 21°C (294 K). Por lo tanto,

$$\Delta S_H \approx -\frac{4.186 \times 10^5\,\text{J}}{296\,\text{K}} = -1414\,\text{J/K}$$

que es negativo porque este calor fluye hacia fuera, mientras que se agrega calor al agua fría:

$$\Delta S_C \approx \frac{4.186 \times 10^5\,\text{J}}{294\,\text{K}} = 1424\,\text{J/K}.$$

La entropía del agua caliente (S_H) disminuye, pues el calor fluye hacia fuera del agua caliente. Sin embargo, la entropía del agua fría (S_C) aumenta por una cantidad mayor. El cambio total en la entropía es

$$\Delta S = \Delta S_H + \Delta S_C \approx -1414\,\text{J/K} + 1424\,\text{J/K} \approx 10\,\text{J/K}.$$

Vemos que, aunque la entropía de una parte del sistema disminuye, la entropía de la otra parte aumenta por una cantidad mayor, de manera que el cambio neto en la entropía de todo el sistema es positivo.

Ahora podemos demostrar en general que, para un sistema aislado de dos objetos, el flujo de calor del objeto de temperatura más alta (T_H) al objeto de temperatura más baja (T_L) siempre da por resultado un aumento en la entropía total. Al final, los dos objetos llegan a alguna temperatura intermedia, T_M. El calor que pierde el objeto más caliente ($Q_H = -Q$, donde Q es positivo) es igual al calor que gana el objeto más frío ($Q_L = Q$), de manera que el cambio total en la entropía es

$$\Delta S = \Delta S_H + \Delta S_L = -\frac{Q}{T_{HM}} + \frac{Q}{T_{LM}},$$

donde T_{HM} es alguna temperatura intermedia entre T_H y T_M para el objeto caliente conforme se enfría de T_H a T_M, y T_{LM} es la contraparte para el objeto frío. Puesto que la temperatura del objeto caliente es, en todo momento durante el proceso, mayor que la del objeto frío, entonces $T_{HM} > T_{LM}$. Por lo tanto,

$$\Delta S = Q\left(\frac{1}{T_{LM}} - \frac{1}{T_{HM}}\right) > 0.$$

Un objeto disminuye en entropía, mientras el otro gana entropía; sin embargo, el cambio *total* es positivo.

EJEMPLO 20–7 **Cambios en entropía en una expansión libre.** Considere la *expansión adiabática libre* de n moles de un gas ideal del volumen V_1 al volumen V_2, donde $V_2 > V_1$, como se explicó en la sección 19-7 (figura 19-14). Calcule el cambio en la entropía *a*) del gas y *b*) del ambiente circundante. *c*) Evalúe ΔS para 1.00 mol, con $V_2 = 2.00\ V_1$.

PLANTEAMIENTO En la sección 19-7 vimos que el gas inicialmente está en un contenedor cerrado de volumen V_1 y que, al abrir una válvula, se expande de forma adiabática en un contenedor previamente vacío. El volumen total de los dos contenedores es V_2. Todo el aparato está térmicamente aislado del entorno, así que no fluye calor hacia el gas, $Q = 0$. El gas no realiza trabajo, $W = 0$, de manera que no hay cambio en la energía interna, $\Delta E_{int} = 0$, y la temperatura de los estados inicial y final es la misma, $T_2 = T_1 = T$. El proceso tiene lugar muy rápidamente y, por lo tanto, es irreversible. En consecuencia, no podemos aplicar la ecuación 20-8 a este proceso. En vez de ello, debemos pensar en un proceso reversible que lleve al gas del volumen V_1 a V_2 a la misma temperatura, y usamos la ecuación 20-8 en este proceso reversible para obtener ΔS. Un proceso isotérmico reversible “hará el truco”; en tal proceso, la energía interna no cambia, así que, de acuerdo con la primera ley,

$$dQ = dW = P\,dV.$$

SOLUCIÓN *a*) Para el gas,

$$\Delta S_{gas} = \int \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int_{V_1}^{V_2} P\,dV.$$

La ley del gas ideal nos dice que $P = nRT/V$, de manera que

$$\Delta S_{gas} = \frac{nRT}{T}\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = nR\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Dado que $V_2 > V_1$, $\Delta S_{gas} > 0$.

b) Puesto que no se transfiere calor al ambiente circundante, no hay cambio de estado del ambiente debido a este proceso. Por lo tanto, $\Delta S_{ambiente} = 0$. Note que el cambio total en la entropía, $\Delta S_{gas} + \Delta S_{ambiente}$, es mayor que cero.

c) Dado que $n = 1.00$ y $V_2 = 2.00\ V_1$, entonces $\Delta S_{gas} = R\ln 2.00 = 5.76\ \mathrm{J/K}$.

EJEMPLO 20–8 **Transferencia de calor.** Una pieza de hierro de 2.00 kg al rojo vivo, a temperatura $T_1 = 880$ K, se lanza en un gran lago cuya temperatura es $T_2 = 280$ K. Suponga que el lago es tan grande que su aumento de temperatura es insignificante. Determine el cambio en la entropía *a*) del hierro y *b*) del ambiente circundante (el lago).

PLANTEAMIENTO El proceso es irreversible, aunque ocurrirá el mismo cambio en la entropía para un proceso reversible; usamos el concepto de calor específico (ecuación 19-2).

SOLUCIÓN *a*) Suponemos que el calor específico del hierro es constante a $c = 450$ J/kg·K. Entonces, $dQ = mc\,dT$ y en un proceso reversible cuasiestático

$$\Delta S_{\text{hierro}} = \int \frac{dQ}{T} = mc\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{T_2}{T_1} = -mc \ln \frac{T_1}{T_2}.$$

Al colocar los números, encontramos que

$$\Delta S_{\text{hierro}} = -(2.00\,\text{kg})(450\,\text{J/kg}\cdot\text{K}) \ln \frac{880\,\text{K}}{280\,\text{K}} = -1030\,\text{J/K}.$$

b) Las temperaturas inicial y final del lago son iguales, $T = 280$ K. El lago recibe del hierro una cantidad de calor

$$Q = mc(T_2 - T_1) = (2.00\,\text{kg})(450\,\text{J/kg}\cdot\text{K})(880\,\text{K} - 280\,\text{K}) = 540\,\text{kJ}.$$

En sentido estricto, éste es un proceso reversible (el lago se calienta localmente antes de alcanzar el equilibrio); sin embargo, es equivalente a una transferencia isotérmica reversible de calor $Q = 540$ kJ a $T = 280$ K. Por lo tanto,

$$\Delta S_{\text{ambiente}} = \frac{540\,\text{kJ}}{280\,\text{K}} = 1930\,\text{J/K}.$$

En consecuencia, aunque la entropía del hierro en realidad disminuye, el cambio *total* en la entropía del hierro más la del ambiente es positivo: 1930 J/K − 1030 J/K = 900 J/K.

EJERCICIO D Un trozo de 1.00 kg de hielo a 0°C se funde muy lentamente hasta convertirse en agua a 0°C. Suponga que el hielo está en contacto con un depósito de calor cuya temperatura sólo es infinitesimalmente mayor que 0°C. Determine el cambio en la entropía de *a*) el cubo de hielo y *b*) el depósito de calor.

En cada uno de estos ejemplos, la entropía del sistema más la del ambiente (o los alrededores) permaneció constante, o bien, aumentó. Para cualquier proceso *reversible*, como el del ejercicio D, el cambio total en la entropía es cero. Esto se puede ver en general como sigue: cualquier proceso reversible se puede considerar como una serie de transferencias isotérmicas cuasiestáticas de calor ΔQ entre un sistema y el ambiente, que difiere en temperatura sólo por una cantidad infinitesimal. Por lo tanto, el cambio en la entropía del sistema o del ambiente es $\Delta Q/T$ y el del otro es $-\Delta Q/T$, así que el total es

$$\Delta S = \Delta S_{\text{sistema}} + \Delta S_{\text{ambiente}} = 0. \qquad \text{[cualquier proceso reversible]}$$

En los ejemplos 20-6, 20-7 y 20-8, encontramos que la entropía total del sistema más la del ambiente aumenta. De hecho, se encontró que, para todos los procesos reales (irreversibles), la entropía total aumenta. No se han encontrado excepciones. De esta forma, podemos plantear el *enunciado general de la segunda ley de la termodinámica* del modo siguiente:

La entropía de un sistema aislado nunca disminuye. Permanece constante (en los procesos reversibles) o aumenta (en los procesos irreversibles).

Puesto que todos los procesos reales son irreversibles, la segunda ley se puede enunciar también como:

La entropía total de cualquier sistema más la de su ambiente aumenta como resultado de cualquier proceso natural:

SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA (enunciado general)

$$\Delta S = \Delta S_{\text{sistema}} + \Delta S_{\text{ambiente}} > 0. \qquad \textbf{(20–13)}$$

Aunque la entropía de una parte del universo puede disminuir en cualquier proceso (véase los ejemplos anteriores), la entropía de alguna otra parte del universo siempre aumenta por una cantidad mayor, así que la entropía total siempre aumenta.

Ahora que finalmente tenemos un enunciado general cuantitativo de la segunda ley de la termodinámica, vemos que es una ley inusual. Difiere considerablemente de otras leyes de la física, que por lo general son igualdades (como $F = ma$) o leyes de conservación (como la de la energía y la cantidad de movimiento). La segunda ley de la termodinámica introduce una nueva cantidad, la entropía, S, pero no dice que se conserve. Todo lo contrario. La entropía no se conserva en los procesos naturales. La entropía siempre aumenta con el tiempo.

"Flecha del tiempo"

La segunda ley de la termodinámica resume cuáles procesos se observan en la naturaleza y cuáles no. O, dicho de otra forma, nos indica la *dirección* en la que marchan los procesos. Para el inverso de cualquiera de los procesos en los últimos ejemplos, la entropía disminuiría; y nunca los observamos. Por ejemplo, nunca vemos que el calor fluya espontáneamente de un objeto frío a un objeto caliente, a la inversa del ejemplo 20-8. Tampoco vemos que un gas se comprima espontáneamente a sí mismo en un volumen menor, el inverso del ejemplo 20-7 (los gases siempre se expanden para llenar sus contenedores). Ni vemos que la energía térmica se transforme en energía cinética de una piedra de manera que ésta se eleve espontáneamente del suelo. Cualquiera de estos procesos sería congruente con la primera ley de la termodinámica (conservación de la energía). Sin embargo, no son congruentes con la segunda ley de la termodinámica, y por eso es necesaria la segunda ley. Si usted ve correr una película hacia atrás, probablemente se daría cuenta de ello inmediatamente, porque vería ocurrencias extrañas, como rocas que se elevan espontáneamente del suelo, o aire que sale de la atmósfera para llenar un globo vacío (lo contrario de la expansión libre). Cuando ve una película o un video, usted recibe información de una falsa inversión del tiempo al observar si la entropía aumenta o disminuye. Por eso, la entropía recibe el nombre de **flecha del tiempo**, ya que nos puede decir en qué dirección transcurre el tiempo.

20–7 Del orden al desorden

El concepto de entropía, como se ha discutido hasta el momento, más bien parece abstracto. Sin embargo, podemos relacionarlo con los conceptos más ordinarios de *orden* y *desorden*. De hecho, la entropía de un sistema se puede considerar una *medida del desorden del sistema*. Así, la segunda ley de la termodinámica se puede enunciar simplemente como:

SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA (enunciado general)

Los procesos naturales tienden a moverse hacia un estado de mayor desorden.

Aunque no siempre queda claro qué es exactamente lo que se quiere decir con desorden; así que consideremos unos ejemplos. Algunos de ellos nos mostrarán cómo este enunciado muy general de la segunda ley se aplica más allá de lo que generalmente se considera como termodinámica.

Observemos los procesos simples mencionados en la sección 20-1. Primero, un frasco que contiene capas separadas de sal y pimienta está más ordenado que cuando la sal y la pimienta se mezclan. Agitar un frasco que contiene capas separadas da por resultado una mezcla, y ninguna cantidad de agitación separará las capas de nuevo. El proceso natural es de un estado de relativo orden (capas) a uno de relativo desorden (una mezcla), y no al contrario. Esto es, el desorden aumenta. A continuación, una taza de café sólida es un objeto más "ordenado" y útil que los trozos de una taza rota. Las tazas se rompen cuando caen, y nunca se reparan espontáneamente a sí mismas (como la engañosa figura 20-1). De nuevo, el curso normal de los acontecimientos es un aumento del desorden.

Consideremos algunos procesos para los cuales realmente calculamos el cambio en la entropía; vemos que un aumento en la entropía da por resultado un aumento en el desorden (o viceversa). Cuando el hielo se funde para convertirse en agua a 0°C, la entropía del agua aumenta (ejercicio D). Intuitivamente, podemos considerar al agua sólida, es decir, el hielo, como un estado más ordenado que el estado fluido menos ordenado capaz de fluir por todo el lugar. Este cambio de orden a desorden se puede ver más claramente desde el punto de vista molecular: el arreglo ordenado de las moléculas de agua en un cristal de hielo cambió al movimiento desordenado y un tanto aleatorio de las moléculas en el estado fluido.

Cuando un objeto caliente se pone en contacto con un objeto frío, el calor fluye de la temperatura alta a la baja, hasta que los dos objetos alcanzan la misma temperatura intermedia. Al principio del proceso podemos distinguir dos clases de moléculas: las

que tienen una elevada energía cinética promedio (las del objeto caliente) y las que tienen baja energía cinética promedio (las del objeto más frío). Después del proceso en el que fluye calor, todas las moléculas están en una clase con la misma energía cinética promedio. Ya no se tiene el arreglo más ordenado de moléculas en dos clases. El orden se convirtió en desorden. Más aún, los objetos caliente y frío separados podrían funcionar como las regiones de temperatura caliente y fría de una máquina térmica y, por ende, se podrían usar para obtener trabajo útil. Sin embargo, una vez que los dos objetos se ponen en contacto y llegan a la misma temperatura, no se puede obtener trabajo. El desorden aumentó, pues un sistema que tiene la capacidad de realizar trabajo seguramente se considerará como un sistema que tiene un mayor orden que un sistema que ya no es capaz de efectuar trabajo.

Cuando una piedra cae al suelo, su energía cinética macroscópica se transforma en energía térmica. La energía térmica se asocia con el movimiento desordenadamente aleatorio de las moléculas; sin embargo, las moléculas en la piedra que cae tienen (todas ellas) la misma velocidad hacia abajo, además de sus propias velocidades aleatorias. En consecuencia, la energía cinética más ordenada de la piedra como un todo cambia a energía térmica desordenada cuando la piedra golpea el suelo. El desorden aumenta en este proceso, como ocurre en todos los procesos que se presentan en la naturaleza.

* Evolución biológica



Evolución y desarrollo biológico

Un interesante ejemplo del aumento en la entropía se relaciona con la evolución biológica y el crecimiento de los organismos. A todas luces, un ser humano es un organismo sumamente ordenado. La teoría de la evolución describe el proceso de transformación desde las primeras macromoléculas y formas de vida simples hasta el *Homo sapiens*, un proceso de orden creciente. Asimismo, el desarrollo de un individuo desde que es una sola célula hasta que se convierte en una persona adulta es un proceso de orden creciente. ¿Estos procesos violan la segunda ley de la termodinámica? No. En los procesos de evolución y crecimiento, e incluso durante la vida madura de un individuo, los productos de desecho se eliminan. Estas pequeñas moléculas que permanecen como resultado del metabolismo son simples moléculas sin mucho orden. Por lo tanto, representan desorden relativamente mayor o entropía. De hecho, la entropía total de las moléculas desechadas por los organismos durante los procesos de evolución y crecimiento es mayor que la disminución en la entropía asociada con el orden del individuo en crecimiento o las especies en evolución.

20–8 Indisponibilidad de energía: Muerte térmica

En el proceso de conducción térmica de un objeto caliente a uno frío, hemos visto que la entropía aumenta y que el orden tiende al desorden. Los objetos caliente y frío, por separado, podrían funcionar como las regiones de temperatura alta y baja de una máquina térmica y, por consiguiente, podrían utilizarse para obtener trabajo útil. Sin embargo, después de que los dos objetos se ponen en contacto uno con otro y alcanzan la misma temperatura uniforme, ya no se puede obtener trabajo de ellos. Por lo que respecta a la capacidad de realizar trabajo útil, el orden se convirtió en desorden en este proceso.

Lo mismo se puede decir acerca de una piedra que cae y llega al reposo al golpear el suelo. Antes de golpear el suelo, toda la energía cinética de la piedra podría haberse utilizado para realizar trabajo útil. Sin embargo, una vez que la energía mecánica de la piedra se convierte en energía térmica, ya no es posible la realización de trabajo útil.

Ambos ejemplos ilustran otro importante aspecto de la segunda ley de la termodinámica:

> **En cualquier proceso natural, parte de la energía deja de estar disponible para realizar trabajo útil.**

En cualquier proceso, jamás se pierde energía (siempre se conserva). Más bien, la energía se vuelve menos útil: puede realizar menos trabajo útil. Conforme pasa el tiempo, la **energía se degrada** en cierto sentido; tarde o temprano pasa de formas más ordenadas (como la mecánica) a la forma menos ordenada de energía interna o térmica. La entropía es un factor en este caso, porque la cantidad de energía que deja de estar disponible para realizar trabajo es proporcional al cambio en la entropía durante cualquier proceso.†

†Es posible demostrar que la cantidad de energía que deja de estar disponible para realizar trabajo útil es igual a $T_L \Delta S$, donde T_L es la menor temperatura disponible y ΔS es el aumento total en la entropía durante el proceso.

Un resultado natural de la degradación de la energía es la predicción de que, conforme transcurre el tiempo, el universo debería aproximarse a un estado de máximo desorden. La materia se volvería una mezcla uniforme y el calor fluiría de las regiones de alta temperatura a las de baja temperatura hasta que todo el universo esté a una misma temperatura. Entonces no se podría realizar ningún trabajo. Toda la energía del universo se habrá degradado a energía térmica. Esta predicción, llamada **muerte térmica** del universo, se ha discutido mucho; sin embargo, se encuentra muy lejana en el futuro. Es un tema complicado, y algunos científicos cuestionan qué modelo termodinámico del universo es posible o adecuado.

*20–9 Interpretación estadística de la entropía y la segunda ley

Las ideas de entropía y desorden quedan más claras si se utiliza el análisis estadístico o probabilístico del estado molecular de un sistema. Este enfoque estadístico, que Ludwig Boltzmann (1844-1906) aplicó por primera vez hacia finales del siglo XIX, hace una distinción clara entre el "macroestado" y el "microestado" de un sistema. El **microestado** de un sistema se especifica al dar la posición y la velocidad de cada partícula (o molécula). El **macroestado** de un sistema se especifica al dar las propiedades macroscópicas de un sistema: temperatura, presión, número de moles, etcétera. En realidad, sólo podemos conocer el macroestado de un sistema. Existen demasiadas moléculas en un sistema como para tener la capacidad de conocer la velocidad y posición de cada una en un momento dado. No obstante, podemos hipotetizar una gran cantidad de diferentes microestados que puedan corresponder al *mismo* macroestado.

Veamos un ejemplo muy sencillo. Suponga que usted repetidamente agita cuatro monedas en su mano y las deja caer sobre una mesa. Especificar el número de caras y el número de cruces que aparecen en un lanzamiento dado es el macroestado de este sistema. Especificar cada moneda como una cara o una cruz es el microestado del sistema. En la siguiente tabla vemos cuántos microestados corresponden a cada macroestado:

Macroestado	Microestados posibles (H = cara, T = cruz)	Número de microestados
4 caras	H H H H	1
3 caras, 1 cruz	H H H T, H H T H, H T H H, T H H H	4
2 caras, 2 cruces	H H T T, H T H T, T H H T, H T T H, T H T H, T T H H	6
1 cara, 3 cruces	T T T H, T T H T, T H T T, H T T T	4
4 caras	T T T T	1

Una suposición básica detrás del enfoque estadístico es que *cada microestado es igualmente probable*. Por lo tanto, el número de microestados que dan el mismo macroestado corresponde a la probabilidad relativa de que ocurra ese macroestado. El macroestado de dos caras y dos cruces es el más probable en el caso de lanzar cuatro monedas; del total de 16 posibles microestados, seis corresponden a dos caras y dos cruces, así que la probabilidad de obtener dos caras y dos cruces es de 6 en 16, o del 38%. La probabilidad de obtener una cara y tres cruces es 4 de 16, o del 25%. La probabilidad de obtener cuatro caras es de sólo 1 en 16, o del 6%. Si usted lanzó las monedas 16 veces, quizá encuentre que dos caras y dos cruces no aparecen exactamente 6 veces, o que cuatro cruces no aparecen exactamente una vez. Éstas son sólo probabilidades o promedios. Sin embargo, si usted realizó 1600 lanzamientos, muy cerca del 38% de ellos corresponderían a dos caras y dos cruces. Cuanto mayor sea el número de intentos, más cerca estarán los porcentajes de las probabilidades calculadas.

EJERCICIO E En la tabla anterior, ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos dos caras? *a*) $\frac{1}{2}$; *b*) $\frac{1}{16}$; *c*) $\frac{1}{8}$; *d*) $\frac{3}{8}$; *e*) $\frac{11}{16}$.

Si lanzamos más monedas (por ejemplo, 100, todas al mismo tiempo), la probabilidad relativa de que todas resulten caras (o todas cruces) se reduce enormemente. Sólo hay un microestado que corresponde a todas caras. Para 99 caras y 1 cruz, hay 100 microestados, pues cada una de las monedas podría ser la única cruz. En la tabla 20-1 se dan las probabilidades relativas para otros macroestados. Son posibles aproximadamente 1.3×10^{30} microestados.† Por lo tanto, la probabilidad relativa de que todas las monedas caigan en cara es 1 en 10^{30}, ¡un evento increíblemente improbable! La probabilidad de obtener 50 caras y 50 cruces (véase la tabla 20-1) es $(1.0 \times 10^{29})/1.3 \times 10^{30} = 0.08$ o del 8%. La probabilidad de obtener cualquier resultado entre 45 y 55 caras es de más del 70%.

TABLA 20–1 Probabilidades de varios macroestados para el lanzamiento de 100 monedas

Macroestado			
Caras	**Cruces**	**Número de microestados**	**Probabilidad**
100	0	1	7.9×10^{-31}
99	1	1.0×10^{2}	7.9×10^{-29}
90	10	1.7×10^{13}	1.4×10^{-17}
80	20	5.4×10^{20}	4.2×10^{-10}
60	40	1.4×10^{28}	0.01
55	45	6.1×10^{28}	0.05
50	50	1.0×10^{29}	0.08
45	55	6.1×10^{28}	0.05
40	60	1.4×10^{28}	0.01
20	80	5.4×10^{20}	4.2×10^{-10}
10	90	1.7×10^{13}	1.4×10^{-17}
1	99	1.0×10^{2}	7.9×10^{-29}
0	100	1	7.9×10^{-31}

De esta manera, vemos que, conforme aumenta el número de monedas, la probabilidad de obtener el arreglo más ordenado (todas caras o todas cruces) se vuelve extremadamente improbable. El arreglo menos ordenado (mitad caras, mitad cruces) es el más probable, y la probabilidad de estar entre, digamos, el 5% del arreglo más probable aumenta enormemente conforme el número de monedas aumenta. Estas mismas ideas se pueden aplicar a las moléculas de un sistema. Por ejemplo, el estado más probable de un gas (como el aire en una habitación) es uno en el que las moléculas ocupan todo el espacio y se mueven aleatoriamente; esto corresponde a una distribución maxwelliana (figura 20-14a; véase también la sección 18-2). Por otra parte, el arreglo muy ordenado de todas las moléculas ubicadas en una esquina de la habitación y todas moviéndose con la misma velocidad (figura 20-14b) es extremadamente improbable.

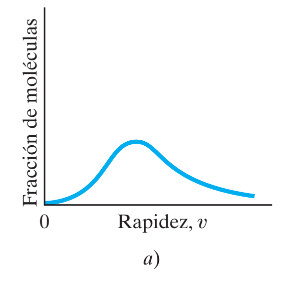
A partir de estos ejemplos, es claro que la probabilidad se relaciona directamente con el desorden y, por lo tanto, con la entropía. Es decir, el estado más probable es aquel con mayor entropía o mayor desorden y aleatoriedad. Boltzmann demostró, en concordancia con la definición de Clausius ($dS = dQ/T$), que la entropía de un sistema en un (macro) estado dado se puede representar como

$$S = k \ln \mathcal{W}, \qquad \textbf{(20–14)}$$

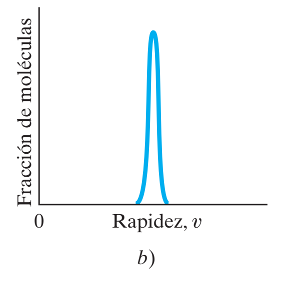
donde k es la constante de Boltzmann $\left(k = R/N_{\mathrm{A}} = 1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K}\right)$ y $\mathcal{W}$ es el número de microestados que corresponden al macroestado dado. De esta forma, $\mathcal{W}$ es proporcional a la probabilidad de ocurrencia de ese estado. $\mathcal{W}$ se llama la **probabilidad termodinámica** o, en ocasiones, el parámetro de desorden.

†Cada moneda tiene dos posibilidades: cara o cruz. Entonces, el número posible de microestados es $2 \times 2 \times 2 \times \cdots = 2^{100} = 1.27 \times 10^{30}$ (utilizando una calculadora o logaritmos).

FIGURA 20–14 *a*) Distribución más probable de rapideces moleculares en un gas (maxwelliana o aleatoria); *b*) distribución de rapideces ordenada (pero enormemente improbable) en la que todas las moléculas tienen casi la misma rapidez



a)



b)

EJEMPLO 20–9 Expansión libre: determinación estadística de la entropía. Utilice la ecuación 20-14 para determinar el cambio en la entropía para la *expansión adiabática libre* de un gas, un cálculo que hicimos microscópicamente en el ejemplo 20-7. Suponga que $\mathcal{W}$, el número de microestados para cada macroestado, es el número de posiciones posibles.

PLANTEAMIENTO Suponemos que el número de moles es $n = 1$, y entonces el número de moléculas es $N = nN_A = N_A$. Dejamos que el volumen se duplique, como en el ejemplo 20-7. Puesto que el volumen se duplica, el número de posiciones posibles para cada molécula se duplica.

SOLUCIÓN Cuando el volumen se duplica, cada molécula tiene disponibles el doble de posiciones (microestados). Para dos moléculas, el número de microestados totales aumenta por $2 \times 2 = 2^2$. Para N_A moléculas, el número total de microestados aumenta en un factor de $2 \times 2 \times 2 \times \cdots = 2^{N_A}$.

$$\frac{\mathcal{W}_2}{\mathcal{W}_1} = 2^{N_A}.$$

El cambio en la entropía es, a partir de la ecuación 20-14,

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k(\ln \mathcal{W}_2 - \ln \mathcal{W}_1) = k \ln \frac{\mathcal{W}_2}{\mathcal{W}_1} = k \ln 2^{N_A} = kN_A \ln 2 = R \ln 2$$

que es el mismo resultado obtenido en el ejemplo 20-7.

En términos de probabilidad, la segunda ley de la termodinámica —que nos dice que la entropía aumenta en cualquier proceso— se reduce al enunciado de que ocurren aquellos procesos que son más probables. Así, la segunda ley se convierte en un enunciado trivial. Sin embargo, ahora hay un elemento adicional. La segunda ley en términos de probabilidad no *prohíbe* una disminución en la entropía. En vez de ello, dice que la probabilidad es extremadamente baja. No es imposible que la sal y la pimienta puedan separarse espontáneamente en capas, o que una taza de té rota se pueda reparar a sí misma. Incluso es posible que un lago pueda congelarse en un caluroso día de verano (esto es, que el calor fluya fuera del frío lago hacia el entorno más cálido). Sin embargo, la probabilidad de que ocurran tales eventos es extremadamente pequeña. En los ejemplos de las monedas, vimos que aumentar el número de monedas de 4 a 100 reduce drásticamente la probabilidad de grandes desviaciones del arreglo promedio, o más probable. En los sistemas ordinarios no se trata con 100 moléculas, sino con números increíblemente grandes de moléculas: en solo 1 mol hay 6×10^{23} moléculas. En consecuencia, la probabilidad de desviación lejos del promedio es increíblemente pequeña. Por ejemplo, se ha calculado que la probabilidad de que una piedra en reposo sobre el suelo transforme 1 cal de energía térmica en energía mecánica y se eleve en el aire es mucho menor que la probabilidad de que un grupo de monos que teclean al azar, por casualidad, produzcan las obras completas de Shakespeare.

*20–10 Temperatura termodinámica: Tercera ley de la termodinámica

En la sección 20-3 vimos que, para un ciclo de Carnot, la razón entre el calor absorbido Q_H del depósito de alta temperatura y el calor expulsado Q_L hacia el depósito de baja temperatura se relaciona directamente con la razón de las temperaturas de los dos depósitos (ecuación 20-2):

$$\frac{Q_L}{Q_H} = \frac{T_L}{T_H}.$$

Este resultado es válido para cualquier máquina reversible y no depende de la sustancia operativa. Por lo tanto, puede servir como la base para la **escala de temperatura Kelvin** o **termodinámica**.

Utilizamos esta relación y la escala de temperatura de gas ideal (sección 17-10) para completar la definición de la escala termodinámica: asignamos el valor $T_{tp} = 273.16$ K al punto triple del agua, de manera que

$$T = (273.16\text{ K})\left(\frac{Q}{Q_{tp}}\right),$$

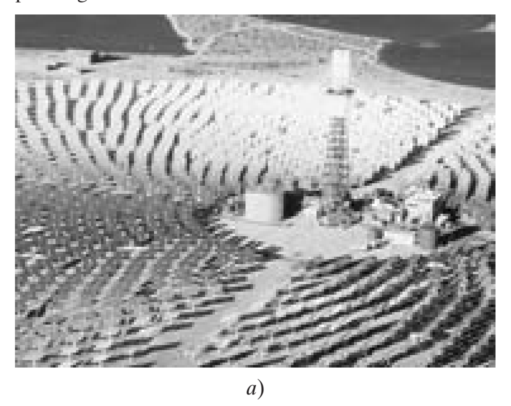
donde Q y Q_{tp} son las magnitudes de los calores intercambiados por una máquina de Carnot con depósitos a temperaturas T y T_{tp}. Entonces, la escala termodinámica es idéntica a la escala de gas ideal sobre el rango de validez de esta última.

Las temperaturas muy bajas son difíciles de obtener experimentalmente. Cuanto más cerca del cero absoluto esté la temperatura, más difícil es reducir la temperatura aún más, y por lo general se acepta que *no es posible alcanzar el cero absoluto en cualquier número finito de procesos*. Este último enunciado es una forma de expresar† la **tercera ley de la termodinámica**. Puesto que la máxima eficiencia que puede tener cualquier máquina térmica es la eficiencia de Carnot

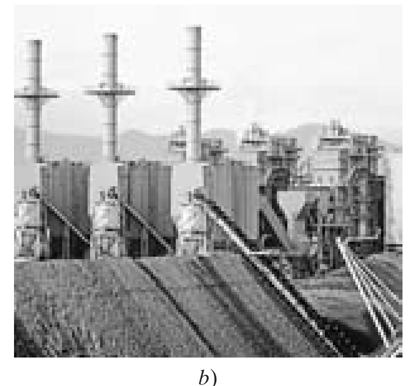
$$e = 1 - \frac{T_L}{T_H},$$

y dado que T_L nunca puede ser cero, vemos que no es posible una máquina térmica 100% eficiente.

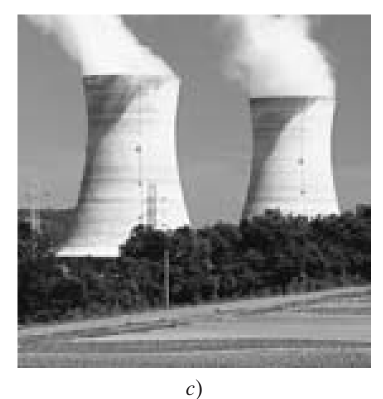
FIGURA 20–15 *a*) Un arreglo de espejos enfoca la luz solar sobre un calentador para producir vapor en una instalación de energía solar. *b*) Una planta de vapor de combustible fósil (que utiliza productos de desecho forestal, biomasa). *c*) Grandes torres de enfriamiento en una planta generadora de electricidad.



a)



b)

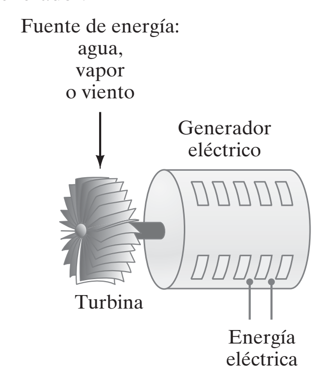


c)

*20–11 Contaminación térmica, calentamiento global y recursos energéticos

Mucha de la energía que se emplea en la vida diaria (desde los vehículos automotores hasta la mayor parte de la electricidad generada en las plantas eléctricas) utiliza una máquina térmica. La electricidad producida por el agua que cae en los diques, por molinos de viento o por celdas solares (figura 20-15a) no implica una máquina térmica. En Estados Unidos más del 90% de la energía producida se genera en plantas de vapor de combustible fósil (carbón, petróleo o gas, véase la figura 20-15b), las cuales utilizan una máquina térmica (en esencia máquinas de vapor). En las plantas eléctricas, el vapor impulsa las turbinas y los generadores (figura 20-16) cuya salida es energía eléctrica. Los diversos medios para hacer girar la turbina se exponen brevemente en la tabla 20-2 (de la siguiente página), junto con algunas de las ventajas y desventajas de cada uno. Incluso las plantas nucleares utilizan combustible nuclear para poner en funcionamiento una máquina de vapor.

FIGURA 20–16 La energía mecánica se transforma en energía eléctrica con una turbina y un generador.



FÍSICA APLICADA
Máquinas térmicas y contaminación térmica

La salida de calor Q_L de toda máquina térmica, desde las plantas eléctricas hasta los automóviles, se conoce como **contaminación térmica** porque el ambiente debe absorber este calor (Q_L) por medio del agua de los ríos o lagos, o por medio del aire con la ayuda de grandes torres de enfriamiento (figura 20-15c). Cuando el agua es el refrigerante, este calor eleva la temperatura del agua, lo que altera la ecología natural de la vida acuática (principalmente porque el agua más caliente retiene menos oxígeno). En el caso de las torres de enfriamiento de aire, el calor de salida Q_L eleva la temperatura de la atmósfera, lo que afecta al clima.

†Véase también el enunciado en la nota al pie de la página 539.

TABLA 20–2 Recursos de energía eléctrica

Forma de producción de energía eléctrica	Porcentaje de producción (aprox.)		Ventajas	Desventajas
	EUA	Mundial		
Plantas de vapor de combustible fósil: Quema de carbón, petróleo o gas natural para hervir agua, lo que produce vapor a alta presión que impulsa la turbina de un generador (figuras 20-3b, 20-16); utiliza una máquina térmica.	71	66	Se sabe cómo construirlas; por ahora relativamente poco costosas.	Contaminación del aire; contaminación térmica; eficiencia limitada; devastación de terrenos por la extracción de materias primas (minería); calentamiento global; accidentes como derrames de petróleo en el mar; suministro limitado de combustible (las estimaciones varían de un par de décadas a unos cuantos siglos).
Energía nuclear:				
Fisión: Núcleos de átomos de uranio o plutonio se dividen ("fisionan") liberando energía (capítulo 42) que calienta vapor; utiliza una máquina térmica.	20	16	Por lo general casi no contaminan el aire; menos contribución al calentamiento global; relativamente barata.	Contaminación térmica; los accidentes pueden liberar radiactividad dañina; dificultad para desechar los productos radiactivos; posible desviación del material nuclear por terroristas; limitado suministro de combustible.
Fusión: Energía liberada cuando isótopos de hidrógeno (u otros núcleos pequeños) se combinan o se "funden" (capítulo 42).	0	0	Relativamente "limpia"; vasto suministro de combustible (hidrógeno en las moléculas de agua en los océanos); menor contribución al calentamiento global.	Todavía no es factible.
Hidroeléctrica: El agua que cae impulsa turbinas en la base de una presa.	7	16	No se necesita máquina térmica; no hay contaminación del aire, del agua o térmica; relativamente barata; alta eficiencia; las presas ayudan a controlar inundaciones.	Los depósitos detrás de las presas inundan terrenos panorámicos o habitados; las presas bloquean la migración corriente arriba del salmón y otras especies de peces para su reproducción; quedan pocas ubicaciones para nuevas presas; sequías.
Geotérmica: Vapor natural del interior de la Tierra llega a la superficie (fuentes termales, géiseres, respiraderos de vapor); o el agua fría que pasa y entra en contacto con roca seca y caliente para convertirse en vapor.	<1	<1	No se necesita máquina térmica; escasa contaminación del aire; buena eficiencia; relativamente barata y "limpia".	Pocos sitios adecuados; escasa producción; el contenido mineral del agua caliente empleada es contaminante.
Potencia eólica: Molinos de viento de 3 a 5 kW (las aspas tienen envergadura de hasta 50 m) impulsan un generador.	<1	<1	No requiere máquina térmica; no hay contaminación del aire, del agua o térmica; relativamente barata.	Los enormes molinos de viento pueden afectar el clima y resultan antiestéticos; implican riesgos para las aves migratorias; los vientos no siempre son fuertes.
Energía solar:	<1	<1		
Calentamiento solar activo: Paneles solares sobre los techos absorben los rayos solares, que calientan agua en tubos destinada al calentamiento de espacios y al suministro de agua caliente.			No se necesita máquina térmica; no hay contaminación del aire o térmica; suministro ilimitado de combustible.	Limitaciones de espacio; requieren un respaldo; relativamente caro; es menos efectivo cuando está nublado.
Calentamiento solar pasivo: Dispositivos arquitectónicos: ventanas dirigidas hacia los rayos solares, persianas sobre las ventanas para mantener fuera los rayos solares en el verano.			No se necesita máquina térmica; no hay contaminación del aire o térmica; relativamente barato.	Casi ninguna, pero también se necesitan otros métodos.
Celdas solares (celdas fotovoltaicas): Convierten la luz solar directamente en electricidad sin usar una máquina térmica.			No se requiere de máquina térmica; muy baja contaminación térmica, del aire y agua; buena eficiencia ($>30\%$ y mejorando).	Costosas; contaminación química al fabricarlas; se necesitan grandes áreas de terreno cuando la energía del Sol no se concentra.

La **contaminación del aire** (provocada por las sustancias que se liberan de la quema de combustibles fósiles en automóviles, plantas eléctricas y hornos industriales) origina el esmog y otros problemas. Otro tema del que se habla mucho es la acumulación de CO_2 en la atmósfera de la Tierra como resultado de la quema de combustibles fósiles. El CO_2 absorbe parte de la radiación infrarroja que emite naturalmente la Tierra (sección 19-10) y, por consiguiente, contribuye al **calentamiento global**, un serio problema que se puede reducir limitando la quema de combustibles fósiles.

Sin embargo, la contaminación térmica es inevitable. Los ingenieros pueden intentar diseñar y construir motores que sean más eficientes, pero no pueden rebasar la eficiencia de Carnot y deben aceptar la idea de que T_L es a lo más la temperatura ambiente del agua o del aire. La segunda ley de la termodinámica nos indica el límite impuesto por la naturaleza. Lo que podemos hacer, a la luz de la segunda ley de la termodinámica, es usar menos energía y conservar las fuentes de combustibles.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Termodinámica

1. Defina el **sistema** con el que trata; distinga del entorno el sistema que somete a estudio.
2. Tenga cuidado con los **signos** asociados con **trabajo** y **calor**. En la primera ley, el trabajo realizado *por* el sistema es positivo; el trabajo realizado *sobre* el sistema es negativo. El calor *agregado* al sistema es positivo, pero el calor *removido* de él es negativo. Con las máquinas térmicas, por lo general la admisión de calor, el calor expulsado y el trabajo realizado se consideran como positivos.
3. Observe las **unidades** usadas para trabajo y calor; el trabajo con mucha frecuencia se expresa en joules y el calor puede estar en calorías, kilocalorías o joules. Sea consistente: elija sólo una unidad para trabajar un problema.
4. Las **temperaturas** por lo general se deben expresar en kelvin; las *diferencias* de temperatura se expresan en °C o K.
5. La **eficiencia** (o coeficiente de operación) es una razón de dos transferencias de energía: la salida útil dividida entre la entrada requerida. La eficiencia (pero *no* el coeficiente de operación) siempre tiene un valor menor que 1 y, por eso, con frecuencia se expresa como porcentaje.
6. La **entropía** de un sistema aumenta cuando se agrega calor al sistema, y disminuye cuando se extrae calor. Si el calor se transfiere del sistema A al sistema B, el cambio en la entropía de A es negativo y el cambio en la entropía de B es positivo.

Resumen

Una **máquina térmica** es un dispositivo para transformar energía térmica en trabajo útil mediante flujo de calor.

La **eficiencia** de una máquina térmica se define como la razón entre el trabajo W realizado por la máquina y la entrada de calor Q_H. De acuerdo con la conservación de la energía, la salida de trabajo es igual a $Q_H - Q_L$, donde Q_L es el calor que escapa hacia el ambiente; por lo tanto, la eficiencia es

$$e = \frac{W}{Q_H} = 1 - \frac{Q_L}{Q_H}. \quad \textbf{(20–1)}$$

La máquina de Carnot (idealizada) consiste en dos procesos isotérmicos y dos adiabáticos en un ciclo reversible. Para una **máquina de Carnot**, o cualquier máquina reversible que opere entre dos temperaturas T_H y T_L (en kelvin), la eficiencia es

$$e_{\text{ideal}} = 1 - \frac{T_L}{T_H}. \quad \textbf{(20–3)}$$

Las máquinas irreversibles (reales) tienen una eficiencia menor que esto.

La operación de **refrigeradores** y **acondicionadores de aire** es el inverso de la de una máquina térmica: se realiza trabajo para extraer calor de una región fría y expulsarlo hacia una región con una temperatura más alta. El coeficiente de operación (COP) para refrigeradores y acondicionadores de aire es

$$\text{COP} = \frac{Q_L}{W}, \quad \left[\begin{array}{c}\text{refrigerador o}\\ \text{acondicionador de aire}\end{array}\right] \quad \textbf{(20–4a)}$$

donde W es el trabajo necesario para remover calor Q_L del área a la temperatura baja.

Una **bomba térmica** realiza trabajo W para llevar calor Q_L del exterior frío y entregar calor Q_H para calentar el interior de un lugar. El coeficiente de operación de una bomba térmica es

$$\text{COP} = \frac{Q_H}{W}. \quad [\text{bomba térmica}] \quad \textbf{(20–5)}$$

La **segunda ley de la termodinámica** se puede enunciar en varias formas equivalentes:

a) El calor fluye espontáneamente de un objeto caliente a uno frío, pero no a la inversa;

b) No puede haber una máquina térmica 100% eficiente, es decir, una que pueda convertir por completo una cantidad dada de calor en trabajo;

c) los procesos naturales tienden a moverse hacia un estado de mayor desorden o mayor **entropía**.

El inciso *c*) es el enunciado más general de la segunda ley de la termodinámica y se puede expresar como: la entropía total, S, de cualquier sistema más la de su entorno aumenta como resultado de cualquier proceso natural:

$$\Delta S > 0. \quad \textbf{(20–13)}$$

La entropía, que es una variable de estado, es una medida cuantitativa del desorden de un sistema. El cambio en la entropía de un sistema durante un proceso reversible está dado por $\Delta S = \int dQ/T$.

La segunda ley de la termodinámica nos indica en cuál dirección tienden a avanzar los procesos; por eso, a la entropía se le llama “flecha del tiempo”.

Conforme trascurre el tiempo, la energía se degrada a formas menos útiles, es decir, está menos disponible para realizar trabajo útil.

[*Todas las máquinas térmicas originan **contaminación térmica**, porque expulsan calor al ambiente].

Preguntas

1. ¿La energía mecánica alguna vez se puede transformar por completo en calor o energía interna? ¿Puede ocurrir lo contrario? En cada caso, si su respuesta es no, explique por qué; si responde afirmativamente, dé uno o dos ejemplos.
2. ¿Es posible calentar una cocina en invierno si se deja la puerta del horno abierta? ¿Es posible enfriar la cocina en un día caluroso de verano si se deja abierta la puerta del refrigerador? Explique.
3. ¿Sería útil una definición de la eficiencia de una máquina térmica como $e = W/Q_L$? Explique.
4. ¿Cuáles son las áreas de alta temperatura y de baja temperatura en *a*) un motor de combustión interna y *b*) un motor de vapor? En sentido estricto, ¿son depósitos de calor?
5. ¿Cuál modificación daría la mayor eficiencia de una máquina de Carnot: un aumento de 10 C° en el depósito de alta temperatura, o una disminución de 10 C° en el depósito de baja temperatura?
6. Los océanos contienen una enorme cantidad de energía térmica (interna). ¿Por qué, en general, no es posible convertir esta energía en trabajo útil?
7. Discuta los factores que evitan que las máquinas reales alcancen la eficiencia de Carnot.
8. La válvula de expansión en un sistema de refrigeración (figura 20-10) es crucial para enfriar el fluido. Explique cómo ocurre el enfriamiento.
9. Describa un proceso en la naturaleza que sea casi reversible.
10. *a*) Describa cómo se podría agregar calor a un sistema de manera reversible. *b*) ¿Podría usar un quemador de estufa para agregar calor a un sistema de manera reversible? Explique.
11. Suponga que un gas se expande al doble de su volumen original *a*) adiabáticamente y *b*) isotérmicamente. ¿Cuál proceso daría por resultado un mayor cambio en la entropía? Explique.
12. Dé tres ejemplos, distintos a los mencionados en este capítulo, de procesos que ocurren naturalmente en los que el orden se convierte en desorden. Discuta la naturaleza observable del proceso inverso.
13. ¿Cuál cree que tenga mayor entropía: 1 kg de hierro sólido o 1 kg de hierro líquido? ¿Por qué?
14. *a*) ¿Qué ocurre si usted retira la tapa de una botella que contiene gas cloro? *b*) ¿Alguna vez ocurre el proceso inverso? *c*) ¿Puede pensar en otros dos ejemplos de irreversibilidad?
15. Se le pide probar una máquina que el inventor llama "acondicionador de aire interior": una gran caja, que está en medio de la habitación, con un cable que se enchufa en un tomacorriente. Cuando la máquina se enciende, usted siente una corriente de aire frío que sale de ella. ¿Cómo sabe usted que esta máquina no puede enfriar la habitación?
16. Piense en varios procesos (distintos a los ya mencionados) que obedecerían la primera ley de la termodinámica pero que, si realmente ocurrieran, violarían la segunda ley.
17. Suponga que un montón de papeles se tiran en el suelo; luego usted los apila cuidadosamente. ¿Esto viola la segunda ley de la termodinámica? Explique.
18. La primera ley de la termodinámica a veces se enuncia caprichosamente como "Es imposible obtener algo a cambio de nada", y la segunda ley como "No se puede salir sin ganar o perder". Explique cómo estos enunciados podrían ser equivalentes a los enunciados formales.
19. Se agrega muy lentamente (cuasiestáticamente) leche en polvo al agua mientras se agita. ¿Es éste un proceso reversible? Explique.
20. Dos sistemas idénticos se llevan del estado a al estado b mediante dos procesos *irreversibles* diferentes. ¿El cambio en la entropía del sistema será el mismo para cada proceso? ¿Para el ambiente? Responda de forma cuidadosa y exhaustiva.
21. Se puede decir que *el cambio total en la entropía durante un proceso es una medida de la irreversibilidad del proceso*. Discuta por qué esto es válido, comenzando con el hecho de que $\Delta S_{\text{total}} = \Delta S_{\text{sistema}} + \Delta S_{\text{ambiente}} = 0$ para un proceso reversible.
22. Utilice argumentos, distintos al principio de aumento de entropía, para demostrar que, para un proceso adiabático, $\Delta S = 0$ si se realiza reversiblemente y $\Delta S > 0$ si se realiza irreversiblemente.

Problemas

20–2 Máquinas térmicas

1. (I) Una máquina térmica expulsa 7800 J de calor mientras realiza 2600 J de trabajo útil. ¿Cuál es la eficiencia de esta máquina?
2. (I) Cierta planta eléctrica entrega 580 MW de potencia eléctrica. Estime la descarga de calor por segundo, si se supone que la planta tiene una eficiencia del 35%.
3. (II) Un automóvil compacto experimenta una fuerza de arrastre total a 55 mi/h de aproximadamente 350 N. Si este automóvil rinde 35 millas por galón de gasolina a esta rapidez, y un litro de gasolina (1 gal = 3.8 L) libera aproximadamente 3.2×10^7 J cuando se quema, ¿cuál es la eficiencia del automóvil?
4. (II) Un motor de gasolina de cuatro cilindros tiene una eficiencia de 0.22 y entrega 180 J de trabajo por ciclo por cilindro. El motor enciende a 25 ciclos por segundo. *a*) Determine el trabajo realizado por segundo. *b*) ¿Cuál es la entrada de calor total por segundo de la gasolina? *c*) Si el contenido energético de la gasolina es de 130 MJ por galón, ¿cuánto dura un galón?
5. (II) La quema de gasolina en un automóvil libera aproximadamente 3.0×10^4 kcal/gal. Si un automóvil promedia 38 km/gal cuando se conduce a 95 km/h, lo que requiere de 25 hp, ¿cuál es la eficiencia del motor en estas condiciones?
6. (II) La figura 20-17 es un diagrama *PV* para una máquina térmica reversible en la que 1.0 mol de argón, un gas monoatómico casi ideal, inicialmente se encuentra a PTE (punto a). Los puntos b y c están en una isoterma a $T = 423$ K. El proceso ab es a volumen constante, y el proceso ac es a presión constante. *a*) ¿La trayectoria del ciclo se realiza en sentido horario o en sentido contrario? *b*) ¿Cuál es la eficiencia de esta máquina?

P, V, 0, a, b, c, T = 423 K

FIGURA 20–17 Problema 6.

7. (III) La operación de un *motor diesel* se puede idealizar mediante el ciclo que se representa en la figura 20-18. El aire entra al cilindro durante la carrera de admisión (que no es parte del ciclo idealizado). El aire se comprime adiabáticamente, trayectoria ab. En el punto b, el combustible diesel se inyecta en el cilindro e inmediatamente se quema, pues la temperatura es muy alta. La combustión es lenta y, durante la primera parte de la carrera de potencia, el gas se expande a presión (casi) constante, trayectoria bc. Después de quemarse, el resto de la carrera de potencia es adiabática, trayectoria cd. La trayectoria da corresponde a la carrera de escape. *a*) Demuestre que, para una máquina reversible cuasiestática que experimenta este ciclo usando un gas ideal, la eficiencia ideal es

$$e = 1 - \frac{(V_a/V_c)^{-\gamma} - (V_a/V_b)^{-\gamma}}{\gamma\left[(V_a/V_c)^{-1} - (V_a/V_b)^{-1}\right]},$$

donde V_a/V_b es la "razón de compresión", V_a/V_c es la "razón de expansión" y γ se define mediante la ecuación 19-14. *b*) Si $V_a/V_b = 16$ y $V_a/V_c = 4.5$, calcule la eficiencia, suponiendo que el gas es diatómico (como N_2 y O_2) e ideal.

Q_H, b, c, P, d, Q_L, a, 0, V

FIGURA 20–18 Problema 7.

20–3 Máquina de Carnot

8. (I) ¿Cuál es la eficiencia máxima de una máquina térmica cuyas temperaturas de operación son 550 y 365°C?

9. (I) No es necesario que el ambiente caliente de una máquina térmica sea más caliente que la temperatura ambiente. El nitrógeno líquido (77 K) es aproximadamente tan barato como el agua embotellada. ¿Cuál sería la eficiencia de una máquina que utilice el calor transferido del aire a temperatura ambiente (293 K) al "combustible" de nitrógeno líquido (figura 20-19)?



FIGURA 20–19 Problema 9.

10. (II) Una máquina térmica expulsa su calor a 340°C y tiene una eficiencia de Carnot del 38%. ¿Qué temperatura de escape le permitiría lograr una eficiencia de Carnot del 45%?

11. (II) *a*) Demuestre que el trabajo realizado por una máquina de Carnot es igual al área encerrada por el ciclo de Carnot en un diagrama *PV*, figura 20-7. (Véase la sección 19-7.) *b*) Generalice esto a cualquier ciclo reversible.

12. (II) Las temperaturas de operación de una máquina de Carnot son 210 y 45°C. La salida de potencia de la máquina es 950 W. Calcule la tasa de salida de calor.

13. (II) Una planta eléctrica nuclear opera al 65% de su máxima eficiencia teórica (de Carnot) entre temperaturas de 660 y 330°C. Si la planta produce energía eléctrica a la tasa de 1.2 GW, ¿cuánto calor de escape se descarga por hora?

14. (II) Una máquina de Carnot realiza trabajo a una tasa de 520 kW, con una entrada de 950 kcal de calor por segundo. Si la temperatura de la fuente de calor es de 560°C, ¿a qué temperatura se expulsa el calor de desecho?

15. (II) Suponga que un alpinista de 65 kg necesita 4.0×10^3 kcal de energía para suministrar el valor energético requerido del metabolismo de un día. Estime la altura máxima a la que la persona puede escalar en un día, usando sólo esta cantidad de energía. Como una predicción aproximada, considere al individuo como una máquina térmica aislada, que opera entre la temperatura interna de 37°C (98.6°F) y la temperatura ambiental del aire de 20°C.

16. (II) Un automóvil particular realiza trabajo a una tasa aproximada de 7.0 kJ/s cuando viaja con una rapidez estable de 20.0 m/s a lo largo de un camino horizontal. Éste es el trabajo realizado contra la fricción. El automóvil puede viajar 17 km con 1 L de gasolina a esta rapidez (aproximadamente 40 mi/gal). ¿Cuál es el valor mínimo de T_H si T_L es de 25°C? La energía disponible de 1 L de gas es 3.2×10^7 J.

17. (II) Una máquina térmica utiliza una fuente de calor a 580°C y tiene una eficiencia de Carnot del 32%. Para aumentar la eficiencia al 38%, ¿cuál debe ser la temperatura de la fuente de calor?

18. (II) La sustancia operativa de cierta máquina de Carnot es 1.0 mol de un gas monoatómico ideal. Durante la porción de expansión isotérmica del ciclo de esta máquina, el volumen del gas se duplica, mientras que, durante la expansión adiabática, el volumen aumenta en un factor de 5.7. La salida de trabajo de la máquina es de 920 J en cada ciclo. Calcule las temperaturas de los dos depósitos entre los que opera la máquina.

19. (III) Un ciclo de Carnot (figura 20-7) tiene las siguientes condiciones: $V_a = 7.5$ L, $V_b = 15.0$ L, $T_H = 470°C$ y $T_L = 260°C$. El gas empleado en el ciclo es 0.50 mol de un gas diatómico, $\gamma = 1.4$. Calcule *a*) las presiones en a y b; *b*) los volúmenes en c y d. *c*) ¿Cuál es el trabajo realizado a lo largo del proceso ab? *d*) ¿Cuál es la pérdida de calor a lo largo del proceso cd? *e*) Calcule el trabajo neto realizado durante todo el ciclo. *f*) ¿Cuál es la eficiencia del ciclo, usando la definición $e = W/Q_H$? Demuestre que esta definición es igual a la de la ecuación 20-3.

20. (III) Un mol de un gas monoatómico experimenta un ciclo de Carnot con $T_H = 350°C$ y $T_L = 210°C$. La presión inicial es de 8.8 atm. Durante la expansión isotérmica, el volumen se duplica. *a*) Encuentre los valores de la presión y el volumen en los puntos a, b, c y d (véase la figura 20-7). *b*) Determine Q, W y ΔE_{int} para cada segmento del ciclo. *c*) Calcule la eficiencia del ciclo usando las ecuaciones 20-1 y 20-3.

***21.** (III) En un motor que aproxima el ciclo de Otto (figura 20-8), se debe encender vapor de gasolina, al final de la compresión adiabática del cilindro, mediante la chispa de una bujía. La temperatura de ignición de vapor de gasolina de 87 octanos es aproximadamente de 430°C y, suponiendo que el gas operativo es diatómico y entra al cilindro a 25°C, determine la máxima razón de compresión del motor.

20–4 Refrigeradores, acondicionadores de aire, bombas térmicas

22. (I) Si un refrigerador ideal mantiene su contenido a 3.0°C cuando la temperatura de la casa es de 22°C, ¿cuál es su coeficiente de operación?

23. (I) La temperatura baja del serpentín de enfriamiento de un congelador es de −15°C y la temperatura de descarga es de 33°C. ¿Cuál es el máximo coeficiente de operación teórico?

24. (II) Una máquina ideal (de Carnot) tiene una eficiencia del 38%. Si fuera posible invertir su funcionamiento como el de una bomba térmica, ¿cuál sería su coeficiente de operación?

25. (II) Una bomba térmica ideal se usa para mantener la temperatura interior de una casa a $T_{ent} = 22°C$ cuando la temperatura exterior es T_{ext}. Suponga que, cuando opera, la bomba de calor realiza trabajo a una tasa de 1500 W. También suponga que la casa pierde calor mediante conducción a través de sus paredes y otras superficies a una tasa dada por (650 W/C°)($T_{ent} - T_{ext}$). *a*) ¿A qué temperatura exterior tendría que operar la bomba térmica en todo momento con la finalidad de mantener la casa a una temperatura interior de 22°C? *b*) Si la temperatura exterior es de 8°C, ¿qué porcentaje del tiempo tiene que operar la bomba térmica para mantener la casa a una temperatura interior de 22°C?

26. (II) El refrigerador de un restaurante tiene un coeficiente de operación de 5.0. Si la temperatura en la cocina afuera del refrigerador es de 32°C, ¿cuál es la menor temperatura que podría obtenerse dentro del refrigerador si éste fuera ideal?

27. (II) Se emplea una bomba térmica para mantener caliente una casa a 22°C. ¿Cuánto trabajo se requiere para que la bomba entregue 3100 J de calor a la casa, si la temperatura exterior es *a*) 0°C, *b*) −15°C? Suponga un comportamiento ideal (de Carnot).

28. (II) *a*) Dado que el coeficiente de operación de un refrigerador se define (ecuación 20-4a) como

$$\mathrm{COP} = \frac{Q_L}{W},$$

demuestre que, para un refrigerador ideal (de Carnot),

$$\mathrm{COP}_{ideal} = \frac{T_L}{T_H - T_L}.$$

b) Escriba el COP en términos de la eficiencia *e* de la máquina térmica reversible obtenida al invertir el funcionamiento del refrigerador. *c*) ¿Cuál es el coeficiente de operación para un refrigerador ideal que mantiene un compartimiento congelador a −18°C cuando la temperatura del condensador es de 24°C?

29. (II) Un refrigerador “de Carnot” (el inverso de una máquina de Carnot) absorbe calor del compartimiento congelador a una temperatura de −17°C y lo expulsa en la habitación a 25°C. *a*) ¿Cuánto trabajo debe realizar el refrigerador para convertir 0.40 kg de agua a 25°C en hielo a −17°C? *b*) Si la salida del compresor es de 180 W, ¿qué tiempo mínimo se necesita para tomar 0.40 kg de agua a 25°C y congelarla a 0°C?

30. (II) Una bomba térmica central que opera como un acondicionador de aire extrae 33,000 Btu por hora de un edificio y opera entre las temperaturas de 24 y 38°C. *a*) Si su coeficiente de operación es 0.20 el de un acondicionador de aire de Carnot, ¿cuál es el coeficiente de operación efectivo? *b*) ¿Cuál es la potencia (kW) requerida del motor compresor? *c*) ¿Cuál es la potencia en términos de hp?

31. (II) ¿Qué volumen de agua a 0°C puede convertir un congelador en cubos de hielo en 1.0 h, si el coeficiente de operación de la unidad enfriadora es 7.0 y la entrada de potencia es 1.2 kilowatts?

20–5 y 20–6 Entropía

32. (I) ¿Cuál es el cambio en la entropía de 250 g de vapor a 100°C cuando se condensa para convertirse en agua a 100°C?

33. (I) Una caja de 7.5 kg que tiene una rapidez inicial de 4.0 m/s se desliza a lo largo de una tabla áspera y llega al reposo. Estime el cambio total en la entropía del universo. Suponga que todos los objetos están a temperatura ambiente (293 K).

34. (I) ¿Cuál es el cambio en la entropía de 1.00 m^3 de agua a 0°C cuando se congela para convertirse en hielo a 0°C?

35. (II) Si 1.00 m^3 de agua a 0°C se congela se y enfría a −10°C al estar en contacto con una gran cantidad de hielo a −10°C, estime el cambio total en la entropía del proceso.

36. (II) Si 0.45 kg de agua a 100°C, mediante un proceso reversible, se convierten en vapor a 100°C, determine el cambio en la entropía de *a*) el agua, *b*) el entorno y *c*) el universo como un todo. *d*) ¿Cómo diferirían sus respuestas si el proceso fuera irreversible?

37. (II) Una varilla de aluminio conduce 9.50 cal/s desde una fuente de calor, que se mantiene a 225°C, hacia un gran cuerpo de agua a 22°C. Calcule la tasa a la que aumenta la entropía en este proceso.

38. (II) Un pieza de aluminio de 2.8 kg a 43.0°C se coloca en 1.0 kg de agua en un contenedor de poliestireno a temperatura ambiente (20°C). Estime el cambio neto en la entropía del sistema.

39. (II) Un gas ideal se expande isotérmicamente (T = 410 K) desde un volumen de 2.50 L y una presión de 7.5 atm, a una presión de 1.0 atm. ¿Cuál es el cambio en la entropía para este proceso?

40. (II) Cuando 2.0 kg de agua a 12.0°C se mezclan con 3.0 kg de agua a 38.0°C en un contenedor bien aislado, ¿cuál es el cambio en la entropía del sistema? *a*) Realice una estimación; *b*) use la integral $\Delta S = \int dQ/T$.

41. (II) *a*) Un cubo de hielo de masa *m* a 0°C se coloca en una gran habitación a 20°C. El calor fluye (de la habitación al cubo de hielo) de tal forma que el cubo de hielo se funde y el agua líquida se calienta a 20°C. La habitación es tan grande que su temperatura permanece casi en 20°C en todo momento. Calcule el cambio en la entropía del sistema (agua + habitación) causado por este proceso. ¿Este proceso ocurrirá naturalmente? *b*) Una masa *m* de agua líquida a 20°C se coloca en una gran habitación a 20°C. El calor fluye (del agua a la habitación) de tal forma que el agua líquida se enfría a 0°C y luego se congela en un cubo de hielo a 0°C. La habitación es tan grande que su temperatura permanece en 20°C en todo momento. Calcule el cambio en la entropía del sistema (agua + habitación) causado por este proceso. ¿Este proceso ocurrirá naturalmente?

42. (II) La temperatura de 2.0 moles de un gas diatómico ideal va de 25 a 55°C a un volumen constante. ¿Cuál es el cambio en la entropía? Use $\Delta S = \int dQ/T$.

43. (II) Calcule el cambio en la entropía de 1.00 kg de agua cuando se calienta de 0 a 75°C. *a*) Realice una estimación; *b*) use la integral $\Delta S = \int dQ/T$. *c*) ¿La entropía del entorno cambia? Si es así, ¿en cuánto?

44. (II) Un gas ideal de *n* moles experimenta el proceso reversible ab que se muestra en el diagrama *PV* de la figura 20-20. La temperatura *T* del gas es la misma en los puntos a y b. Determine el cambio en la entropía del gas causado por este proceso.

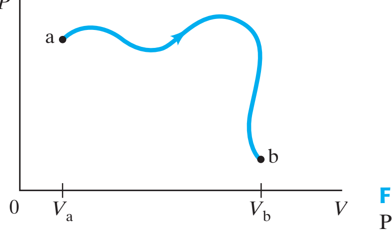


FIGURA 20–20 Problema 44.

45. (II) Dos muestras de un gas ideal inicialmente están a la misma temperatura y presión. Cada una se comprime reversiblemente de un volumen V a un volumen $V/2$, una isotérmicamente y la otra adiabáticamente. *a*) ¿En cuál muestra la presión final es mayor? *b*) Determine mediante integración el cambio en la entropía del gas para cada proceso. *c*) ¿Cuál es el cambio en la entropía del ambiente para cada proceso?

46. (II) Una taza aislada de aluminio de 150 g a 15°C se llena con 215 g de agua a 100°C. Determine *a*) la temperatura final de la mezcla y *b*) el cambio total en la entropía como resultado del proceso de mezcla (use $\Delta S = \int dQ/T$).

47. (II) *a*) ¿Por qué esperaría que el cambio total en la entropía en un ciclo de Carnot fuera cero? *b*) Efectúe un cálculo para demostrar que es cero.

48. (II) 1.00 mol de gas nitrógeno (N_2) y 1.00 mol de gas argón (Ar) están en contenedores aislados separados, de igual tamaño y a la misma temperatura. Luego, los contenedores se conectan y se permite que los gases (que se suponen ideales) se mezclen. ¿Cuál es el cambio en la entropía *a*) del sistema y *b*) del ambiente? *c*) Repita el inciso *a*) sólo que ahora suponga que un contenedor es el doble de grande que el otro.

49. (II) Los procesos termodinámicos a veces se representan en diagramas *TS* (temperatura-entropía), y no en diagramas *PV*. Determine la pendiente de un proceso a volumen constante en un diagrama *TS*, para un sistema con n moles de gas ideal, con calor específico molar a volumen constante C_V se mantiene a temperatura T.

50. (III) El calor específico por mol de potasio a bajas temperaturas está dado por $C_V = aT + bT^3$, donde $a = 2.08\ \text{mJ/mol}\cdot\text{K}^2$ y $b = 2.57\ \text{mJ/mol}\cdot\text{K}^4$. Determine (por integración) el cambio en la entropía de 0.15 mol de potasio cuando su temperatura se reduce de 3.0 K a 1.0 K.

51. (III) Considere un gas ideal de n moles con calores específicos molares C_V y C_P. *a*) Comience con la primera ley y demuestre que, cuando la temperatura y el volumen de este gas cambian mediante un proceso reversible, su cambio en la entropía está dado por

$$dS = nC_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}.$$

b) Demuestre que la expresión en el inciso *a*) se puede escribir como

$$dS = nC_V \frac{dP}{P} + nC_P \frac{dV}{V}.$$

c) Con la expresión del inciso *b*), demuestre que, si $dS = 0$ para el proceso reversible (esto es, el proceso es adiabático), entonces $PV^\gamma =$ constante, donde $\gamma = C_P/C_V$.

20–8 Indisponibilidad de la energía

52. (III) Un teorema general afirma que la cantidad de energía que deja de estar disponible para realizar trabajo útil en cualquier proceso es igual a $T_L\,\Delta S$, donde T_L es la menor temperatura disponible y ΔS es el cambio total en la entropía durante el proceso. Demuestre que esto es válido en los casos específicos de *a*) una piedra que cae y llega al reposo cuando golpea el suelo; *b*) la expansión adiabática libre de un gas ideal; y *c*) la conducción de calor, Q, desde un depósito de alta temperatura (T_H) hasta un depósito a baja temperatura (T_L). [*Sugerencia:* En el inciso *c*), compare con una máquina de Carnot].

53. (III) Determine el trabajo disponible en un bloque de cobre de 3.5 kg a 490 K, si el entorno está a 290 K. Utilice los resultados del problema 52.

*20–9 Interpretación estadística de la entropía

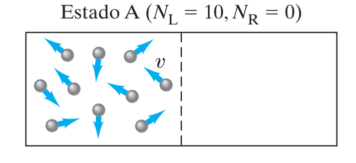
***54.** (I) Use la ecuación 20-14 para determinar la entropía de cada uno de los cinco macroestados que se listan en la tabla de la página 546.

***55.** (II) Suponga que usted agita repetidamente seis monedas en su mano y las deja caer al suelo. Construya una tabla que muestre el número de microestados que corresponden a cada macroestado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener *a*) tres caras y tres cruces y *b*) seis caras?

***56.** (II) Calcule las probabilidades relativas, cuando usted lanza dos dados, de obtener *a*) un 7, *b*) un 11, *c*) un 4.

***57.** (II) *a*) Suponga que usted tiene cuatro monedas, todas con cruces hacia arriba. Ahora las arregla de manera que dos caras y dos cruces estén hacia arriba. ¿Cuál fue el cambio en la entropía de las monedas? *b*) Suponga que su sistema está constituido por las 100 monedas de la tabla 20-1; ¿cuál es el cambio en la entropía de las monedas si inicialmente están mezcladas de manera aleatoria, 50 caras y 50 cruces, y usted las coloca de manera que las 100 sean caras? *c*) Compare estos cambios en la entropía con los cambios en la entropía termodinámica ordinaria, como en los ejemplos 20-6, 20-7 y 20-8.

***58.** (III) Considere un sistema aislado parecido a un gas que consiste en una caja que contiene $N = 10$ átomos distinguibles, cada uno en movimiento con la misma rapidez v. El número de formas únicas en que estos átomos se pueden ordenar de manera que N_I átomos estén dentro de la mitad izquierda de la caja y N_D átomos estén dentro de la mitad derecha de la caja está dado por $N!/N_I!N_D!$, donde, por ejemplo, el factorial $4! = 4\cdot3\cdot2\cdot1$ (la única excepción es que $0! = 1$). Defina cada arreglo único de átomos dentro de la caja como un microestado de este sistema. Ahora imagine los siguientes dos macroestados posibles: el estado A, donde todos los átomos están dentro de la mitad izquierda de la caja y ninguno está dentro de la mitad derecha; y el estado B, donde la distribución es uniforme (esto es, hay el mismo número de átomos en cada mitad). Véase la figura 20-21. *a*) Suponga que el sistema inicialmente se encuentra en el estado A y, en un momento posterior, se encuentra en el estado B. Determine el cambio en la entropía del sistema. ¿Este proceso puede ocurrir naturalmente? *b*) Suponga que el sistema inicialmente se encuentra en el estado B y, en un momento posterior, se encuentra en el estado A. Determine el cambio en la entropía del sistema. ¿Este proceso puede ocurrir naturalmente?



Estado B ($N_L = 5, N_R = 5$)

FIGURA 20–21 Problema 58.

*20–11 Recursos de energía

***59.** (II) La energía se puede almacenar para su uso durante la demanda pico mediante el bombeo de agua hacia un gran depósito cuando la demanda es baja y luego liberándola para activar turbinas cuando se necesite. Suponga que el agua se bombea a un lago a 135 m por arriba de las turbinas, a una tasa de 1.35×10^5 kg/s durante 10.0 h en al noche. *a*) ¿Cuánta energía (kWh) se necesita para efectuar esta operación cada noche? *b*) Si toda esta energía se libera durante 14 h en un día, con un 75% de eficiencia, ¿cuál es la salida de potencia promedio?

*$*$**60.** (II) Las celdas solares (figura 20-22) producen aproximadamente 40 W de electricidad por metro cuadrado de área superficial si están directamente frente al Sol. ¿Cuál debe ser su superficie para satisfacer las necesidades de una casa que requiere 22 kWh/día? ¿Un panel de estas dimensiones cabría en el techo de una casa promedio? (Suponga que el Sol brilla aproximadamente 9 h/día).



FIGURA 20–22 Problema 60.

*$*$**61.** (II) En un lago artificial, creado por una presa, se almacena agua (figura 20-23). La profundidad del agua es de 38 m en la presa y, a través de las turbinas hidroeléctricas instaladas cerca de la base de la presa, se mantiene una tasa de flujo estable de 32 m^3/s. ¿Cuánta potencia eléctrica se puede generar?



FIGURA 20–23 Problema 61.

Problemas generales

62. Se ha sugerido que podría desarrollarse una máquina térmica que utilice la diferencia de temperatura entre el agua en la superficie del océano y el agua a varios cientos de metros de profundidad. En los trópicos, las temperaturas pueden ser 27°C y 4°C, respectivamente. *a*) ¿Cuál es la máxima eficiencia que tal máquina podría tener? *b*) ¿Por qué sería factible tal máquina, a pesar de la baja eficiencia? *c*) ¿Puede imaginar algún efecto adverso en el ambiente provocado por la máquina en cuestión?

63. Una máquina térmica lleva un gas diatómico alrededor del ciclo que se muestra en la figura 20-24. *a*) Con la ley del gas ideal, determine cuántos moles de gas hay en esta máquina. *b*) Determine la temperatura en el punto c. *c*) Calcule la entrada de calor al gas durante el proceso a volumen constante del punto b al punto c. *d*) Calcule el trabajo realizado por el gas durante el proceso isotérmico del punto a al punto b. *e*) Calcule el trabajo realizado por el gas durante el proceso adiabático del punto c al punto a. *f*) Determine la eficiencia de la máquina. *g*) ¿Cuál es la máxima eficiencia posible para una máquina que opera entre T_a y T_c?

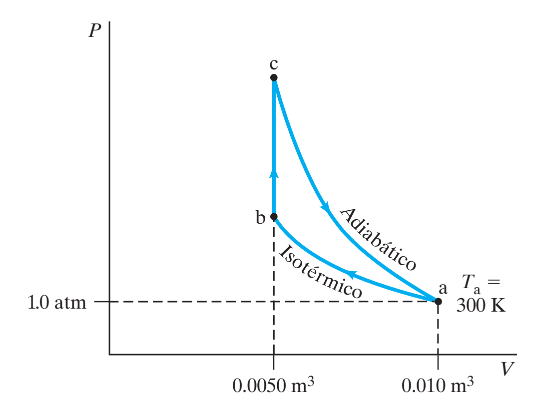


FIGURA 20–24 Problema 63.

64. Una taza aislada de aluminio de 126.5 g a 18.00°C se llena con 132.5 g de agua a 46.25°C. Después de algunos minutos, se alcanza el equilibrio. Determine *a*) la temperatura final y *b*) el cambio total en la entropía.

65. *a*) En una planta eléctrica a vapor, las máquinas de vapor trabajan en pares, y la salida de calor de la primera es aproximadamente la entrada de calor de la segunda. Las temperaturas de operación de la primera son 710 y 430°C, y las de la segunda son 415 y 270°C. Si el calor de la combustión de carbón es 2.8×10^7 J/kg, ¿a qué tasa se debe quemar el carbón si la planta debe entregar 950 MW de potencia? Suponga que la eficiencia de las máquinas es el 65% de la eficiencia ideal (de Carnot). *b*) Para enfriar la planta se utiliza agua. Si se permite que la temperatura del agua aumente por no más de 5.5 C°, estime cuánta agua debe pasar a través de la planta por hora..

66. (II) Las unidades de refrigeración se pueden clasificar en "toneladas". Un sistema de acondicionamiento de 1 ton de aire puede remover suficiente energía para congelar 1 tonelada británica (2000 libras = 909 kg) de agua a 0°C en hielo a 0°C en las 24 horas de un día. Si, en un día a 35°C, el interior de una casa se mantiene a 22°C mediante la operación continua de un sistema de acondicionamiento de aire de 5 ton, ¿cuánto le cuesta al dueño de la casa este enfriamiento por hora? Suponga que el trabajo realizado por la unidad de refrigeración se impulsa mediante electricidad que cuesta $0.10 por kWh y que el coeficiente de operación de la unidad es el 15% del coeficiente de un refrigerador ideal. 1 kWh = 3.60×10^6 J.

67. Una planta eléctrica con eficiencia del 35% entrega 920 MW de potencia eléctrica. Se utilizan torres de enfriamiento para expulsar el calor. *a*) Si se permite que la temperatura del aire (15°C) se eleve 7.0 C°, estime qué volumen de aire (en km^3) se calienta por día. ¿El clima local se calentará significativamente? *b*) Si el aire calentado formara una capa de 150 m de grosor, estime el área que se cubriría durante 24 h de operación. Suponga que el aire tiene una densidad de 1.2 kg/m^3 y que su calor específico es aproximadamente 1.0 kJ/kg·C° a presión constante.

68. *a*) ¿Cuál es el coeficiente de operación de una bomba térmica ideal que extrae calor del aire en el exterior a 11°C y deposita calor dentro de una casa a 24°C? *b*) Si esta bomba térmica opera a 1400 W de potencia eléctrica, ¿cuál es el máximo calor que puede entregar a la casa cada hora?

69. La operación de cierta máquina térmica lleva un gas monoatómico ideal a través del ciclo que se muestra como el rectángulo en el diagrama *PV* de la figura 20-25. *a*) Determine la eficiencia de esta máquina. Sean Q_H y Q_L la entrada de calor total y la salida de calor total durante un ciclo de esta máquina. *b*) Compare (como razón) la eficiencia de esta máquina con la de la máquina de Carnot que opera entre T_H y T_L, donde T_H y T_L son las temperaturas máxima y mínima alcanzadas.

FIGURA 20–25 Problema 69.

70. El motor de un automóvil, cuya salida de potencia es de 155 hp, opera aproximadamente con un 15% de eficiencia. Suponga que la temperatura del agua del motor de 95°C es su depósito de temperatura fría (de salida) y 495°C es su temperatura de "admisión" térmica (la temperatura de la mezcla de gas-aire que explota). *a*) ¿Cuál es la razón entre su eficiencia relativa y su máxima eficiencia posible (de Carnot)? *b*) Estime cuánta potencia (en watts) se usa para mover el automóvil, y cuánto calor, en joules y en kcal, sale al aire en 1.0 h.

71. Suponga que una planta eléctrica entrega energía a 850 MW usando turbinas de vapor. El vapor va a las turbinas sobrecalentadas a 625 K y deposita su calor no utilizado en el agua de un río a 285 K. Suponga que la turbina opera como una máquina de Carnot ideal. *a*) Si la tasa de flujo del río es de 34 m^3/s, estime el aumento de temperatura promedio del agua del río inmediatamente corriente abajo de la planta. *b*) ¿Cuál es el aumento en la entropía por kilogramo de agua del río corriente abajo, en J/kg·K?

72. 0.75 moles de un gas monoatómico ideal a PTE experimentan primero una expansión isotérmica, de manera que el volumen en b es 2.5 veces el volumen en a (figura 20-26). A continuación, se extrae calor a un volumen constante, de manera que la presión disminuye. Luego, el gas se comprime adiabáticamente de regreso al estado original. *a*) Calcule las presiones en b y c. *b*) Determine la temperatura en c. *c*) Determine el trabajo realizado, la entrada o extracción de calor, y el cambio en la entropía para cada proceso. *d*) ¿Cuál es la eficiencia de este ciclo?

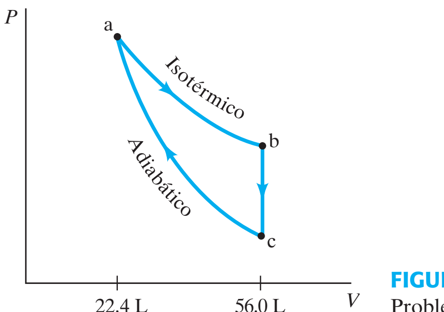


FIGURA 20–26 Problema 72.

73. Dos automóviles de 1100 kg viajan a 75 km/h en direcciones opuestas cuando chocan y llegan al reposo. Estime el cambio en la entropía del universo como resultado de esta colisión. Suponga que $T = 15°C$.

74. Metabolizar 1.0 kg de grasa da por resultado aproximadamente 3.7×10^7 J de energía interna en el cuerpo. *a*) En un día, ¿cuánta grasa quema el cuerpo para mantener la temperatura corporal de una persona que permanece en cama y metaboliza a una tasa promedio de 95 W? *b*) ¿Cuánto tardará en quemar 1.0 kg de grasa de esta forma, si se supone que no hay ingesta de alimento?

75. Una unidad de enfriamiento para un nuevo congelador tiene un área superficial interna de 6.0 m^2 y está acotada por paredes de 12 cm de grosor, con una conductividad térmica de 0.050 W/m·K. El interior se debe mantener a −10°C en una habitación que está a 20°C. El motor para la unidad de enfriamiento funciona no más del 15% del tiempo. ¿Cuál es el requerimiento mínimo de potencia del motor de enfriamiento?

76. Un acondicionador de aire ideal mantiene la temperatura dentro de una habitación a 21°C cuando la temperatura exterior es de 32°C. Si 3.3 kW de potencia entran a una habitación a través de las ventanas en la forma de radiación directa del Sol, ¿cuánta potencia eléctrica se ahorraría si las ventanas estuvieran sombreadas, de manera que sólo pudieran pasar 500 W a través de ellas?

77. El *ciclo de Stirling*, que se muestra en la figura 20-27, es útil para describir motores de combustión interna, así como sistemas de energía solar. Determine la eficiencia del ciclo en términos de los parámetros que se muestran, si se supone que un gas monoatómico es la sustancia operativa. Los procesos ab y cd son isotérmicos, mientras que bc y da son isocónicos. ¿Cómo se compara con la eficiencia de Carnot?

FIGURA 20–27 Problema 77.

78. Una turbina de gas opera bajo el *ciclo de Brayton*, que se muestra en el diagrama *PV* de la figura 20-28. En el proceso ab, la mezcla aire-combustible experimenta una compresión adiabática. A continuación, en el proceso bc, hay un calentamiento isobárico (presión constante) por combustión. El proceso cd es una expansión adiabática con expulsión de los productos a la atmósfera. El paso de regreso, da, tiene lugar a presión constante. Si el gas operativo se comporta como un gas ideal, demuestre que la eficiencia del ciclo de Brayton es

$$e = 1 - \left(\frac{P_b}{P_a}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}.$$

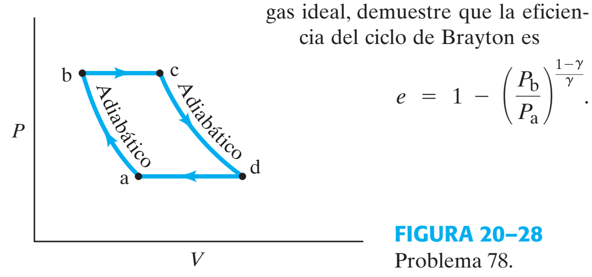


FIGURA 20–28 Problema 78.

79. Los procesos termodinámicos se pueden representar no sólo en diagramas *PV* y *PT*; otra representación útil es un diagrama *TS* (temperatura-entropía). *a*) Dibuje un diagrama *TS* para un ciclo de Carnot. *a*) ¿Qué representa el área dentro de la curva?

80. Una lata de aluminio, con capacidad calorífica despreciable, se llena con 450 g de agua a 0°C y luego se lleva a contacto térmico con una lata similar llena con 450 g de agua a 50°C. Determine el cambio en la entropía del sistema si no se permite intercambiar calor con el entorno. Use $\Delta S = \int dQ/T$.

81. Un deshumidificador es, en esencia, un "refrigerador con la puerta abierta". El aire húmedo se lleva hacia dentro mediante un ventilador y se guía a un serpentín frío, cuya temperatura es menor que el punto de rocío; parte del agua del aire se condensa. Después de que esta agua se extrae, el aire se calienta para que tenga de nuevo su temperatura original y se envía a la habitación. En un deshumidificador bien diseñado, el calor se intercambia entre el aire entrante y el saliente. De esta forma, el calor que se elimina por el serpentín del refrigerador proviene principalmente de la condensación de vapor de agua a líquido. Estime cuánta agua elimina un deshumidificador ideal en 1.0 h, si la temperatura de la habitación es de 25°C, el agua se condensa a 8°C y el deshumidificador realiza trabajo a la tasa de 650 W de potencia eléctrica.

*__82.__ Un tazón contiene un gran número de gomitas de dulce rojas, anaranjadas y verdes. Usted va a formar una línea de tres gomitas. *a*) Construya una tabla que muestre el número de microestados que corresponden a cada macroestado. Luego determine la probabilidad de obtener *b*) tres gomitas rojas y *c*) 2 gomitas verdes y 1 anaranjada.

*Problemas numéricos/por computadora

*__83.__ (II) A baja temperatura, el calor específico del diamante varía con la temperatura absoluta T, de acuerdo con la ecuación de Debye, $C_V = 1.88 \times 10^3 \left(T/T_D\right)^3 \ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$ donde la temperatura Debye para el diamante es $T_D = 2230$ K. Use una hoja de cálculo e integración numérica para determinar el cambio en la entropía de 1.00 mol de diamante cuando se calienta a volumen constante de 4 a 40 K. Su resultado debe concordar dentro del 2% con el resultado obtenido al integrar la expresión para dS. [*Sugerencia: $dS = nCV\,dT/T$*, donde n es el número de moles].

Respuestas a los ejercicios

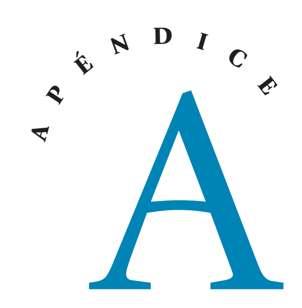
A: No. La eficiencia no tiene sentido para un solo proceso. Se define (ecuación 20-1) sólo para procesos cíclicos que regresan al estado inicial.

B: *d*).

C: *c*).

D: 1220 J/K; _1220 J/K. (Note que el cambio en la entropía *total*, $\Delta S_{\text{hielo}} + \Delta S_{\text{depósito}}$, es cero).

E: *e*).



Fórmulas matemáticas

A–1 Fórmula cuadrática

Si $ax^2 + bx + c = 0$

entonces $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

A–2 Expansión binomial

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$(x + y)^n = x^n\left(1 + \frac{y}{x}\right)^n = x^n\left(1 + n\frac{y}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{y^2}{x^2} + \cdots\right)$$

A–3 Otras expansiones

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots$$

$$\tan\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2}{15}\theta^5 + \cdots \qquad |\theta| < \frac{\pi}{2}$$

En general: $f(x) = f(0) + \left(\dfrac{df}{dx}\right)_0 x + \left(\dfrac{d^2f}{dx^2}\right)_0 \dfrac{x^2}{2!} + \cdots$

A–4 Exponentes

$$(a^n)(a^m) = a^{n+m} \qquad \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$(a^n)(b^n) = (ab)^n \qquad a^n a^{-n} = a^0 = 1$$

$$(a^n)^m = a^{nm} \qquad a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

A–5 Áreas y volúmenes

Objeto	Área superficial	Volumen
Círculo, radio r	πr^2	—
Esfera, radio r	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
Cilindro circular recto, radio r, altura h	$2\pi r^2 + 2\pi rh$	$\pi r^2 h$
Cono circular recto, radio r, altura h	$\pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$

A–6 Geometría plana

1. *Ángulos iguales:*

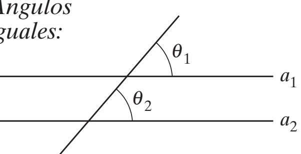


FIGURA A–1 Si la línea a_1 es paralela a la línea a_2, entonces $\theta_1 = \theta_2$.

2. *Ángulos iguales:*

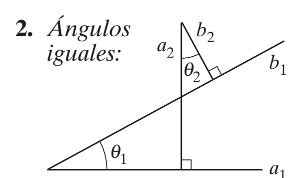


FIGURA A–2 Si $a_1 \perp a_2$ y $b_1 \perp b_2$, entonces $\theta_1 = \theta_2$.

3. La suma de los ángulos en cualquier triángulo plano es 180°.

4. *Teorema de Pitágoras:*

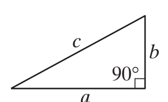


FIGURA A–3

En cualquier triángulo recto (un ángulo = 90°) de lados a, b y c:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

donde c es la longitud de la hipotenusa (opuesta al ángulo de 90°).

5. *Triángulos similares:* Se dice que dos triángulos son similares si sus tres ángulos son iguales (en la figura A-4, $\theta_1 = \phi_1$, $\theta_2 = \phi_2$ y $\theta_3 = \phi_3$). Los triángulos similares pueden tener diferentes tamaños y diferentes orientaciones.

a) Dos triángulos son similares si cualesquier dos de sus ángulos son iguales. (Esto se sigue porque los terceros ángulos también deben ser iguales porque la suma de los ángulos de un triángulo es 180°).

b) Las razones de los lados correspondientes de dos triángulos similares son iguales (figura A-4):

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

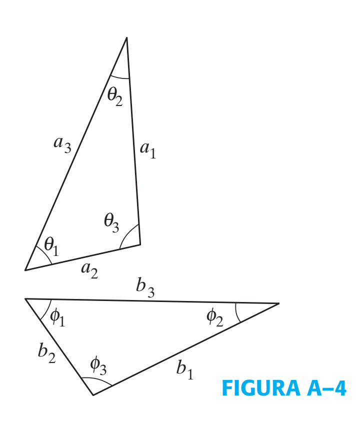


FIGURA A–4

6. *Triángulos congruentes:* Dos triángulos son congruentes si uno se puede colocar precisamente encima del otro. Esto es: son triángulos similares y tienen el mismo tamaño. Dos triángulos son congruentes si se cumple cualquiera de los siguientes enunciados:

(*a*) Los tres lados correspondientes son iguales.

(*b*) Dos lados y el ángulo encerrado son iguales (“lado-ángulo-lado”).

(*c*) Dos ángulos y el lado encerrado son iguales (“ángulo-lado-ángulo”).

A–7 Logaritmos

Los logaritmos se definen en la forma siguiente:

$$\text{si} \quad y = A^x, \quad \text{entonces} \quad x = \log_A y.$$

Esto es: el logaritmo de un número y a la base A es aquel número que, como exponente de A, da de vuelta el número y. Para **logaritmos comunes**, la base es 10, de modo que

$$\text{si} \quad y = 10^x, \quad \text{entonces} \quad x = \log y.$$

El subíndice 10 en $\log_{10}$ por lo general se omite cuando se trata con logaritmos comunes. Otra base importante es la base exponencial $e = 2.718\ldots$, un número natural. Tales logaritmos se llaman **logaritmos naturales** y se escriben ln. Por tanto,

$$\text{si} \quad y = e^x, \quad \text{entonces} \quad x = \ln y.$$

Para cualquier número y, los dos tipos de logaritmo se relacionan mediante

$$\ln y = 2.3026 \log y.$$

Algunas reglas simples para logaritmos son las siguientes:

$$\log(ab) = \log a + \log b, \qquad \textbf{(i)}$$

que es cierto porque, si $a = 10^n$ y $b = 10^m$, entonces $ab = 10^{n+m}$. A partir de la definición de logaritmo, $\log a = n$, $\log a = m$ y $\log(ab) = n + m$; por tanto, $\log(ab) = n + m = \log a + \log b$. En forma similar, se puede demostrar que

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b \qquad \textbf{(ii)}$$

y

$$\log a^n = n \log a. \qquad \textbf{(iii)}$$

Estas tres reglas se aplican a cualquier tipo de logaritmo.

Si usted no tiene una calculadora que calcule logaritmos, puede usar fácilmente una **tabla de logaritmos**, como la pequeña que se muestra aquí (Tabla A-1): el número N cuyo logaritmo se quiere se da a dos dígitos. El primer dígito está en la columna vertical a la izquierda, el segundo dígito está en la hilera horizontal a lo largo de la parte superior. Por ejemplo, la Tabla A-1 dice que log 1.0 = 0.000, log 1.1 = 0.041 y log 4.1 = 0.613. La Tabla A-1 no incluye el punto decimal. La tabla da los logaritmos para números entre 1.0 y 9.9. Para números más grandes o más pequeños, use la regla (i) anterior, $\log(ab) = \log a + \log b$. Por ejemplo, $\log(380) = \log(3.8 \times 10^2) = \log(3.8) + \log(10^2)$. De la tabla, log 3.8 = 0.580; y de la regla (iii) anterior, $\log(10^2) = 2\log(10) = 2$, pues $\log(10) = 1$. [Esto se sigue de la definición del logaritmo: si $10 = 10^1$, entonces $1 = \log(10)$]. Por ende,

$$\begin{aligned}\log(380) &= \log(3.8) + \log(10^2)\\ &= 0.580 + 2\\ &= 2.580.\end{aligned}$$

De igual modo,

$$\begin{aligned}\log(0.081) &= \log(8.1) + \log(10^{-2})\\ &= 0.908 - 2 = -1.092.\end{aligned}$$

El proceso inverso para encontrar el número N cuyo logaritmo es, por decir, 2.670, se llama “sacar el **antilogaritmo**”. Para hacer esto, el número 2.670 se separa en dos partes, y la separación se hace en el punto decimal:

$$\begin{aligned}\log N = 2.670 &= 2 + 0.670\\ &= \log 10^2 + 0.670.\end{aligned}$$

Ahora observe la tabla A-1 para ver cuál número tiene su logaritmo igual a 0.670; ninguno lo tiene, así que debe **interpolar**: se ve que log 4.6 = 0.663 y log 4.7 = 0.672. Así que el número que se quiere está entre 4.6 y 4.7, y más cerca del último por $\frac{7}{9}\cdot$ Podemos decir que aproximadamente log 4.68 = 0.670. Por tanto

$$\begin{aligned}\log N &= 2 + 0.670\\ &= \log(10^2) + \log(4.68) = \log(4.68 \times 10^2),\end{aligned}$$

así que $N = 4.68 \times 10^2 = 468$.

Si el logaritmo dado es negativo, digamos, −2.180, procedemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\log N = -2.180 &= -3 + 0.820\\ &= \log 10^{-3} + \log 6.6 = \log 6.6 \times 10^{-3},\end{aligned}$$

así que $N = 6.6 \times 10^{-3}$. Note que al logaritmo dado se agregó el siguiente entero más grande (3 en este caso) así que se tiene un entero, más un número decimal entre 0 y 1.0 cuyo antilogaritmo se puede buscar en la tabla.

TABLA A–1 Tabla corta de logaritmos comunes (base 10)

N	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	000	041	079	114	146	176	204	230	255	279
2	301	322	342	362	380	398	415	431	447	462
3	477	491	505	519	531	544	556	568	580	591
4	602	613	623	633	643	653	663	672	681	690
5	699	708	716	724	732	740	748	756	763	771
6	778	785	792	799	806	813	820	826	833	839
7	845	851	857	863	869	875	881	886	892	898
8	903	908	914	919	924	929	935	940	944	949
9	954	959	964	968	973	978	982	987	991	996

A–8 Vectores

La *suma vectorial* se cubrió en las secciones 3-2 a 3-5.
La *multiplicación vectorial* se cubrió en las secciones 3-3, 7-2 y 11-2.

A–9 Funciones e identidades trigonométricas

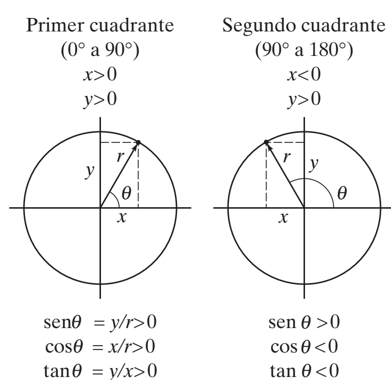


FIGURA A–5

Las funciones trigonométricas se definen del modo siguiente (véase la figura A-5, o = lado opuesto, a = lado adyacente, h = hipotenusa. Los valores están en la tabla A-2):

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{o}{h} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{h}{o}$$

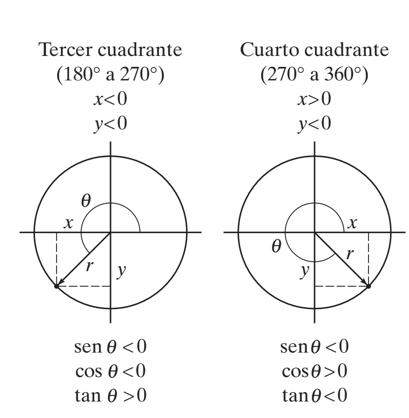
$$\cos\theta = \frac{a}{h} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{h}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{o}{a} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{a}{o}$$

y recuerde que

$$a^2 + o^2 = h^2 \qquad \text{[teorema de Pitágoras].}$$

FIGURA A–6



La figura A-6 muestra los signos (+ o −) que toman coseno, seno y tangente para ángulos θ en los cuatro cuadrantes (0° a 360°). Note que los ángulos se miden en sentido antihorario desde el eje x positivo, como se muestra; los ángulos negativos se miden *abajo* del eje x, en sentido horario: por ejemplo, $-30° = +330°$, etcétera.

Las siguientes son algunas identidades útiles entre las funciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1, \quad \csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

$$\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen}A\cos B \pm \cos A\operatorname{sen}B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \operatorname{sen}A\operatorname{sen}B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A\tan B}$$

$$\operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$$

$$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$$

$$\operatorname{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$$

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$$

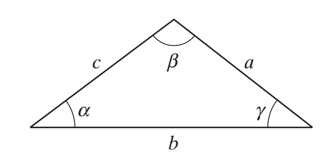
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

$$\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}, \quad \cos\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}, \quad \tan\tfrac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$\operatorname{sen}A \pm \operatorname{sen}B = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A \pm B}{2}\right)\cos\left(\frac{A \mp B}{2}\right).$$

FIGURA A–7



Para cualquier triángulo (véase la figura A-7):

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \qquad \text{[ley de senos]}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \qquad \text{[ley de cosenos]}$$

La tabla A-2 da los valores de seno, coseno y tangente.

TABLA A–2 Tabla trigonométrica: valores numéricos de sen, cos, tan

Ángulo en grados	Ángulo en radianes	Seno	Coseno	Tangente	Ángulo en grados	Ángulo en radianes	Seno	Coseno	Tangente
0°	0.000	0.000	1.000	0.000					
1°	0.017	0.017	1.000	0.017	46°	0.803	0.719	0.695	1.036
2°	0.035	0.035	0.999	0.035	47°	0.820	0.731	0.682	1.072
3°	0.052	0.052	0.999	0.052	48°	0.838	0.743	0.669	1.111
4°	0.070	0.070	0.998	0.070	49°	0.855	0.755	0.656	1.150
5°	0.087	0.087	0.996	0.087	50°	0.873	0.766	0.643	1.192
6°	0.105	0.105	0.995	0.105	51°	0.890	0.777	0.629	1.235
7°	0.122	0.122	0.993	0.123	52°	0.908	0.788	0.616	1.280
8°	0.140	0.139	0.990	0.141	53°	0.925	0.799	0.602	1.327
9°	0.157	0.156	0.988	0.158	54°	0.942	0.809	0.588	1.376
10°	0.175	0.174	0.985	0.176	55°	0.960	0.819	0.574	1.428
11°	0.192	0.191	0.982	0.194	56°	0.977	0.829	0.559	1.483
12°	0.209	0.208	0.978	0.213	57°	0.995	0.839	0.545	1.540
13°	0.227	0.225	0.974	0.231	58°	1.012	0.848	0.530	1.600
14°	0.244	0.242	0.970	0.249	59°	1.030	0.857	0.515	1.664
15°	0.262	0.259	0.966	0.268	60°	1.047	0.866	0.500	1.732
16°	0.279	0.276	0.961	0.287	61°	1.065	0.875	0.485	1.804
17°	0.297	0.292	0.956	0.306	62°	1.082	0.883	0.469	1.881
18°	0.314	0.309	0.951	0.325	63°	1.100	0.891	0.454	1.963
19°	0.332	0.326	0.946	0.344	64°	1.117	0.899	0.438	2.050
20°	0.349	0.342	0.940	0.364	65°	1.134	0.906	0.423	2.145
21°	0.367	0.358	0.934	0.384	66°	1.152	0.914	0.407	2.246
22°	0.384	0.375	0.927	0.404	67°	1.169	0.921	0.391	2.356
23°	0.401	0.391	0.921	0.424	68°	1.187	0.927	0.375	2.475
24°	0.419	0.407	0.914	0.445	69°	1.204	0.934	0.358	2.605
25°	0.436	0.423	0.906	0.466	70°	1.222	0.940	0.342	2.747
26°	0.454	0.438	0.899	0.488	71°	1.239	0.946	0.326	2.904
27°	0.471	0.454	0.891	0.510	72°	1.257	0.951	0.309	3.078
28°	0.489	0.469	0.883	0.532	73°	1.274	0.956	0.292	3.271
29°	0.506	0.485	0.875	0.554	74°	1.292	0.961	0.276	3.487
30°	0.524	0.500	0.866	0.577	75°	1.309	0.966	0.259	3.732
31°	0.541	0.515	0.857	0.601	76°	1.326	0.970	0.242	4.011
32°	0.559	0.530	0.848	0.625	77°	1.344	0.974	0.225	4.331
33°	0.576	0.545	0.839	0.649	78°	1.361	0.978	0.208	4.705
34°	0.593	0.559	0.829	0.675	79°	1.379	0.982	0.191	5.145
35°	0.611	0.574	0.819	0.700	80°	1.396	0.985	0.174	5.671
36°	0.628	0.588	0.809	0.727	81°	1.414	0.988	0.156	6.314
37°	0.646	0.602	0.799	0.754	82°	1.431	0.990	0.139	7.115
38°	0.663	0.616	0.788	0.781	83°	1.449	0.993	0.122	8.144
39°	0.681	0.629	0.777	0.810	84°	1.466	0.995	0.105	9.514
40°	0.698	0.643	0.766	0.839	85°	1.484	0.996	0.087	11.43
41°	0.716	0.656	0.755	0.869	86°	1.501	0.998	0.070	14.301
42°	0.733	0.669	0.743	0.900	87°	1.518	0.999	0.052	19.081
43°	0.750	0.682	0.731	0.933	88°	1.536	0.999	0.035	28.636
44°	0.768	0.695	0.719	0.966	89°	1.553	1.000	0.017	57.290
45°	0.785	0.707	0.707	1.000	90°	1.571	1.000	0.000	∞



Derivadas e integrales

B–1 Derivadas: reglas generales

(Véase también la sección 2-3).

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

$$\frac{d}{dx}[af(x)] = a\frac{df}{dx} \qquad (a = \text{constante})$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}[f(y)] = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} \qquad [\text{regla de la cadena}]$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} \qquad \text{si } \frac{dy}{dx} \neq 0.$$

B–2 Derivadas: funciones particulares

$$\frac{da}{dx} = 0 \qquad (a = \text{constante})$$

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} ax = a\cos ax$$

$$\frac{d}{dx}\cos ax = -a\operatorname{sen} ax$$

$$\frac{d}{dx}\tan ax = a\sec^2 ax$$

$$\frac{d}{dx}\ln ax = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$$

B–3 Integrales indefinidas: reglas generales

(Véase también la sección 7-3).

$$\int dx = x$$

$$\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \qquad (a = \text{constante})$$

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad (\text{integración por partes})$$

B–4 Integrales indefinidas: funciones particulares

(Se puede agregar una constante arbitraria al lado derecho de cada ecuación).

$$\int a\,dx = ax \qquad (a = \text{constante})$$

$$\int x^m\,dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1} \qquad (m \neq -1)$$

$$\int \operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax$$

$$\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax$$

$$\int \tan ax\,dx = \frac{1}{a}\ln|\sec ax|$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) \qquad (x^2 > a^2)$$

$$= -\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) \qquad (x^2 < a^2)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = -\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \qquad \text{si } x^2 \leq a^2$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pm x}{a^2\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$\int \operatorname{sen}^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$$

$$\int xe^{-ax}\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2}(ax+1)$$

$$\int x^2e^{-ax}\,dx = -\frac{e^{-ax}}{a^3}(a^2x^2 + 2ax + 2)$$

B–5 Algunas integrales definidas

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{4a}}$$

$$\int_0^\infty xe^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2a}$$

$$\int_0^\infty x^2e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{16a^3}}$$

$$\int_0^\infty x^3e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2a^2}$$

$$\int_0^\infty x^{2n}e^{-ax^2}\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

APÉNDICE C

Más acerca del análisis dimensional

Un uso importante del análisis dimensional (sección 1-7) es obtener la *forma* de una ecuación: es decir, cómo depende una cantidad de otras. Para tener un ejemplo concreto, intente encontrar una expresión para el periodo T de un péndulo simple. Primero, intente imaginar de qué podría depender T y haga una lista de estas variables. Puede depender de su longitud ℓ, o de la masa m de la lenteja, o del ángulo de oscilación θ y de la aceleración debida a la gravedad g. También puede depender de la resistencia del aire (usaría viscosidad del aire), el jalón gravitacional de la Luna, etcétera; pero la experiencia cotidiana sugiere que la gravedad de la Tierra es la principal fuerza involucrada, así que se ignoran las otras fuerzas posibles. Así pues, suponga que T es una función de ℓ, m, θ y g, y que cada uno de estos factores está presente a alguna potencia:

$$T = C\ell^w m^x \theta^y g^z.$$

C es una constante adimensional y w, x, y y z son exponentes que se quieren determinar. Escriba la ecuación dimensional (sección 1-7) para esta relación:

$$[T] = [L]^w[M]^x[L/T^2]^z.$$

Puesto que θ no tiene dimensiones (un radián es una longitud dividida por una longitud, véase la ecuación 10-1a), no aparece. Simplifique y obtenga

$$[T] = [L]^{w+z}[M]^x[T]^{-2z}$$

Para tener consistencia dimensional, debe tener

$$\begin{aligned} 1 &= -2z \\ 0 &= w + z \\ 0 &= x. \end{aligned}$$

Al resolver estas ecuaciones se encuentra que $z = -\frac{1}{2}$, $w = \frac{1}{2}$, y $x = 0$. Por tanto, la ecuación deseada debe ser

$$T = C\sqrt{\ell/g}\,f(\theta), \qquad \textbf{(C–1)}$$

donde $f(\theta)$ es alguna función de θ que no se puede determinar con el uso de esta técnica. Tampoco se puede determinar de esta forma la constante adimensional C. (Para obtener C y f, tiene que hacer un análisis como el del capítulo 14 que usa las leyes de Newton, que revela que $C = 2\pi$ y $f \approx 1$ para θ pequeño). Pero observe *lo que se encontró*, sólo con el uso de la consistencia dimensional. Se obtuvo la forma de la expresión que relaciona el periodo de un péndulo simple con las principales variables de la situación, ℓ y g (véase la ecuación 14-12c) y se vio que no depende de la masa m.

¿Cómo se hizo esto? ¿Y cuán útil es esta técnica? Básicamente, se tiene que usar la intuición acerca de cuáles variables son importantes y cuáles no lo son. Esto no siempre es fácil y con frecuencia requiere mucha intuición. Por utilidad, el resultado final en el ejemplo se podía obtener a partir de las leyes de Newton, como en el capítulo 14. Pero en muchas situaciones físicas, no se puede realizar tal derivación a partir de otras leyes. En dichas situaciones, el análisis dimensional puede ser una herramienta poderosa.

Al final, cualquier expresión derivada por el uso de análisis dimensional (o por cualquier otro medio, de hecho) se debe comprobar contra los experimentos. Por ejemplo, en la derivación de la ecuación C-1, se pueden comparar los periodos de dos péndulos de diferentes longitudes, ℓ_1 y ℓ_2, cuyas amplitudes (θ) sean iguales. Por lo que, con la ecuación C-1, se tendría

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{C\sqrt{\ell_1/g}\,f(\theta)}{C\sqrt{\ell_2/g}\,f(\theta)} = \sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}.$$

Puesto que C y $f(\theta)$ son las mismas para ambos péndulos, se cancelan, así que experimentalmente se puede determinar si la razón de los periodos varía como la razón de las raíces cuadradas de las longitudes. Esta comparación con el experimento comprueba la derivación, al menos en parte; C y $f(\theta)$ se podrían determinar mediante otros experimentos.



Fuerza gravitacional debida a una distribución esférica de la masa

En el capítulo 6 se afirmó que la fuerza gravitacional ejercida por o sobre una esfera uniforme actúa como si toda la masa de la esfera estuviese concentrada en su centro, si el otro objeto (que ejerce o siente la fuerza) está afuera de la esfera. En otras palabras, la fuerza gravitacional que una esfera uniforme ejerce sobre una partícula afuera de ella es

$$F = G\frac{mM}{r^2}, \qquad [m \text{ afuera de la esfera de masa } M]$$

donde m es la masa de la partícula, M la masa de la esfera y r la distancia de m desde el centro de la esfera. Ahora se derivará este resultado. Se usarán los conceptos de cantidades infinitesimalmente pequeñas e integración.

Primero considere un cascarón esférico uniforme muy delgado (como un balón de básquetbol de pared delgada) de masa M cuyo grosor t es pequeño en comparación con su radio R (figura D-1). La fuerza sobre una partícula de masa m a una distancia r desde el centro del cascarón se puede calcular como la suma vectorial de las fuerzas debidas a todas las partículas del cascarón. Imagine el cascarón dividido en delgadas tiras circulares (infinitesimales) de modo que todos los puntos en la tira están equidistantes de la partícula m. Una de estas tiras circulares, marcada AB, se muestra en la figura D-1. Tiene ancho $R\,d\theta$, grosor t y un radio R sen θ. La fuerza sobre la partícula m debida a un pequeño trozo de la tira en el punto A se representa mediante el vector $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{A}}$ que se muestra. La fuerza debida a un pequeño trozo de la tira en el punto B, que es diametralmente opuesto a A, es la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{B}}$. Considere que los dos trozos en A y B tienen igual masa, así que $F_{\mathrm{A}} = F_{\mathrm{B}}$. Los componentes horizontales de $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{A}}$ y $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{B}}$ son cada uno igual a

$$F_{\mathrm{A}} \cos\phi$$

y apuntan hacia el centro del cascarón. Los componentes verticales de $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{A}}$ y $\vec{\mathbf{F}}_{\mathrm{B}}$ son de igual magnitud y apuntan en direcciones opuestas, así que se cancelan. Dado que, para cada punto en la tira hay un punto correspondiente diametralmente opuesto (como con A y B), se ve que la fuerza neta debida a toda la tira apunta hacia el centro del cascarón. Su magnitud será

$$dF = G\frac{m\,dM}{\ell^2}\cos\phi,$$

donde dM es la masa de toda la tira circular y ℓ es la distancia desde todos los puntos sobre la tira a m, como se muestra en la figura. Se escribe dM en términos de la densidad ρ; por densidad se entiende la masa por unidad de volumen (sección 13-2). Por tanto, $dM = \rho\,dV$, donde dV es el volumen de la tira y es igual a $(2\pi R \text{ sen } \theta)(t)(R\,d\theta)$. Entonces la fuerza dF debida a la tira circular que se muestra es

$$dF = G\frac{m\rho 2\pi R^2 t \text{ sen } \theta\, d\theta}{\ell^2}\cos\phi. \qquad \textbf{(D–1)}$$

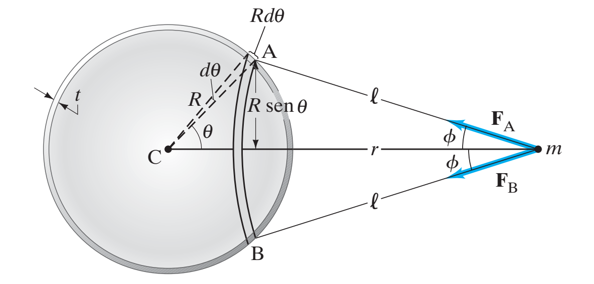


FIGURA D–1 Cálculo de la fuerza gravitacional sobre una partícula de masas m debida a un cascarón esférico uniforme de radio R y masa M.

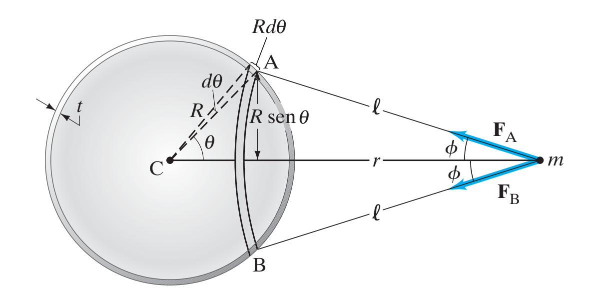


FIGURA D–1 (repetida) Cálculo de la fuerza gravitacional sobre una partícula de masa m debida a un cascarón esférico uniforme de radio R y masa M.

Para obtener la fuerza total F que ejerce todo el cascarón sobre la partícula m, se debe integrar sobre todas las tiras circulares; esto es: integre

$$dF = G\frac{m\rho 2\pi R^2 t \operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\ell^2}\cos\phi \qquad \textbf{(D–1)}$$

desde $\theta = 0°$ hasta $\theta = 180°$. Pero la expresión para dF contiene ℓ y ϕ, que son funciones de θ. A partir de la figura D-1 se puede ver que

$$\ell\cos\phi = r - R\cos\theta.$$

Más aún, se puede escribir la ley de cosenos para el triángulo CmA:

$$\cos\theta = \frac{r^2 + R^2 - \ell^2}{2rR}. \qquad \textbf{(D–2)}$$

Con estas dos expresiones las tres variables (ℓ, θ, ϕ) se pueden reducir a sólo una, que se elige ℓ. Con la ecuación D-2 se hacen dos cosas: (1) se pone en la ecuación para ℓcos ϕ anterior:

$$\cos\phi = \frac{1}{\ell}(r - R\cos\theta) = \frac{r^2 + \ell^2 - R^2}{2r\ell}.$$

y (2) se saca la diferencial de ambos lados de la ecuación D-2 (porque sen $\theta\, d\theta$ aparece en la expresión para dF, ecuación D-1), al considerar que r y R son constantes cuando se suman sobre las tiras:

$$-\operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\frac{2\ell\, d\ell}{2rR} \qquad \text{o} \qquad \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{\ell\, d\ell}{rR}.$$

Esto se inserta en la ecuación D-1 para dF y se encuentra

$$dF = Gm\rho\pi t\frac{R}{r^2}\left(1 + \frac{r^2 - R^2}{\ell^2}\right)d\ell.$$

Ahora integre para obtener la fuerza neta sobre el cascarón delgado de radio R. Para integrar sobre todas las tiras ($\theta = 0°$ a $180°$), se debe ir de $\ell = r - R$ a $\ell = r + R$ (véase la figura D-1). Por tanto,

$$F = Gm\rho\pi t\frac{R}{r^2}\left[\ell - \frac{r^2 - R^2}{\ell}\right]_{\ell = r-R}^{\ell = r+R}$$

$$= Gm\rho\pi t\frac{R}{r^2}(4R).$$

El volumen V del cascarón esférico es su área ($4\pi R^2$) por el grosor t. De ahí la masa $M = \rho V = \rho 4\pi R^2 t$ y finalmente

$$F = G\frac{mM}{r^2}. \qquad \left[\begin{array}{c}\text{partícula de masa } m \text{ afuera de un cascarón}\\ \text{esférico delgado uniforme de masa } M\end{array}\right]$$

Este resultado da la fuerza que un cascarón delgado ejerce sobre una partícula de masa m a una distancia r del centro del cascarón, y *afuera* del cascarón. Se ve que la fuerza es la misma que la que existe entre m y una partícula de masa M en el centro del cascarón. En otras palabras, para propósitos de calcular la fuerza gravitacional ejercida sobre o por un cascarón esférico uniforme, se puede considerar que toda su masa está concentrada en su centro.

Lo que se derivó para un cascarón se sostiene también para una esfera sólida, pues una esfera sólida se puede considerar constituida de muchos cascarones concéntricos, desde $R = 0$ hasta $R = R_0$, donde R_0 es el radio de la esfera sólida. ¿Por qué? Porque si cada cascarón tiene masa dM, para cada cascarón se escribe $dF = Gm\, dM/r^2$, donde

r es la distancia desde el centro C a la masa m y es la misma para todos los cascarones. Entonces la fuerza total es igual a la suma o integral sobre dM, que da la masa total M. Por tanto, el resultado

$$F = G\frac{mM}{r^2} \qquad \left[\begin{array}{c}\text{partícula de masa } m \text{ afuera de} \\ \text{una esfera sólida de masa } M\end{array}\right] \qquad \textbf{(D–3)}$$

es válido para una esfera sólida de masa M, incluso si la densidad varía con la distancia desde el centro. (No es válida si la densidad varía dentro de cada cascarón; esto es si la densidad no depende sólo de R.) Por tanto, la fuerza gravitacional ejercida sobre o por objetos esféricos, incluidos los objetos casi esféricos como la Tierra, el Sol y la Luna, se puede considerar que actúa como si los objetos fuesen partículas puntuales.

Este resultado, ecuación D-3, es verdadera sólo si la masa m está afuera de la esfera. A continuación considere una masa puntual m que se ubica adentro del cascarón esférico de la figura D-1. Aquí, r sería menor que R, y la integración sobre ℓ sería de $\ell = R - r$ a $\ell = R + r$, así que

$$\left[\ell - \frac{r^2 - R^2}{\ell}\right]_{R-r}^{R+r} = 0.$$

Por lo tanto, la fuerza sobre cualquier masa dentro del cascarón sería cero. Este resultado tiene particular importancia para la fuerza electrostática, que también es una ley de cuadrado inverso. Para la situación gravitacional, se ve que en puntos dentro de una esfera sólida, por decir a 1000 km por abajo de la superficie de la Tierra, sólo la masa hasta dicho radio contribuye a la fuerza neta. Los cascarones exteriores más allá del punto en cuestión aportan cero efecto gravitacional neto.

Los resultados obtenidos aquí también se pueden obtener usando la analogía gravitacional de la ley de Gauss para electrostática (capítulo 22).



Forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir en otra forma que con frecuencia es más conveniente que las ecuaciones 31-5. Este material por lo general se cubre en cursos más avanzados y aquí se incluye simplemente por completud.

Aquí se citan dos teoremas, sin prueba, que se derivan en textos de análisis vectorial. El primero se llama **teorema de Gauss** o **teorema de la divergencia**, que relaciona la integral sobre una superficie de cualquier función vectorial $\vec{\mathbf{F}}$ con una integral de volumen sobre el volumen encerrado por la superficie:

$$\oint_{\text{Área } A} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int_{\text{Volumen } V} \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\mathbf{F}}\, dV.$$

El operador $\vec{\boldsymbol{\nabla}}$ es el **operador del nabla**, que en coordenadas cartesianas se define como

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z}\cdot$$

La cantidad

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\mathbf{F}} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

se llama la **divergencia** de $\vec{\mathbf{F}}$. El segundo teorema es el **teorema de Stokes**, y relaciona una integral de línea alrededor de una trayectoria cerrada con una integral de superficie sobre cualquier superficie encerrada por dicha trayectoria:

$$\oint_{\text{Línea}} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \int_{\text{Área } A} \vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}.$$

La cantidad $\vec{\boldsymbol{\nabla}} \times \vec{\mathbf{F}}$ se llama **rotacional** de $\vec{\mathbf{F}}$. (Véase la sección 11-2 acerca del producto vectorial).

Ahora se usarán estos dos teoremas para obtener la forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre. El teorema de Gauss se aplica a la ecuación 31-5a (ley de Gauss):

$$\oint_A \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\mathbf{E}}\, dV = \frac{Q}{\epsilon_0}\cdot$$

Ahora la carga Q se puede escribir como una integral de volumen sobre la densidad de carga ρ: $Q = \int \rho\, dV$. Entonces

$$\int \vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\mathbf{E}}\, dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho\, dV.$$

Ambos lados contienen integrales de volumen sobre el mismo volumen, y para que esto sea cierto sobre *cualquier* volumen, sea cual sea su tamaño o forma, los integrandos deben ser iguales:

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\cdot \qquad \textbf{(E–1)}$$

Esta es la forma diferencial de la ley de Gauss. La segunda ecuación de Maxwell, $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0$, se trata de la misma forma y se obtiene

$$\vec{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0. \qquad \textbf{(E–2)}$$

A continuación, se aplica el teorema de Stokes a la tercera de las ecuaciones de Maxwell,

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \int \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Dado que el flujo magnético $\Phi_B = \int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$, se tiene

$$\int \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$

donde se usa la derivada parcial, $\partial \vec{\mathbf{B}}/\partial t$, pues B también puede depender de la posición. Estas son integrales de superficie sobre la misma área, y para que sea cierto sobre cualquier área, incluso una muy pequeña, se debe tener

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}. \qquad \textbf{(E–3)}$$

Esta es la tercera de las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial. Finalmente, a la última de las ecuaciones de Maxwell,

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt},$$

se aplica el teorema de Stokes y se escribe $\Phi_E = \int \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$:

$$\int \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}.$$

La corriente de conducción I se puede escribir en términos de la densidad de corriente $\vec{\mathbf{j}}$, usando la ecuación 25-12:

$$I = \int \vec{\mathbf{j}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}.$$

Entonces la cuarta ecuación de Maxwell se convierte en:

$$\int \vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \mu_0 \int \vec{\mathbf{j}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}.$$

Para que esto sea cierto sobre cualquier área A, sea cual sea su tamaño o forma, los integrandos en cada lado de la ecuación deben ser iguales:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{j}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}. \qquad \textbf{(E–4)}$$

Las ecuaciones E-1, 2, 3 y 4 son las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial en el vacío. Se resumen en la tabla E-1.

TABLA E–1 Ecuaciones de Maxwell en espacio libre†

Forma integral	Forma diferencial
$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q}{\epsilon_0}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$
$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$
$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$	$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \vec{\mathbf{j}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$

† $\vec{\nabla}$ representa al *operador del nabla* $\vec{\nabla} = \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z}$ en coordenadas cartesianas.

APÉNDICE

F Isótopos seleccionados

(1) Número atómico Z	(2) Elemento	(3) Símbolo	(4) Número de masa A	(5) Masa atómica[†]	(6) % Abundancia (o modo de decaimiento[‡] radiactivo)	(7) Vida media (si es radiactivo)
0	(Neutrón)	n	1	1.008665	β^-	10.23 min
1	Hidrógeno	H	1	1.007825	99.9885%	
	Deuterio	d o D	2	2.014102	0.0115%	
	Tritio	t o T	3	3.016049	β^-	12.33 años
2	Helio	He	3	3.016029	0.000137%	
			4	4.002603	99.999863%	
3	Litio	Li	6	6.015123	7.59%	
			7	7.016005	92.41%	
4	Berilio	Be	7	7.016930	CE, γ	53.22 días
			9	9.012182	100%	
5	Boro	B	10	10.012937	19.9%	
			11	11.009305	80.1%	
6	Carbono	C	11	11.011434	β^+, CE	20.39 min
			12	12.000000	98.93%	
			13	13.003355	1.07%	
			14	14.003242	β^-	5730 años
7	Nitrógeno	N	13	13.005739	β^+, CE	9.965 min
			14	14.003074	99.632%	
			15	15.000109	0.368%	
8	Oxígeno	O	15	15.003066	β^+, CE	122.24 s
			16	15.994915	99.757%	
			18	17.999161	0.205%	
9	Flúor	F	19	18.998403	100%	
10	Neón	Ne	20	19.992440	90.48%	
			22	21.991385	9.25%	
11	Sodio	Na	22	21.994436	β^+, CE, γ	2.6027 años
			23	22.989769	100%	
			24	23.990963	β^-, γ	14.959 h
12	Magnesio	Mg	24	23.985042	78.99%	
13	Aluminio	Al	27	26.981539	100%	
14	Silicio	Si	28	27.976927	92.2297%	
			31	30.975363	β^-, γ	157.3 min
15	Fósforo	P	31	30.973762	100%	
			32	31.973907	β^-	14.262 días

[†] Las masas en la columna (5) son las del átomo neutro, incluidos los Z electrones
[‡] Capítulo 41; CE = captura de electrón.

(1) Número atómico Z	(2) Elemento	(3) Símbolo	(4) Número de masa A	(5) Masa atómica	(6) % Abundancia (o modo de decaimiento‡ radiactivo)	(7) Vida media (si es radiactivo)
16	Azufre	S	32	31.972071	94.9%	
			35	34.969032	β^-	87.51 días
17	Cloro	Cl	35	34.968853	75.78%	
			37	36.965903	24.22%	
18	Argón	Ar	40	39.962383	99.600%	
19	Potasio	K	39	38.963707	93.258%	
			40	39.963998	0.0117%	
					β^-, EC, γ, β^+	1.248×10^9 años
20	Calcio	Ca	40	39.962591	96.94%	
21	Escandio	Sc	45	44.955912	100%	
22	Titanio	Ti	48	47.947946	73.72%	
23	Vanadio	V	51	50.943960	99.750%	
24	Cromo	Cr	52	51.940508	83.789%	
25	Manganeso	Mn	55	54.938045	100%	
26	Hierro	Fe	56	55.934938	91.75%	
27	Cobalto	Co	59	58.933195	100%	
			60	59.933817	β^-, γ	5.2711 años
28	Níquel	Ni	58	57.935343	68.077%	
			60	59.930786	26.223%	
29	Cobre	Cu	63	62.929598	69.17%	
			65	64.927790	30.83%	
30	Cinc	Zn	64	63.929142	48.6%	
			66	65.926033	27.9%	
31	Galio	Ga	69	68.925574	60.108%	
32	Germanio	Ge	72	71.922076	27.5%	
			74	73.921178	36.3%	
33	Arsénico	As	75	74.921596	100%	
34	Selenio	Se	80	79.916521	49.6%	
35	Bromo	Br	79	78.918337	50.69%	
36	Criptón	Kr	84	83.911507	57.00%	
37	Rubidio	Rb	85	84.911790	72.17%	
38	Estroncio	Sr	86	85.909260	9.86%	
			88	87.905612	82.58%	
			90	89.907738	β^-	28.79 años
39	Itrio	Y	89	88.905848	100%	
40	Circonio	Zr	90	89.904704	51.4%	
41	Niobio	Nb	93	92.906378	100%	
42	Molibdeno	Mo	98	97.905408	24.1%	
43	Tecnecio	Tc	98	97.907216	β^-, γ	4.2×10^6 años
44	Rutenio	Ru	102	101.904349	31.55%	
45	Rodio	Rh	103	102.905504	100%	
46	Paladio	Pd	106	105.903486	27.33%	
47	Plata	Ag	107	106.905097	51.839%	
			109	108.904752	48.161%	
48	Cadmio	Cd	114	113.903359	28.7%	
49	Indio	In	115	114.903878	95.71%; β^-	4.41×10^{14} años
50	Estaño	Sn	120	119.902195	32.58%	
51	Antimonio	Sb	121	120.903816	57.21%	

(1) Número atómico Z	(2) Elemento	(3) Símbolo	(4) Número de masa A	(5) Masa atómica	(6) % Abundancia (o modo de decaimiento‡ radiactivo)	(7) Vida media (si es radiactivo)
52	Telurio	Te	130	129.906224	34.1%; $\beta^-\beta^-$	$>7.9 \times 10^{22}$ años
53	Yodo	I	127	126.904473	100%	
			131	130.906125	β^-, γ	8.0207 días
54	Xenón	Xe	132	131.904154	26.89%	
			136	135.907219	8.87%; $\beta^-\beta^-$	$>3.6 \times 10^{20}$ años
55	Cesio	Cs	133	132.905452	100%	
56	Bario	Ba	137	136.905827	11.232%	
			138	137.905247	71.70%	
57	Lantano	La	139	138.906353	99.910%	
58	Cerio	Ce	140	139.905439	88.45%	
59	Praseodimio	Pr	141	140.907653	100%	
60	Neodimio	Nd	142	141.907723	27.2%	
61	Prometio	Pm	145	144.912749	EC, α	17.7 años
62	Samario	Sm	152	151.919732	26.75%	
63	Europio	Eu	153	152.921230	52.19%	
64	Gadolinio	Gd	158	157.924104	24.84%	
65	Terbio	Tb	159	158.925347	100%	
66	Disprosio	Dy	164	163.929175	28.2%	
67	Holmio	Ho	165	164.930322	100%	
68	Erbio	Er	166	165.930293	33.6%	
69	Tulio	Tm	169	168.934213	100%	
70	Iterbio	Yb	174	173.938862	31.8%	
71	Lutecio	Lu	175	174.940772	97.41%	
72	Hafnio	Hf	180	179.946550	35.08%	
73	Tántalo	Ta	181	180.947996	99.988%	
74	Tungsteno (wolframio)	W	184	183.950931	30.64%; α	$>3 \times 10^{17}$ años
75	Renio	Re	187	186.955753	62.60%; β^-	4.35×10^{10} años
76	Osmio	Os	191	190.960930	β^-, γ	15.4 días
			192	191.961481	40.78%	
77		Ir	191	190.960594	37.3%	
			193	192.962926	62.7%	
78	Platino	Pt	195	194.964791	33.832%	
79	Oro	Au	197	196.966569	100%	
80	Mercurio	Hg	199	198.968280	16.87%	
			202	201.970643	29.9%	
81	Talio	Tl	205	204.974428	70.476%	
82	Plomo	Pb	206	205.974465	24.1%	
			207	206.975897	22.1%	
			208	207.976652	52.4%	
			210	209.984188	β^-, γ, α	22.20 años
			211	210.988737	β^-, γ	36.1 min
			212	211.991898	β^-, γ	10.64 h
			214	213.999805	β^-, γ	26.8 min
83	Bismuto	Bi	209	208.980399	100%	
			211	210.987269	α, γ, β^-	2.14 min
84	Polonio	Po	210	209.982874	α, γ, EC	138.376 días
			214	213.995201	α, γ	164.3 μs
85	Astatino	At	218	218.008694	α, β^-	1.5 s

(1) Número atómico Z	(2) Elemento	(3) Símbolo	(4) Número de masa A	(5) Masa atómica	(6) % Abundancia (o modo de decaimiento[‡] radiactivo)	(7) Vida media (si es radiactivo)
86	Radón	Rn	222	222.017578	α, γ	3.8235 días
87	Francio	Fr	223	223.019736	β^-, γ, α	22.00 min
88	Radio	Ra	226	226.025410	α, γ	1600 años
89	Actinio	Ac	227	227.027752	β^-, γ, α	21.772 años
90	Torio	Th	228	228.028741	α, γ	1.9116 años
			232	232.038055	100%; α, γ	1.405×10^{10} años
91	Protactinio	Pa	231	231.035884	α, γ	3.276×10^{4} años
92	Uranio	U	232	232.037156	α, γ	68.9 años
			233	233.039635	α, γ	1.592×10^{5} años
			235	235.043930	0.720%; α, γ	7.04×10^{8} años
			236	236.045568	α, γ	2.342×10^{7} años
			238	238.050788	99.274%; α, γ	4.468×10^{9} años
			239	239.054293	β^-, γ	23.45 min
93	Neptunio	Np	237	237.048173	α, γ	2.144×10^{6} años
			239	239.052939	β^-, γ	2.356 días
94	Plutonio	Pu	239	239.052163	α, γ	24,110 años
			244	244.064204	α	8.00×10^{7} años
95	Americio	Am	243	243.061381	α, γ	7370 años
96	Curio	Cm	247	247.070354	α, γ	1.56×10^{7} años
97	Berkelio	Bk	247	247.070307	α, γ	1380 años
98	Californio	Cf	251	251.079587	α, γ	898 años
99	Einsteinio	Es	252	252.082980	α, CE, γ	471.7 días
100	Fermio	Fm	257	257.095105	α, γ	100.5 días
101	Mendelevio	Md	258	258.098431	α, γ	51.5 días
102	Nobelio	No	259	259.10103	α,CE	58 min
103	Lawrencio	Lr	262	262.10963	α, EC, fisión	$\approx$ 4 h
104	Rutherfordio	Rf	263	263.11255	fisión	10 min
105	Dubnio	Db	262	262.11408	α, fisión, CE	35 s
106	Seaborgio	Sg	266	266.12210	α, fisión	$\approx$ 21 s
107	Boro	Bh	264	264.12460	α	$\approx$ 0.44 s
108	Hasio	Hs	269	269.13406	α	$\approx$ 10 s
109	Meitnerio	Mt	268	268.13870	α	21 ms
110	Darmstadtio	Ds	271	271.14606	α	$\approx$ 70 ms
111	Roentgenio	Rg	272	272.15360	α	3.8 ms
112		Uub	277	277.16394	α	$\approx$ 0.7 ms

Se ha reportado evidencia preliminar (sin confirmar) para los elementos 113, 114, 115, 116 y 118.

Respuestas a problemas con número impar

CAPÍTULO 1

1. *a*) 1.4×10^{10} años;
b) 4.4×10^{17} s.
3. *a*) 1.156×10^{0};
b) 2.18×10^{1};
c) 6.8×10^{-3};
d) 3.2865×10^{2};
e) 2.19×10^{-1};
f) 4.44×10^{2}.
5. 4.6%.
7. 1.00×10^{5} s.
9. 0.24 rad.
11. *a*) 0.2866 m;
b) 0.000085 V;
c) 0.00076 kg;
d) 0.0000000000600 s;
e) 0.0000000000000225 m;
f) 2,500,000,000 V.
13. $5'10'' = 1.8$ m, 165 lbs = 75.2 kg.
15. *a*) $\dfrac{0.111\ \text{yd}^2}{1\ \text{ft}^2}$;
b) $\dfrac{10.8\ \text{ft}^2}{1\ \text{m}^2}$.
17. *a*) 3.9×10^{-9} in.;
b) 1.0×10^{8} átomos.
19. *a*) $\dfrac{0.621\ \text{mi/h}}{1\ \text{km/h}}$;
b) $\dfrac{3.28\ \text{ft/s}}{1\ \text{m/s}}$;
c) $\dfrac{0.278\ \text{m/s}}{1\ \text{km/h}}$.
21. *a*) 9.46×10^{15} m;
b) 6.31×10^{4} AU;
c) 7.20 AU/h.
23. *a*) $3.80 \times 10^{13}\ \text{m}^2$;
b) 13.4.
25. 6×10^{5} libros.
27. 5×10^{4} L.
29. *a*) 1800.
31. 5×10^{4} m.
33. 6.5×10^{6} m.
35. $[M/L^3]$.
37. *a*) No puede;
b) puede;
c) puede
39. $(1 \times 10^{-5})\%$, 8 cifras significativas
41. *a*) 3.16×10^{7} s;
b) 3.16×10^{16} ns;
c) 3.17×10^{-8} años.
43. 2×10^{-4} m.
45. 1×10^{11} gal/año.
47. 9 cm/años.
49. 2×10^{9} kg/año.
51. 75 min.
53. 4×10^{5} toneladas métricas, 1×10^{8} gal.
55. 1×10^{3} días
57. 210 yd, 190 m.
59. *a*) 0.10 nm;
b) 1.0×10^{5} fm;
c) 1.0×10^{10} Å;
d) 9.5×10^{25} Å.
61. *a*) 3%, 3%;
b) 0.7%, 0.2%.
63. $8 \times 10^{-2}\ \text{m}^3$.
65. L/m, L/y, L.
67. *a*) 13.4;
b) 49.3.
69. 4×10^{51} kg.

CAPÍTULO 2

1. 61 m.
3. 0.65 cm/s, no.
5. 300 m/s, 1 km cada 3 s.
7. *a*) 9.26 m/s;
b) 3.1 m/s.
9. *a*) 0.3 m/s;
b) 1.2 m/s;
c) 0.30 m/s;
d) 1.4 m/s;
e) −0.95 m/s.
11. 2.0×10^{1} s.
13. *a*) 5.4×10^{3} m;
b) 72 min.
15. *a*) 61 km/h;
b) 0.
17. *a*) 16 m/s;
b) +5 m/s.
19. 6.73 m/s.
21. 5 s.
23. *a*) 48 s;
b) 90 s a 108 s;
c) 0 a 42 s, 65 s a 83 s, 90 s a 108 s;
d) 65 s a 83 s.
25. *a*) 21.2 m/s;
b) $2.00\ \text{m/s}^2$.
27. $17.0\ \text{m/s}^2$.
29. *a*) m/s, m/s^2;
b) $2B\ \text{m/s}^2$;
c) $(A + 10B)$ m/s, $2B\ \text{m/s}^2$;
d) $A - 3Bt^{-4}$.
31. $1.5\ \text{m/s}^2$, 99 m.
33. $240\ \text{m/s}^2$.
35. $4.41\ \text{m/s}^2$, 2.61 s.
37. 45.0 m.
39. *a*) 560 m;
b) 47 s;
c) 23 m, 21 m.
41. *a*) 96 m;
b) 76 m.
43. 27 m/s.
45. 117 km/h.
47. $0.49\ \text{m/s}^2$.
49. 1.6 s.
51. *a*) 20 m;
b) 4 s.
53. 1.16 s.
55. 5.18 s.
57. *a*) 25 m/s;
b) 33 m;
c) 1.2 s;
d) 5.2 s.
59. *a*) 14 m/s;
b) quinto piso.
61. 1.3 m.
63. 18.8 m/s, 18.1 m.
65. 52 m.
67. 106 m.
69. *a*) $\dfrac{g}{k}(1 - e^{-kt})$;
b) $\dfrac{g}{k}$.
71. 6.
73. 1.3 m.
75. b) 10 m;
c) 40 m.
77. $5.2 \times 10^{-2}\ \text{m/s}^2$.
79. 4.6 m/s a 5.4 m/s, 5.8 m/s a 6.7 m/s, menor rango de velocidades.
81. *a*) 5.39 s;
b) 40.3 m/s;
c) 90.9 m.
83. *a*) 8.7 min;

b) 7.3 min.

85. 2.3.

87. Alto.

89. 1.5 postes.

91. 0.44 m/min, 2.9 hamburguesas/min.

93. *a*) Donde las pendientes son iguales;

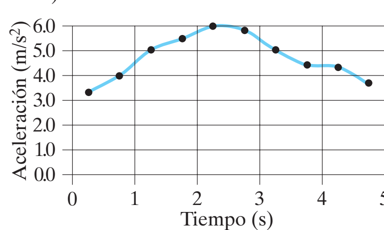
b) bicicleta A;

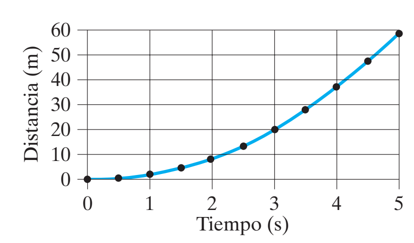
c) cuando las dos gráficas se cruzan; primer cruce, B pasa a A; segundo cruce, A pasa a B;

d) B hasta que las pendientes son iguales, A después de ello;

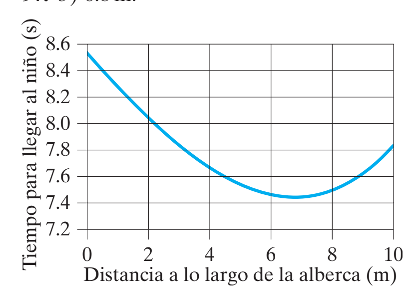
e) igual

95. *c*)



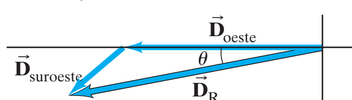


97. *b*) 6.8 m.



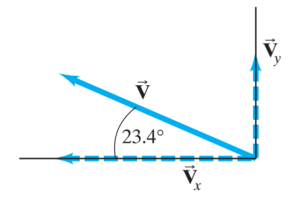
CAPÍTULO 3

1. 286 km, 11° al sur del oeste.



3. 10.1, −39.4°.

5. *a*)



b) −22.8, 9.85;

c) 24.8, 23.4° sobre el eje $-x$

7. *a*) 625 km/h, 553 km/h;

b) 1560 km, 1380 km.

9. *a*) 4.2 a 315°;

b) $1.0\hat{\mathbf{i}} - 5.0\hat{\mathbf{j}}$ o 5.1 a 280°.

11. *a*) $-53.7\hat{\mathbf{i}} + 1.31\hat{\mathbf{j}}$ o 53.7 a 1.4° sobre el eje $-x$

b) $53.7\hat{\mathbf{i}} - 1.31\hat{\mathbf{j}}$ o 53.7 a 1.4° abajo del eje $+x$, son opuestos.

13. *a*) $-92.5\hat{\mathbf{i}} - 19.4\hat{\mathbf{j}}$ o 94.5 a 11.8° abajo del eje $-x$;

b) $122\hat{\mathbf{i}} - 86.6\hat{\mathbf{j}}$ o 150 a 35.3° abajo del eje $+x$.

15. $(-2450\text{ m})\hat{\mathbf{i}} + (3870\text{ m})\hat{\mathbf{j}} + (2450\text{ m})\hat{\mathbf{k}}$, 5190 m.

17. $(9.60\hat{\mathbf{i}} - 2.00t\hat{\mathbf{k}})$ m/s, $(-2.00\hat{\mathbf{k}})$ m/s^2.

19. Parábola.

21. *a*) $4.0t$ m/s, $3.0t$ m/s;

b) $5.0t$ m/s;

c) $(2.0t^2\hat{\mathbf{i}} + 1.5t^2\hat{\mathbf{j}})$ m;

d) $v_x = 8.0$ m/s, $v_y = 6.0$ m/s, $v = 10.0$ m/s, $\vec{\mathbf{r}} = (8.0\hat{\mathbf{i}} + 6.0\hat{\mathbf{j}})$ m.

23. *a*) $(3.16\hat{\mathbf{i}} + 2.78\hat{\mathbf{j}})$ cm/s;

b) 4.21 cm/s a 41.3°.

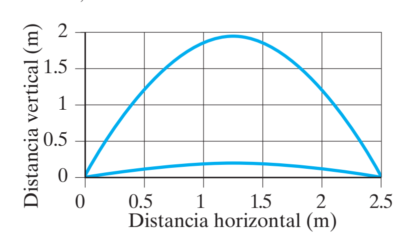
25. *a*) $(6.0t\hat{\mathbf{i}} - 18.0t^2\hat{\mathbf{j}})$ m/s, $(6.0\hat{\mathbf{i}} - 36.0t\hat{\mathbf{j}})$ m/s^2;

b) $(19\hat{\mathbf{i}} - 94\hat{\mathbf{j}})$ m, $(15\hat{\mathbf{i}} - 110\hat{\mathbf{j}})$ m/s.

27. 414 m a −65.0°.

29. 44 m, 6.9 m.

31. 18°, 72°.



33. 2.26 s.

35. 22.3 m.

37. 39 m.

41. *a*) 12 s;

b) 62 m.

43. 5.5 s.

45. *a*) $(2.3\hat{\mathbf{i}} + 2.5\hat{\mathbf{j}})$ m/s;

b) 5.3 m;

c) $(2.3\hat{\mathbf{i}} - 10.2\hat{\mathbf{j}})$ m/s.

47. No, 0.76 m más bajo; 4.5 m a 34.7 m.

51. $\tan^{-1} gt/v_0$.

53. *a*) 50.0 m;

b) 6.39 s;

c) 221 m;

d) 38.3 m/s a 25.7°.

55. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\tan\phi}\right) = \frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4}$.

57. $(10.5\text{ m/s})\hat{\mathbf{i}}$, $(6.5\text{ m/s})\hat{\mathbf{i}}$.

59. 1.41 m/s.

61. 23 s, 23 m.

63. *a*) 11.2 m/s, 27° arriba de la horizontal;

b) 11.2 m/s, 27° abajo de la horizontal.

65. 6.3°, oeste del sur.

67. *a*) 46 m;

b) 92 s.

69. *a*) 1.13 m/s;

b) 3.20 m/s.

71. 43.6° norte del este

73. $(66\text{ m})\hat{\mathbf{i}} - (35\text{ m})\hat{\mathbf{j}} - (12\text{ m})\hat{\mathbf{k}}$, 76 m, 28° al sur del este, 9° bajo la horizontal

75. 131 km/h, 43.1° norte del este

77. 7.0 m/s.

79. 1.8 m/s^2.

81. 1.9 m/s, 2.7 s.

83. *a*) $\frac{Dv}{(v^2 - u^2)}$;

b) $\frac{D}{\sqrt{v^2 - u^2}}$.

85. 54°.

87. $[(1.5\text{ m})\hat{\mathbf{i}} - (2.0t\text{ m})\hat{\mathbf{i}}] + [(-3.1\text{ m})\hat{\mathbf{j}} + (1.75t^2\text{ m})\hat{\mathbf{j}}]$, $(3.5\text{ m/s}^2)\hat{\mathbf{j}}$, parabólica.

89. Dirige a un ángulo de 24.9° corriente arriba y corre 104 m a lo largo del banco en un tiempo total de 862 segundos.

91. 69.9° norte del este.

93. *a*) 13 m;

b) 31° bajo la horizontal.

95. 5.1 s.

97. *a*) 13 m/s, 12 m/s;

b) 33 m.

99. *a*) $x = (3.03t - 0.0265)$ m, 3.03 m/s;

b) $y = (0.158 - 0.855t + 6.09t^2)$ m, 12.2 m/s^2.

CAPÍTULO 4

1. 77 N.

3. *a*) 6.7×10^2 N;
b) 1.2×10^2 N;
c) 2.5×10^2 N;
d) 0.

5. 1.3×10^6 N, 39%, 1.3×10^6 N.

7. 2.1×10^2 N.

9. $m > 1.5$ kg.

11. 89.8 N.

13. $1.8\ \mathrm{m/s^2}$, arriba.

15. Desciende con $a \geq 2.2\ \mathrm{m/s^2}$.

17. $-2800\ \mathrm{m/s^2}$, 280 g's, 1.9×10^5 N.

19. *a*) 7.5 s, 13 s, 7.5 s;
b) 12%, 0%, −12%;
c) 55%.

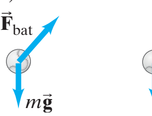
21. *a*) $3.1\ \mathrm{m/s^2}$;
b) 25 m/s;
c) 78 s.

23. 3.3×10^3 N.

25. *a*) 150 N;
b) 14.5 m/s.

27. *a*) 47.0 N;
b) 17.0 N;
c) 0.

29. *a*) b)



31. *a*) 1.5 m;
b) 11.5 kN, no.

33. *a*) 31 N, 63 N;
b) 35 N, 71 N.

35. 6.3×10^3 N, 8.4×10^3 N.

37. *a*) 19.0 N a 237.5°, $1.03\ \mathrm{m/s^2}$ a 237.5°;
b) 14.0 N a 51.0°, $0.758\ \mathrm{m/s^2}$ a 51.0°.

39. $\frac{5}{2}\frac{F_0}{m}t_0^2$.

41. 4.0×10^2 m.

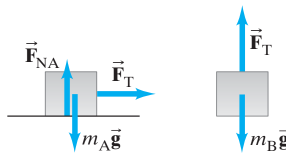
43. 12°.

45. *a*) 9.9 N;
b) 260 N.

47. *a*) $m_E g - F_T = m_E a$;
$F_T - m_C g = m_C a$;
b) $0.68\ \mathrm{m/s^2}$, 10,500 N.

49. *a*) 2.8 m;
b) 2.5 s.

51. *a*)



b) $g\dfrac{m_B}{m_A + m_B}$, $g\dfrac{m_A m_B}{m_A + m_B}$.

53. $g\dfrac{m_B + \dfrac{\ell_B}{\ell_A + \ell_B}m_C}{m_A + m_B + m_C}$.

55. $(m + M)g \tan\theta$.

57. $1.52\ \mathrm{m/s^2}$, 18.3 N, 19.8 N.

59. $\dfrac{(m_A + m_B + m_C)m_B}{\sqrt{(m_A^2 - m_B^2)}}g$.

61. *a*) $\left(\dfrac{2y}{\ell} - 1\right)g$;
b) $\sqrt{2gy_0\left(1 - \dfrac{y_0}{\ell}\right)}$;
c) $\dfrac{2}{3}\sqrt{g\ell}$.

63. 6.3 N.

65. 2.0 s, no cambia.

67. *a*) $g\dfrac{(m_A \operatorname{sen}\theta - m_B)}{(m_A + m_B)}$;
b) $m_A \operatorname{sen}\theta > m_B$
(m_A abajo del plano)
$m_A \operatorname{sen}\theta < m_B$
(m_A arriba del plano)

69. *a*) $\dfrac{m_B \operatorname{sen}\theta_B - m_A \operatorname{sen}\theta_A}{m_A + m_B}g$;
b) 6.8 kg, 26 N;
c) 0.74.

71. 9.9°.

73. *a*) $41\ \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m/s}}$;
b) 1.4×10^2 N.

75. *a*) $Mg/2$;
b) $Mg/2$, $Mg/2$, $3Mg/2$, Mg.

77. 8.7×10^2 N,
72° sobre la horizontal.

79. *a*) $0.6\ \mathrm{m/s^2}$;
b) 1.5×10^5 N.

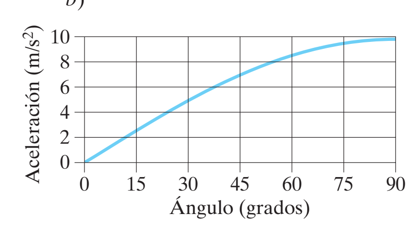
81. 1.76×10^4 N.

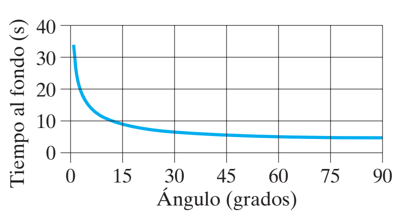
83. 3.8×10^2 N, 7.6×10^2 N.

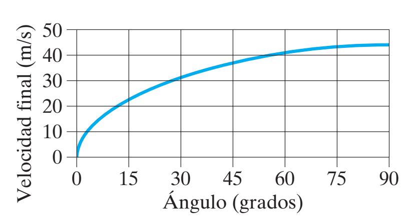
85. 3.4 m/s.

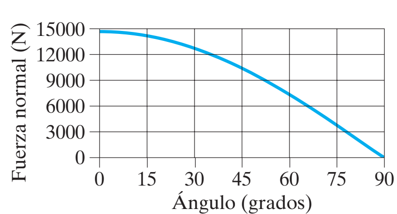
87. *a*) 23 N;
b) 3.8 N.

89. *a*) $g \operatorname{sen}\theta$, $\sqrt{\dfrac{2\ell}{g \operatorname{sen}\theta}}$,
$\sqrt{2\ell g \operatorname{sen}\theta}$, $mg\cos\theta$;
b)









Las gráficas son todas consistentes con los resultados de los casos límite.

CAPÍTULO 5

1. 65 N, 0.

3. 0.20.

5. $8.8\ \mathrm{m/s^2}$.

7. 1.0×10^2 N, 0.48.

9. 0.51.

11. 4.2 m.

13. 1.2×10^3 N.

15. *a*) 0.67;
b) 6.8 m/s;
c) 16 m/s.

17. *a*) $1.7\ \mathrm{m/s^2}$;
b) 4.3×10^2 N;
c) $1.7\ \mathrm{m/s^2}$, 2.2×10^2 N.

19. *a*) 0.80 m;
b) 1.3 s.

21. *a*) A jalará a B;
b) B eventualmente alcanzará a A;

c) $\mu_A < \mu_B: a = g\left[\frac{(m_A + m_B)\,\text{sen}\,\theta - (\mu_A m_A + \mu_B m_B)\cos\theta}{(m_A + m_B)}\right]$,

$F_T = g\frac{m_A m_B}{(m_A + m_B)}(\mu_B - \mu_A)\cos\theta$,

$\mu_A > \mu_B: a_A = g(\text{sen}\,\theta - \mu_A\cos\theta)$,
$a_B = g(\text{sen}\,\theta - \mu_B\cos\theta)$, $F_T = 0$.

23. *a*) 5.0 kg;
b) 6.7 kg.

25. *a*) $\frac{v_0^2}{2dg\cos\theta} - \tan\theta$;
b) $\mu_s \geq \tan\theta$.

27. *a*) 0.22 s;
b) 0.16 m.

29. 0.51.

31. *a*) 82 N;
b) 4.5 m/s^2.

33. $(M + m)g\frac{(\text{sen}\,\theta + \mu\cos\theta)}{(\cos\theta - \mu\,\text{sen}\,\theta)}$.

35. *a*) 1.41 m/s^2;
b) 31.7 N.

37. $\sqrt{rg}$.

39. 30 m.

41. 31 m/s.

43. 0.9 *g*'s.

45. 9.0 rev/min.

47. *a*) 1.9×10^3 m;
b) 5.4×10^3 N;
c) 3.8×10^3 N.

49. 3.0×10^2 N.

51. 0.164.

53. *a*) 7960 N;
b) 588 N;
c) 29.4 m/s.

55. 6.2 m/s.

57. b) $\vec{\mathbf{v}} = (-6.0\text{ m/s})\,\text{sen}\,(3.0\text{ rad/s}\,t)\,\hat{\mathbf{i}} + (6.0\text{ m/s})\cos(3.0\text{ rad/s}\,t)\,\hat{\mathbf{j}}$,
$\vec{\mathbf{a}} = (-18\text{ m/s}^2)\cos(3.0\text{ rad/s}\,t)\,\hat{\mathbf{i}} + (-18\text{ m/s}^2)\,\text{sen}\,(3.0\text{rad/s}\,t)\,\hat{\mathbf{j}}$;
c) $v = 6.0$ m/s, $a = 18$ m/s^2.

59. 17 m/s $\leq v \leq$ 32 m/s.

61. *a*) $a_t = (\pi/2)$ m/s^2, $a_c = 0$;
b) $a_t = (\pi/2)$ m/s^2,
$a_c = (\pi^2/8)$ m/s^2;
c) $a_t = (\pi/2)$ m/s^2,
$a_c = (\pi^2/2)$ m/s^2.

63. *a*) 1.64 m/s;
b) 3.45 m/s.

65. m/b.

67. *a*) $\frac{mg}{b} + \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right)e^{-\frac{b}{m}t}$;
b) $-\frac{mg}{b} + \left(v_0 + \frac{mg}{b}\right)e^{-\frac{b}{m}t}$.

69. *a*) 14 kg/m;
b) 570 N.

71. $\frac{mg}{b}\left[t + \frac{m}{b}\left(e^{-\frac{b}{m}t} - 1\right)\right]$, $ge^{-\frac{b}{m}t}$.

75. 10 m.

77. 0.46.

79. 102 N, 0.725.

81. Sí, 14 m/s.

83. 28.3 m/s, 0.410 rev/s.

85. 3500 N, 1900 N.

87. 35°.

89. 132 m.

91. *a*) 55 s;
b) componente centrípeta de la fuerza normal.

93. *a*) $\theta = \cos^{-1}\frac{g}{4\pi^2 r f^2}$;
b) 73.6°;
c) no.

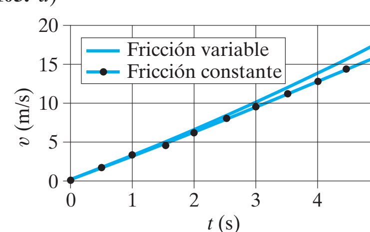
95. 82°.

97. *a*) 16 m/s;
b) 13 m/s.

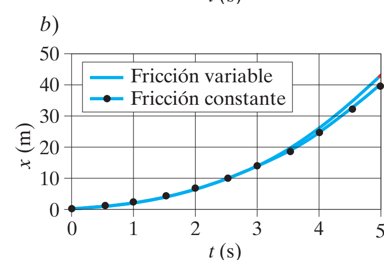
99. *a*) 0.88 m/s^2;
b) 0.98 m/s^2.

101. *a*) 42.2 m/s;
b) 35.6 m, 52.6 m.

103. *a*)



b)



c) rapidez: –12%, posición: –6.6%.

CAPÍTULO 6

1. 1610 N.

3. 1.9 m/s^2.

5. $\frac{2}{9}$.

7. 0.91 *g*'s.

9. 1.4×10^{-8} N a 45°.

11. $Gm^2\left\{\left[\frac{2}{x_0^2} + \frac{3x_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{3/2}}\right]\hat{\mathbf{i}} + \left[\frac{4}{y_0^2} + \frac{3y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{3/2}}\right]\hat{\mathbf{j}}\right\}$.

13. $2^{1/3}$ veces mayor.

15. 3.46×10^8 m desde el centro de la Tierra.

19. b) *g* disminuye conforme *r* aumenta;
c) 9.42 m/s^2 aproximado,
9.43 m/s^2 exacto.

21. 9.78 m/s^2, 0.099° al sur de la dirección radial hacia el centro de la Tierra.

23. 7.52×10^3 m/s.

25. 1.7 m/s^2 hacia arriba.

27. 7.20×10^3 s.

29. *a*) 520 N;
b) 520 N;
c) 690 N;
d) 350 N;
e) 0.

31. *a*) 59 N, hacia la Luna;
b) 110 N, alejándose de la Luna.

33. *a*) Ejecutan movimiento centrípeto;
b) 9.6×10^{29} kg.

35. $\sqrt{\frac{GM}{\ell}}$.

37. 5070 s, o 84.5 min.

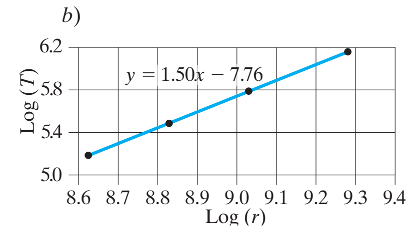
39. 160 y.

41. 2×10^8 y.

43. Europa: 671×10^3 km, Ganímedes: 1070×10^3 km, Calisto. 1880×10^3 km.

45. *a*) 180 AU;
b) 360 AU;
c) 360/1.

47. *a*) $\log T = \frac{3}{2}\log r + \frac{1}{2}\log\left(\frac{4\pi^2}{Gm_J}\right)$,
pendiente $= \frac{3}{2}$,
ordenada origen $y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{4\pi^2}{Gm_J}\right)$;
b)



pendiente = 1.50 como se predijo,
$m_J = 1.97 \times 10^{27}$ kg.

49. *a*) 5.95×10^{-3} m/s^2;
b) no, sólo por aproximadamente 0.06%.

51. 2.64×10^6 m.

53. *a*) 4.38×10^7 m/s^2;
b) 2.8×10^9 N;
c) 9.4×10^3 m/s.

55. $T_{\text{interior}} = 2.0 \times 10^4$s,
$T_{\text{exterior}} = 7.1 \times 10^4$s.

57. 5.4×10^{12} m, todavía está en el sistema solar, más cerca de la órbita de Plutón.

59. 2.3 *g*'s.

61. 7.4×10^{36} kg, $3.7 \times 10^6\ M_{Sol}$.

65. 1.21×10^6 m.

67. $V_{depósito} = 5 \times 10^7\ m^3$,
$r_{depósito} = 200$ m;
$m_{depósito} = 4 \times 10^{10}$ kg.

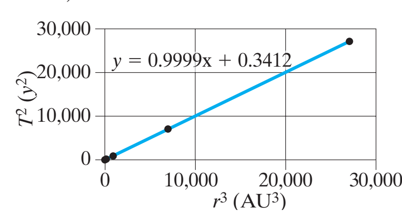
69. 8.99 días.

71. $0.44r$.

73. *a*) 53 N;
b) 3.1×10^{26} kg.

77. $1 \times 10^{-10}\ m^3/kg \cdot s^2$.

79. *a*)



b) 39.44 AU.

CAPÍTULO 7

1. 7.7×10^3 J.

3. 1.47×10^4 J.

5. 6000 J.

7. 4.5×10^5 J.

9. 590 J.

11. *a*) 1700 N;
b) −6600 J;
c) 6600 J;
d) 0.

13. *a*) 1.1×10^7 J;
b) 5.0×10^7 J.

15. −490 J, 0, 490 J.

21. $1.5\hat{\mathbf{i}} - 3.0\hat{\mathbf{j}}$.

23. *a*) 7.1;
b) −250;
c) 2.0×10^1.

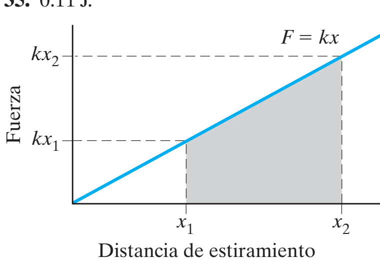
25. $-1.4\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}}$.

27. 52.5°, 48.0°, 115°.

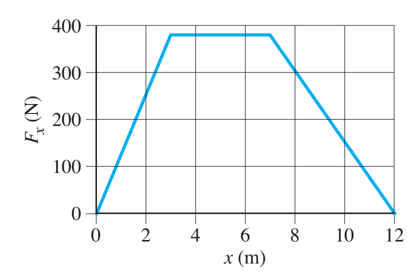
29. 113.4° o 301.4°.

31. *a*) 130°;
b) el signo negativo indica que el ángulo es obtuso.

35. 0.11 J.



37. 3.0×10^3 J.



39. 2800 J.

41. 670 J.

43. $\frac{1}{2}kX^2 + \frac{1}{4}aX^4 + \frac{1}{5}bX^5$.

45. 4.0 J.

47. $\dfrac{\sqrt{3\pi RF}}{2}$.

49. 72 J.

51. *a*) $\sqrt{3}$;
b) $\frac{1}{4}$.

53. -4.5×10^5 J.

55. 3.0×10^2 N.

57. *a*) $\sqrt{\dfrac{Fx}{m}}$;
b) $\sqrt{\dfrac{3Fx}{4m}}$.

59. 8.3×10^4 N/m.

61. 1400 J.

63. *a*) 640 J;
b) −470 J;
c) 0;
d) 4.3 m/s.

65. 27 m/s.

67. *a*) $\frac{1}{2}mv_2^2\left(1 + 2\dfrac{v_1}{v_2}\right)$;
b) $\frac{1}{2}mv_2^2$;
c) $\frac{1}{2}mv_2^2\left(1 + 2\dfrac{v_1}{v_2}\right)$ en relación con la Tierra, $\frac{1}{2}mv_2^2$ en relación con el tren;
d) la bola se mueve diferentes distancias durante el proceso de lanzamiento en los dos marcos de referencia.

69. *a*) 2.04×10^5 J;
b) 21.0 m/s;
c) 2.37 m.

71. 1710 J.

73. *a*) 32.2 J;
b) 554 J;
c) −333 J;
d) 0;
e) 253 J.

75. 12.3 J.

77. $\dfrac{A}{k}e^{-0.10k}$.

79. 86 kJ, 42°.

81. 1.5 N.

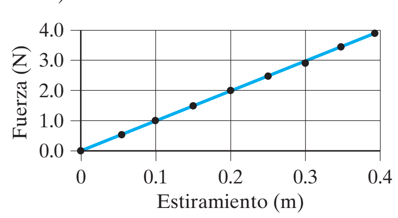
83. 2×10^7 N/m.

85. 6.7°, 10°.

87. *a*) 130 N, sí (≈29 lbs);
b) 470 N, quizá no (≈110 lbs).

89. *a*) 1.5×10^4 J;
b) 18 m/s.

93. *a*) $F = 10.0x$;
b) 10.0 N/m;
c) 2.00 N.



CAPÍTULO 8

1. 0.924 m.

3. 54 cm.

5. *a*) 42.0 J;
b) 11 J;
c) igual que en la parte *a*), no se relaciona con la parte *b*).

7. *a*) Sí, la expresión para el trabajo sólo depende de los puntos finales;
b) $U(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{4}ax^4 - \frac{1}{5}bx^5 + C$.

9. $U(x) = -\dfrac{k}{2x^2} + \dfrac{k}{8\ m^2}$.

11. 49 m/s.

13. 6.5 m/s.

15. *a*) 93 N/m;
b) 22 m/s^2.

19. *a*) 7.47 m/s;
b) 3.01 m.

21. No, $D = 2d$.

23. *a*) $\sqrt{v_0^2 + \dfrac{k}{m}x_0^2}$;
b) $\sqrt{x_0^2 + \dfrac{m}{k}v_0^2}$.

25. *a*) 2.29 m/s;
b) 1.98 m/s;
c) 1.98 m/s;
d) 0.870 N, 0.800 N, 0.800 N;
e) 2.59 m/s, 2.31 m/s, 2.31 m/s.

27. $k = \dfrac{12Mg}{h}$.

29. 3.9×10^7 J.

31. *a*) 25 m/s;
b) 370 m.

33. 12 m/s.

35. 0.020.

37. 0.40.

39. *a*) 25%;
b) 6.3 m/s, 5.4 m/s;
c) principalmente en energía térmica.

41. Para una masa de 75 kg, el cambio en energía es de 740 J.

43. *a*) 0.13 m;
b) 0.77;
c) 0.5 m/s.

45. *a*) $\dfrac{GMm_s}{2r_s}$;
b) $-\dfrac{GMm_s}{r_s}$;
c) $-\frac{1}{2}$.

47. $\frac{1}{4}$.

49. *a*) 6.2×10^5 m/s;
b) 4.2×10^4 m/s,
$v_{\text{esc en la órbita de la Tierra}} = \sqrt{2}v_{\text{órbita de la Tierra}}$.

53. *a*) 1.07×10^4 m/s;
b) 1.16×10^4 m/s;
c) 1.12×10^4 m/s.

55. *a*) $-\sqrt{\dfrac{GM_E}{2r^3}}$;
b) 1.09×10^4 m/s.

57. $\dfrac{GMm}{12r_E}$.

59. 1.12×10^4 m/s.

63. 510 N.

65. 2.9×10^4 W o 38 hp.

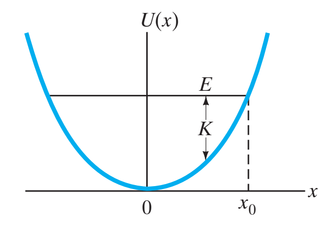
67. 4.2×10^3 N, opuesto a la velocidad.

69. 510 W.

71. 2×10^6 W.

73. *a*) -2.0×10^2 W;
b) 3800 W;
c) -120 W;
d) 1200 W.

75. La masa oscila entre $+x_0$ y $-x_0$, con una rapidez máxima en $x = 0$



77. *a*) $r_{U\text{mín}} = \left(\dfrac{2b}{a}\right)^{\frac{1}{6}}$, $r_{U\text{máx}} = 0$;
b) $r_{U=0} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{6}}$;
c)

$r_{U=0} = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/6}$ $r_{U\text{mín}} = \left(\frac{2b}{a}\right)^{1/6}$

d) $E < 0$: enlaza movimiento oscilatorio ligado entre dos puntos de retorno, $E > 0$: no ligado.
e) $r_{F>0} < \left(\dfrac{2b}{a}\right)^{\frac{1}{6}}$,
$r_{F<0} > \left(\dfrac{2b}{a}\right)^{\frac{1}{6}}$,
$r_{F=0} = \left(\dfrac{2b}{a}\right)^{\frac{1}{6}}$;
f) $F(r) = \dfrac{12b}{r^{13}} - \dfrac{6a}{r^7}$.

79. 2.52×10^4 W.

81. *a*) 42 m/s;
b) 2.6×10^5 W.

83. *a*) 28.2 m/s;
b) 116 m.

85. *a*) $\sqrt{2g\ell}$;
b) $\sqrt{1.2g\ell}$.

89. *a*) 8.9×10^5 J;
b) 5.0×10^1 W, 6.6×10^{-2} hp;
c) 330 W, 0.44 hp.

91. *a*) 29°;
b) 480 N;
c) 690 N.

93. 5800 W o 7.8 hp.

95. *a*) 2.8 m;
b) 1.5 m;
c) 1.5 m.

97. 1.7×10^5 m^3.

99. *a*) 5220 m/s;
b) 3190 m/s.

101. *a*) 1500 m;
b) 170 m/s.

103. 60 m.

105. *a*) 79 m/s;
b) 2.4×10^7 W.

107. *a*) 2.2×10^5 J;
b) 22 m/s;
c) -1.4 m.

109. $x = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

CAPÍTULO 9

1. 5.9×10^7 N.

3. $(9.6t\hat{\mathbf{i}} - 8.9\hat{\mathbf{k}})$ N.

5. 4.35 kg·m/s $(\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{i}})$.

7. 1.40×10^2 kg.

9. 2.0×10^4 kg.

11. 4.9×10^3 m/s.

13. -0.966 m/s.

15. 1:2.

17. $\frac{3}{2}v_0\hat{\mathbf{i}} - v_0\hat{\mathbf{j}}$.

19. $(4.0\hat{\mathbf{i}} + 3.3\hat{\mathbf{j}} - 3.3\hat{\mathbf{k}})$ m/s.

21. *a*) $(116\hat{\mathbf{i}} + 58.0\hat{\mathbf{j}})$ m/s;
b) 5.02×10^5 J.

23. *a*) 2.0 kg·m/s, hacia adelante;
b) 5.8×10^2 N, hacia adelante.

25. 2.1 kg·m/s, hacia la izquierda.

27. 0.11 N.

29. 1.5 kg·m/s.

31. *a*) $\dfrac{2mv}{\Delta t}$;
b) $\dfrac{2mv}{t}$.

33. *a*) 0.98 N + (1.4 N/s)t;
b) 13.3 N;
c) $\left[(0.62\ \text{N/m}^{\frac{1}{2}}) \times \sqrt{2.5\ \text{m} - (0.070\ \text{m/s})t}\right] + (1.4\ \text{N/s})t$, 13.2 N.

35. 1.60 m/s (oeste), 3.20 m/s (este).

37. *a*) 3.7 m/s;
b) 0.67 kg.

39. *a*) 1.00;
b) 0.890;
c) 0.286;
d) 0.0192.

41. *a*) 0.37 m;
b) -1.6 m/s, 6.4 m/s;
c) sí.

43. *a*) $\dfrac{-M}{m + M}$;
b) -0.96.

45. 3.0×10^3 J, 4.5×10^3 J.

47. 0.11 kg·m/s, hacia arriba.

49. b) $e = \sqrt{\dfrac{h'}{h}}$.

51. *a*) 890 m/s;
b) 0.999 de energía cinética inicial perdida.

53. *a*) 7.1×10^{-2} m/s;
b) -5.4 m/s, 4.1 m/s;
c) 0, 0.13 m/s, razonable;
d) 0.17 m/s, 0, no razonable;
e) en este caso, -4.0 m/s, 3.1 m/s, razonable.

55. 1.14×10^{-22} kg·m/s, 147° desde la cantidad de movimiento del electrón, 123° desde la cantidad de movimiento del neutrino.

57. *a*) 30°;
b) $v'_A = v'_B = \dfrac{v}{\sqrt{3}}$;
c) $\frac{2}{3}$.

59. 39.9 u.

63. 6.5×10^{-11} m.

65. $(1.2\,\text{m})\hat{\mathbf{i}} - (1.2\,\text{m})\hat{\mathbf{j}}$.

67. $0\hat{\mathbf{i}} + \dfrac{2r}{\pi}\hat{\mathbf{j}}$.

69. $0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + \frac{3}{4}h\hat{\mathbf{k}}$.

71. $0\hat{\mathbf{i}} + \dfrac{4R}{3\pi}\hat{\mathbf{j}}$.

73. *a*) 4.66×10^{6} m desde el centro de la Tierra.

75. *a*) 5.7 m;
b) 4.2 m;
c) 4.3 m.

77. 0.41 m hacia la posición inicial de la persona de 85 kg.

79. $v\dfrac{m}{m + M}$, hacia arriba, el globo también se detiene.

81. 0.93 hp.

83. -76 m/s.

85. Buena posibilidad de un tiro "rasante".

87. 11 rebotes.

89. 1.4 m.

91. 50%.

93. *a*) $v = \dfrac{M_0 v_0}{M_0 + \dfrac{dM}{dt}t}$;
b) 8.2 m/s, sí.

95. 112 km/h o 70 mi/h.

97. 21 m.

99. *a*) 1.9 m/s;
b) -0.3 m/s, 1.5 m/s;
c) 0.6 cm, 12 cm.

101. $m < \frac{1}{3}M$ o $m < 2.33$ kg.

103. *a*) 8.3×10^{-13} m/s;
b) 3.3×10^{-17};
c) 2.1 J.

105. 29.6 km/s.

107. 0.38 m, 1.5 m.

109. *a*) 1.3×10^{5} N;
b) -83 m/s^2.

111. 12 kg.

113. 0.2 km/s, en la dirección original de m_A.

CAPÍTULO 10

1. *a*) $\dfrac{\pi}{4}$ rad, 0.785 rad;
b) $\dfrac{\pi}{3}$ rad, 1.05 rad;
c) $\dfrac{\pi}{2}$ rad, 1.57 rad;
d) 2π rad, 6.283 rad;
e) $\dfrac{89\pi}{36}$ rad, 7.77 rad.

3. 5.3×10^{3} m.

5. *a*) 260 rad/s;
b) 46 m/s, 1.2×10^{4} m/s^2.

7. *a*) 1.05×10^{-1} rad/s;
b) 1.75×10^{-3} rad/s;
c) 1.45×10^{-1} rad/s;
d) 0.

9. *a*) 464 m/s;
b) 185 m/s;
c) 328 m/s.

11. 36,000 rev/min.

13. *a*) 1.5×10^{-4} rad/s^2;
b) 1.6×10^{-2} m/s^2, 6.2×10^{-4} m/s^2.

15. *a*) $-\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{k}}$;
b) 56.2 rad/s, 38.5° desde el eje $-x$ hacia el eje $+z$;
c) 1540 rad/s^2, $-\hat{\mathbf{j}}$.

17. 28,000 rev.

19. *a*) -0.47 rad/s^2;
b) 190 s.

21. *a*) 0.69 rad/s^2;
b) 9.9 s.

23. *a*) $\omega = \frac{1}{3}5.0t^3 - \frac{1}{2}8.5t^2$;
b) $\theta = \frac{1}{12}5.0t^4 - \frac{1}{6}8.5t^3$;
c) $\omega(2.0\,\text{s}) = -4$ rad/s, $\theta(2.0\,\text{s}) = -5$ rad.

25. 1.4 m·N, en sentido horario.

27. $mg(\ell_2 - \ell_1)$, en sentido horario.

29. 270 N, 1700 N.

31. 1.81 kg·m^2.

33. *a*) 9.0×10^{-2} m·N;
b) 12 s.

35. 56 m·N.

37. *a*) 0.94 kg·m^2;
b) 2.4×10^{-2} m·N.

39. *a*) 78 rad/s^2;
b) 670 N.

41. 2.2×10^{4} m·N.

43. 17.5 m/s.

45. *a*) $14M\ell^2$;
b) $\frac{14}{3}M\ell\alpha$;
c) perpendicular a la barra y el eje.

47. *a*) 1.90×10^{3} kg·m^2;
b) 7.5×10^{3} m·N.

49. *a*) R_0;
b) $\sqrt{\frac{1}{2}R_0^2 + \frac{1}{12}w^2}$;
c) $\sqrt{\frac{1}{2}}R_0$;
d) $\sqrt{\frac{1}{2}(R_1^2 + R_2^2)}$;
e) $\sqrt{\frac{2}{5}}r_0$;
f) $\sqrt{\frac{1}{12}}\ell$;
g) $\sqrt{\frac{1}{3}}\ell$;
h) $\sqrt{\frac{1}{12}(\ell^2 + w^2)}$.

51. $a = \dfrac{(m_B - m_A)}{(m_A + m_B + I/r^2)}g$ vs. $a_{I=0} = \dfrac{(m_B - m_A)}{(m_A + m_B)}g$.

53. *a*) 9.70 rad/s^2;
b) 11.6 m/s^2;
c) 585 m/s^2;
d) 4.27×10^{3} N;
e) 1.14°.

57. *a*) $5.3Mr_0^2$;
b) -15%.

59. *a*) 3.9 cm desde el centro a lo largo de la línea que conecta el peso pequeño y el centro;
b) 0.42 kg·m^2.

61. b) $\frac{1}{12}M\ell^2, \frac{1}{12}Mw^2$.

63. 22,200 J.

65. 14,200 J.

67. 1.4 m/s.

69. 8.22 m/s.

71. 7.0×10^{1} J.

73. *a*) 8.37 m/s, 41.8 rad/s;
b) $\frac{5}{2}$;
c) la rapidez traslacional y la relación de energía son independientes tanto de la masa como del radio, pero la rapidez rotacional depende del radio.

75. $\sqrt{\frac{10}{7}g(R_0 - r_0)}$.

77. *a*) 4.06 m/s;
b) 8.99 J;
c) 0.158.

79. *a*) 4.1×10^{5} J;
b) 18%;
c) 1.3 m/s^2;
d) 6%.

81. *a*) 1.6 m/s;
b) 0.48 m.

83. $\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}$.

85. a) 0.84 m/s;
 b) 96%.

87. 2.0 m·N, desde el brazo que balancea la honda.

89. a) $\frac{\omega_R}{\omega_F} = \frac{N_F}{N_R}$;
 b) 4.0;
 c) 1.5.

91. a) 1.7×10^8 J;
 b) 2.2×10^3 rad/s;
 c) 25 min.

93. $\frac{Mg\sqrt{2Rh - h^2}}{R - h}$.

95. $\frac{\lambda_0 \ell^3}{8}$.

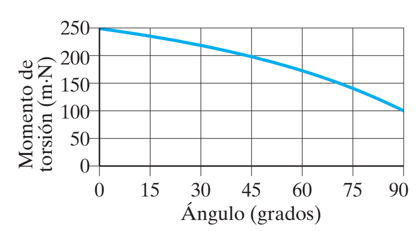
97. 5.0×10^2 m·N.

99. a) 1.6 m;
 b) 1.1 m.

101. a) $\frac{x}{y}g$;
 b) x debe ser tan pequeño como sea posible, y debe ser tan grande como sea posible, y el jinete debe moverse hacia arriba y hacia la parte trasera de la bicicleta;
 c) 3.6 m/s^2.

103. $\sqrt{\frac{3g\ell}{4}}$.

105.



CAPÍTULO 11

1. 3.98 kg·m^2/s.

3. a) L se conserva: si I aumenta, ω debe disminuir;
 b) aumenta por un factor de 1.3.

5. 0.38 rev/s.

7. a) 7.1×10^{33} kg·m^2/s;
 b) 2.7×10^{40} kg·m^2/s.

9. a) $-\frac{I_W}{I_P}\omega_W$;
 b) $-\frac{I_W}{2I_P}\omega_W$;
 c) $\omega_W \frac{I_W}{I_P}$;
 d) 0.

11. a) 0.55 rad/s;
 b) 420 J, 240 J.

13. 0.48 rad/s, 0.80 rad/s.

15. $\frac{1}{2}\omega$.

17. a) 3.7×10^{16} J;
 b) 1.9×10^{20} kg·m^2/s.

19. -0.32 rad/s.

23. 45°.

27. $(25\hat{\mathbf{i}} \pm 14\hat{\mathbf{j}} \mp 19\hat{\mathbf{k}})$ m·N.

29. a) $-7.0\hat{\mathbf{i}} - 11\hat{\mathbf{j}} + 0.5\hat{\mathbf{k}}$;
 b) 170°.

37. $(-55\hat{\mathbf{i}} - 45\hat{\mathbf{j}} + 49\hat{\mathbf{k}})$ kg·m^2/s.

39. a) $\left(\frac{1}{6}M + \frac{7}{9}m\right)\ell^2\omega^2$;
 b) $\left(\frac{1}{3}M + \frac{14}{9}m\right)\ell^2\omega$.

41. a) $\left[(M_A + M_B)R_0 + \frac{I}{R_0}\right]v$;
 b) $\frac{M_B g}{M_A + M_B + \frac{I}{R_0^2}}$.

45. $F_A = \frac{(d + r_A\cos\phi)m_A r_A \omega^2 \operatorname{sen}\phi}{2d}$,
 $F_B = \frac{(d - r_A\cos\phi)m_A r_A \omega^2 \operatorname{sen}\phi}{2d}$.

47. $\frac{m^2v^2}{g(m + M)\left(m + \frac{4}{3}M\right)}$.

49. $\Delta\omega/\omega_0 = -8.4 \times 10^{-13}$.

51. $v_{cm} = \frac{m}{M + m}v$,
 ω (aprox. cm) $= \left(\frac{12m}{4M + 7m}\right)\frac{v}{\ell}$.

53. 8.3×10^{-4} kg·m^2.

55. 8.0 rad/s.

57. 14 rev/min, en sentido antihorario cuando se ve desde arriba.

59. a) 9.80 m/s^2 a lo largo de una línea radial;
 b) 9.78 m/s^2, 0.0988° al sur de una línea radial;
 c) 9.77 m/s^2, a lo largo de una línea radial.

61. Hacia el norte o el sur.

63. $(mr\omega^2 - F_{fr})\hat{\mathbf{i}}$
 $+ (F_{rayo} - 2m\omega v)\hat{\mathbf{j}}$
 $+ (F_N - mg)\hat{\mathbf{k}}$.

65. a) $(-24\hat{\mathbf{i}} + 28\hat{\mathbf{j}} - 14\hat{\mathbf{k}})$ kg·m^2/s;
 b) $(16\hat{\mathbf{j}} - 8.0\hat{\mathbf{k}})$ m·N.

67. b) 0.750.

69. $v[-\operatorname{sen}(\omega t)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\omega t)\hat{\mathbf{j}}]$,
 $\vec{\boldsymbol{\omega}} = \left(\frac{v}{R}\right)\hat{\mathbf{k}}$.

71. a) La rueda girará a la derecha;
 b) $\Delta L/L_0 = 0.19$.

73. a) 820 kg·m^2/s^2;
 b) 820 m·N;
 c) 930 W.

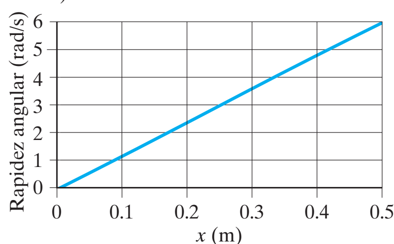
75. $\vec{\mathbf{a}}_{tan} = -R\alpha \operatorname{sen}\theta\hat{\mathbf{i}} + R\alpha\cos\theta\hat{\mathbf{j}}$;
 a) $mR^2\alpha\hat{\mathbf{k}}$;
 b) $mR^2\alpha\hat{\mathbf{k}}$.

77. 0.965.

79. a) Hay momento de torsión neto cero ejercido en torno a cualquier eje a través del centro de masa del patinador;
 b) $f_{eje\ sencillo} = 2.5$ rad/s,
 $f_{eje\ triple} = 6.5$ rad/s.

81. a) 17,000 rev/s;
 b) 4300 rev/s.

83. a) $\omega = \left(12\frac{\text{rad/s}}{\text{m}}\right)x$;
 b)



CAPÍTULO 12

1. 528 N, $(1.20 \times 10^2)°$ sentido horario desde $\vec{\mathbf{F}}_A$.

3. 6.73 kg.

5. a) $F_A = 1.5 \times 10^3$ N abajo,
 $F_B = 2.0 \times 10^3$ N arriba;
 b) $F_A = 1.8 \times 10^3$ N abajo,
 $F_B = 2.6 \times 10^3$ N arriba.

7. a) 230 N;
 b) 2100 N.

9. -2.9×10^3 N, 1.5×10^4 N.

11. 3400 N, 2900 N.

13. 0.28 m.

15. 6300 N, 6100 N.

17. 1600 N.

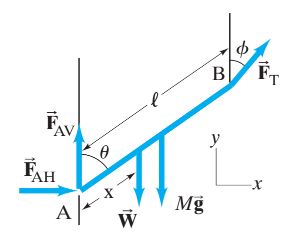
19. 1400 N, 2100 N.

21. a) 410 N;
 b) 410 N, 328 N.

23. 120 N.

25. 550 N.

27. a)



b) $F_{AH} = 51$ N, $F_{AV} = -9$ N;

c) 2.4 m.

29. $F_{superior} = 55.2$ N derecha, 63.7 N fondo, $F_{inferior} = 55.2$ N izquierda, 63.7 N fondo.

31. 5.2 m/s^2.

33. 2.5 m en la parte superior.

35. *a*) 1.8×10^5 N/m^2;

b) 3.5×10^{-6}.

37. *a*) 1.4×10^6 N/m^2;

b) 6.9×10^{-6};

c) 6.6×10^{-5} m.

39. 9.6×10^6 N/m^2.

41. *a*) 1.3×10^2 m·N en sentido horario;

b) la pared;

c) los tres están presentes.

43. *a*) 393 N;

b) más grueso.

45. *a*) 3.7×10^{-5} m^2;

b) 2.7×10^{-3} m.

47. 1.3 cm.

49. *a*) 150 kN, 170 kN 23° arriba de AC;

b) tensión: F_{DE}, F_{BD}, F_{BC}; compresión: F_{CE}, F_{CD}, F_{AC}, F_{AB}.

51. *a*) 5.5×10^{-2} m^2;

b) 8.6×10^{-2} m^2.

53. $F_{AB} = F_{BD} = F_{DE} = 7.5 \times 10^4$ N, compresión;
$F_{BC} = F_{CD} = 7.5 \times 10^4$ N, tensión;
$F_{CE} = F_{AC} = 3.7 \times 10^4$ N, tensión.

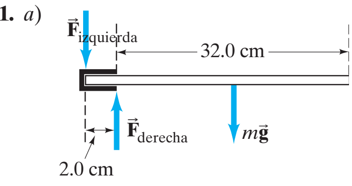
55. $F_{AB} = F_{JG} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} F$, compresión;
$F_{AC} = F_{JH} = F_{CE} = F_{HE} = \frac{3}{2}F$, tensión; $F_{BC} = F_{GH} = F$, tensión;
$F_{BE} = F_{GE} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} F$, tensión;
$F_{BD} = F_{GD} = 2F$, compresión;
$F_{DE} = 0$.

57. 0.249 kg, 0.194 kg, 0.0554 kg.

59. *a*) $Mg\sqrt{\dfrac{h}{2R - h}}$;

b) $Mg\dfrac{\sqrt{h(2R - h)}}{R - h}$.

61. *a*)



b) $mg = 65$ N, $F_{derecha} = 550$ N, $F_{izquierda} = 490$ N;

c) 11 m·N.

63. 29°.

65. 3.8.

67. 5.0×10^5 N, 3.2 m.

69. *a*) 650 N;

b) $F_A = 0$, $F_B = 1300$ N;

c) $F_A = 160$ N, $F_B = 1140$ N;

d) $F_A = 810$ N, $F_B = 940$ N.

71. Puede caminar sólo 0.95 m hacia la derecha del soporte derecho, y 0.83 m hacia la izquierda del soporte izquierdo.

73. $F_{izq.} = 120$ N, $F_{derecha} = 210$ N.

75. $F/A = 3.8 \times 10^5$ N/m^2 < fortaleza de tejido

77. $F_A = 1.7 \times 10^4$ N, $F_B = 7.7 \times 10^3$ N.

79. 2.5 m.

81. *a*) 6500 m;

b) 6400 m.

83. 650 N.

85. 45°.

87. *a*) 2.4w;

b) 2.6w, 31° arriba de la horizontal.

89. *a*) (4.5×10^{-6})%;

b) 9.0×10^{-18} m.

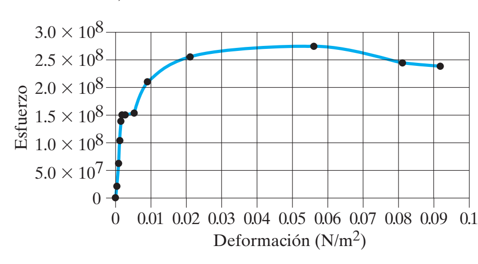
91. 0.83 m.

93. *a*) $mg\left(1 - \dfrac{r_0}{h}\cot\theta\right)$;

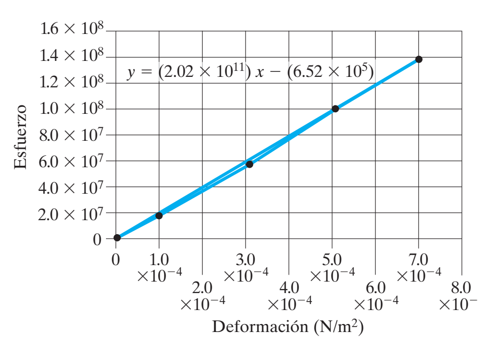
b) $\dfrac{h}{r_0} - \cot\theta$.

95. b) 46°, 51°, 11%.

97. *a*)



b)



CAPÍTULO 13

1. 3×10^{11} kg.

3. 6.7×10^2 kg.

5. 0.8547.

7. *a*) 5510 kg/m^3;

b) 5520 kg/m^3, 0.3%.

9. a) 8.1×10^7 N/m^2;

b) 2×10^5 N/m^2.

11. 13 m.

13. 6990 kg.

15. *a*) 2.8×10^7 N, 1.2×10^5 N/m^2;

b) 1.2×10^5 N/m^2.

17. 683 kg/m^3.

19. 3.36×10^4 N/m^2.

21. *a*) 1.32×10^5 Pa;

b) 9.7×10^4 Pa.

23. c) 0.38h, no.

27. 2990 kg/m^3.

29. 920 kg.

31. Hierro o acero.

33. 1.1×10^{-2} m^3.

35. 10.5%.

37. Arriba.

39. 3600 globos.

43. 2.8 m/s.

45. 1.0×10^1 m/s.

47. 1.8×10^5 N/m^2.

49. 1.2×10^5 N.

51. 9.7×10^4 Pa.

57. b) $\frac{1}{2}$.

59. b) $h = \left[\sqrt{h_0} - t\sqrt{\dfrac{gA_1^2}{2(A_2^2 - A_1^2)}}\right]^2$

c) 92 s.

63. 7.9×10^{-2} Pa·s.

65. 6.9×10^3 Pa.

67. 0.10 m.

69. *a*) Laminar;

b) turbulento.

71. 1.0 m.

73. 0.012 N.

75. 1.5 mm.

79. *a*) 0.75 m;

b) 0.65 m;

c) 1.1 m.

81. 0.047 atm.

83. 0.24 N.

85. 1.0 m.

87. 5.3 km.

89. *a*) −88 Pa/s;

b) 5.0×10^1 s.

91. 5×10^{18} kg.

93. *a*) 8.5 m/s;
b) 0.24 L/s;
c) 0.85 m/s.

95. $d\left(\dfrac{v_0^2}{v_0^2 + 2gy}\right)^{\frac{1}{4}}$.

97. 170 m/s.

99. 1.2×10^4 N.

101. 4.9 s.

CAPÍTULO 14

1. 0.72 m.

3. 1.5 Hz.

5. 350 N/m.

7. 0.13 m/s, 0.12 m/s^2, 1.2%.

9. *a*) 0.16 N/m;
b) 2.8 Hz.

11. $\dfrac{\sqrt{3k/M}}{2\pi}$.

13. *a*) 2.5 m, 3.5 m;
b) 0.25 Hz, 0.50 Hz;
c) 4.0 s, 2.0 s;
d) $x_A = (2.5\text{ m})\ \text{sen}(\frac{1}{2}\pi t)$,
$x_B = (3.5\text{ m})\cos(\pi t)$.

15. *a*) $y(t) =$
$(0.280\text{ m})\ \text{sen}[(34.3\text{ rad/s})t]$;
b) $t_{\text{más largo}} =$
$4.59 \times 10^{-2}\text{ s} + n(0.183\text{ s})$,
$n = 0, 1, 2, \ldots$;
$t_{\text{más corto}} =$
$1.38 \times 10^{-1}\text{ s} + n(0.183\text{ s})$,
$n = 0, 1, 2, \ldots$.

17. *a*) 1.6 s, $\frac{5}{8}$ Hz;
b) 3.3 m, −7.5 m/s;
c) −13 m/s, 29 m/s^2.

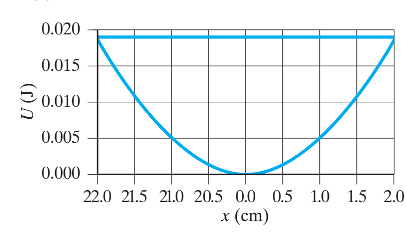
19. 0.75 s.

21. 3.1 s, 6.3 s, 9.4 s.

23. 88 N/m, 17.8 m.

27. *a*) 0.650 m;
b) 1.18 Hz;
c) 13.3 J;
d) 11.2 J, 2.1 J.

29.



a) 0.011 J;
b) 0.0083 J;
c) 0.55 m/s.

31. 10.2 m/s.

33. $A_{\text{alta energía}} = \sqrt{5}A_{\text{baja energía}}$.

35. *a*) 430 N/m;
b) 3.7 kg.

37. 309.8 m/s.

39. *a*) 0.410 s, 2.44 Hz;
b) 0.148 m;
c) 34.6 m/s^2;
d) $x = (0.148\text{ m})\ \text{sen}(4.87\pi t)$;
e) 2.00 J;
f) 1.68 J.

41. 2.2 s.

43. *a*) −5.4°;
b) 8.4°;
c) −13°.

45. $\frac{1}{3}$.

47. $\sqrt{2g\ell(1 - \cos\theta)}$.

49. 0.41 g.

51. *a*) $\theta = \theta_0\cos(\omega t + \phi)$, $\omega = \sqrt{\dfrac{K}{I}}$.

53. 2.9 s.

55. 1.08 s.

57. Disminuye por un factor de 6.

59. *a*) $(-1.21 \times 10^{-3})\%$;
b) 32.3 periodos.

63. *a*) 0°;
b) 0, $\pm A$;
c) $\frac{1}{2}\pi$ o 90°.

65. 1.6 m/s.

67. 1.37×10^8.

69. *a*) 170 s;
b) 1.3×10^{-5} W;
c) 1.0×10^{-3} Hz en cualquier lado.

71. 0.11 m.

73. *a*) 1.22 *f*;
b) 0.71 *f*.

75. *a*) 0.41 s;
b) 9 mm.

77. 0.9922 m, 1.6 mm, 0.164 m.

79. $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}A}{2} \approx \pm 0.866A$.

81. $\rho_{\text{agua}}\, g(\text{área}_{\text{lado inferior}})$.

83. *a*) 130 N/m;
b) 0.096 m.

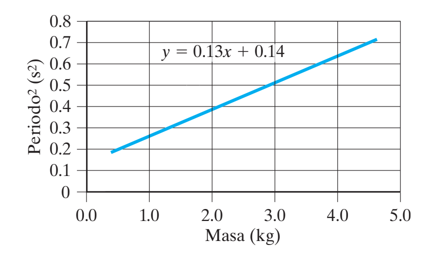
85. *a*) $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}x_0}{2} \approx \pm 0.866x_0$;
b) $x = \pm\frac{1}{2}x_0$.

87. 84.5 min.

89. 1.25 Hz.

91. ~3000 N/m.

93. *a*) $k = \dfrac{4\pi^2}{\text{pendiente}}$, ordenada al origen.
b) pendiente = 0.13 s^2/kg.
y ordenada al origen = 0.14 s^2



c) $k = \dfrac{4\pi^2}{\text{pendiente}} = 310$ N/m,
y ordenada al origen $= \dfrac{4\pi^2 m_0}{k}$,
$m_0 = 1.1$ kg;
d) porción de masa del resorte que efectivamente oscila.

CAPÍTULO 15

1. 2.7 m/s.

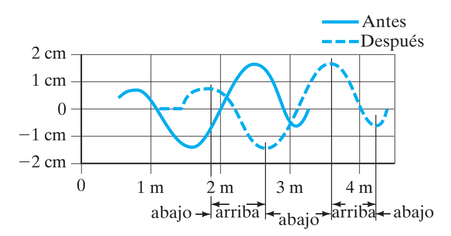
3. *a*) 1400 m/s;
b) 4100 m/s;
c) 5100 m/s.

5. 0.62 m.

7. 4.3 N.

9. *a*) 78 m/s;
b) 8300 N.

11. *a*)



b) −5 cm/s.

13. 18 m.

15. $A_{\text{más energía}}/A_{\text{menos energía}} = \sqrt{3}$.

19. *a*) 0.38 W;
b) 0.25 cm.

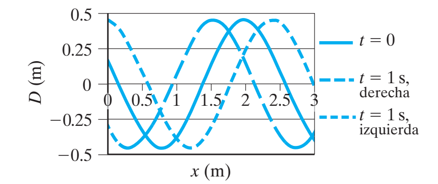
21. b) 420 W.

23. $D = A\ \text{sen}\left[2\pi\left(\dfrac{x}{\lambda} + \dfrac{t}{T}\right) + \phi\right]$.

25. *a*) 41 m/s;
b) 6.4×10^4 m/s^2;
c) 35 m/s, 3.2×10^4 m/s^2.

27. b) $D = (0.45\text{ m})\cos[2.6(x - 2.0t) + 1.2]$;

d) $D = (0.45\text{ m})\cos[2.6(x + 2.0t) + 1.2]$.



29. $D = (0.020\text{ cm}) \times \text{sen}\left[(9.54\text{ m}^{-1})x - (3290\text{ rad/s})t + \frac{3}{2}\pi\right]$

31. Sí, es una solución.

35. Sí, es una solución.

37. *a*) 0.84 m;

b) 0.26 N;

c) 0.59 m.

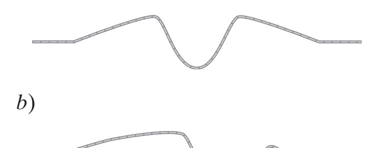
39. a) $T = \frac{2}{v}\sqrt{D^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}$;

b) pendiente $= \frac{1}{v^2}$,

y ordenada al origen $= \frac{4}{v^2}D^2$.

41. *a*)





b)

c) toda energía cinética.

43. 662 Hz.

45. $T_n = \frac{(1.5\text{ s})}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots,$

$f_n = n(0.67\text{ Hz})$, $n = 1, 2, 3, \ldots.$

47. $f_{0.50}/f_{1.00} = \sqrt{2}$.

49. 80 Hz.

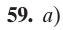
53. 11.

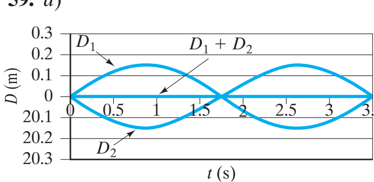
55. *a*) $D_2 = 4.2\,\text{sen}(0.84x + 47t + 2.1)$;

b) $8.4\,\text{sen}(0.84x + 2.1)\cos(47t)$.

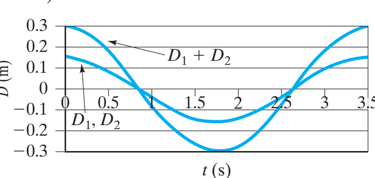
57. 315 Hz.

59. *a*)





b)



61. $n = 4, n = 8$, y $n = 12$.

63. $x = \left[\pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{4}\pi\right]$ m, $n = 1, 2, 3, \ldots.$

65. 5.2 km/s.

67. $(3.0 \times 10^1)°$.

69. 44°.

71. *a*) 0.042 m;

b) 0.55 radianes.

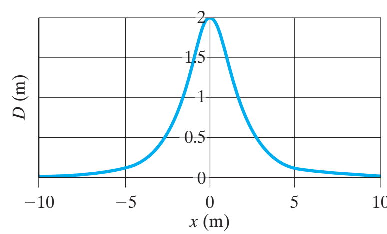
73. La rapidez es mayor en la barra menos densa, por un factor de $\sqrt{2.5} = 1.6$.

75. *a*) 0.05 m;

b) 2.25.

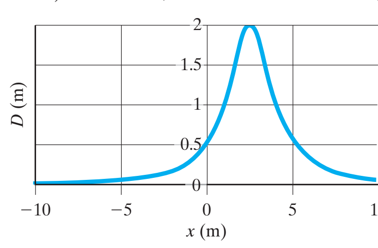
77. 0.69 m.

79. *a*) $t = 0$ s;



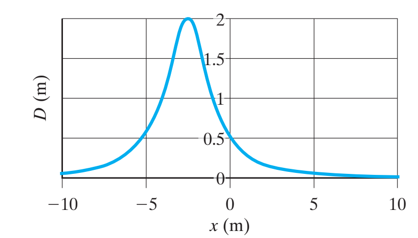
b) $D = \frac{4.0\text{ m}^3}{(x - 2.4t)^2 + 2.0\text{ m}^2}$

c) $t = 1.0$ s, se mueve a la derecha;



d) $D = \frac{4.0\text{ m}^3}{(x + 2.4t)^2 + 2.0\text{ m}^2}$,

$t = 1.0$ s, se mueve a la izquierda.



81. *a*) G: 784 Hz, 1180 Hz, B: 988 Hz, 1480 Hz;

b) 1.59;

c) 1.26;

d) 0.630.

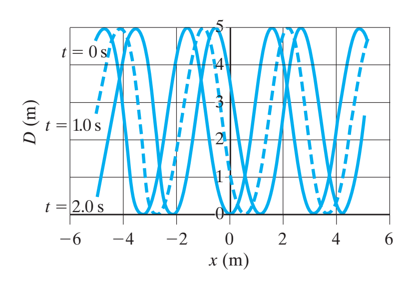
83. 6.3 m desde el extremo donde se originó el primer pulso.

85. $\lambda = \frac{4\ell}{2n - 1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots.$

87. $D(x, t) = (3.5\text{ cm})\cos(0.10\pi x - 1.5\pi t)$, con x en cm y t en s.

89. 12 min.

93. rapidez = 0.50 m/s; dirección de movimiento = $+x$, periodo = 2π s, longitud de onda = π m.



CAPÍTULO 16

1. a) 1.7 cm a 17 m;

b) 2.3×10^{-5} m.

3. *a*) 17 cm a 17 m;

b) 3.4×10^{-5} m.

5. *a*) 0.17 m;

b) 11 m;

c) 0.5%.

7. 41 m.

9. *a*) 8%;

b) 4%.

11. a) 4.4×10^{-5} Pa;

b) 4.4×10^{-3} Pa.

13. *a*) 5.3 m;

b) 675 Hz;

c) 3600 m/s;

d) 1.0×10^{-13} m.

15. 63 dB.

17. *a*) 10^9;

b) 10^{12}.

19. 2.9×10^{-9} J.

21. 124 dB.

23. *a*) 9.4×10^{-6} W;

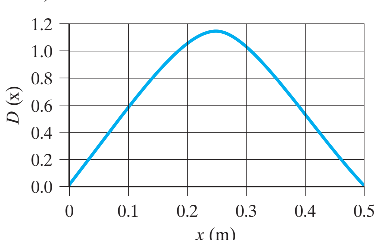
b) 8.0×10^6 personas.

25. *a*) 122 dB, 115 dB;

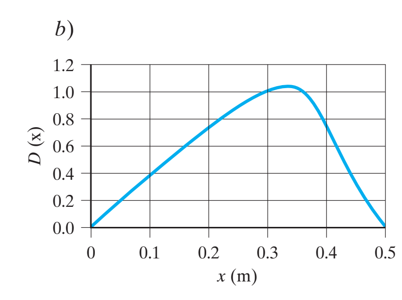
b) no.

27. 7 dB.

29. *a*) La onda de mayor frecuencia, 2.6;
b) 6.8.
31. *a*) 3.2×10^{-5} m;
b) 3.0×10^{1} Pa.
33. 1.24 m.
35. *a*) 69.2 Hz, 207 Hz, 346 Hz, 484 Hz;
b) 138 Hz, 277 Hz, 415 Hz, 553 Hz.
37. 8.6 mm a 8.6 m.
39. *a*) 0.18 m;
b) 1.1 m;
c) 440 Hz, 0.79 m.
41. −3.0%.
43. *a*) 1.31 m;
b) 3, 4, 5, 6.
45. 3.65 cm, 7.09 cm, 10.3 cm, 13.4 cm, 16.3 cm, 19.0 cm.
47. 4.3 m, abierto.
49. 21 Hz, 43 Hz.
51. 3430 Hz, 10,300 Hz, 17,200 Hz, frecuencias relativamente sensibles.
53. ± 0.50 Hz.
55. 346 Hz.
57. 10 batimientos/s.
59. *a*) 221.5 Hz o 218.5 Hz;
b) 1.4% aumento o disminución.
61. *a*) 1470 Hz;
b) 1230 Hz.
63. *a*) 2430 Hz, 2420 Hz, diferencia de 10 Hz;
b) 4310 Hz, 3370 Hz, diferencia de 940 Hz;
c) 34,300 Hz, 4450 Hz, diferencia de 29,900 Hz;
d) $f'_{\text{fuente en movimiento}} \approx f'_{\text{observador en movimieto}} = f\left(1 + \frac{v_{\text{objeto}}}{v_{\text{sonido}}}\right)$.
65. *a*) 1420 Hz, 1170 Hz;
b) 1520 Hz, 1080 Hz;
c) 1330 Hz, 1240 Hz.
67. 3 Hz.
69. *a*) Cada 1.3 s;
b) cada 15 s.
71. 8.9 cm/s.
73. *a*) 93;
b) 0.62°.
77. 19 km.
79. *a*) 57 Hz, 69 Hz, 86 Hz, 110 Hz, 170 Hz.
81. 90 dB.
83. 11 W.
85. 51 dB.
87. 51.
89. *a*) 280 m/s, 57 N;
b) 0.19 m;
c) 880 Hz, 1320 Hz.
91. 3 Hz.
93. 141 Hz, 422 Hz, 703 Hz, 984 Hz.
95. 22 m/s.
97. *a*) No batimientos;
b) 20 Hz;
c) no batimientos.
99. 55.2 kHz.
101. 11.5 m.
103. 2.3 Hz.
105. 17 km/h.
107. *a*) 3400 Hz;
b) 1.50 m;
c) 0.10 m.
109. *a*)



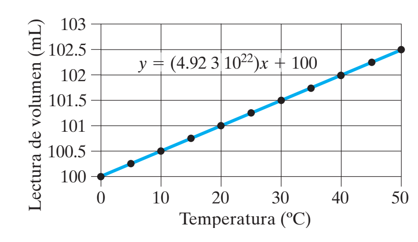
b)



CAPÍTULO 17

1. $N_{\text{Au}} = 0.548 N_{\text{Ag}}$.
3. *a*) 20°C;
b) 3500°F.
5. 102.9°F.
7. 0.08 m.
9. 1.6×10^{-6} m para Super Invar™, 9.6×10^{-5} m para acero, el acero es 60× más.
11. 981 kg/m^3.
13. −69°C.
15. 3.9 cm^3.
17. *a*) 5.0×10^{-5}/C°;
b) Real.
21. *a*) 2.7 cm;
b) 0.3 cm.
23. 55 min.
25. 3.0×10^{7} N/m^2.
27. *a*) 27°C;
b) 5500 N.
29. −459.67°F.
31. 1.35 m^3.
33. 1.25 kg/m^3.
35. 181°C.
37. *a*) 22.8 m^3;
b) 1.88 atm.
39. 1660 atm.
41. 313°C.
43. 3.49 atm.
45. −130°C.
47. 7.0 min.
49. Actual = 0.588 m^3, ideal = 0.598 m^3, comportamiento no ideal.
51. 2.69×10^{25} moléculas/m^3.
53. 4×10^{-17} Pa.
55. 300 moléculas/cm^3.
57. 19 moléculas/respiración.
59. *a*) 71.2 torr;
b) 180°C.
61. 223 K.
63. *a*) Bajo;
b) 0.025%.
65. 20%.
67. 9.9 L, no aconsejable.
69. *a*) 1100 kg;
b) 100 kg.
71. *a*) Bajo;
b) 0.36%.
73. 1.1×10^{44} moléculas.
75. 3.34 nm.
77. 13 h.
79. *a*) 0.66×10^{3} kg/m^3;
b) −3%.
81. ± 0.11 C°.
83. 3.6 m.
85. 3% disminuye.

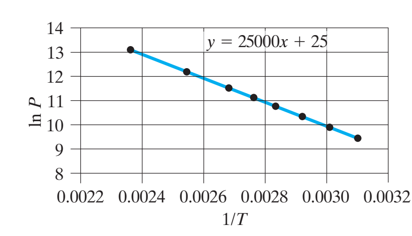
87.



Pendiente de la línea: 4.92×10^{-2} ml/°C, β relativa: 492×10^{-6}/°C, β para el líquido: 501×10^{-6}/°C, cuál líquido: glicerina

CAPÍTULO 18

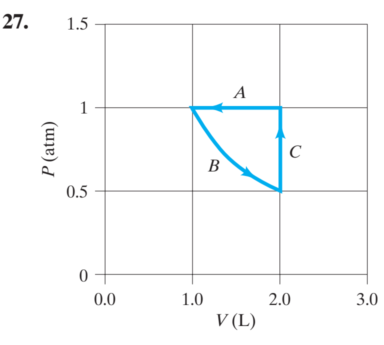
1. *a*) 5.65×10^{-21} J;
b) 3.7×10^{3} J.
3. 1.29.
5. 3.5×10^{-9} m/s.
7. *a*) 4.5;
b) 5.2.
9. $\sqrt{3}$.
13. 5.6%.
15. 1.004.
17. *a*) 461 m/s;
b) 26 viajes redondos/s.
19. Duplica la temperatura.
21. *a*) 642 m/s;
b) 199 K;
c) 595 m/s, 201 K, sí.
23. Vapor.
25. *a*) Vapor;
b) sólido.
27. 3600 Pa.
29. 355 torr o 4.73×10^{4} Pa o 0.466 atm.
31. 92°C.
33. 1.99×10^{5} Pa o 1.97 atm.
35. 70 g.
37. 16.6°C.
39. *a*) Pendiente $= -5.00 \times 10^{3}$ K, ordenada $= 24.9$.



41. *a*) 3.1×10^{6} Pa;
b) 3.2×10^{6} Pa.
43. b) $a = 0.365\ \text{N}\cdot\text{m}^4/\text{mol}^2$,
$b = 4.28 \times 10^{-5}\ \text{m}^3/\text{mol}$.
45. *a*) 1.0×10^{-2} Pa;
b) 3×10^{7} Pa.
47. 2.1×10^{-7} m, blancos estacionarios, radio efectivo de $r_{H_2} + r_{\text{aire}}$.
49. b) $4.7 \times 10^{7}\ \text{s}^{-1}$.
51. $\frac{1}{40}$.
53. 3.5 h, la convección es mucho más importante que la difusión.
55. b) 4×10^{-11} mol/s;
c) 0.6 s.
57. 260 m/s, 3.7×10^{-22} atm.
59. *a*) 290 m/s;
b) 9.5 m/s.
61. 80 cm.
63. Energía cinética $= 6.07 \times 10^{-21}$ J, energía potencial $= 5.21 \times 10^{-25}$ J, la energía potencial se puede despreciar.
65. 0.01%.
67. 1.5×10^{5} K.
69. *a*) 2800 Pa;
b) 650 Pa.
71. 2×10^{13} m.
73. 0.36 kg.
75. b) 4.6×10^{9} Hz,
2×10^{5} veces mayor.
77. 0.21.

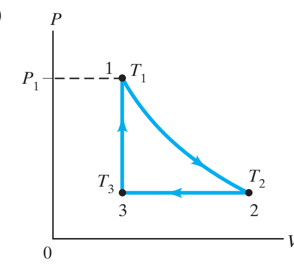
CAPÍTULO 19

1. 10.7°C.
3. *a*) 1.0×10^{7} J;
b) 2.9 kWh;
c) \$0.29 por día, no.
5. 4.2×10^{5} J, 1.0×10^{2} kcal.
7. 6.0×10^{6} J.
9. *a*) 3.3×10^{5} J;
b) 56 min.
11. 6.9 min.
13. 40.0°C.
15. $2.3 \times 10^{3}\ \text{J/kg}\cdot\text{C°}$.
17. 54 C°.
19. 0.31 kg.
21. *a*) 5.1×10^{5} J;
b) 1.5×10^{5} J.
23. 4700 kcal.
25. 360 m/s.
27.



29. *a*) 0;
b) -365 kJ.
31. *a*) 480 J;
b) 0;
c) 480 J en gas.
33. *a*) 4350 J;
b) 4350 J;
c) 0.
35. -4.0×10^{2} K.
37. 236 J.
39. *a*) 3.0×10^{1} J;
b) 68 J;
c) -84 J;
d) -114 J;
e) -15 J.
41. $RT \ln \dfrac{(V_2 - b)}{(V_1 - b)} + a\left(\dfrac{1}{V_2} - \dfrac{1}{V_1}\right)$.
43. 22 C°.
45. 83.7 g/mol, criptón.
47. 48 C°.
49. *a*) 6230 J;
b) 2490 J;
c) 8720 J.
51. 0.457 atm, -39°C.
53. *a*) 404 K, 195 K;
b) -1.59×10^{4} J;
c) 0;
d) -1.59×10^{4} J.

55. *a*)



b) 209 K;

c) $Q_{1\to 2} = 0$,
$\Delta E_{1\to 2} = -2480$ J,
$W_{1\to 2} = 2480$ J;
$Q_{2\to 3} = -3740$ J,
$\Delta E_{2\to 3} = -2240$ J,
$W_{2\to 3} = -1490$ J;
$Q_{3\to 1} = 4720$ J,
$\Delta E_{3\to 1} = 4720$ J,
$W_{3\to 1} = 0$;

d) $Q_{\text{ciclo}} = 990$ J,
$\Delta E_{\text{ciclo}} = 0$,
$W_{\text{ciclo}} = 990$ J.

57. *a*) 5.0×10^1 W;
b) 17 W.

59. 21 h.

61. *a*) Cerámica: 14 W, brillante: 2.0 W;
b) cerámica: 11°C, brillante: 1.6 C°.

63. *a*) 1.73×10^{17} W;
b) 278 K o 5°C.

65. 22%.

67. b) 4.8 C°/s;
c) 0.60 C°/cm.

69. 6.4 Cal.

71. 4×10^{15} J.

73. 1 C°.

75. 3.6 kg.

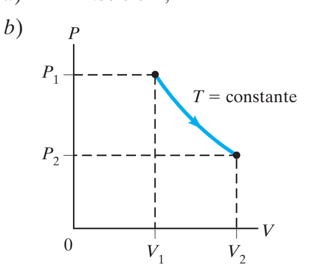
77. 0.14 C°.

79. *a*) 640 W;
b) 4.2 g.

81. 1.1 días.

83. *a*) $r = 2.390$ cm;

b)

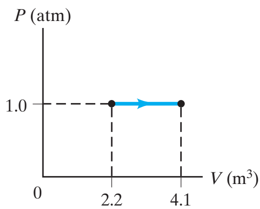


c) $Q = 4.99$ J, $\Delta E = 0$, $W = 4.99$ J.

85. 110°C.

87. 305 J.

89. *a*) 1.9×10^5 J;
b) -1.3×10^5 J;
c)



91. 2200 J.

CAPÍTULO 20

1. 0.25.

3. 0.16.

5. 0.21.

7. 0.55.

9. 0.74.

13. 1.4×10^{13} J/h.

15. 1400 m.

17. 660°C.

19. *a*) 4.1×10^5 Pa, 2.1×10^5 Pa;
b) 34 L, 17 L;
c) 2100 J;
d) −1500 J;
e) 600 J;
f) 0.3.

21. 8.54.

23. 5.4.

25. *a*) −4°C;
b) 29%.

27. *a*) 230 J;
b) 390 J.

29. *a*) 3.1×10^4 J;
b) 2.7 min.

31. 91 L.

33. 0.20 J/K.

35. 5×10^4 J/K.

37. $5.50 \times 10^{-2} \dfrac{\text{J/K}}{\text{s}}$.

39. 9.3 J/K.

41. *a*) $9.3m$ J/K, sí;
b) $-9.3m$ J/K, no.

43. *a*) 1010 J/K;
b) 1020 J/K;
c) -9.0×10^2 J/K.

45. *a*) Adiabático;
b) $\Delta S_{\text{adiabático}} = 0$,
$\Delta S_{\text{isotérmico}} = -nR\ln 2$;
c) $\Delta S_{\text{ambiente adiabático}} = 0$,
$\Delta S_{\text{ambiente isotérmico}} = nR\ln 2$.

47. *a*) Todos los procesos son reversibles.

49. $\dfrac{T}{nC_V}$.

53. 2.1×10^5 J.

55. *a*) $\frac{5}{16}$;
b) $\frac{1}{64}$.

57. *a*) 2.47×10^{-23} J/K;
b) -9.2×10^{-22} J/K;
c) estos son muchos órdenes de magnitud menor, debido al número relativamente pequeño de microestados para las monedas.

59. *a*) 1.79×10^6 kWh;
b) 9.6×10^4 kW.

61. 12 MW.

63. *a*) 0.41 mol;
b) 396 K;
c) 810 J;
d) −700 J;
e) 810 J;
f) 0.13;
g) 0.24.

65. *a*) 110 kg/s;
b) 9.3×10^7 gal/h.

67. *a*) 18 km^3/días;
b) 120 km^2.

69. *a*) 0.19;
b) 0.23.

71. *a*) 5.0 C°;
b) 72.8 J/kg·K.

73. 1700 J/K.

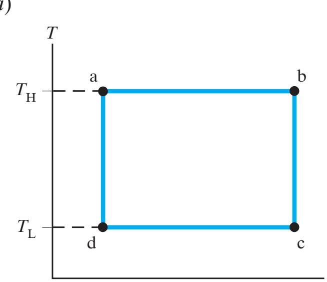
75. 57 W o 0.076 hp.

77. $e_{\text{Sterling}} =$

$$\left(\frac{T_H - T_L}{T_H}\right)\left[\frac{\ln\left(\dfrac{V_b}{V_a}\right)}{\ln\left(\dfrac{V_b}{V_a}\right) + \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{T_H - T_L}{T_H}\right)}\right],$$

$e_{\text{Sterling}} < e_{\text{Carnot}}$.

79. *a*)



b) W_{neto}.

81. 16 kg.

83. 3.61×10^{-2} J/K.

Índice

Nota: La abreviatura *defn* significa que la página citada da la definición del término; *np* significa que la referencia está en una nota a pie de página; *pr* significa que se encuentra en un problema o pregunta; *ff* significa "también las páginas siguientes".

Créditos de fotografía

Foto de portada (arriba/izq) Daly & Newton/Getty Images, Mahaux Photography/Getty Images, Inc.–Image Bank, Microondas en el cielo: NASA/WMAP Science Team, Giuseppe Molesini, Istituto Nazionale di Ottica Florence
Unidad 1 (portada): © Reuters/Corbis; 1-1a: Philip H. Coblentz/World Travel Images, Inc.; 1-1b: Antranig M. Ouzoonian, P. E./Weidlinger Associates, Inc.; 1-2: Mary Teresa Giancoli; 1-3 Douglas C. Giancoli; 1-4: Paul Silverman/Fundamental Photographs, NYC; 1-5a: Oliver Meckes/Ottawa/Photo Researchers, Inc.; 1-5b: Douglas C. Giancoli; 1-6: Douglas C. Giancoli; 1-7a: Douglas C. Giancoli; 1-8: Larry Voight/Photo Researchers, Inc.; 1-13: David Parker/Science Photo Library/Photo Researchers, Inc.; 1-14: The Image Works
Unidad 2 (portada): George D. Lepp/Corbis/Bettmann; 2-8: John E. Gilmore, III; 2-21: SuperStock, Inc.; 2-26: © Harold & Esther Edgerton Foundation, 2007, cortesía de Palm Press, Inc.
Unidad 3 (portada): Lucas Kane Photography, LLC; 3-19: © Berenice Abbott/Commerce Graphics Ltd., Inc.; 3-21: Richard Megna/Fundamental Photographs, NYC; 3-30a: Don Farrall/Getty Images, Inc.-PhotoDisc
Unidad 4 (portada): GoodShoot/SuperStock, Inc.; 4-01: Daly & Newton/Getty Images, Inc.; 4-05: Gerard Vandystadt/Agence Vandystadt/Photo Researchers, Inc.; 4-7: David Jones/Photo Researchers, Inc.; 4-10: NASA/John F. Kennedy Space Center; 4-29: Lars Ternbald/Amana Japan; 4-32: Kathleen Schiaparelli; 4-34: Brian Bahr/Allsport Concepts/Getty Images; 4-37: Brian Bahr/Allsport Concepts/Getty Images
Unidad 5 (portada): Izq.: Agence Zoom/Getty Images; 5-16c: Jay Brousseau; 5-22: © Guido Alberto Rossi/TIPS Images; 5-42: C. Grzimek/ Tierbild Okapia/Photo Researchers, Inc.; 5-45: Photofest; 5-49: Daniel L. Feicht/Cedar Point Photo
Unidad 6 (portada): Earth Imaging/Getty Images, Inc.–Stone Allstock; 6-8: Douglas C. Giancoli; 6-10: NASA/Johnson Space Center; 6-14: NASA Headquarters; 6-20: NASA Headquarters
Unidad 7 (portada): Ben Margot/AP Wide World Photos; 7-22: U. S. Departamento de Defensa, foto de Airman Kristopher Wilson, U.S. Navy; 7-27: Columbia Pictures/Phototest
Unidad 8 (portada) y 8-10: © Harold & Esther Edgerton Foundation, 2007, cortesía de Palm Press, Inc.; 8-11: © 2004 David Madison Sports Images, Inc.; 8-15: © naglestock.com/Alamy; 8-21: Nick Rowe/Getty Images, Inc.–PhotoDisc; 8-24: M.C. Escher's "Waterfall". Copyright © 2005 The M.C. Escher Company–Holland; 8-48: R. Maisonneuve/Publiphoto/Photo Researchers, Inc.; 8-49: Corbis/Bettmann
Unidad 9 (portada): Richard Megna, Fundamental Photographs, NYC; 9-8: Loren M Winters/Visuals Unlimited; 9-11: Comstock Images/Comstock Premium/Alamy Images Royalty Free; 9-14: D. J. Jonson; 9-17: Science Photo Library/Photo Researchers, Inc.; 9-20: Lawrence Berkeley Laboratory/Science Photo Library/Photo Researchers, Inc.; 9-22: Berenice Abbott/Photo Researchers, Inc.
Unidad 10 (portada): David R. Frazier/The Image Works; 10-8a: Douglas C. Giancoli; 10-12a: Photoquest, Inc.; 10-12b: Richard Megna/Fundamental Photographs, NYC; 10-31b: Richard Megna/Fundamental Photographs, NYC; 10-43: Regis Bossu/Corbis/Sygma; 10-45: Karl Weatherly/Getty Images, Inc.–Photodisc
Unidad 11 (portada): Kai Pfaffenbach/Reuters Limited; 11-28: Stephen Dunn/Getty Images, Inc.; 11-48a: Michael Kevin Daly/Corbis/The Stock Market
Unidad 12 (portada): Jerry Driendl/Getty Images, Inc.–Taxi; 12-19: Mary Teresa Giancoli; 12-32: Douglas C. Giancoli; 12-35: Douglas C. Giancoli; 12-37: Giovanni Paolo Panini (1691–1765), *Interior del Panteón Roma* c. 1734. Óleo sobre tela, cuadro de Samuel H. Kress Collection, Fotografía © 2001, National Gallery of Art, Washington, 1939.1.24.(135)/PA. Foto de Richard Carafelli
Unidad 13 (portada): Marevision/AGE Fotostock America, Inc.; 13-12: Corbis/Bettmann; 13-21: David C. Hazen, Princeton University y Embry-Riddle Aeronautical University; 13-36: Alan Blank/Bruce Coleman Inc.; 13-45: Douglas C. Giancoli; 13-53: National Oceanic and Atmospheric Administration NOAA
Unidad 14 (portada): Ford Motor Company; 14-4: Ford Motor Company; 14-9: Judith Collins/Alamy Images; 14-13: Paul Silverman/Fundamental Photographs, NYC; 14-15: Douglas C. Giancoli; 14-24: Martin Bough/Fundamental Photographs, NYC; 14-25a: AP Wide World Photos; 14-25b: Paul X. Scott/Corbis/Sygma; 14-27: Gallant, Andre/Getty Images, Inc.–Image Bank
Unidad 15 (portada): Douglas C. Giancoli; 15-23: Douglas C. Giancoli; 15-31: Richard Megna/Fundamental Photographs, NYC; 15-39: Richard Megna/Fundamental Photographs, NYC
Unidad 16 (portada): Fra Angelico (1387–1455), *Música de violín hecha por los ángeles*, detalle. Museo di San Marco, Florencia, Italia. Scala/Art Resource, N.Y.; 16-5: Yoav Levy/Phototake NYC; 16-9a: Ben Clark/Getty Images–Photonica Amana America, Inc.; 16-10: © Richard Hutchings/Corbis; 16-23: Bill Bachmann/PhotoEdit, Inc.; 16-24b: Settles, Gary S./Photo Researchers, Inc.; 16-27: GE Medical Systems/Photo Researchers, Inc.
Unidad 17 (portada): Der.: Richard Price/Photographer's Choice/Getty Images; 17-3: Bob Daemmrich/Stock Boston; 17-4: Franca Principe/Istituto e Museo di Storia della Scienza, Florencia, Italia; 17-6: Leonard Lessin/Peter Arnold, Inc.; 17-11: Mark y Audra Gibson Photography; 17-16: Getty Images–Stockbyte

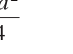
Unidad 18: 18-8: Paul Silverman/Fundamental Photographs, NYC; 18-14: Mary Teresa Giancoli; 18-16: Kennan Harvey/Getty Images, Inc.–Stone Allstock
Unidad 19: 19-26: Science Photo Library/Photo Researchers, Inc.; 19-28: Phil Degginger/Color-Pic, Inc.; 19-36: Taxi/Getty Images, Inc.
Unidad 20: 20-1: Leonard Lessin/Peter Arnold, Inc.; 20-15b: Warren Gretz/NREL/US DOE/Photo Researchers, Inc.; 20-19: Geoff Tompkinson/Science Photo Library/Photo Researchers, Inc.; 20-23: Michael Collier

Tabla de contenido: p. iii: izq. © Reuters/Corbis, der. Agence Zoom/Getty Images; p. iv: izq. Ben Margot/AP Wide World Photos, der. Kai Pfaffenbach/Reuters Limited; p. v: Jerry Driendl/Getty Images, Inc.–Taxi; p. vi: izq. Richard Price/Photographer's Choice/Getty Images, der. Frank Herholdt/Stone/Getty Images; p. viii: Richard Megna/Fundamental Photographs; p. ix: izq. Mary Teresa Giancoli, der. Giuseppe Molesini, Istituto Nazionale di Ottica Florence; p. xi: izq. Lester Lefkowitz/Taxi/Getty Images, der. The Microwave Sky: NASA/WMAP Science Team; p. xvii: Douglas C. Giancoli

Fórmulas geométricas útiles-Áreas, volúmenes

Circunferencia de círculo $C = \pi d = 2\pi r$

Área de círculo $A = \pi r^2 = \dfrac{\pi d^2}{4}$





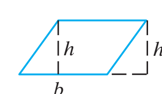
Área de rectángulo $A = \ell w$



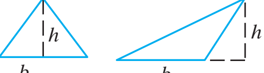




Área de paralelogramo $A = bh$



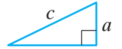
Área de triángulo $A = \frac{1}{2}hb$

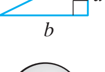


Triángulo recto (Pitágoras) $c^2 = a^2 + b^2$



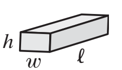






Esfera: área superficial $A = 4\pi r^2$
volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

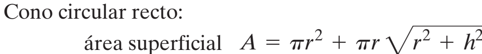
Sólido rectangular:
volumen $V = \ell w h$

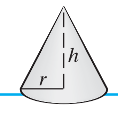


Cilindro (recto):
área superficial $A = 2\pi r\ell + 2\pi r^2$
volumen $V = \pi r^2 \ell$



Cono circular recto:
área superficial $A = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$
volumen $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$





Exponentes

$(a^n)(a^m) = a^{n+m}$ [Ejemplo: $(a^3)(a^2) = a^5$]

$(a^n)(b^n) = (ab)^n$ [Ejemplo: $(a^3)(b^3) = (ab)^3$]

$(a^n)^m = a^{nm}$ [Ejemplo: $(a^3)^2 = a^6$; Ejemplo: $(a^{\frac{1}{4}})^4 = a$]

$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ $\quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ $\quad a^0 = 1$

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ $\quad a^{\frac{1}{4}} = \sqrt{\sqrt{a}}$

$(a^n)(a^{-m}) = \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ [Ex.: $(a^5)(a^{-2}) = a^3$]

$\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Logaritmos [Apéndice A-7; tabala A-1]

Si $y = 10^x$, entonces $x = \log_{10} y = \log y$.

Si $y = e^x$, entonces $x = \log_e y = \ln y$.

$\log(ab) = \log a + \log b$

$\log\left(\dfrac{a}{b}\right) = \log a - \log b$

$\log a^n = n \log a$

Algunas derivadas e integrales†

$\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ $\qquad \displaystyle\int \operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax$

$\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} ax = a\cos ax$ $\qquad \displaystyle\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax$

$\dfrac{d}{dx}\cos ax = -a\operatorname{sen} ax$ $\qquad \displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$

$\displaystyle\int x^m\,dx = \frac{1}{m+1}x^{m+1}$ $\qquad \displaystyle\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}$

† Vea más en el Apéndice B.

Fórmula cuadrática

Ecuación con incógnita x, en la forma

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

tiene soluciones

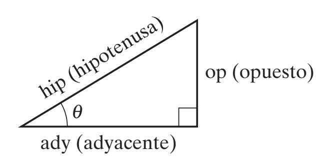
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Expansión binomial

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2\cdot 1}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}x^3 + \cdots \quad [\text{para } x^2 < 1]$$

$$\approx 1 \pm nx \quad [\text{para } x \ll 1]$$

Fórmulas trigonométrica [Apéndice A–9]



$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\text{op}}{\text{hip}}$

$\cos\theta = \dfrac{\text{ady}}{\text{hip}}$

$\tan\theta = \dfrac{\text{op}}{\text{ady}}$

$\text{ady}^2 + \text{op}^2 = \text{hip}^2$ (Teorema de Pitágoras)

$\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$

$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

$\cos 2\theta = (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = (1 - 2\operatorname{sen}^2\theta) = (2\cos^2\theta - 1)$

$\operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$ $\qquad \cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

$\operatorname{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$

$\cos(90° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$

$\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta = \sqrt{(1 - \cos\theta)/2}$ $\qquad \cos\frac{1}{2}\theta = \sqrt{(1 + \cos\theta)/2}$

$\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ [para pequeño $\theta \lesssim 0.2$ rad]

$\cos\theta \approx 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$ [para pequeño $\theta \lesssim 0.2$ rad]

$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A\cos B \pm \cos A\operatorname{sen} B$

$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B$

Para cualquier triángulo

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ (ley de cosenos)

$\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \dfrac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$ (ley de senos)

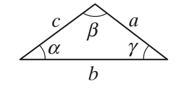


Tabla periódica de los elementos[§]

Símbolo — **Cl** 17 — Número atómico
Masa atómica[§] — 35.453
$3p^5$ — Configuración electrónica (sólo capas exteriores)

Grupo I	Grupo II	Elementos de transición										Grupo III	Grupo IV	Grupo V	Grupo VI	Grupo VII	Grupo VIII
H 1 1.00794 $1s^1$																	**He** 2 4.002602 $1s^2$
Li 3 6.941 $2s^1$	**Be** 4 9.012182 $2s^2$											**B** 5 10.811 $2p^1$	**C** 6 12.0107 $2p^2$	**N** 7 14.0067 $2p^3$	**O** 8 15.9994 $2p^4$	**F** 9 18.9984032 $2p^5$	**Ne** 10 20.1797 $2p^6$
Na 11 22.98976928 $3s^1$	**Mg** 12 24.3050 $3s^2$											**Al** 13 26.9815386 $3p^1$	**Si** 14 28.0855 $3p^2$	**P** 15 30.973762 $3p^3$	**S** 16 32.065 $3p^4$	**Cl** 17 35.453 $3p^5$	**Ar** 18 39.948 $3p^6$
K 19 39.0983 $4s^1$	**Ca** 20 40.078 $4s^2$	**Sc** 21 44.955912 $3d^14s^2$	**Ti** 22 47.867 $3d^24s^2$	**V** 23 50.9415 $3d^34s^2$	**Cr** 24 51.9961 $3d^54s^1$	**Mn** 25 54.938045 $3d^54s^2$	**Fe** 26 55.845 $3d^64s^2$	**Co** 27 58.933195 $3d^74s^2$	**Ni** 28 58.6934 $3d^84s^2$	**Cu** 29 63.546 $3d^{10}4s^1$	**Zn** 30 65.409 $3d^{10}4s^2$	**Ga** 31 69.723 $4p^1$	**Ge** 32 72.64 $4p^2$	**As** 33 74.92160 $4p^3$	**Se** 34 78.96 $4p^4$	**Br** 35 79.904 $4p^5$	**Kr** 36 83.798 $4p^6$
Rb 37 85.4678 $5s^1$	**Sr** 38 87.62 $5s^2$	**Y** 39 88.90585 $4d^15s^2$	**Zr** 40 91.224 $4d^25s^2$	**Nb** 41 92.90638 $4d^45s^1$	**Mo** 42 95.94 $4d^55s^1$	**Tc** 43 (98) $4d^55s^2$	**Ru** 44 101.07 $4d^75s^1$	**Rh** 45 102.90550 $4d^85s^1$	**Pd** 46 106.42 $4d^{10}5s^0$	**Ag** 47 107.8682 $4d^{10}5s^1$	**Cd** 48 112.411 $4d^{10}5s^2$	**In** 49 114.818 $5p^1$	**Sn** 50 118.710 $5p^2$	**Sb** 51 121.760 $5p^3$	**Te** 52 127.60 $5p^4$	**I** 53 126.90447 $5p^5$	**Xe** 54 131.293 $5p^6$
Cs 55 132.9054519 $6s^1$	**Ba** 56 137.327 $6s^2$	57–71†	**Hf** 72 178.49 $5d^26s^2$	**Ta** 73 180.94788 $5d^36s^2$	**W** 74 183.84 $5d^46s^2$	**Re** 75 186.207 $5d^56s^2$	**Os** 76 190.23 $5d^66s^2$	**Ir** 77 192.217 $5d^76s^2$	**Pt** 78 195.084 $5d^96s^1$	**Au** 79 196.966569 $5d^{10}6s^1$	**Hg** 80 200.59 $5d^{10}6s^2$	**Tl** 81 204.3833 $6p^1$	**Pb** 82 207.2 $6p^2$	**Bi** 83 208.98040 $6p^3$	**Po** 84 (209) $6p^4$	**At** 85 (210) $6p^5$	**Rn** 86 (222) $6p^6$
Fr 87 (223) $7s^1$	**Ra** 88 (226) $7s^2$	89–103‡	**Rf** 104 (267) $6d^27s^2$	**Db** 105 (268) $6d^37s^2$	**Sg** 106 (271) $6d^47s^2$	**Bh** 107 (272) $6d^57s^2$	**Hs** 108 (277) $6d^67s^2$	**Mt** 109 (276) $6d^77s^2$	**Ds** 110 (281) $6d^97s^1$	**Rg** 111 (280) $6d^{10}7s^1$	112 (285) $6d^{10}7s^2$						

†Serie lantánidos

La 57 138.90547 $5d^16s^2$	**Ce** 58 140.116 $4f^15d^16s^2$	**Pr** 59 140.90765 $4f^35d^06s^2$	**Nd** 60 144.242 $4f^45d^06s^2$	**Pm** 61 (145) $4f^55d^06s^2$	**Sm** 62 150.36 $4f^65d^06s^2$	**Eu** 63 151.964 $4f^75d^06s^2$	**Gd** 64 157.25 $4f^75d^16s^2$	**Tb** 65 158.92535 $4f^95d^06s^2$	**Dy** 66 162.500 $4f^{10}5d^06s^2$	**Ho** 67 164.93032 $4f^{11}5d^06s^2$	**Er** 68 167.259 $4f^{12}5d^06s^2$	**Tm** 69 168.93421 $4f^{13}5d^06s^2$	**Yb** 70 173.04 $4f^{14}5d^06s^2$	**Lu** 71 174.967 $4f^{14}5d^16s^2$

‡Serie actínidos

Ac 89 (227) $6d^17s^2$	**Th** 90 232.03806 $6d^27s^2$	**Pa** 91 231.03588 $5f^26d^17s^2$	**U** 92 238.0289 $5f^36d^17s^2$	**Np** 93 (237) $5f^46d^17s^2$	**Pu** 94 (244) $5f^66d^07s^2$	**Am** 95 (243) $5f^76d^07s^2$	**Cm** 96 (247) $5f^76d^17s^2$	**Bk** 97 (247) $5f^96d^07s^2$	**Cf** 98 (251) $5f^{10}6d^07s^2$	**Es** 99 (252) $5f^{11}6d^07s^2$	**Fm** 100 (257) $5f^{12}6d^07s^2$	**Md** 101 (258) $5f^{13}6d^07s^2$	**No** 102 (259) $5f^{14}6d^07s^2$	**Lr** 103 (262) $5f^{14}6d^17s^2$

§ Valores de masa atómica promediados sobre isótopos en los porcentajes en que ocurren en la superficie de la Tierra. Para muchos elementos inestables, la masa del isótopo conocido de más larga vida se da entre paréntesis. Revisiones 2006. (Véase también el Apéndice F). Se ha reportado evidencia preliminar (no confirmada) para los elementos 113, 114, 115, 116 y 118.